Geometria e Algebra Lineare

Vettori

$\underline{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$	Vettore
$\|\|\underline{v}\|\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$	Modulo o norma
$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \dots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}$	Somma tra vettori
$k\underline{v} = (kv_1, kv_2, ..., kv_n)$	Prodotto scalare-vettore
$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + ... + v_n w_n$	Prodotto scalare
$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$	Prodotto vettoriale
$\|\|\underline{v} + \underline{w}\|\|^2 = \|\|\underline{v}\|\|^2 + \|\|\underline{w}\|\|^2$	Se $v \perp w$
$\cos\theta = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\|\underline{v}\|\| \cdot \|\|\underline{w}\|\|}$	Angolo tra vettori
$\underline{v} \perp \underline{w} \iff \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$	Vettori perpendicolari
$\underline{v} \parallel \underline{w} \iff \underline{v} \times \underline{w} = \underline{0}$	Vettori paralleli

Gruppi

Un'operazione (+) in uno spazio (V) è un gruppo se:

Associativa	$(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{z} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{z})$
Elemento neutro	$\exists \underline{0} \quad \underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$
Inverso	$\exists -\underline{v} \quad \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

Un gruppo è *abeliano* se è un gruppo e:

Commutativa $\quad \underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$

Proprietà del prodotto scalare-vettore

$(t_1 + t_2)\underline{v} = t_1\underline{v} + t_2\underline{v} \qquad (t_1 t_2)\underline{v} = t_1(t_2\underline{v})$

$t(\underline{v}_1 \underline{v}_2) = t\underline{v}_1 + t\underline{v}_2 \qquad 1\underline{v} = \underline{v}$

Proprietà del prodotto scalare

$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$

$\langle t\underline{v}, t\underline{w} \rangle = t\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

$\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}_2, \underline{w} \rangle$

$\langle t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2, \underline{w} \rangle = t_1\langle \underline{v}_1, \underline{w} \rangle + t_2\langle \underline{v}_2, \underline{w} \rangle$

$\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$

$\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = 0$ sse sono l.d.

Combinazione lineare

$\underline{w}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ sse $\exists a_1, a_2, ..., a_n$ tali che $\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_n\underline{v}_n$

$\underline{0}$ è combinazione lineare di un qualunque insieme di vettori.

Dipendenza lineare

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ si dicono *linearmente dipendenti* sse $\exists a_1, a_2, ..., a_n$ non tutti nulli t.c. $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_n\underline{v}_n = \underline{0}$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se non sono linearmente dipendenti.

Se un insieme di vettori è linearmente indipendente $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Basi e generatori

Un insieme di vettori è un generatore sse ogni vettore dello spazio è combinazione lineare del generatore.

Una base è un generatore formato da vettori l.i.

$\dim V$ = numero di vettori di una base qualunque. $\dim\{\underline{0}$

Spazio vettoriale

Un insieme di oggetti in cui è definita l'operazione di somma come *gruppo abeliano* e l'operazione prodotto scalare-vettore che rispetta le proprietà sopraindicate viene definito *spazio vettoriale*.

Esempi di spazi vettoriali: vettori liberi, matrici, polinomi, funzioni lineari.

$\mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n)$ è lo spazio vettoriale generato dalla combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$.

Sottospazio vettoriale

$U \subset V \quad$ U è sottospazio di V se è uno spazio vettoriale rispetto le operazioni di V.

$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U \qquad k\underline{u} \in U \qquad \underline{0} \in U \qquad -\underline{u} \in U$

Operazioni sugli spazi vettoriali

U, W sottospazi di $V \implies U \cap W$ è sottospazio di V.

$U + W = \{\underline{v} \in V | \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}, \underline{u} \in U, \underline{w} \in W\}$ sottospazio di V.

$|U + W| = |U| + |W| - |U \cap W|$ Formula di Grassmann

$U \oplus W : \forall \underline{v} \in V \; \exists \underline{u} \in U, \underline{w} \in W$ t.c. $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ in modo unico

$\begin{cases} U \cap W = \{0\} \\ U + W = V \end{cases}$ W è generato dai vettori che aggiunti alla base di U formano una base di V.

Trovare una base

Se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ sono generatori, la base è un sottoinsieme l.i. di quei vettori. Rimuovo i vettori nulli, da sinistra tolgo i vettori linearmente dipendenti dai precedenti presi.

Se non sono generatori accosto a destra i vettori di una base qualunque e ottengo un insieme di generatori.

