# COMPITO B

## Algebra e Geometria, Fisica, (Fioresi)

19 Dicembre, 2018

**NOME:**

**COGNOME:**

**NUMERO DI MATRICOLA:**

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| Totale | |

**Esercizio 1** (50 punti)

a) Si enunci con chiarezza il teorema di Sylvester sulle forme quadratiche e si spieghi la sua relazione con il teorema spettrale.

b) Si risponda vero o falso motivando la risposta con una dimostrazione oppure con un controesempio.

I) L'insieme delle matrici $2 \times 2$ con determinante uguale a $-1$ e' un gruppo.

II) In un prodotto scalare reale non degenere non esiste un vettore perpendicolare a se stesso.

III) Siano $A$ e $B$ matrici $n \times n$ reali, ciascuna con $n$ autovalori distinti. Allora $A$ e $B$ sono simili se e solo se hanno gli stessi autovalori.

CREDITO EXTRA. Sia $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ un vettore non nullo. Si dimostri che la matrice $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^t$ (moltiplicazione righe per colonne) ha autovalore zero contato con molteplicita' algebrica $n - 1$.

**Esercizio 2** (50 punti)

Si consideri la matrice hermitiana:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

1) Si scriva il prodotto hermitiano ad essa associato e si determini se e' non degenere, definito positivo.

2) Si dica per quali valori di $k$ complesso la matrice $A$ e' diagonalizzabile e scelto un valore per il quale e' diagonalizzabile si trovi (se possibile) una base di autovettori mutuamente perpendicolari tra loro.

**Esercizio 3** (50 punti)

Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $ae_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $-e_1 + 2e_3 - 2e_4$.

a) Si determini una base ortogonale per $W$.

b) Si determini una base per $W^\perp$ ove l'ortogonale e' calcolato rispetto al prodotto scalare euclideo.

c) Si determini $W^\vee$.