COMPITO D

Algebra e Geometria, Fisica, (Fioresi)

20 Dicembre, 2018

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

1	
2	
3	
Totale	

Esercizio 1 (50 punti)

a) Dato il sottospazio vettoriale W di $\mathbf{C}^3$ definito dall'equazione:

$$ix + ay + bz = 0,$$

Si calcoli una base ortonormale per W rispetto al prodotto hermitiano standard in $\mathbf{C}^3$.

b) Data la conica di equazione:

$$(k+1)x^2 + 3xy + y^2 = 1$$

Si dica al variare di k di che conica si tratta.
Posto $k = 0$ se ne dia un disegno di massima.

Esercizio 2 (50 punti)

Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

a) Si scriva la forma bilineare ad essa associata. Si tratta di un prodotto scalare?

b) Si determini (se possibile) P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale. E' possibile scegliere P ortogonale? Si motivi la risposta.

Esercizio 3 (50 punti)

a) Si dimostri che una matrice hermitiana A $n \times n$ e' definita positiva se e solo se $\langle Av, v\rangle > 0$ per ogni $v \in \mathbf{C}^n$ (ove $\langle , \rangle$ denota il prodotto hermitiano standard).

b) Si risponda vero o falso motivando la risposta con una dimostrazione oppure con un controesempio.

I) Se A e B sono matrici in $M_n(k)$ con lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche la stessa forma di Jordan.

II) Un sistema lineare complesso omogeneo di 4 equazioni di 4 incognite ha sempre una e una sola soluzione.

III) Sia A una matrice reale $n \times n$. Se $A = A^t$ allora A ha autovalori reali.

IV) Sia V uno spazio vettoriale reale finito dimensionale con un prodotto scalare non nullo e W un suo sottospazio. Allora $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

CREDITO EXTRA. Si dimostri che se A e' una matrice hermitiana definita positiva e invertibile allora esiste N invertibile tale che $A = N^*N$.