Rette

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$

Forma parametrica $\qquad$ Forma cartesiana

In 3 dimensioni una retta è individuata dall'intersezione di 2 piani non paralleli. Nella forma parametrica (a, b, c) sono i parametri direttori della retta e ne indicano la direzione.

Piani

$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + a_2 s \\ y = y_0 + b_1 t + b_2 s \\ z = z_0 + c_1 t + c_2 s \end{cases} \qquad ax + by + cz + d = 0$

Forma parametrica $\qquad$ Forma cartesiana

Nella forma cartesiana (a, b, c) sono i parametri direttori del piano e indicano la direzione *perpendicolare* al piano.

Posizioni reciproce piano-retta

Piano π con parametri $\underline{n}$ e retta r con parametri $\underline{d}$

$\pi \perp r$	$\underline{n} \parallel \underline{d}$	$\underline{n} = k\underline{d}$
$\pi \parallel r$	$\underline{n} \perp \underline{d}$	$\underline{n} \cdot \underline{d} = 0$
$r_1 \parallel r_2$	$\underline{d}_1 = k\underline{d}_2$	

Fasci di piani

Proprio	$\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$	Piani che contengono $\pi_1 \cap \pi_2$
Improprio	$\lambda\pi = 0$	Piani paralleli a π

Matrici

$A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{m,p}$

$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ (i-esima riga di A $\cdot$ j-esima colonna di B)

Non commutativa	$AB \neq BA$
Associativa	$A(BC) = (AB)C$
Elemento neutro	$AI_n = I_n A = A$
Distributiva	$A(B + C) = AB + AC$
Trasposta	$A^T = [\alpha_{ij}] \quad \alpha_{ij} = a_{ji}$
Inversa	$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \quad (\exists \text{ sse} \det A \neq 0)$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$[A|I_n] \to [I_n|A^{-1}]$ riducendo a scala

$A^{-1} = (1/\det A) \; [b_{ik}] \quad b_{ik} = C_{ki}$ (compl. algebrico trasposto)

$A = \left[\; \underline{C}_1 \; | \; \underline{C}_2 \; | \; \cdots \; | \; \underline{C}_n \; \right] = \begin{bmatrix} \underline{R}_1 \\ \vdots \\ \underline{R}_m \end{bmatrix}$

$\text{Row}A = \mathcal{L}(\underline{R}_1, \underline{R}_2, ..., \underline{R}_m) \quad \text{Col}A = \mathcal{L}(\underline{C}_1, \underline{C}_2, ..., \underline{C}_n)$

$\dim \text{Row}A = \dim \text{Col}A = \text{rk}A$

Riduzione a scala, mosse di Gauss, rk

Una matrice è a scala se $\underline{R}_i = 0 \implies \underline{R}_{i+1} = 0$ e le posizioni dei primi elementi non nulli (*pivot*) è strettamente crescente.

rk$A$ = numero di *pivot* di A ridotta a scala.

Mosse di Gauss:
- Moltiplicare una riga per $k \neq 0$
- Sostituire una riga con la c.l. di due righe
- Scambiare due righe

Determinante

$\det : M_{n,n}(K) \to K$

$n = 1 \quad A = [a] \quad \det A = a$

$n > 1 \quad$ Ricorsivamente

A_{ik} ottenuta da A togliendo riga i e colonna k

$M_{ik} = \det A_{ik}$ (detto minore complementare)

$C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ (detto complemento algebrico)

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} C_{1i}$

I th. di Laplace: si può usare una riga o una colonna qualsiasi.

- $\det A = \det A^T$
- Se una riga è di zeri: $\det A = 0$
- Se si scambiano 2 righe: $\det A' = -\det A$
- Se due righe parallele sono proporzionali: $\det A = 0$
- Moltiplicando una riga per t: $\det A' = t \det A$
- $\det tA = t^n \det A$
- In una matrice triangolare: $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- T. di Binet: $\det AB = \det A \cdot \det B$

Regola di Kronecker: se esiste una sottomatrice quadrata $A'_{n,n}$ con $\det A' \neq 0$ allora rk$A \geq n$. Se tutte le matrici ottenute per orlatura da A' hanno det $= 0$ allora rk$A = n$.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$A = ad - bc \qquad \det B = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad A|\underline{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Se $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$ il sistema si dice omogeneo ed ammette sempre almeno una soluzione ($\underline{0}$). Le soluzioni non banali vengono chiamate *autosoluzioni*. Riducendo a scala $A|\underline{b}$ si ottiene un sistema equivalente.
Se $m = n$ e $\det A \neq 0$ per Cramer $x_i = \det A_i / \det A$ con A_i ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna con $\underline{b}$.

