COMPITO A

LT FISICA (Fioresi)

8 Gennaio, 2020

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Ci sono 6 esercizi per un totale di 300 punti.

Recupero 1: Es. 1, 2, 3.

Recupero 2: Es. 4, 5, 6.

Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
Totale	

Cerchiare **a penna** una ed una sola delle seguenti voci:

RECUPERO 1

RECUPERO 2

TOTALE

Esercizio 1 (40 punti)

I) Siano dati in $\mathbf{R}^3$ i luoghi dei punti descritti dalle equazioni:
i) $U = \{(x, y, z)|x - ay - 1 = 0\}$,
ii) $W = \{(x, y, z)|x = a + at, y = t + 1, z = 0\}$,
a) Si dica di che luoghi si tratta (punti, rette, piani etc).
b) Si calcoli la distanza tra U e W.
[Nota: non e' permesso l'uso di formule preconfezionate per la distanza tra rette, piani, etc.]

II) Si enunci con chiarezza il teorema di Rouche'-Capelli esemplificandolo attraverso il punto (I) di questo esercizio.

Esercizio 2 (45 punti)

a) Siano U, V, W spazi vettoriali finito dimensionali e siano $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow W$ applicazioni lineari tali che $Im(f) = Ker(g)$, f iniettiva e g suriettiva. Si dimostri che $dim(V) = dim(U) + dim(W)$. Si motivi accuratamente la risposta.

b) Siano due sottospazi vettoriali U e W di V, finito dimensionale.

I) Si dimostri che $U \cap W$ e' un sottospazio vettoriale di V.

II) Si dimostri che, esistono una base $\mathcal{B}$ di U e una base $\mathcal{B}'$ di W tali che $U \cap W$ abbia per base $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$

CREDITO EXTRA (15 punti). Sia $c \in \mathbf{Q}$, $c > 0$ e $\gamma \in \mathbf{R}$ tale che $\gamma^2 = c$. Si consideri il sottoinsieme dei reali $F = \{a + b\gamma \mid a, b \in \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{R}$. Si dimostri che e' un campo. Si dimostri inoltre che e' uno spazio vettoriale sul campo $k = \mathbf{Q}$ e si calcoli la sua dimensione.

Esercizio 3 (55 punti)

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ $f(x, y, z, t) = (x, ax - by + z - t, y + z, kt)$
a) Si determini un valore di k per il quale l'applicazione data NON e' suriettiva e per tale valore si calcoli una base per il nucleo e una base per l'immagine. In entrambi i casi si completino tali basi in modo da ottenere basi di $\mathbf{R}^4$. Si motivi accuratamente la risposta.

b) Si dica per quali valori di k f e' un isomorfismo. Si motivi accuratamente la risposta.

c) Scelto un valore di k come al punto (a), si determini (se possibile) un sottospazio vettoriale Z di dimensione 3 non contenuto nel kernel di f. Si motivi accuratamente la risposta.

d) Si dimostri che $\mathbf{R}^4 = ker(f) \oplus Z$.

Esercizio 4 (50 punti)

a) Si enunci con chiarezza il Teorema Spettrale sul campo complesso.

b) Sia A una matrice reale $n \times n$ tale che $A = -A^t$. Si dimostri che A^t ha autovalori immaginari puri (cioe' senza parte reale). Tali matrici costituiscono un gruppo? Si motivi accuratamente la risposta.

c) Si risponda vero o falso alle seguenti domande motivando accuratamente la risposta.

I) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti nel campo complesso. Gli autovalori di A coincidono con gli autovalori di A^*. La stessa affermazione e' vera anche per gli autovettori? Cioe': gli autovettori di A sono gli stessi di A^*?

II) Sia W un sottospazio vettoriale di V, spazio vettoriale reale di dimensione finita. Sia $\langle , \rangle$ un prodotto scalare non degenere. Allora $(W^\perp)^\perp = W$.

CREDITO EXTRA (15 punti). Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita. Siano $f, g : V \longrightarrow V$ applicazioni lineari diagonalizzabili, $f \circ g = g \circ f$. Allora esiste una base di V che diagonalizza sia f che g.

Esercizio 5 (50 punti)

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Si calcolino autovalori e autovettori e si dica se la matrice e' diagonalizzabile.
[Aiuto: 8 e -1 sono autovalori.]

b) Si trovi, se esiste, una matrice P *ortogonale* tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

c) Si dica se A e' invertibile e nel caso lo sia, si calcoli la sua inversa.

Esercizio 6 (50 punti)

a) Data la conica di equazione:
$x^2 + y^2 - 4axy = 1$

1) Si trovi la forma canonica e se ne dia un disegno di massima.

2) Si scriva il prodotto scalare ad essa associato e si dica se e' non degenere, definito positivo.

b) Sia $W = \text{span}\{(1, a, -1, 0), (0, b, -i, 0)\} \subset \mathbf{C}^4$. Si determinino $W^{\perp}$ rispetto al prodotto hermitiano standard e $W^{\vee}$.