COMPITO D

PARZIALE 1, Algebra e Geometria, Fisica (Fioresi)

4 Novembre, 2019

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA :

(Si indichi la data di nascita se non si e' in possesso del numero di matricola).

Ci sono 3 esercizi per un totale di 150 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

REGOLE

- a **e** b **sono le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola**. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora $a = 4$, $b = 6$. Nel SOLO caso in cui non si disponga del proprio numero di matricola, a =ultima cifra del mese di nascita b =ultima cifra dell'anno di nascita. NON e' permesso risolvere l'esercizio lasciando i parametri a e b indicati.
- NON e' ammesso in nessun caso l'uso delle formule per la geometria tridimensionale eccetto quelle viste in classe e presenti nel Lang. NON e' permesso l'uso del concetto di DETERMINANTE e del calcolo differenziale (derivate e integrali).
- Non sono permessi calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

1	
2	
3	
Totale	

Esercizio 1 (40 punti)

a) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{C}^4 \longrightarrow \mathbf{C}^2$, $f(x, y, z, t) = (ix + y - z + 2it, -x + iy - iz - 2bkt)$. Si discuta al variare di k se l'applicazione lineare e' iniettiva, suriettiva e/o biettiva. Si motivi chiaramente la risposta.

b) Scelto k a piacere, si trovi una base del nucleo e la si completi ad una base del dominio.

c) Posto $k = 0$, si determini per quali valori (se esistono) del parametro $\alpha \in \mathbf{C}$ il vettore $(i\alpha, 0, \alpha, 0)$ appartiene al nucleo di f.

Esercizio 2 (60 punti)

a) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e U un suo sottospazio vettoriale (anche infinito dimensionali).
I) Si consideri il sottoinsieme W del prodotto cartesiano $W \subset V \times V$ definito come:

$$W = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \,|\, a\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0,\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U\}$$

W e' un sottospazio vettoriale di $V \times V$? Si motivi la risposta.

II) Nel caso di risposta affermativa al punto (I), se abbiamo $dim(V) = n$ e $dim(U) = m$, qual'e' la dimensione di W?

b) Si consideri in $\mathbf{R}^3$ il punto $P = (0, 2b, 0)$ e la retta r: $\{x = -b, y = 2t, z = t\}$.
1) Si determini in forma parametrica e in forma cartesiana il piano per P ed r.
2) Si determini la distanza di tale piano dall'origine.

Esercizio 3 (50 punti)

a) Si enunci chiaramente il teorema del completamento e la sua relazione con il concetto di dimensione.

b) Si risponda vero o falso dando una motivazione accurata alla risposta.

I) $k_d[x]$ e' isomorfo a k^n per un opportuno n.

II) Siano U e W sottospazi vettoriali di V, con $V = U + W$ (nota: $+$ e non $\oplus$). L'unione di una base di U e una base di W e' un insieme di generatori per V.

c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Si dimostri che se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ sono linearmente indipendenti allora $\{\mathbf{u} + a\mathbf{v}, b\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w}\}$ sono linearmente indipendenti. E' richiesto che si dimostri a partire dalle definizioni, cioe' senza utilizzare alcun risultato.

CREDITO EXTRA (15 punti). In $\mathbf{R}^3$ si dimostri che un insieme di vettori perpendicolari tra loro e' linearmente indipendente.