

# COMPITO B

Algebra e Geometria, Fisica (Fioresi)

5 Novembre, 2018

**NOME:**

**COGNOME:**

**NUMERO DI MATRICOLA :**

(Si indichi la data di nascita se non si è in possesso del numero di matricola).

Ci sono 3 esercizi per un totale di 150 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

## REGOLE

- $a$  e  $b$  sono le ultime due cifre **NON NULLE** e **DISTINTE** del **proprio numero di matricola**. Esempio: se il numero di matricola è 624040066 allora  $a = 4$ ,  $b = 6$ . Nel SOLO caso in cui non si disponga del proprio numero di matricola,  $a$  = ultima cifra del mese di nascita  $b$  = ultima cifra dell'anno di nascita. **NON** è permesso risolvere l'esercizio lasciando i parametri  $a$  e  $b$  indicati.
- **NON** è ammesso in nessun caso l'uso delle formule per la geometria tridimensionale eccetto quelle viste in classe e presenti nel Lang, né l'uso del DETERMINANTE e del calcolo differenziale (derivate e integrali).
- Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

1	
2	
3	
Totale	

**Esercizio 1** (50 punti)

Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^4$ ,  $f(x, y, z) = (ix + ay + iz, 2x + 2z, kx + iay + z, ibx + aby + ibz)$ .

- a) Si calcoli una base per il nucleo e una base per l'immagine al variare di  $k$ .
- b) Si dica se esistono valori di  $k$  per i quali l'applicazione data è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
- c) Si determinino (se esistono) i valori di  $k$  per i quali  $(1, k, 1, -1)$  appartiene all'immagine di  $f$ .

**Esercizio 2** (50 punti)

a) Sia  $V$  lo spazio vettoriale reale delle funzioni  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Si consideri il sottoinsieme  $W$  delle funzioni  $f$  con  $f(a) = f(b)$ . E' un sottospazio vettoriale? Si motivi accuratamente la risposta.

b) Dati in  $\mathbf{R}^3$  il piano  $\pi$  di equazione cartesiana  $\pi : -x - 2z + 3a = 0$  e la retta  $r$  di equazioni cartesiane  $r : -x + 2y - 2z + a = 0, 2y - a = 0$

1) Trovare equazioni parametriche per  $r$ .

2) Stabilire la posizione relativa di  $\pi, r$ .

3) Trovare la distanza tra  $\pi$  e  $r$ .

**Esercizio 3** (50 punti)

a) Si risponda VERO o FALSO motivando accuratamente la risposta (se si intende usare un risultato e' necessario enunciarlo chiaramente).

I) Se  $A$  e  $B$  sono due matrici rispettivamente  $3 \times 2$  e  $2 \times 3$  allora il rango di  $AB$  puo' essere uguale a tre (per una scelta opportuna di  $A$  e  $B$ ).

II) Siano  $B$  e  $B'$  due basi fissate di uno stesso spazio vettoriale  $V$ . Se  $u$  e  $v$  hanno le stesse coordinate rispetto a  $B$  e  $B'$  allora  $u = v$ .

III) Se  $v_1, \dots, v_n$  e' un insieme di generatori per  $V$  e  $w_1, \dots, w_m$  e' un insieme di vettori linearmente indipendenti allora  $m \geq n$ .

b) Si enunci con chiarezza il teorema di struttura dei sistemi lineari.

CREDITO EXTRA (15 punti). Sia  $g : V \longrightarrow V$  una applicazione lineare tale che  $g^4 = 0$ . Allora  $\text{id} + g$  e' un isomorfismo.