Teorema di Rouché-Capelli

Dato un sistema lineare e le matrici associate A e $A|\underline{b}$:

$\text{rk}A \neq \text{rk}A\|\underline{b}$	Sistema impossibile
$\text{rk}A = \text{rk}A\|\underline{b}$	Sistema possibile

In un sistema possibile in n incognite con $\text{rk}A = r$:

$r = n$	Sis. det. 1! soluzione
$r < n$	Sis. ind. ∞^{n-r} soluzioni ($n - r$ variabili libere)

Un sistema lineare omogeneo ha autosoluzioni sse $\text{rk}A < n$.

Posizione reciproca tra rette-piani

Definiamo $n =$ numero variabili, $r = \text{rk}A$ e $s = \text{rk}A|\underline{b}$

Nel piano:

$n = 2$	$r = 2$	$s = 3$	Imp	Più punti di intersezione
	$r = 2$	$s = 2$	Det	Un punto di intersezione
	$r = 1$	$s = 2$	Imp	Rette parallele
	$r = 1$	$s = 1$	Ind	Rette coincidenti

Nello spazio:

$n = 2$	$r = 2$	$s = 3$	Imp	Retta + piani ‖ ad essa
	$r = 2$	$s = 2$	Det	Una retta
	$r = 1$	$s = 2$	Imp	Piani paralleli
	$r = 1$	$s = 1$	Ind	Piani coincidenti
$n = 3$	$r = 3$	$s = 4$	Imp	Più punti di intersezione
	$r = 3$	$s = 3$	Det	Stella di piani
	$r = 2$	$s = 3$	Imp	Retta + piani ‖ ad essa
	$r = 2$	$s = 2$	Ind	Una retta
	$r = 1$	$s = 2$	Ind	Piani paralleli
	$r = 1$	$s = 1$	Ind	Piani coincidenti

Applicazioni lineari

$f : V \to W \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad f(kv) = kf(v)$

Definizione	$f(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1f(v_1) + k_2f(v_2)$
Nucleo	$\ker f = \{\underline{v} \in V \| f(\underline{v}) = \underline{0}_W\}$
	$\ker f$ è un sottospazio di V e $\underline{0} \in \ker f$
Fibra di $\underline{w}$	$\{\underline{v} \in V \| f(\underline{v}) = \underline{w}\}$
Immagine	$\text{Im}f = f(V) = \mathcal{L}(C_1, C_2, ..., C_n)$
	$f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$
Forma lineare	$f : V \to K$
Endomorfismo	$f : V \to V$
Iniettiva	$\ker f = \{\underline{0}\} \quad \text{rk}A = n$
Suriettiva	$\text{Im}f = W \quad \text{rk}A = m$
Biunivoca	Iniettiva + suriettiva (isomorfismo) $\det A \neq 0$
Somma di f.l.	$(f + g)(\underline{v}) = f(\underline{v}) + g(\underline{v})$
Scalare per f.l.	$(hf)(\underline{v}) = hf(\underline{v}) \qquad h \in K$

T. nullità più rango: $|V| = |\ker f| + |\text{Im}f|$

Matrice associata

$f : V \to W$

Base di V $\quad B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, ..., \underline{b}_n\}$

Base di W $\quad C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, ..., \underline{c}_m\}$

$A = \left[f(\underline{b}_1)_{|C} \quad f(\underline{b}_2)_{|C} \quad \cdots \quad f(\underline{b}_n)_{|C}\right] \qquad f(\underline{v}) = A\underline{v}$

Cambiamento di base da B a $C \quad I_{B\to C} : V \to V$

$M_{B\to C} = \left[\underline{b}_{1|C} \quad \underline{b}_{2|C} \quad \cdots \quad \underline{b}_{n|C}\right]$

$\underline{v}_{|C} = M_{B\to C} \cdot \underline{v}_{|B} \quad \underline{v}_{|B} = M^{-1}_{B\to C} \cdot \underline{v}_{|C}$

Combinazione di funzioni: $f : V \to W\ [A] \quad g : W \to U\ [B]$
$g \circ f : V \to U\ [C = B \cdot A]$

Esercizi svolti

Prodotto tra matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 21 & 4 & 16 \\ 13 & 17 & 3 & 17 \\ 8 & 11 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Retta r per $A(1, 2, 2)$ e $B(3, 1, 0)$

