COMPITO C

PARZIALE 1, Algebra e Geometria, Fisica (Fioresi)

4 Novembre, 2019

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA :

(Si indichi la data di nascita se non si e' in possesso del numero di matricola).

Ci sono 3 esercizi per un totale di 150 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

REGOLE

- a **e** b **sono le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola**. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora $a = 4$, $b = 6$. Nel SOLO caso in cui non si disponga del proprio numero di matricola, a =ultima cifra del mese di nascita b =ultima cifra dell'anno di nascita. NON e' permesso risolvere l'esercizio lasciando i parametri a e b indicati.
- NON e' ammesso in nessun caso l'uso delle formule per la geometria tridimensionale eccetto quelle viste in classe e presenti nel Lang. NON e' permesso l'uso del concetto di DETERMINANTE e del calcolo differenziale (derivate e integrali).
- Non sono permessi calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

1	
2	
3	
Totale	

Esercizio 1 (60 punti)

a) Dati in $\mathbf{R}^3$ il piano π di equazione cartesiana $\pi : -x + 2y - 2z + 3a = 0$ e il piano di equazioni parametriche $\pi' : x = t,\ y = s,\ z = t + s$.
1) Trovare (se esistono) equazioni parametriche e cartesiane per $r = \pi \cap \pi'$.
2) Si determini la distanza di r dall'origine.

b) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e U un suo sottospazio vettoriale (anche infinito dimensionali).

Si consideri il sottoinsieme W del prodotto cartesiano $W \subset V \times V$ definito come:

$$W = \{(u, u) \mid u \in U\}$$

W e' un sottospazio vettoriale di $V \times V$? Si motivi la risposta.

II) Nel caso di risposta affermativa al punto (I), se $dim(V) = n$ e $dim(U) = m < n$ qual'e' la dimensione di W? Si motivi accuratamente la risposta.

Esercizio 2 (40 punti)

a) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^4$, $f(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_3 - 2ak\mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{e}_2) = i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2i\mathbf{e}_4$. Si discuta al variare di k se l'applicazione lineare e' iniettiva, suriettiva e/o biettiva. Si motivi chiaramente la risposta.

b) Scelto un valore di k a piacere, si trovi una base dell'immagine e la si completi ad una base del codominio.

c) Posto $k = 0$, si determini per quali valori (se esistono) del parametro $\alpha \in \mathbf{C}$ il vettore $(\alpha, 0)$ appartiene al nucleo di f.

Esercizio 3 (50 punti)

a) Si enunci chiaramente il teorema di struttura dei sistemi lineari.

b) Siano f e g due applicazioni lineari $f, g : V \longrightarrow V$ con V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ (anche infinito dimensionale). Si dimostri che se $f \circ g$ e' isomorfismo, allora f e' isomorfismo.

c) Si risponda vero o falso dando una motivazione accurata alla risposta.

I) Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali generici (anche infinito dimensionali). Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

II) Siano U e W sottospazi vettoriali di V. L'unione di U e W e' un sottospazio vettoriale.

CREDITO EXTRA (15 punti). Sia $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$. Si dimostri che $e^{PAP^{-1}} = Pe^{A}P^{-1}$.