COMPITO A

Algebra e Geometria, Fisica, (Fioresi)

20 Dicembre, 2018

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

1	
2	
3	
Totale	

Esercizio 1 (50 punti)

a) Sia il sottospazio vettoriale W in $\mathbf{R}^4$ definito dalle equazioni $x+ay+az-at=0$, $x+by+bz-bt=0$, $x+(a+b)y+(a+b)z-(a+b)t=0$.
I) Si determini una base ortogonale di W rispetto al prodotto euclideo in $\mathbf{R}^4$.
II) Si determini $W^{\perp}$.

b) Si determini la forma di Jordan e una base di Jordan della matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 4/b \\ -9b & -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 (50 punti)

a) Sia A una matrice hermitiana $n \times n$ con due soli autovalori λ e μ. Si dimostri che

$$\mathbf{C}^n = V_\lambda \oplus V_\mu$$

e che $V_\mu = V_\lambda^\perp$ (ove $W^\perp$ e' inteso rispetto al prodotto hermitiano standard in $\mathbf{C}^n$ e V_λ denota l'autospazio di autovalore λ).
Se si intende utilizzare uno o piu' risultati li si enuncino chiaramente (max 20 righe).

b) Sia V spazio vettoriale sul campo k di dimensione n (finita) e $\mathcal{B}$ una sua base. Si dia la definizione di base duale e si dimostri che V e' isomorfo a V^* (max 15 righe).

c) Si risponda vero o falso motivando la risposta con una dimostrazione oppure con un controesempio.

I) L'insieme delle matrici simmetriche invertibili in $M_n(\mathbf{R})$ e' un gruppo.

II) Sia V spazio vettoriale reale finito dimensionale. $\langle , \rangle$ un prodotto scalare non degenere. Allora $W \cap W^\perp = \{0\}$.

CREDITO EXTRA. Si dimostri che se A e' una matrice simmetrica definita positiva e invertibile allora esiste N invertibile tale che $A = N^t N$.

Esercizio 3 (50 punti)

Si consideri la matrice complessa:

$$A = \begin{pmatrix} a & k & 0 \\ 0 & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

a) Si dica per quali valori di k e' diagonalizzabile.

b) Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una matrice P unitaria tale che $P^* A P$ sia diagonale.

c) Posto $k = 0$ si scriva il prodotto hermitiano associato ad A e si dica se e' non degenere, definito positivo.