COMPITO C

Algebra e Geometria, Fisica, (Fioresi)

19 Dicembre, 2019

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Non sono permesse calcolatrici, telefonini, libri o appunti.

Tutto il lavoro deve essere svolto su queste pagine. Non fate la brutta e siate chiari nei ragionamenti.

In tutto il compito siano a e b le ultime due cifre NON NULLE e DISTINTE del proprio numero di matricola. Esempio: se il numero di matricola e' 624040066 allora a=4, b=6.

1	
2	
3	
Totale	

Esercizio 1 (50 punti)

a) Si consideri la forma quadratica: $q(x, y) = ax^2 + xy$.

1) Si scriva il prodotto scalare ad essa associato e si determini se e' non degenere, definito positivo. Si scriva inoltre la segnatura di q.

2) Dato il luogo dei punti nel piano $ax^2 + xy = 1$, di che conica si tratta? Motivare la risposta.

b) Si determini una base ortogonale per il sottospazio W in $\mathbf{R}^4$ definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} ax + y + 2z + 2t = 0 \\ 2ax + 2y + 3z + 3t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2 (50 punti)

a) Sia V spazio vettoriale reale di dimensione n (finita) con un prodotto scalare. Sia W un sottospazio vettoriale di V. Si indichi come dimostrare che $V = W \oplus W^{\perp}$, (max 15 righe).

b) Si risponda vero o falso motivando la risposta con una dimostrazione oppure con un controesempio. Se si intende utilizzare un risultato (che non sia quanto richiesto) e' necessario enunciarlo chiaramente.

I) Matrici simili hanno lo stesso rango.

II) Sia A matrice $n \times n$ reale simmetrica, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ autovettori di autovalori λ e μ, $\lambda \neq \mu$. Allora
1) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono perpendicolari tra loro rispetto al prodotto scalare euclideo in $\mathbf{R}^n$.
2) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono perpendicolari tra loro rispetto al prodotto scalare con matrice associata A nella base canonica.

CREDITO EXTRA. Sia V uno spazio vettoriale finito dimensionale. Si dia un isomorfismo tra $V \otimes V^*$ e lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a V, SENZA fissare una base.

Esercizio 3 (50 punti)

a) Si determini per quali valori di k la matrice A complessa e' diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} -a & -a & -a \\ ak & ak & ak \\ bk & bk & bk \end{pmatrix}$$

b) Scelto un valore di k per il quale A non e' diagonalizzabile si calcoli la forma di Jordan di A. **Non e' richiesta la base di Jordan**.