

Esercizi svolti per il corso di Fisica dei solidi e dei fluidi

Capitolo 1

Massimo Nespoli

Esercizio 1. Calcolare la densità ρ_0 dell'atmosfera al livello del mare, dove la temperatura media vale $T_0 = 290$ K, sapendo che la sua massa molare media vale $\bar{\mu} = 29$ kg/kmole.

- 1) Quanto sarebbe alta l'atmosfera se fosse $\rho(z) = \rho_0$ costante?
- 2) Quanto varrebbe la massa M_a dell'atmosfera, assumendo che la Terra sia una sfera di raggio 6371 km ?

$$pV = \nu RT$$

$$\nu = M/\bar{\mu} \quad \quad \rho = M/V$$



$$p = \frac{R}{\bar{\mu}} \rho T$$

$$\rho_0 = p_0 \frac{\bar{\mu}}{RT_0} = 1.013 \cdot 10^5 \times \frac{29}{8,31 \cdot 10^3 \times 290} = 1.22 \text{ kg/m}^3$$

$$p_0 = \rho_0 g h$$

$$h = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{1.013 \cdot 10^5}{(1.22 \times 9.81)} = 8.46 \text{ km}$$

1

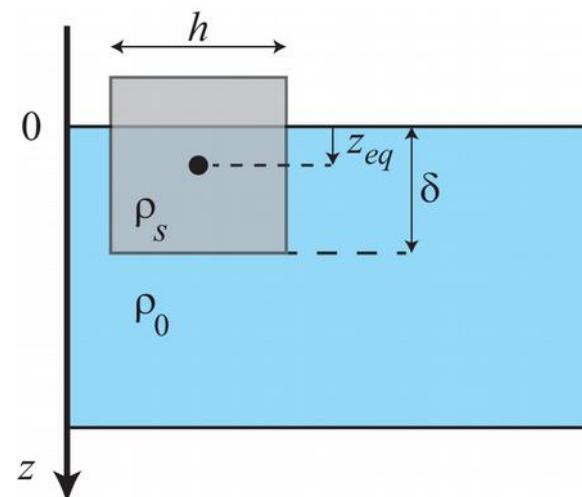
$$M = \rho_0 \left[\frac{4\pi}{3} (R + h)^3 - \frac{4\pi}{3} R^3 \right] = 5.27 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

2

N.B. La stima accurata è $M=5.15 \cdot 10^{18}$ kg e tiene conto delle variazioni di g con la quota e con la latitudine dovute a deviazioni dalla simmetria sferica e alla rotazione terrestre

Esercizio 2. Un cubo solido di spigolo h e densità ρ_s costante è immerso in un fluido di densità ρ_0 costante sotto l'effetto della gravità. Disponiamo l'asse z verticale diretto all'ingiù con origine alla superficie del fluido.

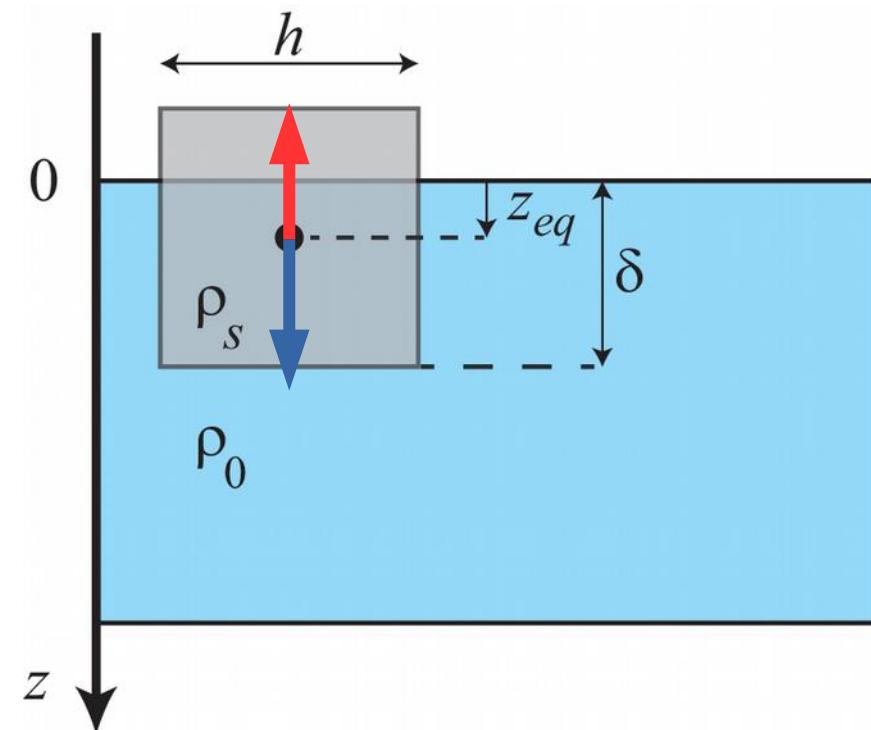
- 1)Calcolare la forza complessiva che agisce sul cubo e determinare la posizione di equilibrio z_{eq} del suo centro di massa nel caso che sia $\rho_s < \rho_0$.
- 2)Traslare l'origine dell'asse z in z_{eq} e calcolare la forza che agisce sul cubo quando il centro di massa è spostato di Δz rispetto a z_{eq} , con $|\Delta z|$ abbastanza piccolo in modo che il cubo resti sempre parzialmente immerso.
- 3)Se si trascurano le forze di attrito viscoso, mostrare che il cubo compie un moto armonico e determinare il periodo T del moto.



$$F_1 = \rho_s h^3 g \quad \text{Peso}$$

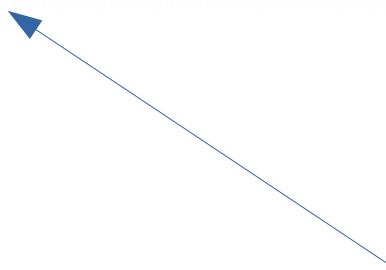
$$F_2 = -\rho_0 g \delta h^2 \quad \text{Archimede}$$

con $\delta = z_0 + \frac{h}{2}$



All'equilibrio le forze si bilanciano

$$\rho_s h^3 g = \rho_0 g \left(z_0 + \frac{h}{2} \right) h^2 \implies z_0 = z_{eq} = \frac{h}{2} \frac{(2\rho_s - \rho_0)}{\rho_0}$$



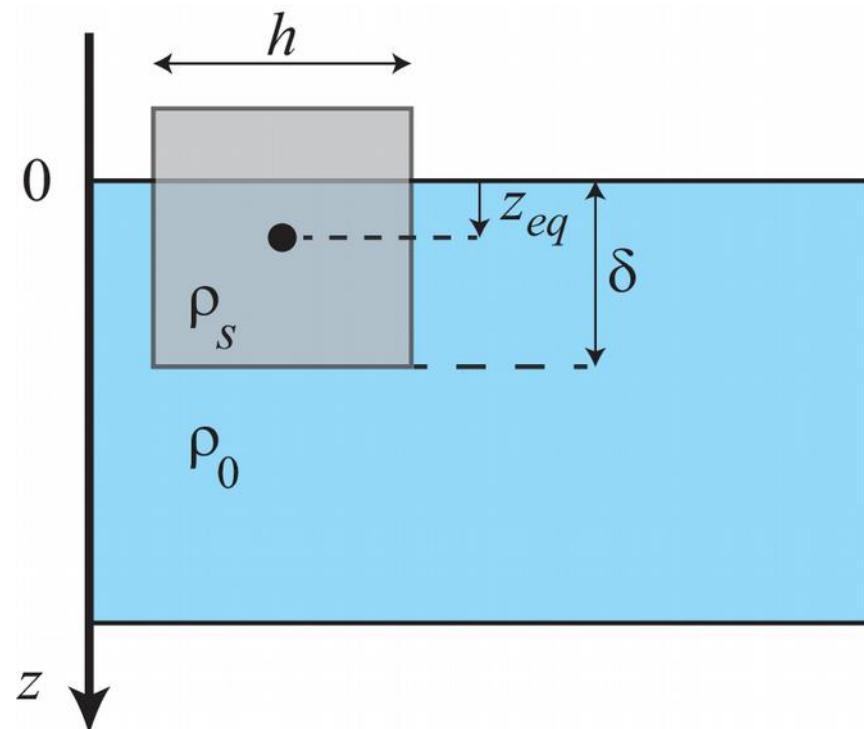
Nota segno

1

Se si sposta il cubetto, non c'è più equilibrio

$$z_0 \neq z_{eq}$$

$$z_0 = z_{eq} + \Delta z$$



$$F_1 + F_2 \text{ vale } gh^2[\rho_s h - \rho_0(z_0 + \frac{h}{2})]$$

$$= gh^2[\rho_s h - \rho_0(z_{eq} + \Delta z + \frac{h}{2})]$$

$$= gh^2 \left[\rho_s h - \rho_0 \left(\frac{h}{2} \frac{(2\rho_s - \rho_0)}{\rho_0} + \Delta z + \frac{h}{2} \right) \right] = -\rho_0 g h^2 \Delta z$$

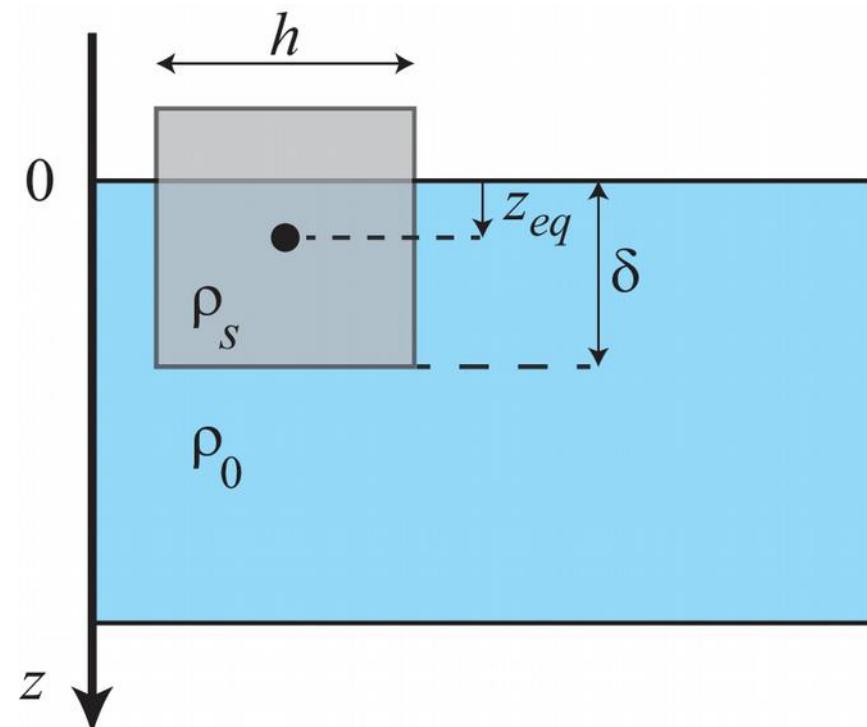
2

Equazione del moto ($\mathbf{F}=m\mathbf{a}$)

$$\rho_s h^3 \Delta \ddot{z} = -\rho_0 g h^2 \Delta z$$

Equazione caratteristica

$$\lambda^2 = -\frac{\rho_0 g}{\rho_s h}$$



$$\Delta z(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \Delta z_0 \cos(\omega t - \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho_s h}}$$

$$\Delta z(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \Delta z_0 \cos(\omega t - \phi)$$

$$A = \Delta z_0 \cos \phi, \quad B = \Delta z_0 \sin \phi \quad \downarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho_s h}}$$

$$\Delta z_0 = [A^2 + B^2]^{\frac{1}{2}}$$

Se scegliamo di porre l'origine del tempo quando il cubetto si trova nel punto più basso dell'oscillazione:

$$\phi = 0, \quad B = 0 \text{ e } A > 0$$

$$\Delta z(t) = \Delta z_0 \cos(\omega t - \phi)$$

3

Ma il cubetto non deve uscire dall'acqua

$$-\frac{h}{2} < z_{eq} \pm A < \frac{h}{2} \quad (A = \Delta z_0)$$



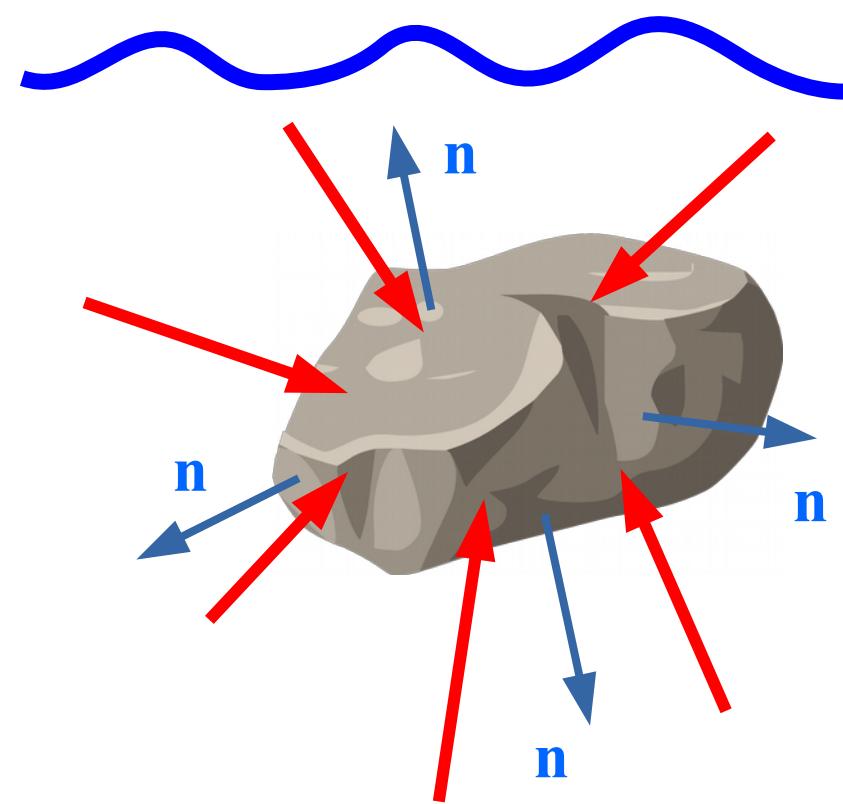
$$A < \min \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_0} h, \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_0}\right) h \right\}$$

Esercizio 3. Dimostrare il principio di Archimede “*Un corpo immerso in un fluido subisce una spinta dal basso verso l’alto pari al peso del fluido spostato*” per un generico corpo di densità variabile ρ_s e di forma qualsiasi, immerso in un fluido in quiete di densità ρ_f variabile.



V Volume
 S_v Superficie

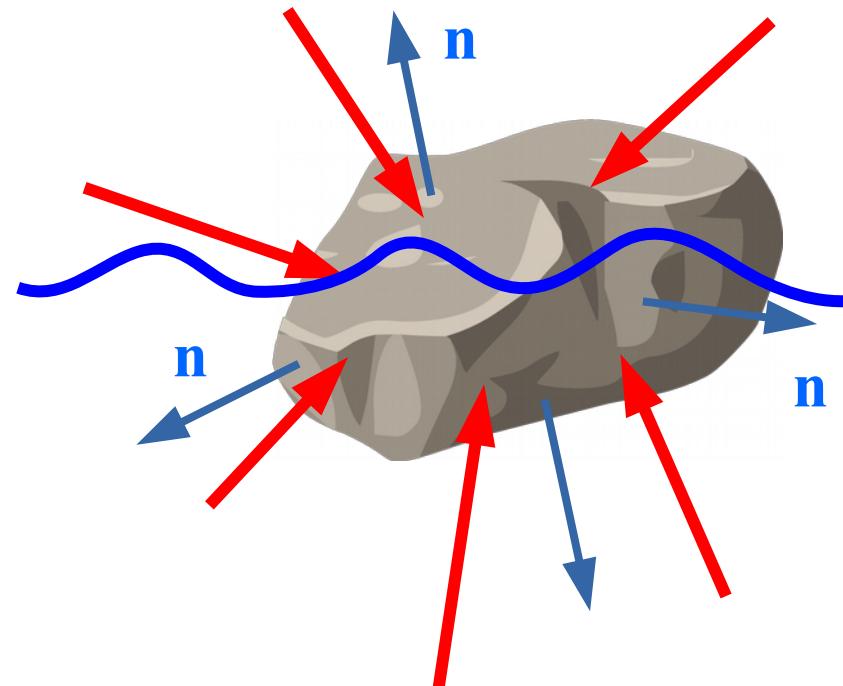
Forza di pressione $\mathbf{F}_P = \oint_{S_V} -p\mathbf{n} dS$



Applichiamo il teorema di Gauss:

$$\mathbf{F}_P = \int_V -\nabla p dV = - \int_V \rho_f \mathbf{g} dV$$

Peso di un volume di fluido V



Se il corpo si trova solo parzialmente nel liquido:

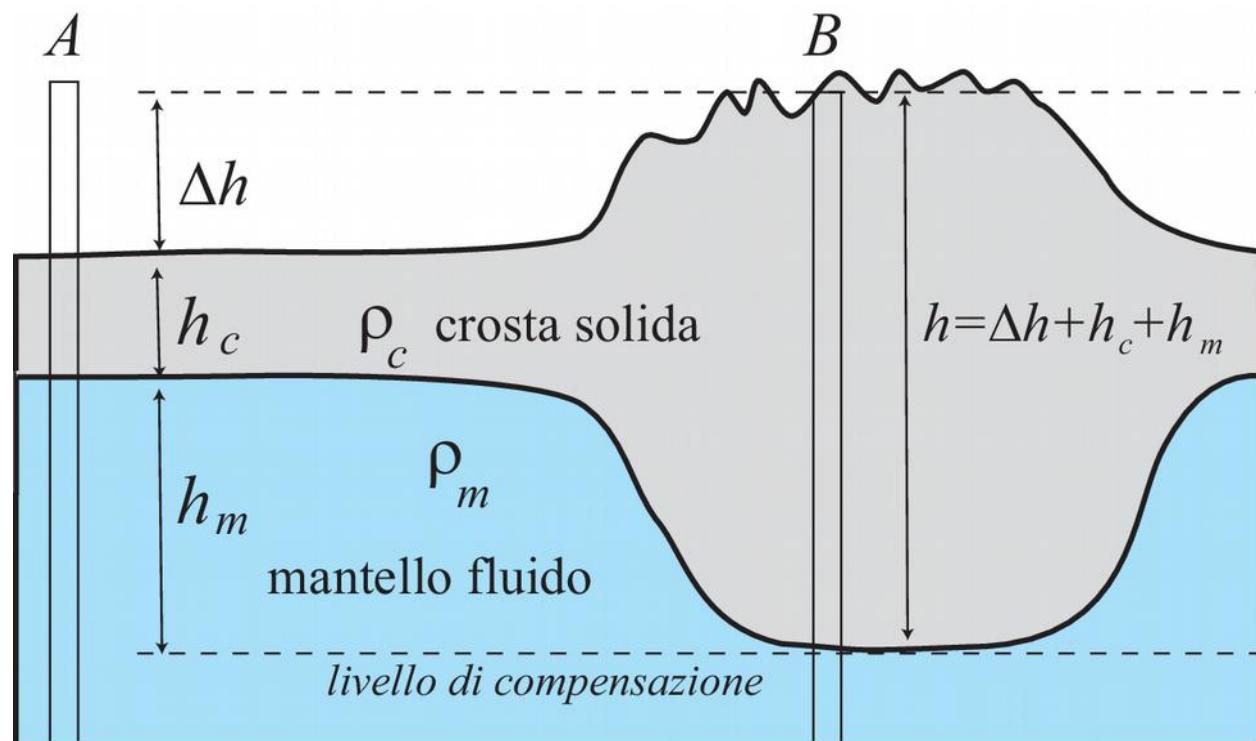
$$\nabla p = \rho_a \mathbf{g} \text{ nella porzione emersa} \quad \rho_a \text{ è la densità dell'aria}$$

$$\nabla p = \rho_f \mathbf{g} \text{ nella porzione immersa}$$

Somma delle forze peso dei fluidi spostati

Esercizio 4. Il Principio di Isostasia prevede che la pressione alla base della crosta terrestre (di densità ρ_c) sia costante lungo un piano orizzontale (come se il mantello sottostante, di densità $\rho_m > \rho_c$, fosse fluido). Supponendo che la pressione nella crosta cresca con la profondità con gradiente litostatico $dp = \rho_c g dz$ al di sotto della superficie topografica, calcolare la profondità della base della crosta al di sotto di una catena montuosa di altezza media Δh rispetto alla profondità normale h_c della crosta.

Assumere $\rho_c = 2750$, $\rho_m = 3300 \text{ kg/m}^3$, $h_c = 35 \text{ km}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\Delta h = 3000 \text{ m}$.

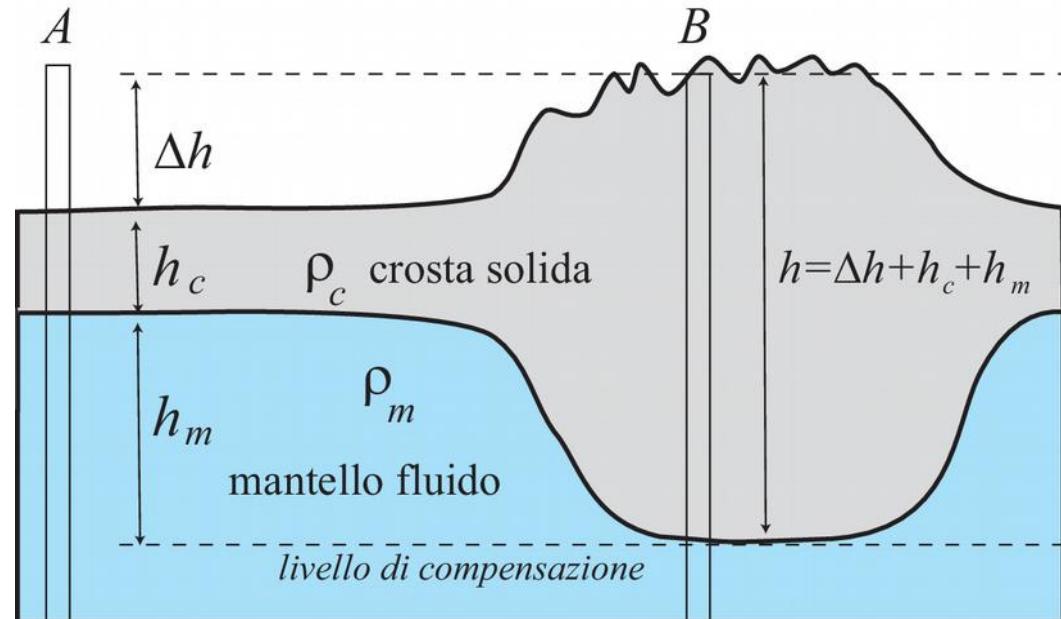


$$p_A = \rho_c g h_c + \rho_m g h_m$$

$$p_B = \rho_c g (\Delta h + h_c + h_m)$$

Equilibrio:

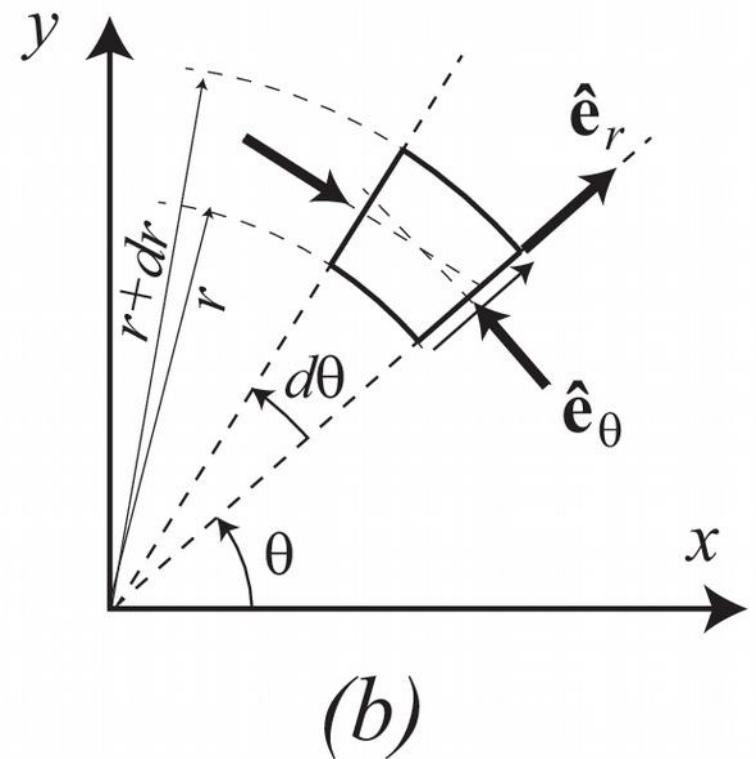
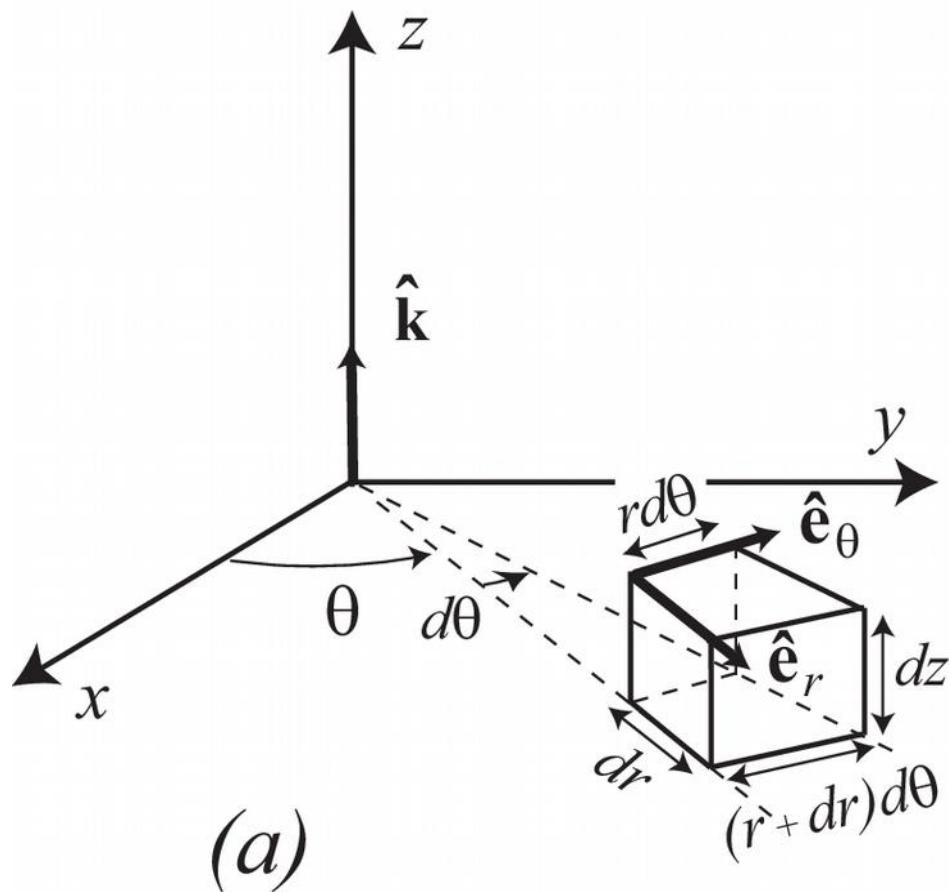
$$p_A = p_B$$

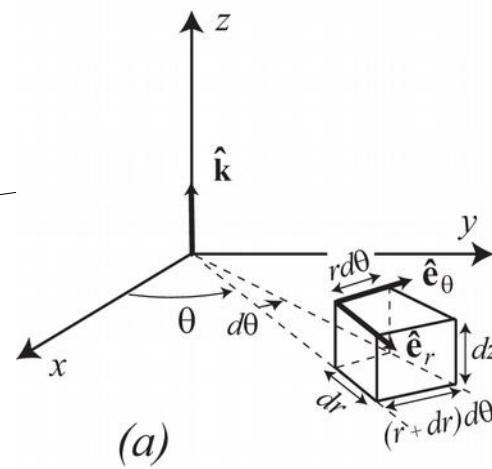
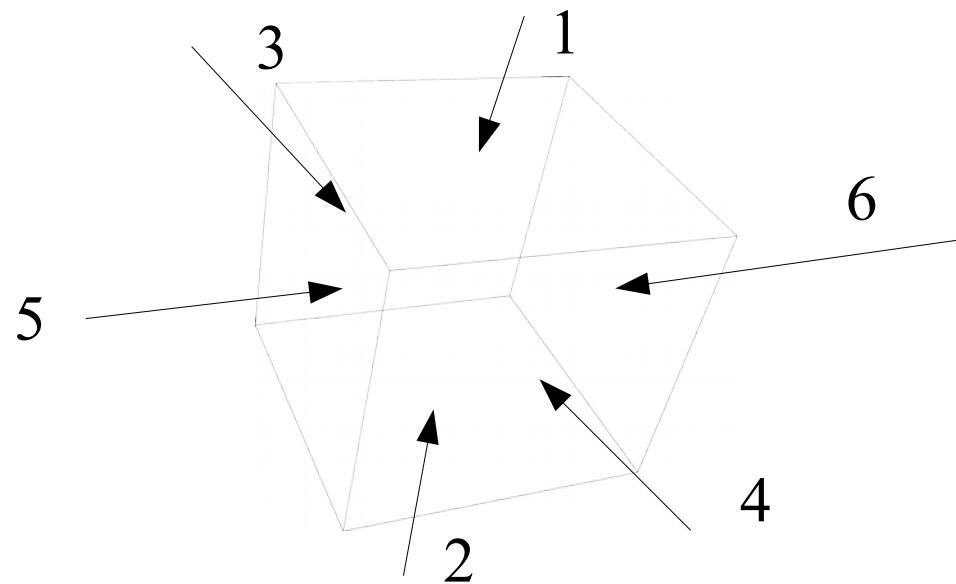


$$h_m = \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} \Delta h = \frac{2750}{(3300 - 2750)} \times 3000 = 15,000 \text{ m}$$