$\underline{d} = (1 - 3, 2 - 1, 2 - 0) = (-2, 1, 2)$

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 1t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad t = y - 2 \quad \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ z - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Piano $\pi \perp r$ passante per $C(1, 1, 2)$

$\underline{n} = \underline{d}_r = (-2, 1, 2)$

$\pi : -2x + y + 2z + d = 0$, imponendo il passaggio per C:
$-2 + 1 + 4 + d = 0 \implies d = -3$

Verifica di sottospazio

$S = \{\underline{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$\underline{v} = (x_1, x_2, x_3) \qquad \underline{w} = (y_1, y_2, y_3)$

$\underline{0} \in S \quad 0 + 0 + 0 = 0$

$\underline{v} + \underline{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) =$
$= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0$

$\lambda\underline{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$
$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = 0$

Risoluzione di sistemi

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4 \\ x - z = 1 \\ -x + 3y + 4z = 2 \end{cases} \qquad A|\underline{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

Riducendo $A|\underline{b}$ a scala

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Verificare se dei vettori sono l.i.

$v_1 = (1, -3, 7) \quad v_2 = (2, -1, -1) \quad v_3 = (-4, 2, 2)$

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ -3x - y + 2z = 0 \\ 7x - y + 2z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \\ 0 = 0 \end{cases} \to t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \forall t \in \mathbb{R} \text{ sono l.d.}$$

$0v_1 + 2tv_2 + tv_3 = 0$

Se l'unica soluzione fosse stata $(0, 0, 0)$ allora sarebbero l.i.

Calcolo del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-)^4 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 2(-)^5 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$(0 - 1 - 4 - 0 + 2 - 4) - 2(-6 - 8 + 3 - 3 - 8 - 6) = 49$

Trovare l'inversa di una matrice

$$A|I_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 \end{array}\right] \to A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Spazi vettoriali

$V = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}) \quad W = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix})$

$V + W = \mathcal{L}([1, 1], [1, 0])$ sono l.i. quindi $|V + W| = 2$

Per Grassmann $|V \cap W| = 0$

Applicazioni lineari

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(1, 1) = (1, 2) \quad T(0, 2) = (4, 4)$

$(x, y) = a(1, 1) + b(0, 2) \implies a = x \quad b = \frac{y-x}{2}$

$T(x, y) = aT(1, 1) + bT(0, 2) = x(1, 2) + \frac{y-x}{2}(4, 4) = (2y - x, 2y)$

$T(1, 0) = (-1, 0) \qquad T(0, 1) = (2, 2)$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \ker f = \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} = \{\underline{0}\} \text{ (iniettiva)}$$

$|\mathbb{R}^2| = |\ker f| + |\text{Im}f| \Rightarrow 2 = 0 + |\text{Im}f|$ (nullità+rk)

$\text{Im}f = \mathbb{R}^2$ (suriettiva, isomorfismo)

Applicazione lineare con basi non canoniche

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$

$\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\} \quad \mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$

$T(1, 0) = (2, 1, 0)_{|\mathcal{C}} = (2, -1, 1/2)_{|\mathcal{B}'}$

$T(1, 1) = (2, 0, 2)_{|\mathcal{C}} = (2, -2, 2)_{|\mathcal{B}'}$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Esempio
$T_{|\mathcal{C}}(0, 1) = T_{|\mathcal{B}}(-1, 1) = M \cdot (-1, 1)_{|\mathcal{B}} =$
$(0, -1, 3/2)_{|\mathcal{B}'} = (0, -1, 2)_{|\mathcal{C}}$

$$\ker f = \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ x/2 + 2y = 0 \end{cases} = \{\underline{0}\} \text{ (iniettiva)}$$

$|\text{Im}f| = 2$ (th. nullità più rango)

$\text{Im}f = \text{Col}M = t(2, -1, 1/2) + s(2, -2, 2)$

Cambiamento di base

$\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\} \qquad \mathcal{B}' = \{(2, 1), (1, 2)\}$

$(1, 0) = (2/3, -1/3)_{|\mathcal{B}'} \qquad (1, 1) = (1/3, 1/3)_{|\mathcal{B}'}$

$$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$\left((2, 2)_{|\mathcal{B}}\right)_{|\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot (2, 2)_{|\mathcal{B}} = (2, 0)_{|\mathcal{B}'}$

$$M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = M^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\left((2, 0)_{|\mathcal{B}'}\right)_{|\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \cdot (2, 0)_{|\mathcal{B}} = (2, 2)_{|\mathcal{B}'}$