

# COMPITO A

PARZIALE 1, Algebra e Geometria, Fisica (Fioresi)

4 Novembre, 2019

**NOME:**

**COGNOME:**

**NUMERO DI MATRICOLA :**

(Si indichi la data di nascita se non si è in possesso del numero di matricola).

Ci sono 3 esercizi per un totale di 150 punti. Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

## REGOLE

- $a$  e  $b$  sono le ultime due cifre **NON NULLE** e **DISTINTE** del **proprio numero di matricola**. Esempio: se il numero di matricola è 624040066 allora  $a = 4$ ,  $b = 6$ . Nel SOLO caso in cui non si disponga del proprio numero di matricola,  $a$  =ultima cifra del mese di nascita  $b$  =ultima cifra dell'anno di nascita. **NON** è permesso risolvere l'esercizio lasciando i parametri  $a$  e  $b$  indicati.
- **NON** è ammesso in nessun caso l'uso delle formule per la geometria tridimensionale eccetto quelle viste in classe e presenti nel Lang. **NON** è permesso l'uso del concetto di DETERMINANTE e del calcolo differenziale (derivate e integrali).
- Non sono permessi calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

1	
2	
3	
<hr/>	
Totale	

**Esercizio 1** (60 punti)

a) Dati in  $\mathbf{R}^3$  il piano  $\pi$  di equazione cartesiana  $\pi : -x + 2y - 2z + 3a = 0$  e il piano di equazioni parametriche  $\pi' : x = t, y = s, z = t + s$ .

1) Trovare (se esistono) equazioni parametriche e cartesiane per  $r = \pi \cap \pi'$ .

2) Si determini la distanza di  $r$  dall'origine.

b) Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$  e  $U$  un suo sottospazio vettoriale (anche infinito dimensionali).

Si consideri il sottoinsieme  $W$  del prodotto cartesiano  $W \subset V \times V$  definito come:

$$W = \{(u, u) \mid u \in U\}$$

$W$  e' un sottospazio vettoriale di  $V \times V$ ? Si motivi la risposta.

II) Nel caso di risposta affermativa al punto (I), se  $\dim(V) = n$  e  $\dim(U) = m < n$  qual'e' la dimensione di  $W$ ? Si motivi accuratamente la risposta.

**Esercizio 2** (40 punti)

- a) Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^4$ ,  $f(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_3 - 2ake_4$ ,  $f(\mathbf{e}_2) = i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2i\mathbf{e}_4$ . Si discuta al variare di  $k$  se l'applicazione lineare è iniettiva, suriettiva e/o biiettiva. Si motivi chiaramente la risposta.
- b) Scelto un valore di  $k$  a piacere, si trovi una base dell'immagine e la si completi ad una base del codominio.
- c) Posto  $k = 0$ , si determini per quali valori (se esistono) del parametro  $\alpha \in \mathbf{C}$  il vettore  $(\alpha, 0)$  appartiene al nucleo di  $f$ .

**Esercizio 3** (50 punti)

- a) Si enunci chiaramente il teorema di Rouché Capelli.
- b) Siano  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Si dimostri che  $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \text{span}\{\mathbf{u}, a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\}$  a partire dalle definizioni, cioè senza utilizzare alcun risultato.
- c) Si risponda vero o falso dando una motivazione accurata alla risposta.
- I) Siano  $f$  e  $g$  due applicazioni lineari  $f, g : V \longrightarrow V$  con  $V$  spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$  (anche infinito dimensionale). Se  $f \circ g$  è isomorfismo, allora  $f$  è isomorfismo.
- II)  $\mathbb{K}_n[x]$  è sempre isomorfo a  $M_{r,s}(\mathbb{K})$  scegliendo opportuni  $r$  ed  $s$ .

CREDITO EXTRA (15 punti). Sia  $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ . Si dimostri che  $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$ .