COMPITO B

LT FISICA (Fioresi)

7 Gennaio, 2019

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Ci sono 6 esercizi per un totale di 300 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
Totale	

Cerchiare **a penna** una ed una sola delle seguenti voci:

RECUPERO 1

RECUPERO 2

TOTALE

Esercizio 1 (50 punti)

a) Si consideri lo spazio vettoriale $V = M_{2,2}(\mathbf{C})$.
1) Si determini per quale valore di k (se esiste):

$$\begin{pmatrix} k & -1 \\ a & a \end{pmatrix} \in W = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix}\} \subset M_{2,2}(\mathbf{C})$$

2) Si determini inoltre una base per W e la si completi ad una base di $M_{2,2}(\mathbf{C})$.
3) Si stabilisca (se possibile) un isomorfismo tra W e $\mathbf{C}_d[x]$ per un opportuno d.

b) Determinare, al variare di k, una base per il nucleo e una base per l'immagine dell'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$, $T(x, y) = (ax + by, x - y, ax + by, x - ky)$. Si determinino inoltre i valori di k (se esistono) per i quali T e' iniettiva, suriettiva, biettiva.

Esercizio 2 (50 punti)

a) Date in $\mathbf{R}^3$ le rette r, s di equazioni
$r : x - az - 1 = 0,\ y - bz = 0$
$s : y - bz = a, 2x + z = 0$

i) Trovare (se esiste) un vettore v perpendicolare ai vettori direzione delle due rette.
ii) Trovare l'equazione del piano π contenente r e parallelo a s.
iii) Trovare una retta r_1 perpendicolare a π e che interseca s e una retta r_2 perpendicolare a π che non interseca s.

b) Si consideri l'insieme delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali con determinante nullo. E' un sottospazio vettoriale di $M_{n,n}(\mathbf{R})$?

Esercizio 3 (50 punti)

a) Si risponda vero o falso motivando chiaramente la risposta con una dimostrazione oppure con un controesempio. Se si vuole utilizzare un risultato e' necessario enunciarlo chiaramente.

I) Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare, con V e W spazi vettoriali arbitrari sullo stesso campo K (anche di dimensione non finita). Sia U un sottospazio vettoriale di V. Si definisca $f(U) := \{f(\mathbf{u}) \,|\, \mathbf{u} \in U\}$. $f(U)$ e' sottospazio vettoriale di $Im(f)$?

II) Sia $f : V \longrightarrow W$ applicazione lineare iniettiva tra spazi vettoriali sullo stesso campo K, $dim(V) = dim(W)$, e sia $v_1, \ldots, v_n$ base di V. $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ e' base di W?

b) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K. Siano U e W due sottospazi di V. Si dimostri che se una base di V si ottiene come unione disgiunta di una base di U e una base di W allora $V = U \oplus W$.

CREDITO EXTRA (15 punti). Siano A e B matrici reali $n \times n$, con B invertibile. Si dimostri che $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$. Se si vuole citare qualche risultato e' necessario dimostrarlo.

Esercizio 4 (50 punti)

a) Sia V uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare definito positivo e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. Si dimostri che A matrice reale e' ortogonale se e solo se le sue colonne/righe formano una base ortonormale rispetto al prodotto scalare dato.

b) Si risponda vero o falso alle seguenti domande motivando accuratamente la risposta.

I) Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$. Allora A ammette almeno un autovalore reale.

II) Sia $\langle , \rangle$ un prodotto hermitiano non degenere in uno spazio vettoriale complesso V di dimensione finita. Allora se $v_1, \dots, v_n$ sono ortogonali tra loro, $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

III) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora $dim(V) = dim(V^*)$.

CREDITO EXTRA (15 punti). Si dimostri che una trasformazione ortogonale del piano con determinante uguale a 1 e' una rotazione del piano.

Esercizio 5 (50 punti)

a) Data la conica di equazione:
$x^2 + y^2 - 4axy + 2 - 4a = 0$
trovarne la forma canonica e darne un disegno di massima.

b) Sia $W = \text{span}\{(a, 1, -1, 0), (a, 0, -1, 0)\}$. Determinare una base ortonormale per W rispetto al prodotto euclideo in $\mathbf{R}^4$.

c) Si determini una base per $W^\perp$ rispetto al prodotto euclideo.

d) Si determini una base per $W^\vee$ e l'isomorfismo tra $W^\perp$ e $W^\vee$ indotto dal prodotto euclideo.

Esercizio 6 (50 punti)

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -b & -b & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & b-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare la forma normale di Jordan di A, e una base di Jordan per la trasformazione lineare rappresentata da A.