LT FISICA (Fioresi)

13 Febbraio, 2020

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Esercizio 1 (60 punti)

Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ il punto P, la retta r e il piano π_k definiti da:

$$P = (1, 9, -3) \qquad r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 6z = -9 \end{cases} \qquad \pi_k : kx + 3y - z = 2k$$

- Calcolare la distanza di P da r.
- Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che $P \in \pi_k$?
- Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che r e π_k sono paralleli? Si calcoli in questo ultimo caso la distanza tra r e π_k.
- Si dica se r e' un sottospazio vettoriale e per quali valori di k, π_k e' un sottospazio vettoriale. Nel caso di risposta affermativa (per uno o per entrambi) si determini una base.

Esercizio 2 (60 punti)

Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_4$; $f(e_2) = e_1+4e_2+3e_3+2e_4$; $f(e_3) = -2e_2-e_3$; $f(e_4) = 2e_1+6e_2+3e_3+(k+3)e_4$.

a) Si dica, motivando accuratamente la risposta, per quali k l'applicazione f è iniettiva, suriettiva o biettiva.
b) Scelto un valore di k per cui f non e' iniettiva, si trovino basi per la sua immagine e per il suo nucleo. Successivamente, si completi ciascuna delle due basi a una base di $\mathbb{R}^4$.
c) Scelto k come al punto precedente, si dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 2, \alpha, 2)$ appartiene all'immagine di f.

Esercizio 3 (60 punti)

Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Scrivere la forma bilineare g e la forma quadratica q associate a B;
2. Dire se il prodotto scalare associato e' degenere e definito positivo e calcolarne la segnatura.

   [Aiuto: un autovalore della matrice B e' uguale a 3].
3. Determinare una base ortogonale rispetto al prodotto scalare del punto (2). La base scelta e' anche base ortonormale rispetto al prodotto scalare (2)? Si motivi accuratamente ogni risposta.
4. Determinare il sottospazio ortogonale rispetto al prodotto scalare (2) a $W = \text{span} e_1, e_2$ e_1, e_2 vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 4 (50 punti)

Si indichi con $M_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale di tutte le matrici reali n x n. Si considerino i seguenti insiemi:

$$S = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X = X^t\}$$

$$A = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X = -X^t\}$$

a) Si dimostri che S e A sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{R})$. Se ne indichi la dimensione, motivando la risposta.
b) Si dimostri che vale $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus A$.

CREDITO EXTRA Si prenda $X \in A$. Si dimostri che, per ogni valore $s \in \mathbb{R}$, la matrice e^{sX} è ortogonale.

Esercizio 5 (70 punti)

a) Si enunci con chiarezza il Teorema di Sylvester.

b) Sia W un sottospazio vettoriale di V spazio vettoriale reale con un prodotto scalare. Si dia con chiarezza la definizione di $W^{\perp}$ e $W^{\vee}$.

c) Si risponda vero o falso alle seguenti domande motivando accuratamente la risposta.

I) Siano u, v e w tre vettori in $\mathbf{R}^3$. Il prodotto $u \times v \cdot w$ e' nullo se e solo se i vettori sono complanari.

II) Un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow V$ iniettiva e' anche suriettiva (discutere separatamente il caso finito e infinito dimensionale).

III) Una matrice con autovalori ± 1 e' ortogonale.

IV) Due matrici diagonalizzabili sono simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.