LT FISICA (Fioresi)

23 Gennaio, 2019

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Ci sono 5 esercizi per un totale di 300 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

Esercizio 1 (60 punti)

a) i) Trovare il piano π_1 per l'origine e parallelo al piano π_2: $x + y - z = a$.
ii) Trovare la distanza tra i piani π_1 e π_2. Non e' permesso l'uso di formule preconfezionate.

b) Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio di dimensione NON finita V. Sia $\mathbf{u} \in \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, $\mathbf{u} \neq 0$, ma linearmente indipendente sia con $\mathbf{v}$ che con $\mathbf{w}$.
i) Si dimostri che $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\} = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.
[Nota: si richiede una dimostrazione senza citare alcun risultato ma a partire solamente dalle definizioni.]
ii) Che dimensione puo' avere $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$? Si motivi la risposta.

c) Si enunci con chiarezza il teorema del completamento e si spieghi come conduca al concetto di dimensione.

Esercizio 2 (60 punti)

a) Si consideri il sottoinsieme W dello spazio vettoriale dei polinomi reali $\mathbf{R}[x]$, con coefficienti interi (anche nulli), cioe' $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con $a_i \in \mathbf{Z}$. E' un sottospazio vettoriale?

b) Si determini (se possibile) una applicazione lineare non nulla $f : M_{m,n}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}[x]$.
Si dica se una tale applicazione lineare puo' essere iniettiva, suriettiva e/o biettiva, per opportuni valori di m, n motivando la risposta. Quando la risposta e' positiva e' richiesto un esempio.

c) Si enunci chiaramente il teorema di Rouche'-Capelli insieme alla nozione di rango e se ne dia un esempio (anche semplice) significativo.

Esercizio 3 (60 punti)

a) Si risponda vero o falso motivando chiaramente la risposta con una dimostrazione oppure con un controesempio. Se si vuole utilizzare un risultato e' necessario enunciarlo chiaramente.

I) Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare, con V e W spazi vettoriali infinito dimensionali sullo stesso campo k. Se $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

II) Siano A e B matrici complesse diagonalizzabili. A e' simile a B se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

b) Sia V uno spazio vettoriale reale finito dimensionale con un prodotto scalare definito positivo. Sia W un sottospazio vettoriale. Si dimostri che $V = W \oplus W^\perp$.

CREDITO EXTRA (30 punti). Si dimostri che se X e' una matrice $n \times n$ allora $exp(X)$ e' sempre invertibile e si determini la sua inversa come esponenziale.

Esercizio 4 (80 punti)

a) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -2i \\ 1 & 2i & a \end{pmatrix}$$

si determini una base per il nucleo e una base per l'immagine dell'applicazione lineare $T_A : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^3$ ad essa associata nella base canonica di dominio e codominio.

b) Si calcolino autovalori e autovettori di A e si dica se A e' diagonalizzabile.

c) Si dica se tale matrice e' associata ad un prodotto hermitiano nella base canonica. In caso affermativo si dica se tale prodotto e' non degenere, definito positivo.

d) Si trovi (se possibile) una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

Esercizio 5 (40 punti)

a) Sia $W = \{(x, y, z, t) | x + y - z = 0, ax - ay + az = 0 = 0\} \subset \mathbf{R}^4$. Si determini una base per $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo e una base per $W^{\perp_M}$ rispetto al prodotto scalare di Minkowski.
I due spazi $W^\perp$ e $W^{\perp_M}$ sono isomorfi?

b) Si trovi una base ortonormale per $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo.