Teoremi, definizioni e proposizioni per l'esame di Algebra Lineare, nel corso di Fisica dell'università di Bologna

Alessandro Cerati

4 gennaio 2022

Indice

1 Legenda

Abbreviazione	Significato
SV	Spazio vettoriale
SSV	Sottospazio vettoriale
CL	Combinazione lineare
LI	Linearmente indipendenti
LD	Linearmente dipendenti
FG	Finitamente generato
AL	Applicazione lineare
SL	Sistema lineare
FB	Forma bilineare
PS	Prodotto scalare
DP	Definito positivo
AB	Applicazione bilineare
AM	Applicazione multilineare

2 Prodotto scalare euclideo e prodotto vettoriale

2.1 Prodotto scalare euclideo

Def 2.1.1. Il prodotto scalare (euclideo) di due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ è il numero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Prop 2.1.2. Proprietà del prodotto scalare euclideo:

1. *Commutatività*: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. *Distributività*: $(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}$
3. $\mathbf{u} \cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

Prop 2.1.3. *Disuguaglianza triangolare*: $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$

Prop 2.1.4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0$

Prop 2.1.5. *Coefficiente di Fourier* $c = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||^2}$

Prop 2.1.6. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \cos\theta$

2.2 Prodotto vettoriale

Def 2.2.1. Il prodotto vettoriale di due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ è il vettore $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

Prop 2.2.2. Proprietà del prodotto vettoriale:

1. *Distributività destra*: $(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u}' \times \mathbf{v}$
2. *Distributività sinistra*: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$

3. *Anticommutatività*: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Prop 2.2.3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$

Prop 2.2.4. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = k\mathbf{v}$

3 Numeri complessi

Prop 3.0.1. Valgono in $\mathbb{C}$ tutte le proprietà di addizione e moltiplicazione in $\mathbb{R}$. In particolare, esistono sempre inverso additivo e moltiplicativo.

Prop 3.0.2. $(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$

Prop 3.0.3. $\alpha\bar{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = |\alpha|^2$

4 Spazi vettoriali

4.1 Proprietà

Def 4.1.1. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Un insieme V munito di due operazioni $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ si dice *spazio vettoriale* su $\mathbb{K}$ se valgono le seguenti proprietà $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

1. *Commutatività della somma*: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. *Associatività della somma*: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$
3. Esiste un elemento neutro della somma, detto *vettore nullo* $\mathbf{0}_V$.
4. Ogni elemento ha un *opposto* $-\mathbf{u}$.
5. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
6. *Associatività del prodotto*: $(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$
7. *Distributività del prodotto (rispetto agli scalari)*:
   $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$
8. *Distributività del prodotto (rispetto ai vettori)*:
   $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$

Gli elementi di V si dicono *vettori* e gli elementi di $\mathbb{K}$ si dicono *scalari*.

Prop 4.1.2. Inoltre, si dimostra che:

1. Il vettore nullo è unico.
2. $-\mathbf{u}$ è unico $\forall \mathbf{u}$.
3. $\lambda\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$
4. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$
5. $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \lambda = 0 \lor \mathbf{u} = \mathbf{0}_V$

6. $(-\lambda)\mathbf{u} = \lambda(-\mathbf{u}) = -\lambda\mathbf{u}$

Prop 4.1.3. Uno spazio vettoriale non può essere vuoto, e se non è lo *spazio vettoriale banale* $V = \{\mathbf{0}_V\}$ allora contiene infiniti elementi.

4.2 Sottospazi vettoriali

Def 4.2.1. Sia V uno SV e $W \subset V$. Si dice che W è *sottospazio vettoriale* di V se

1. $\mathbf{0} \in W$ o, equivalentemente, $W \neq \emptyset$.
2. *Chiusura rispetto alla somma:* $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W \ \forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$.
3. *Chiusura rispetto al prodotto:* $\lambda\mathbf{w} \in W \ \forall \mathbf{w} \in W, \ \lambda \in \mathbb{K}$.

Prop 4.2.2. Un SSV è uno SV.

Prop 4.2.3. Se V è SV contenente $\mathbf{u}$, allora $\{\mathbf{0}_V\}$, V e $\{\lambda\mathbf{u} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ sono suoi SSV.

Prop 4.2.4. Siano W_1, W_2 SSV di uno SV W. Allora $W_1 \cap W_2$ è SSV di V, ma $W_1 \cup W_2$ è SSV di V se e solo se $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

4.3 Combinazioni lineari e basi

Def 4.3.1. Sia V uno SV su un campo $\mathbb{K}$ e siano $v_1, ..., v_n \in V, \ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Il vettore $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n$ si dice *combinazione lineare* di $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ con $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Def 4.3.2. Sia V uno SV su un campo $\mathbb{K}$ e siano $v_1, ..., v_n \in V$. L'insieme delle combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ è detto *span* di $v_1, ..., v_n$ e si indica con $\langle \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \rangle$ o con $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$. Sia $W = \langle \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \rangle$, si dice che $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ *generano* W.

Prop 4.3.3. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V \Rightarrow \ \langle \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \rangle$ è SSV di V ed è sottoinsieme di ogni SSV di V che contiene almeno $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

Prop 4.3.4. Sia V SV su $\mathbb{K}$, $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$. Allora $\langle \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \rangle$ $\Leftrightarrow \mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n$.

Def 4.3.5. Sia V uno SV su un campo $\mathbb{K}$. $v_1, ..., v_n \in V$ si dicono *linearmente indipendenti* se, siano $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, si ha che

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

Altrimenti, i vettori si dicono *linearmentte dipendenti*.

Prop 4.3.6. Un insieme di vettori che contiene $\mathbf{0}$ è sempre LD.

Prop 4.3.7. $\mathbf{v}_1..\mathbf{v}_n$ LI $\Leftrightarrow$ nessuno è CL degli altri. (Nota: questo vale solo se lo SV è definito su un campo, non per esempio su $\mathbb{N}$).

Prop 4.3.8. Due vettori sono LI $\Leftrightarrow$ non sono uno multiplo dell'altro.

Prop 4.3.9. Un sottoinsieme non vuoto di un insieme di vettori LI è ancora LI.

Def 4.3.10. Sia V SV su $\mathbb{K}$, $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$. $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ si dice *base* di V se $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ sono LI e generano V.

Prop 4.3.11. Se V è uno SV non banale, esiste una sua base.

Prop 4.3.12. $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è base di $V \Leftrightarrow$ è un suo insieme minimale di generatori $\Leftrightarrow$ è un insieme massimale di vettori LI in esso. (Nota: ciò non implica che ogni base di V abbia lo stesso numero di elementi; ciò è vero ma segue dal teorema del completamento.)

Teo 1 (Teorema del completamento). Sia V uno SV FG su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ una sua base, allora sia $W = \{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m\} \subset V$ un insieme LI:

1. $m \leq n$
2. Si può completare W a base di V aggiungendo $n - m$ vettori di $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Dato che $\mathcal{B}$ genera V, si ha $\mathbf{w}_1 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n$. A meno di un riordino, $\alpha_1 \neq 0$, quindi per il Lemma di sostituzione $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è base di V. È possibile ripetere il ragionamento considerando v_2 e la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ e così via, dato che ad ogni passo si può supporre che almeno uno dei coefficienti dei $\mathbf{v}_i$ non sia nullo poiché i $\mathbf{w}_j$ sono tutti LI. Se $m > n$ dopo n iterazioni si ottiene che $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ è base di V, dunque $\mathbf{w}_{n+1} \in \langle \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n \rangle$ e quindi W non è LI, il che è assurdo. Quindi deve essere $m \leq n$, nel qual caso dopo $n - m$ iterazioni si ottiene che $\{vw_1, ..., \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_{m+1}, ..., \mathbf{v}_n\}$ è base di V. QED

Prop 4.3.13. Tutte le basi di uno SV FG hanno lo stesso numero di elementi.

Prop 4.3.14. Il numero di elementi delle basi di uno SV V è chiamato *dimensione* di V e si indica con $\dim V$.

Prop 4.3.15 (Lemma di sostituzione). Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ una base di V e sia $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{w}_n$ con $\lambda_1 \neq 0$. Allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n\}$ è base di V.

Dimostrazione. Si ha che $\mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \rangle$. Inoltre, dato che $\lambda_1 \neq 0$,

$$\mathbf{w}_1 = -\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{w}_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{w}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \rangle.$$

Dunque $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \rangle$. Dato che lo span di un insieme di vettori è SSV di ogni SV che li contiene e $\mathcal{B}$ è base di V, $V = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \rangle \subseteq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \rangle$. Per lo stesso motivo $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n \rangle \subseteq V$. Quindi $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ generano V.

Inoltre, siano $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$ tali che $\beta_1 \mathbf{v}_1 + ... + \beta_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Sostituendo $\mathbf{v}$ e riordinando si ottiene che

$$\beta_1 \mathbf{w}_1 + ... + (\beta_n + \beta_1 \lambda_n)\mathbf{w}_n = \mathbf{0}.$$

Dato che i $\mathbf{w}_i$ sono base di $\mathcal{B}$, deve essere $\beta_1 = (\beta_i + \beta_1 \lambda_i) = 0$ quindi $\beta_i = 0 \ \forall i$. Dunque $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ sono anche LI. QED

Prop 4.3.16. Sia V uno SV FG e sia W SSV di V. Allora $\dim W \leq \dim V$, con $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$.

Prop 4.3.17. Siano n vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$, e sia $n = \dim V$. Allora le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

- $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ sono LI.
- $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ generano V,
- $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ formano una base di V.

Prop 4.3.18. Le righe non nulle di una matrice a scala sono vettori LI.

Prop 4.3.19. Sia V uno SV e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ una sua base, allora $\forall \mathbf{v} \in V$ $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{v}_n$ in modo unico e i λ_i si dicono *coordinate* di v rispetto a $\mathcal{B}$. (Ciò permette di identificare ogni SV con $\mathbb{K}^n$ *una volta fissata una base*).

Prop 4.3.20. La dimensione dello SV banale è 0 perché la sua unica "base" è $\emptyset$.

4.4 Somme, somme dirette, prodotti cartesiani

Def 4.4.1. Siano U, W SSV di V SV su $\mathbb{K}$. Si dice che V è *somma* di U e W e si scrive $V = U + W$ se $V = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$.

Def 4.4.2. Sia $V = U + W$. Allora si dice che V è *somma diretta* di U e W e si scrive $V = U \oplus W$ se $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ in modo unico $\forall \ \mathbf{v} \in V$.

Prop 4.4.3. Sia $V = U + W$. Allora $V = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{\mathbf{0}_V\}$.

Prop 4.4.4. Sia V SV su $\mathbb{K}$, U SSV di V. Allora $\exists W$ SSV di $V \mid V = U \oplus W$. (Nota: W non è unico).

Prop 4.4.5 (Formula di Grassmann). $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Prop 4.4.6. Siano U, W SV su $\mathbb{K}$, il loro prodotto cartesiano $U \times W = \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{u} \in U, \ \mathbf{w} \in W\}$ con operazioni definite componente per componente è uno SV.

Prop 4.4.7. $\dim(U \times W) = \dim U + \dim W$.

Prop 4.4.8. $U \times W \cong U \oplus W$. *(Un isomorfismo è* $F : (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{w}$*).*

4.5 Applicazioni lineari

Def 4.5.1. Siano V, W due SV su $\mathbb{K}$. La funzione $F : V \to W$ si dice *applicazione lineare* se

1. $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $F(\lambda \mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u})\ \forall \mathbf{u} \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Prop 4.5.2. Siano V, W SV FG su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ una base di V. Siano $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n \in W$, $\exists!$ AL $f : V \to W \mid f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i\ \forall i$.

Prop 4.5.3. Siano V, W SV su $\mathbb{K}$ e $T, S : V \to W$ AL. Se coincidono su una base di V, allora coincidono su tutto V.

Prop 4.5.4. Siano V, W SV su $\mathbb{K}$ e $F : V \to W$ un'AL. Allora $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Prop 4.5.5. Siano V, W SV FG su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Fissata una base in V ed una in W, c'è corrispondenza biunivoca fra le AL $f : V \to W$ e le matrici di $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Prop 4.5.6. Siano V, W SV su $\mathbb{K}$ con una base fissata in ciascuno di essi e $L_A, L_B : V \to W$ AL associate rispettivamente alle matrici A e B. Allora $L_A \circ L_B$ e $L_B \circ L_A$ sono AL associate rispettivamente alle matrici AB e BA.

Def 4.5.7. Siano V, W SV su $\mathbb{K}$ e sia $L : V \to W$ un'AL. Si dice *immagine* di L l'insieme

$$\text{Im } L = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = L(\mathbf{v}) \text{ per qualche } \mathbf{v} \in V\}.$$

Si dice *preimmagine* di $\mathbf{w} \in W$ l'insieme

$$L^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{w} = L(\mathbf{v})\}.$$

Si dice *nucleo* di L l'insieme

$$\ker L = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{0}_W = L(\mathbf{v})\}.$$

Prop 4.5.8. Siano V, W SV su $\mathbb{K}$ e sia $L : V \to W$ un'AL, $\ker F$ è SSV di V (ed è l'unica preimmagine ad esserlo) e $\text{Im } F$ è SSV di W.

Prop 4.5.9. Sia $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ una base di V, allora $\text{Im}F = \langle F(\mathbf{v}_1), ..., F(\mathbf{v}_n)\rangle$.

Prop 4.5.10. Sia $F : V \to W$ un'AL, allora:

- F iniettiva $\Leftrightarrow \ker F = \{\mathbf{0}_V\}$
- F suriettiva $\Leftrightarrow \dim \text{Im } F = \dim W$

Teo 2 (Teorema della dimensione). Sia $F : V \to W$ con V, W SV FG un'AL, allora

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \text{Im } F.$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_r\}$ una base di $\ker L$. Per il Teorema del completamento si può completare ad una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_{r+1} ..., \mathbf{w}_n\}$ di V. Sia $\mathcal{B}_1 = \{F(\mathbf{w}_{r+1}, ..., F(\mathbf{w}_n)\}$. Si ha che

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} F &= \langle F(\mathbf{u}_1), ..., F(\mathbf{u}_r), F(\mathbf{w}_{r+1}), ..., F(\mathbf{w}_n)\rangle = \langle \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, F(\mathbf{w}_{r+1}), ..., F(\mathbf{w}_n)\rangle \\ &= \langle F(\mathbf{w}_{r+1}), ..., F(\mathbf{w}_n)\rangle.\end{aligned}$$

Ora, siano $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che $\alpha_{r+1} F(\mathbf{w}_{r+1}) + ... + \alpha_n F(\mathbf{w}_n) = \mathbf{0}$. Per la linearità di F, si ha che $F(\mathbf{w}) := F(\alpha_{r+1}\mathbf{w}_{r+1} + ... + \alpha_n \mathbf{w}_n) = \mathbf{0}$, e dunque $\mathbf{w} \in \ker F$, quindi $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_r \mathbf{u}_r$. Dunque $\alpha_{r+1}\mathbf{w}_{r+1} + ... + \alpha_n \mathbf{w}_n = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_r \mathbf{u}_r$, il che implica che

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_r \mathbf{u}_r - (\alpha_{r+1}\mathbf{w}_{r+1} + ... + \alpha_n \mathbf{w}_n) = \mathbf{0}.$$

Ma $\mathcal{B}$ è una base di V, quindi è un insieme LI e $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Dunque $\mathcal{B}_1$ è anche un insieme LI. QED

Prop 4.5.11. Sia $F : V \to W$, allora $\dim V > \dim W \Rightarrow F$ non è iniettiva, e $\dim V < \dim W \Rightarrow F$ non è suriettiva.

Prop 4.5.12. Sia $F : V \to W$ un'AL iniettiva, allora $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ LI $\Rightarrow F(\mathbf{v}_1), ..., F(\mathbf{v}_n)$ LI.

Prop 4.5.13. Sia $F : V \to W$ un isomorfismo (AL biiettiva), allora F^{-1} è lineare (e dunque un isomorfismo).

Prop 4.5.14. Sia $F : V \to W$ un'AL tale che l'insieme delle immagini dei vettori di una base di V sia base di W. Allora F è un isomorfismo.

Prop 4.5.15. Siano V, W SV di dimensione finita, $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

5 Matrici e sistemi lineari

5.1 Matrici

Prop 5.1.1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, il *rango colonne* rc Adi A è il numero di righe LI di A. Analogamente si definisce il *rango righe* di A.

Prop 5.1.2. Per ogni matrice A, rr $A =$ rc $A :=$ rk A.

Prop 5.1.3. Sia F l'AL associata alla matrice $m \times n$ A, $\dim \ker F = n - \text{rk}A$.

Prop 5.1.4. Sia F l'AL associata alla matrice A e sia G l'AL associata alla matrice B, la funzione $F \circ G$ è l'AL associata alla matrice AB. In particolare, se F è un'isomorfismo e G è la sua applicazione inversa, allora $F \circ G = i_V$, associata alla matrice identità I. Dunque $B \equiv A^{-1}$.

Prop 5.1.5. Il prodotto fra matrici, sotto opportune condizioni di definizione, è distributivo ed associativo.

5.2 Sistemi lineari

Def 5.2.1. Ogni SL si può scrivere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. La *matrice completa* del sistema è $(A|\mathbf{b})$. $\mathbf{b}$ è detto *termine noto* del sistema.

Prop 5.2.2. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, l'insieme delle soluzioni di un SL omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è uno SV di dimensione $n - \text{rk } A$.

Prop 5.2.3. Ogni SL omogeneo ammette almeno la soluzione banale $\{(0, ..., 0)\}$.

Teo 3 (Teorema di struttura). Dato un SL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sia $\mathbf{x}_P$ una soluzione particolare del sistema, e sia L_A l'AL associata ad A (nella base canonica). Allora tutte le soluzioni del sistema sono della forma $\mathbf{x}_P + \mathbf{z}$, con $\mathbf{z} \in \ker L_A$, e tutti gli oggetti di questa forma sono soluzioni del sistema.

Dimostrazione. L'insieme delle soluzioni del sistema coincide con $L_A^{-1}(\mathbf{b})$. Per ipotesi $\mathbf{x}_P$ è soluzione del sistema, dunque $\mathbf{x}_P \in L_A^{-1}(\mathbf{b})$. Consideriamo una generica soluzione $\mathbf{x} \in L_A^{-1}(\mathbf{b})$. Allora $L_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (\mathbf{x}_P)$ e dunque, per linearità di L_A, si ha che $L_A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{x} - \mathbf{x}_P = \mathbf{z} \in \ker L_A$. Riorganizzando i membri, si ottiene $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P + \mathbf{z}$.

D'altra parte, se $\mathbf{z} \in \ker L_A$, si ha che $L_A(\mathbf{x}_P + \mathbf{z}) = L_A(\mathbf{x}_P) + L_A(\mathbf{z}) = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$. e dunque $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P + \mathbf{z}$ è soluzione del sistema. QED

Prop 5.2.4. Le seguenti manovre sulle righe R_i, dette *operazioni elementari*, non cambiano l'insieme delle soluzioni di un SL né lo span dei suoi vettori riga:

- $R_i \mapsto \lambda R_i$
- $R_i \mapsto R_i + R_j$
- $R_i \leftrightarrow R_j$
- Eliminare una riga nulla.

Prop 5.2.5. Se una matrice è a scala per righe, i suoi vettori riga non nulli sono LI.

Teo 4 (Teorema di Rouché-Capelli). Dato un SL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, esso ammette soluzioni se e solo se $\text{rk}A = \text{rk}(A|\mathbf{b})$. Queste soluzioni dipendono da $n - \text{rk}A$ parametri, dove n è il numero di colonne di A. In particolare, se $n = \text{rk}A$ la soluzione è unica, altrimenti il sistema ammette infinite soluzioni.

Dimostrazione. Si consideri l'AL $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ associata ad A nelle basi canoniche. L'insieme delle soluzioni del sistema coincide con $L_A^{-1}(\mathbf{b})$, che per definizione è non vuoto se e solo se $\mathbf{b} \in \text{Im } L_A$. Ciò equivale a dire che il sistema ha soluzione se e solo se $\mathbf{b} \in \langle\text{colonne di } A\rangle$, ma questo è vero se e solo se $\langle\text{colonne di } A\rangle = \langle\text{colonne di } A|\mathbf{b}\rangle$, ossia se e solo se $\text{rk } A = \text{rk } A|\mathbf{b}$.

Se il sistema ammette soluzioni, allora per il Teorema di struttura queste sono della forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_P + \mathbf{z}$, dove $\mathbf{x}_P$ è una soluzione particolare del sistema e $\mathbf{z} \in \ker L_A$. Allora si possono verificare due casi:

1. $\dim \ker L_A = 0$, cioè $\ker L_A = \mathbf{0}$, quindi l'unica soluzione del sistema è $\mathbf{x}_P + \mathbf{0} = \mathbf{x}_P$.
2. $\dim \ker L_A > 0$ e quindi $\ker L_A$ contiene infiniti elementi, essendo SV non banale. Per il teorema della dimensione, si ha $\dim \ker L_A = n - \dim \text{Im } L_A = n - \text{rk } A$. Le soluzioni dipendono quindi da $n - \text{rk } A$ parametri.

QED

6 Il Teoremone

Sia $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un'AL con matrice associata A in una coppia di basi fissata. Allora le seguenti 10 affermazioni sono equivalenti:

- F è un isomorfismo.
- F è iniettiva.
- F è suriettiva.
- $\text{rk}A = n$.
- Le colonne di A sono LI.
- Le righe di A sono LI.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha come unica soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha un'unica soluzione.
- A è invertibile.
- $\det A \neq 0$.

7 Determinante e matrice inversa

7.1 Determinante

Prop 7.1.1 (Assiomi per colonne). Esiste ed è unica una funzione $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ per cui valgono le seguenti proprietà:

1. $\det(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{v} + \mathbf{w}, ..., \mathbf{c}_n) = \det(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{v}, ..., \mathbf{c}_n) \; + \; \det(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{w}, ..., \mathbf{c}_n)$
2. $\det(\mathbf{c}_1, ..., \lambda\mathbf{c}_i, ..., \mathbf{c}_n) = \lambda \det(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_i, ..., \mathbf{c}_n)$
3. $\det(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{v}, ..., \mathbf{v}, ..., \mathbf{c}_n) = 0$
4. $\det I_n = 1$

Lo stesso è vero se si scrivono le matrici in termini di vettori riga invece che di vettori colonna.

Def 7.1.2. Sia $S = \{1, 2, ..., n\}$, si definisce *permutazione* una funzione biunivoca $\sigma : S \to S$ e si denota con

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Def 7.1.3. Si definisce *trasposizione* una permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & i & j & ... & n \\ 1 & ... & j & i & ... & n \end{pmatrix}$$

Def 7.1.4. Si definisce *ciclo* una permutazione denotata $(i_1, ..., i_s)$ (dove $\{i_1, ..., i_s\} \subset \{1, ..., n\}$), che manda i_j in i_{j+1} $\forall 1 \leq j < s$, i_s in i_1 ed ogni altro intero in se stesso. Più cicli si dicono *disgiunti* se ogni elemento viene fissato da tutti tranne al massimo uno di essi.

Prop 7.1.5. Ogni permutazione è la composizione di trasposizioni.

Def 7.1.6. Si definisce *parità* di una permutazione σ il numero $\Phi(\sigma) = (-1)^s$, dove s è il numero di trasposizioni che compongono σ, o equivalentemente il numero di inversioni, cioè di coppie $i < j$ t.c. $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Prop 7.1.7. Il numero $\Phi(\sigma)$ è univoco per ogni permutazione.

Prop 7.1.8. Siano σ_1, σ_2 permutazioni, si ha che $\Phi(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \Phi(\sigma_1)\Phi(\sigma_2)$.

Prop 7.1.9. Ogni permutazione si scrive in modo unico come composizione di cicli disgiunti.

Prop 7.1.10. Sia S_n l'insieme delle permutazioni dei primi n naturali, la funzione definita al punto 1 è

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \Phi(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$$

Def 7.1.11. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice ottenuta rimuovendo la i-esima riga e la j-esima colonna da A e $\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, lo *sviluppo di Laplace* di $\det A$ secondo la i-esima riga è

$$\det A = a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + ... a_{in}\Gamma_{in}$$

e quello secondo la j-esima colonna è

$$\det A = a_{1j}\Gamma_{1j} + a_{2j}\Gamma_{2j} + ... a_{nj}\Gamma_{nj}.$$

Prop 7.1.12. $\det A = \det A^t$

Prop 7.1.13. Dagli assiomi per righe si ricava che

1. $$\det \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ ... \\ \mathbf{R}_i \\ ... \\ \mathbf{R}_j \\ ... \\ \mathbf{R}_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ ... \\ \mathbf{R}_j \\ ... \\ \mathbf{R}_i \\ ... \\ \mathbf{R}_n \end{pmatrix}$$

2. $$\det \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ ... \\ \mathbf{R}_i \\ ... \\ \mathbf{R}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ ... \\ \mathbf{R}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{R}_j \\ ... \\ \mathbf{R}_n \end{pmatrix}$$

   e lo stesso vale per le colonne.

Prop 7.1.14. Inoltre, $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ ha una riga o una colonna che è CL delle altre. In particolare, $\det A = 0$ se A ha una riga o una colonna nulla.

Prop 7.1.15. Si ha che

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{12}...a_{nn}$$

Prop 7.1.16. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ e A' una matrice a scala ad essa associata. Allora $\det A = \rho \det A'$, dove $\rho \neq 0$ è il prodotto degli scalari per cui sono state moltiplicate le righe di A durante l'algoritmo di Gauss (escludendo durante le combinazioni lineari) moltiplicato per 1 se sono state scambiate righe un numero pari di volte, per -1 se se sono state scambiate righe un numero dispari di volte.

7.2 Matrice inversa

Def 7.2.1. Si dice che $A \in M_n(\mathbb{K})$ è *invertibile* se $\exists A^{-1} \mid AA^{-1} = A^{-1}A = I$. A^{-1} è detta *matrice inversa* di A.

Prop 7.2.2. $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} & ... & \Gamma_{n1} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & ... & \Gamma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1n} & \Gamma_{2n} & ... & \Gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

Prop 7.2.3. $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Prop 7.2.4. Tramite l'algoritmo di Gauss completo, si può passare dalla matrice $(A|I)$ alla matrice $(I|A^{-1})$.

Prop 7.2.5 (Teorema di Binet.). $\det AB = \det A \det B$

8 Cambi di base

Def 8.0.1. Sia $L : V \to V'$ un'AL, la matrice $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ ad essa *associata* nella base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ in V e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_m\}$ in V' è

$$A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (L(\mathbf{b}_1)_{\mathcal{B}'} ... L(\mathbf{b}_n)_{\mathcal{B}'}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

Prop 8.0.2. Siano V, V' SV su $\mathbb{K}$ con basi rispettivamente $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_n\}$. Sia $F : V \to V',\ \mathbf{b}_i \mapsto \mathbf{b}'_i$. Allora la matrice associata ad F nelle basi scelte è $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I_n$.

Prop 8.0.3. Sia $I_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice associata all'applicazione identità nella base $\mathcal{B}$ nel dominio e $\mathcal{B}'$ nel codominio, si ha che $I_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

Prop 8.0.4. Sia $L : V \to W$ un'AL, con $\dim V = n$ e $\dim W = m$,

$$A_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = I^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_m} A_{\mathcal{C}_n\mathcal{C}_m} I_{\mathcal{B}\mathcal{C}_n}$$

9 Autovettori e autovalori

9.1 Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità

Def 9.1.1. Sia $F : V \to V$ un'AL, con V SV su $\mathbb{K}$ (anche ∞-dimensionale). Siano $\lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$. Si dice che $\mathbf{v}$ è *autovettore* di F con *autovalore* λ se $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Sia A una matrice, gli autovettori e gli autovalori di A sono quelli dell'AL associata ad A nella base canonica.

Def 9.1.2. Sia $F : V \to V$ un'AL, con V SV FG su $\mathbb{K}$. F si dice *diagonalizzabile* se esiste una base in cui la matrice associata ad F è diagonale.

Prop 9.1.3. Sia $F : V \to V$ un'AL, con V SV FG su $\mathbb{K}$. F è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ esiste una base di autovettori di F.

Def 9.1.4. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice *diagonalizzabile* se $\exists P \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile t.c. $P^{-1}AP$ sia diagonale.

Prop 9.1.5. Sia $F : V \to V$ un'AL ed $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice associata ad essa in una qualunque base, F è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A è diagonalizzabile. Inoltre, la base che diagonalizza F è composta dai vettori colonna della matrice che diagonalizza A.

Def 9.1.6. Data $A \in M_n(\mathbb{K})$, il *polinomio caratteristico* di A è $p_A(x) = det(A - xI)$.

Prop 9.1.7. λ è autovalore di $A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$.

Def 9.1.8. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si dicono *simili* se $\exists Q \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile t.c. $Q^{-1}AQ = B$. In simboli, $A \sim B$.

Prop 9.1.9. $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$.

Prop 9.1.10. $A \sim B \Rightarrow p_A(x) = p_B(x)$. (NB: il contrario non è vero).

Def 9.1.11. Sia $F : V \to V$ un'AL, l'*autospazio* di F su λ è

$$V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}.$$

(NB: $\mathbf{0} \in V_\lambda$, ma per definizione non è un autovettore).

Prop 9.1.12. $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$.

Prop 9.1.13. Siano $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ autovettori di autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Se $\lambda_1 \neq ... \neq \lambda_n$, allora $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ sono LI.

Prop 9.1.14. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ con n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.

Def 9.1.15. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ e λ un suo autovalore. Si definisce *molteplicità algebrica* di λ il numero $m_a(\lambda) \mid p(x) = (x - \lambda)^{m_a(\lambda)}\, q(x)$ con $q(\lambda) \neq 0$ (in pratica la più alta potenza di $(x - \lambda)$ che divide $p(x)$). Si definisce *molteplicità geometrica* di λ il numero $m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

Prop 9.1.16. $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ (se λ è autovalore).

Prop 9.1.17. $A \in M_n(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile con autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n \Leftrightarrow m_g(\lambda_1)$ $+ ... + m_g(\lambda_n) = n$, il che è equivalente a dire che $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)\ \forall i$.

Prop 9.1.18. Se un'AL $F : V \to V$ ha un autovalore $\lambda = 0$, non è iniettiva.

Prop 9.1.19. Siano $L_A, L_B : V \to V$ AL diagonalizzabili associate in una base rispettivamente alle matrici A e B, e sia $AB = BA$. Allora se $\mathbf{v}$ è autovettore di A lo è anche $B\mathbf{v}$, e vice versa. Si dice che B mantiene stabile l'autospazio di A.

9.2 Forme di Jordan

Def 9.2.1. Si dice *blocco di Jordan* di ordine r ed autovalore λ la matrice

$$J_\lambda^r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Def 9.2.2. Si dice *matrice di Jordan* la matrice

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{r_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^{r_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & J_{\lambda_k}^{r_k} \end{pmatrix} \in M_{r_1 + ... + r_k}(\mathbb{K}).$$

Teo 5 (Teorema di Jordan). Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. Allora:

1. $\exists\ P \in M_n(\mathbb{C})$ invertibile tale che $P^{-1}AP = J$, dove J è una matrice di Jordan con gli autovalori di A sulla diagonale.
2. Sia $B \in M_n(\mathbb{C})$, $B \sim A \Leftrightarrow$ hanno la stessa forma di Jordan (a meno di un riordino dei blocchi di Jordan).

Prop 9.2.3. Equivalentemente, data un'AL $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con associata la matrice A rispetto a $\mathcal{C}$, esiste una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale la matrice associata a T è in forma di Jordan. La matrice P dell'enunciato precedente è la matrice di cambio di base tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

10 Prodotti scalari ed hermitiani

10.1 Forme bilineari

Def 10.1.1. Sia V uno SV su $\mathbb{R}$. Una funzione $g : V \times V \to \mathbb{R}$ si dice *forma bilineare* se $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

1. $g(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}', \mathbf{v})$
2. $g(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}') = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$
3. $g(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
4. $g(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Se inoltre $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, g si dice forma bilineare *simmetrica* o *prodotto scalare* (alcuni, inclusa Wikipedia, definiscono prodotti scalari solo le FB simmetriche definite positive).

Prop 10.1.2. Siano V SV FG con $\dim V = n$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ base di V e c_{ij} con $i, j \in \{1, ..., n\}$ scalari. Allora $\exists!$ una FB $g : V \times V \to \mathbb{R} \mid g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = c_{ij}\ \forall\ i, j$.

Prop 10.1.3. Sia V SV FG con $\dim V = n$. Fissata una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$, esiste una corrispondenza biunivoca tra $\{g : V \times V \to \mathbb{R} \text{ FB}\}$ e $M_n(\mathbb{R})$, data da

$$g \to C = \begin{pmatrix} g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) & ... & g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1) & ... & g(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{pmatrix}$$
$$C \to g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v})_{\mathcal{B}}^t C (\mathbf{w})_{\mathcal{B}}.$$

Prop 10.1.4. FB simmetriche corrispondono a matrici simmetriche.

Prop 10.1.5. Sia g una FB con matrice associata C nella base $\mathcal{B}$. La matrice associata a g nella base $\mathcal{B}'$ è

$$C' = I_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^t C I_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Def 10.1.6. Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si dicono *congruenti* se $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile | $P^t AP = B$. In simboli $A \cong B$.

10.2 Prodotti scalari

Def 10.2.1. Sia V uno SV su un campo $\mathbb{K}$. Un PS si dice *non degenere* se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$, e si dice *definito positivo* se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \ \forall \mathbf{v} \in V$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Def 10.2.2. Sia $\langle , \rangle$ un PS DP. La *norma* del vettore $\mathbf{v}$ è definita come

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Prop 10.2.3. Sia V SV su $\mathbb{R}$ con $\langle , \rangle$ PS DP. Si dice che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono *ortogonali* (o perpendicolari) tra loro rispetto a $\langle , \rangle$ se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Si scrive $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Prop 10.2.4. Se $\langle , \rangle$ è un PS DP, allora $\nexists \mathbf{v}$ ortogonale a se stesso. Al contrario, se $\langle , \rangle$ è degenere, allora $\exists \mathbf{v}$ ortogonale a se stesso.

Prop 10.2.5. Il prodotto di Minkowski è il prodotto scalare $\langle , \rangle_M$ tale che

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle_M = x_1 y_1 + ... + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n.$$

Esso non è né DP né degenere.

Prop 10.2.6. Sia W uno SSV di V su $\mathbb{R}$ con un PS $\langle , \rangle$. Si definisce *sottospazio ortogonale* a W

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0\}.$$

Prop 10.2.7. $W^\perp$ è SSV di V.

Prop 10.2.8. Se $\langle , \rangle$ è il PS euclideo, allora $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Def 10.2.9. Sia V SV su $\mathbb{R}$ con $\langle , \rangle$ PS DP. Una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ di V è *ortogonale* se

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \begin{cases} \neq 0 \text{ se } i = j \\ = 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

e *ortonormale* se

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} = 1 \text{ se } i = j \\ = 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Prop 10.2.10. V SV su $\mathbb{R}$ con $\langle , \rangle$ PS DP e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, il *coefficiente di Fourier* di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{w}$ è

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}.$$

Prop 10.2.11. Sia V SV su $\mathbb{R}$ con $\dim V = n$, con $\langle , \rangle$ PS DP, e sia W SSV di V con base ortogonale $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m\}$. Allora $\exists \mathbf{b}_{m+1}, ..., \mathbf{b}_n \in V | \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m, ..., \mathbf{b}_n\}$ è base ortogonale di V rispetto a $\langle , \rangle$. Ciò è possibile grazie all'*algoritmo di Gram-Schmidt*.

Prop 10.2.12. V SV FG su $\mathbb{R}$ con $\langle , \rangle$ PS DP. Allora esiste una base di V ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$.

Prop 10.2.13. Sia Sia V SV su $\mathbb{R}$ con $\dim V = n$, con $\langle , \rangle$ PS DP, e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$. Allora la matrice associata a $\langle , \rangle$ in $\mathcal{B}$ è I_n.

10.3 Prodotti hermitiani

Def 10.3.1. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$. Una funzione $g : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice *prodotto hermitiano* se $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$ si ha

1. $g(\mathbf{u} + \mathbf{u}', \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}', \mathbf{v})$
2. $g(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{v}') = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{v}')$
3. $g(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
4. $g(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) = \overline{\lambda} g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
5. $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{g(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$

Prop 10.3.2. Se $\langle , \rangle$ è un prodotto hermitiano, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$. Le nozioni di *definito positivo* e *non degenere* si estendono ai prodotti hermitiani.

Def 10.3.3. Il *prodotto hermitiano standard* è $\langle , \rangle_h$ con

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle_h = x_1\overline{y_1} + ... + x_n\overline{y_n}$$

11 Teorema spettrale

11.1 Matrici ortogonali e simmetriche

Def 11.1.1. Sia V SV FG su $\mathbb{R}$, con $\langle , \rangle$ PS DP. Un'AL $U : V \to V$ si dice *ortogonale* rispetto a $\langle , \rangle$ se

$$\langle U(\mathbf{v}), U(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\ \ \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Prop 11.1.2. Sia V SV su $\mathbb{R}$ con $\dim V = n$, con $\langle , \rangle$ PS DP e $U : V \to V$ un'AL. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. U è ortogonale.
2. $\langle U(\mathbf{v}), U(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle\ \ \forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (U conserva la norma dei vettori).

3. $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ è base ortonormale di V rispetto a $\langle , \rangle \Rightarrow \{U(\mathbf{b}_1), ..., U(\mathbf{b}_n)\}$ è base ortonormale di V rispetto a $\langle , \rangle$.

Def 11.1.3. $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice *ortogonale* se

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle_e = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_e \ \forall \ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Prop 11.1.4. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. A è ortogonale.
2. $A^t = A^{-1}$.
3. I vettori riga di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto a $\langle , \rangle_e$ e lo stesso vale per le colonne.

Prop 11.1.5. Sia V SV FG su $\mathbb{R}$, con $\langle , \rangle$ PS DP e $U : V \to V$ un'AL con matrice associata A in una base $\mathcal{B}$ ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$. Allora U è ortogonale $\Leftrightarrow$ A è ortogonale.

Prop 11.1.6. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale, gode delle seguenti proprietà:

1. $\det A = \pm 1$
2. $A^{-1} = A^t$ è ortogonale.
3. Se $B \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale, AB e BA sono ortogonali.

Def 11.1.7. Sia V SV FG su $\mathbb{R}$, con $\langle , \rangle$ PS DP. Un'AL $T : V \to V$ si dice *simmetrica* rispetto a $\langle , \rangle$ se

$$\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) \rangle .$$

Prop 11.1.8. Sia V SV FG su $\mathbb{R}$, con $\langle , \rangle$ PS DP e $T : V \to V$ un'AL con matrice associata A in una base $\mathcal{B}$ ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$. Allora U è simmetrica $\Leftrightarrow$ A è simmetrica.

11.2 Matrici unitarie ed hermitiane

Def 11.2.1. Sia V SV FG su $\mathbb{K}$ con $\langle , \rangle_h$ PH DP. Un'AL $U : V \to V$ si dice *unitaria* se

$$\langle U(\mathbf{v}), U(\mathbf{w}) \rangle_h = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_h \ \forall \ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Def 11.2.2. $A \in M_n(\mathbb{K}$ si dice *unitaria* se

$$A^{-1} = \overline{A^t}$$

Prop 11.2.3. Fissata una base, ad AL unitarie corrispondono matrici unitarie.

Def 11.2.4. Sia V SV FG su $\mathbb{K}$ con $\langle , \rangle_h$ PH DP. Un'AL $T : V \to V$ si dice *hermitiana* se

$$\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_h = \langle \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) \rangle_h \ \forall \ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Def 11.2.5. $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice *hermitiana* se
$$A = \overline{A^t}.$$

Prop 11.2.6. $A \in M_n(\mathbb{K})$ è hermitiana $\Leftrightarrow \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle_h$, dove $\langle,\rangle_h$ è il PH standard in $\mathbb{K}^n$.

Prop 11.2.7. Fissata una base ortonormale rispetto a un PH DP, ad AL hermitiane corrispondono matrici hermitiane e ad AL unitarie corrispondono matrici unitarie.

11.3 Teorema spettrale

Prop 11.3.1. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora tutti gli autovalori di A sono reali. Lo stesso vale per le matrici hermitiane.

Prop 11.3.2. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e siano $\lambda \in \mathbb{R}$ un suo autovalore, $\mathbf{v} \in V_\lambda$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ rispetto a $\langle,\rangle_e$. Allora $A\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$. Lo stesso vale per matrici hermitiane e vettori ortogonali rispetto a $\langle,\rangle_h$.

Prop 11.3.3. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e siano $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$ due suoi autovalori. Allora, rispetto a $\langle,\rangle_e$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}\ \forall\ \mathbf{v} \in V_\lambda, \mathbf{w} \in V_\mu$. Si scrive $V_\lambda \perp V_\mu$ rispetto a $\langle,\rangle_e$. Lo stesso vale per matrici hermitiane e $\langle,\rangle_h$.

Teo 6 (Teorema spettrale, caso reale). Sia V SV su $\mathbb{R}$ con $\dim V = n$, e sia $\langle,\rangle$ un PS DP. Sia $T : V \to V$ un'AL simmetrica associata alla matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ in una base $\mathcal{B}$ ortonormale rispetto a $\langle,\rangle$. Allora

1. T è diagonalizzabile ed esiste una base $\mathcal{N}$ ortonormale rispetto a $\langle,\rangle$ costituita da autovettori di T.
2. A è diagonalizzabile tramite una matrice P ortogonale, ossia $\exists P \in M_n(\mathbb{R})|\ P^tAP = P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.

Teo 7 (Teorema spettrale, caso complesso). Sia V SV su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$, e sia $\langle,\rangle_h$ un PH DP. Sia $T : V \to V$ un'AL hermitiana associata alla matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ in una base $\mathcal{B}$ ortonormale rispetto a $\langle,\rangle_h$. Allora

1. T è diagonalizzabile ed esiste una base $\mathcal{N}$ ortonormale rispetto a $\langle,\rangle_h$ costituita da autovettori di T.
2. A è diagonalizzabile ad una matrice reale tramite una matrice P unitaria, ossia $\exists P \in M_n(\mathbb{R})|\overline{P^t}AP = P^{-1}AP \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale reale.

Dimostrazione. Sia λ_1 un autovalore reale di T (che esiste per quanto detto sopra) e sia $\mathbf{u}_1 \in V$ un autovettore di norma 1 relativo a λ_1. Sia $W_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle^\perp$.

Allora si ha che $\dim W_1 = n - 1$. Consideriamo ora $T_1 = T|_{W_1} : W_1 \to V$. Dato che $\forall \mathbf{w} \in W_1$ $\mathbf{u}_1 \perp T_1(\mathbf{w})$, si ha che $\text{Im } T_1 \subseteq W_1$, quindi $T_1 : W_1 \to W_1$.

Si può ripetere tutto il ragionamento considerando un autovalore di T_1 $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ ed un relativo autovettore di norma 1 $\mathbf{u}_2 \in W_1$. Chiaramente, dato che T_1 è una restrizione di T, λ_2 e $\mathbf{u}_2$ sono autovalore e autovettore di T. Inoltre, definendo $W_2 = \langle \mathbf{u}_2 \rangle^\perp$, ogni suo vettore è ortogonale a u_1 dato che $W_2 \subseteq W_1$. Si restringe T_1 a W_2 in modo del tutto analogo a sopra, e così via.

Dopo n passi si saranno ottenuti n autovettori LI ortogonali e di norma 1 $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$, che costituiscono la base ortonormale di autovettori $\mathcal{N}$. Dunque T è diagonalizzabile, e A è diagonalizzabile alla matrice con autovettori reali $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sulla diagonale, tramite la matrice unitaria di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{N}$.

Se $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ il caso complesso si riduce a quello reale. QED

Prop 11.3.4. Una formulazione equivalente del Teorema spettrale è la seguente: sia V SV su $\mathbb{R}$ con $\dim V = n$, e sia $\langle , \rangle$ un PS DP. Sia $\langle , \rangle'$ un PS (non necessariamente DP). Allora esiste una base $\mathcal{N}$ ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$ ed ortogonale rispetto a $\langle , \rangle'$.

Prop 11.3.5. Sia V SV su $\mathbb{R}$ con $\dim V = n$, e sia $\langle , \rangle$ un PS DP associato ad una matrice diagonale D rispetto ad una base $\mathcal{N}$. Allora

1. $\langle , \rangle$ è non degenere $\Leftrightarrow$ tutti gli elementi sulla diagonale di D sono $\neq 0$.
2. $\langle , \rangle$ è DP $\Leftrightarrow$ tutti gli elementi sulla diagonale di D sono > 0.

Prop 11.3.6. Siano $A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$ con P invertibile e $B = P^t A P$. A e B hanno gli stessi autovalori $\Leftrightarrow P^t = P^{-1}$.

11.4 Teorema di Sylvester

Prop 11.4.1. Sia V SV su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$, sia $\langle , \rangle$ un PS DP con matrice associata C in una base $\mathcal{B}$ qualsiasi e siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ i suoi autovalori. Definiti $p = \sum_{\lambda_i > 0} m_a(\lambda_i)$, $q = \sum_{\lambda_i > 0} m_a(\lambda_i)$ e $r = m_a(0)$, si definisce *segnatura* di $\langle , \rangle$ (p, q) oppure (p, q, r).

Teo 8 (Teorema di Sylvester). Sia $\langle , \rangle$ un PS sullo SV V sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$, la sua segnatura (p, q, r) non dipende dalla base scelta. Inoltre esiste una base in cui la matrice associata a $\langle , \rangle$ è la sua *forma standard*

$$D = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Prop 11.4.2. Un PS $\langle , \rangle$ con segnatura (p, q, r) è definito positivo se $q = r = 0$ ed è non degenere se $q = 0$.

12 Forme quadratiche

Def 12.0.1. Sia V uno SV su $\mathbb{R}$ e sia $\langle , \rangle$ un PS. Allora la funzione

$$q : V \to \mathbb{R},\ q : \mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

si dice *forma quadratica* associata a $\langle , \rangle$.

Prop 12.0.2. Data una FQ q, ad essa è univocamente associato il PS dato da

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - [q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v})]}{2}.$$

Prop 12.0.3. Sia V uno SV su $\mathbb{R}$ e sia $\langle , \rangle$ un PS con matrice associata C nella base $\mathcal{B}$. Allora la FQ q associata a $\langle , \rangle$ è data da $q(\mathbf{v}) = (\mathbf{v})^t_{\mathcal{B}} C (\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$.

Prop 12.0.4. Sia V uno SV su $\mathbb{R}$ con $\dim V = n$ e base $\mathcal{B}$ fissata, e sia q una FQ con $q(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{nn}x_n^2$, q è associata alla matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & ... & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{12} & ... & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Prop 12.0.5 (Teorema degli assi principali). Sia $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una FQ associata in $\mathcal{C}$ alla matrice C. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{N}$ costituita da autovettori di C rispetto a cui la matrice associata a q è diagonale e dunque $q(x_1, ..., x_n) = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$, dove gli x_i sono le coordinate di un vettore rispetto a $\mathcal{N}$ e i λ_i sono autovalori di C.

Prop 12.0.6. Nel piano, cosiderando l'equazione $q(x, y) = c > 0$, se la segnatura di q è:

- $(0, 2, 0)$ la conica associata non esiste.
- $(1, 1, 0)$ la conica associata è un'iperbole.
- $(2, 0, 0)$ la conica associata è un'ellisse.
- $(1, 0, 1)$ la conica associata è una parabola.

13 Spazi duali

Def 13.0.1. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$. Si dice *spazio duale* di V l'insieme

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ applicazione lineare}\}$$

Prop 13.0.2. Uno spazio duale è uno SV.

Prop 13.0.3. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ una sua base. Si definiscono in V^* le funzioni

$$v_i^* : V \to \mathbb{K},\ v_j \mapsto \delta_{ij}$$

Def 13.0.4. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e © una sua base. Allora $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{v}_1^*, ..., \mathbf{v}_n^*\}$ è base di V^* ed è detta *base duale.*

Prop 13.0.5. Sia V uno SV FG su $\mathbb{K}$ con una base fissata $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$. Allora per l'associazione AL-matrici $V^* \cong M_{1,n}(\mathbb{K})$. Inoltre $V \cong V^*$ tramite l'isomorfismo $\phi : V \to V^*,\ \mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{v}_i^*$.

Prop 13.0.6. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$, e sia $\langle , \rangle$ un PS non degenere. Sia $\mathbf{v} \in V$, si consideri $L_\mathbf{v} : V \to \mathbb{K},\ \mathbf{w} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Allora la funzione $\Phi : V \to V^*,\ \mathbf{v} \mapsto L_\mathbf{v}$ è un isomorfismo tra V e V^*.

Prop 13.0.7. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$ e sia W SSV di V. Si definisce

$$W^{\checkmark} = \{f \in V^* \mid f(\mathbf{w}) = 0\ \forall\ \mathbf{w} \in W\}.$$

Prop 13.0.8. Sia V uno SV FG su $\mathbb{K}$ e sia W SSV di V. Allora $\dim W^{\checkmark} = \dim V - \dim W$.

Prop 13.0.9. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$, e sia $\langle , \rangle$ un PS non degenere. Sia $\mathbf{v} \in V$, si consideri $L_\mathbf{v} : V \to \mathbb{K},\ \mathbf{w} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Allora $W^\perp \cong W^{\checkmark}$ tramite la funzione $\Phi : V \to V^*,\ \mathbf{v} \mapsto L_\mathbf{v}$.

Prop 13.0.10. Sia V uno SV FG su $\mathbb{K}$ e sia $\langle , \rangle$ un PS non degenere. Allora $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Prop 13.0.11. Sia V uno SV su $\mathbb{K}$. Sia $\mathbf{v} \in V$, si consideri la funzione $\psi \in V^{**}$ con $\psi_\mathbf{v} : V^* \to \mathbb{K},\ \varphi \mapsto \varphi(\mathbf{v})$. Allora la funzione $\Phi : V \to V^{**},\ \mathbf{v} \mapsto \psi_\mathbf{v}$ realizza un isomorfismo canonico tra V e V^{**}. I due spazi si possono quindi identificare, identificando $\mathbf{v}$ con $\psi_\mathbf{v}$.

Prop 13.0.12. Di conseguenza si può pensare che, siano V SV su $\mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in V$, $\varphi \in V^*$, $\mathbf{v}(\varphi) = \varphi(\mathbf{v})$.

14 Tensori

14.1 Spazi vettoriali liberi

Def 14.1.1. Sia $S = \{s_1, ..., s_n\}$ un insieme finito, lo *spazio vettoriale libero* di S è

$$V_S = \{f : S \to \mathbb{K}\}.$$

Prop 14.1.2. Definendo le operazioni $+$ e $\cdot$ nel modo consueto per le funzioni, V_S è uno SV.

Prop 14.1.3. Si definiscono in V_S le funzioni

$$s_i^* : S \to \mathbb{K},\ s_j \mapsto \delta_{ij}.$$

Prop 14.1.4. Sia $S = \{s_1, ..., s_n\}$ un insieme finito di n elementi, $\{s_1^*, ..., s_n^*\}$ è base di V_S.

Prop 14.1.5. Spesso si identificano s_i ed s_i^*. V_S è quindi detto l'insieme delle *combinazioni lineari formali* degli elementi di S.

