COMPITO A

Algebra e Geometria, Fisica, (Fioresi)

19 Dicembre, 2019

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

1	
2	
3	
Totale	

Esercizio 1 (50 punti)

a) Si determini per quali valori di k la matrice A complessa e' diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ ak & ak & ak \\ bk & bk & bk \end{pmatrix}$$

b) Scelto un valore di k per il quale A non e' diagonalizzabile si calcoli la forma di Jordan di A. **Non e' richiesta la base di Jordan**.

Esercizio 2 (50 punti)

a) Sia V spazio vettoriale sul campo k di dimensione n (finita) e $\mathcal{B}$ una sua base. Si dia la definizione di base duale e si dimostri che V e' isomorfo a V^* (max 15 righe).

b) Si dimostri che se $\langle , \rangle$ e' un prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ non degenere, NON definito positivo, esiste un vettore non nullo $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ tale che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$

c) Si risponda vero o falso motivando la risposta con una dimostrazione oppure con un controesempio. Se si intende utilizzare un risultato (che non sia quanto richiesto) e' necessario enunciarlo chiaramente.

I) Ogni matrice invertibile e' una matrice di un opportuno cambio di base.

II) Sia $f : V \longrightarrow V$ lineare, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ autovettori di autovalori λ e μ, $\lambda \neq \mu$. Allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti.

CREDITO EXTRA. Sia V uno spazio vettoriale finito dimensionale. Si dia un isomorfismo tra $V^* \otimes V^*$ e lo spazio vettoriale delle forme bilineari su V SENZA fissare una base.

Esercizio 3 (50 punti)

a) Si consideri la forma quadratica: $q(x, y) = x^2 + axy$.

1) Si scriva il prodotto scalare ad essa associato e si determini se e' non degenere, definito positivo. Si scriva inoltre la segnatura di q.

2) Dato il luogo dei punti nel piano $x^2 + axy = 1$, di che conica si tratta? Motivare la risposta.

b) Si determini una base ortogonale per il sottospazio W in $\mathbf{R}^4$ definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 0 \\ 2ax + y + 3z + 3t = 0 \end{cases}$$