COMPITO C

Algebra e Geometria, Fisica (Fioresi)

5 Novembre, 2018

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA :

(Si indichi la data di nascita se non si e' in possesso del numero di matricola).

Ci sono 3 esercizi per un totale di 150 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

REGOLE

- a **e** b **sono le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola**. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora $a = 4$, $b = 6$. Nel SOLO caso in cui non si disponga del proprio numero di matricola, a =ultima cifra del mese di nascita b =ultima cifra dell'anno di nascita. NON e' permesso risolvere l'esercizio lasciando i parametri a e b indicati.
- NON e' ammesso in nessun caso l'uso delle formule per la geometria tridimensionale eccetto quelle viste in classe e presenti nel Lang. NON e' permesso l'uso del concetto di DETERMINANTE e del calcolo differenziale (derivate e integrali).
- Non sono permessi calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

1	
2	
3	
Totale	

Esercizio 1 (50 punti)

a) Dati in $\mathbf{R}^3$ il piano π di equazione cartesiana $\pi : -x + 2y - 2z + a = 0$ e la retta r di equazioni cartesiane $r : -x - 2z + 3a = 0, 2y - a = 0$

1) Trovare equazioni parametriche per r.

2) Stabilire la posizione relativa di π, r.

3) Trovare la distanza tra π e r.

b) Sia V lo spazio vettoriale complesso delle funzioni $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}$ (ove $\mathbf{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi). Si consideri il sottoinsieme W delle funzioni f con $f(1) = f(2)$. E' un sottospazio vettoriale? Si motivi accuratamente la risposta.

$\vec{0}$ $\exists$

$f(1) + g(1) = (f+g)(1) = g(1) =$

$g(2)$

$c\,f(1) = c\,f(2)$

Esercizio 2 (60 punti)

a) Si enunci chiaramente il teorema di Rouche' Capelli e si dia la definizione di rango di una matrice.

b) Si dimostri che l'intersezione di due sottospazi in uno spazio vettoriale dato e' un sottospazio vettoriale.

c) Si risponda vero o falso dando una motivazione accurata alla risposta.

I) Siano U e W sottospazi vettoriali di V. Esiste una base di U ed una base di W tali che L'intersezione di tali basi sia una base per $U \cap W$.

II) Siano A e B matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Se rango di A e' uguale a rango di AB allora B e' invertibile.

CREDITO EXTRA (15 punti). Siano U e W sottospazi di V, $V = U \oplus W$ e sia Z un altro spazio vettoriale (tutti gli spazi considerati sono finito dimensionali). Se $f : U \longrightarrow Z$ e' iniettiva e $g : Z \longrightarrow W$ e' suriettiva, con $ker(g) = Im(f)$, allora Z e' isomorfo a V.

Esercizio 3 (40 punti)

a) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^4$, $f(e_1) = e_1 + ie_2 + e_3 + 2e_4$, $f(e_2) = be_2 + ibe_3 + 2e_4$, $f(e_3) = 2e_1 + 2ie_2 + 2e_3 + 2e_4$. E' iniettiva? E' suriettiva? E' biettiva? Si motivi chiaramente la risposta.

b) Si determinino i valori di k (se esistono) per i quali $(-2, k, -2, -2)$ appartiene all'immagine di f.

c) Si determinino i valori di k (se esistono) per i quali $(-2, k, -2)$ appartiene al nucleo di f.

GAUSS