14.2 Tensori e forme multilineari

Def 14.2.1. Siano $V_1, ..., V_k, W$ SV FG su $\mathbb{K}$. Un'applicazione $F : V_1 \times ... \times V_k \to W$ si dice *multilineare* se

$$F(\mathbf{v}_1, ..., \alpha\mathbf{v}_i + \beta\mathbf{u}_i, ..., \mathbf{v}_k) = \alpha F(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i, ..., \mathbf{v}_k) + \beta F(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{u}_i, ..., \mathbf{v}_k)$$
$$\forall\ \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \in V_i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i \in \{1, ..., k\}.$$

Def 14.2.2. Siano V, W SV FG su $\mathbb{K}$ con basi fissate rispettivamente $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m\}$. Sia $S = \{\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}'_j \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ l'insieme degli mn simboli senza significato $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}'_j$. Si dice *prodotto tensoriale* di V e W l'insieme

$$V \otimes W = V_S = \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}'_j \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Un elemento T di $V \otimes W$ si dice *tensore*. Il prodotto tensoriale di due vettori $\mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W$ è definito come

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \sum_{i,j} v_i w_j \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}'_j.$$

dove le v_i e w_j sono le coordinate dei vettori rispetto alle basi scelte. Se $\exists \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W \mid T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, T è detto *decomponibile* o riducibile. Non tutti i tensori di $V \otimes W$ sono decomponibili.

Prop 14.2.3. Siano V, W, U SV FG su $\mathbb{K}$. Allora esiste un'applicazione bilineare $\phi : V \times W \to V \otimes W$ che soddisfa la seguente proprietà, detta *proprietà universale*:

$$\forall g : V \times W \to U \text{ AB} \quad \exists g_* : V \otimes W \to U \text{ AL} \mid g = g_* \circ \phi.$$

Prop 14.2.4. $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$

Prop 14.2.5. Sia V SV FG su $\mathbb{K}$, sia $\mathcal{L}(V, V)$ l'insieme delle AL $L : V \to V$, siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,\ \varphi \in V^*$ e sia

$$L_{\varphi \otimes \mathbf{v}} : V \to V,\ \mathbf{w} \mapsto \varphi(\mathbf{w})\mathbf{v}.$$

Allora la funzione $g_* : V^* \otimes V \to \mathcal{L}(V, V),\ \varphi \otimes \mathbf{v} \mapsto L_{\varphi \otimes \mathbf{v}}$ realizza un isomorfismo tra $V^* \otimes V$ e $\mathcal{L}(V, V)$.

Prop 14.2.6. Sia V SV FG su $\mathbb{K}$, sia $\mathcal{P}(V)$ l'insieme dei PS $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, siano $\varphi, \psi \in V^*$ e sia

$$\langle , \rangle_{\varphi \otimes \psi} : V \times V \to \mathbb{K},\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \varphi(\mathbf{v})\psi(\mathbf{w}).$$

Allora la funzione $g_* : V^* \otimes V^* \to \mathcal{P}(V),\ \varphi \otimes \psi \mapsto \langle , \rangle_{\varphi \otimes \psi}$ realizza un isomorfismo tra $V^* \otimes V^*$ e $\mathcal{P}(V)$.

Prop 14.2.7. I ragionamenti fatti per i prodotti tensoriali di due SV si possono generalizzare ad un qualsiasi numero k di SV, sostituendo alle applicazioni bilineari applicazioni k-lineari.

Def 14.2.8. Sia V SV FG su $\mathbb{K}$ con base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$. Si dice tensore *covariante* un tensore

$$T = \sum T_{i_1 ... i_r} \mathbf{v}^{*i_1} \otimes ... \otimes \mathbf{v}^{*i_r} \in \tau^r = V^* \otimes ... \otimes V^* \ r \text{ volte}.$$

Si dice tensore *controvariante* un tensore

$$T = \sum T^{i_1 ... i_s} \mathbf{v}_{i_1} \otimes ... \otimes \mathbf{v}_{i_s} \in \tau_s = V \otimes ... \otimes V \ s \text{ volte}.$$

Si dice tensore *misto* un tensore

$$T = \sum T^{j_1 ... j_s}_{i_1 ... i_r} \mathbf{v}^{*i_1} \otimes ... \otimes \mathbf{v}^{*i_r} \otimes \mathbf{v}_{j_1} \otimes ... \otimes \mathbf{v}_{j_s} \in \tau^r_s = V^* \otimes ... \otimes V^* \otimes V \otimes ... \otimes V.$$

Prop 14.2.9. In generale, l'insieme $\tau^r_s = V^* \otimes ... \otimes V^* \otimes V \otimes ... \otimes V$ è canonicamente isomorfo all'insieme delle AM $F : (V)^r \times (V^*)^s \to \mathbb{K}$ e a quello delle AM $F : (V)^s \to (V)^r$.[1]

15 Gruppi

Def 15.0.1. Sia G un insieme e $\varphi : G \times G \to G$ una funzione, si dice che (G, φ) è un *gruppo* se

1. $\varphi\ (\varphi(x, y), z) = \varphi\ (x, \varphi(y, z))\ \forall x, y, z \in G$
2. $\exists!\ e \in G \mid \varphi(e, x) = \varphi(x, e) = x\ \forall x \in G$
3. $\forall x \in G\ \exists x^{-1} \in G \mid \varphi(x, x^{-1}) = \varphi(x^{-1}, x) = e$. y è detto l'*inverso* (o meno spesso l'opposto) di x.

Se $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)\ \forall x, y, \in G$ il gruppo è detto *abeliano*.

Def 15.0.2. Sia (G, φ) un gruppo con un'operazione $\varphi(x, y) := xy$. $H \subset G$ si dice un suo *sottogruppo* se

1. $e \in H$
2. $\forall x, y \in H\ xy \in H$

[1]Source(s): dude trust me

3. $\forall x \in H \; x^{-1} \in H$.

Def 15.0.3. Siano $(G, \cdot)$ e $(G', *)$ due gruppi. La funzione $\phi : G \to G'$ è detta *omomorfismo* se $\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y) \; \forall x, y \in G$.

Prop 15.0.4. Se $\phi : G \to G'$ è un omomorfismo, allora

1. $\phi(e_G) = e_{G'}$
2. $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}$
3. $\mathrm{Im}\phi$ è sottogruppo di G'.

Def 15.0.5. Siano G e G' due gruppi e ϕ un omomorfismo tra loro. ϕ è detto *isomorfismo* se $\exists \; \psi : G' \to G \mid \phi \circ \psi = \mathrm{id}_{G'}, \; \psi \circ \phi = \mathrm{id}_G$.

Prop 15.0.6. Un omomorfismo $\phi : G \to G'$ è un isomorfismo se è iniettivo e suriettivo.

Def 15.0.7. Un isomorfismo $\phi : G \to G$ è detto *automorfismo*.

Prop 15.0.8. Sia $\phi : G \to G'$ un omomorfismo. Allora ϕ è iniettiva $\Leftrightarrow \ker \phi = e_G$.

Prop 15.0.9. Alcuni gruppi di matrici (l'operazione è sempre il prodotto tra matrici) usati in fisica sono:

- $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ invertibili}\}$.
- $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ (sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$).
- Gruppo *ortogonale* $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\}$.
- Gruppo *ortogonale speciale* $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ (sottogruppo di $O(n)$).
- Gruppo *unitario* $U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^t\}$.
- Gruppo *unitario speciale* $SO(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ (sottogruppo di $U(n)$).