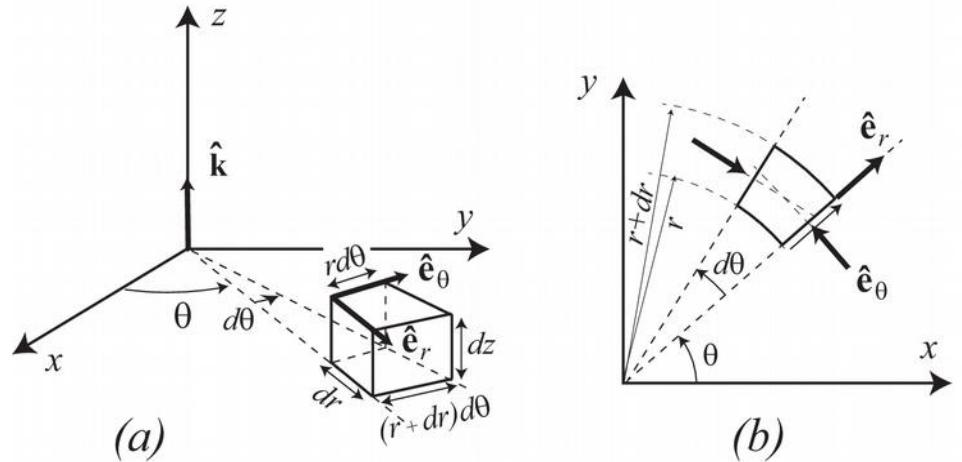
$$h = \Delta h + h_c + h_m = 3 + 35 + 15 \text{ km} = 53 \text{ km}$$

Esercizio 5. Superficie libera di fluido in rotazione. Consideriamo un fluido in quiete, di densità ρ , soggetto alla gravità, in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare $\omega \hat{\mathbf{k}}$ (dove $\hat{\mathbf{k}}$ è un vettore unitario lungo l'asse verticale z , assunto diretto verso l'alto). Determinare le superfici di pressione costante e, in particolare, la superficie libera del fluido dove la pressione eguaglia la pressione atmosferica.





| Faccia | Forza | Direzione |
|--------|-------------------------------|---|
| dA_1 | $p(z + dz)rdrd\theta$ | $-z$ |
| dA_2 | $p(z)rdrd\theta$ | z |
| dA_3 | $p(r)rd\theta dz$ | $\hat{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ |
| dA_4 | $p(r + dr)(r + dr)d\theta dz$ | $-\hat{e}_r$ |
| dA_5 | $p(\theta)drdz$ | $\hat{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ |
| dA_6 | $p(\theta + d\theta)drdz$ | $(+\sin(\theta + d\theta), -\cos(\theta + d\theta), 0)$ |



Peso

La risultante delle forze in direzione z ($dA1$ e $dA2$) è

$$-\rho g r d\theta dz dr + p(z) r dr d\theta - p(z + dz) r dr d\theta = 0 \implies \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

La risultante delle forze di pressione su $dA3$ e $dA4$ è in direzione radiale

$$p(r) r d\theta dz - p(r + dr)(r + dr) d\theta dz = -\frac{\partial(pr)}{\partial r} dr d\theta dz$$

La risultante delle forze di pressione su $dA5$ e $dA6$ è

$$p(\theta)drdz(-\sin \theta, \cos \theta, 0) - p(\theta + d\theta)drdz(-\sin(\theta + d\theta), \cos(\theta + d\theta), 0)$$

Al primo ordine

$$\sin(\theta + d\theta) = \sin \theta \cos d\theta + \cos \theta \sin d\theta \simeq \sin \theta + \cos \theta d\theta$$

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos \theta \cos d\theta - \sin \theta \sin d\theta \simeq \cos \theta - \sin \theta d\theta$$

La risultante ha una componente in direzione \hat{e}_θ e una in direzione $-\hat{e}_r$

$$[p(\theta) - p(\theta + d\theta)](-\sin \theta, \cos \theta, 0)drdz - p(\theta + d\theta)(-\cos \theta, -\sin \theta, 0)d\theta drdz =$$

~~$$[p(\theta) - p(\theta + d\theta)]\hat{e}_\theta drdz + p(\theta + d\theta)\hat{e}_r d\theta drdz$$~~

La risultante in direzione \hat{e}_θ deve essere nulla all'equilibrio e quindi
 $p(\theta) = p(\theta + d\theta)$

La risultante in direzione radiale è proviene dal secondo contributo e dalle pressioni sulle facce $dA3$ e $dA4$

$$p(\theta + d\theta)drdzd\theta - \frac{\partial(pr)}{\partial r}drd\theta dz = -\frac{\partial p}{\partial r}rdrd\theta dz$$

La risultante in direzione radiale deve fornire l'accelerazione centripeta necessaria per consentire a dV di ruotare attorno all'asse z:

$$-\frac{\partial p}{\partial r}rdrd\theta dz = -\rho r d\theta dr dz \omega^2 r \implies \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$$

Quindi, perché il fluido sia in quiete

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\nabla p = \rho (\omega^2 r, 0, -g)$$

$$\nabla p = \rho (\omega^2 r, 0, -g)$$

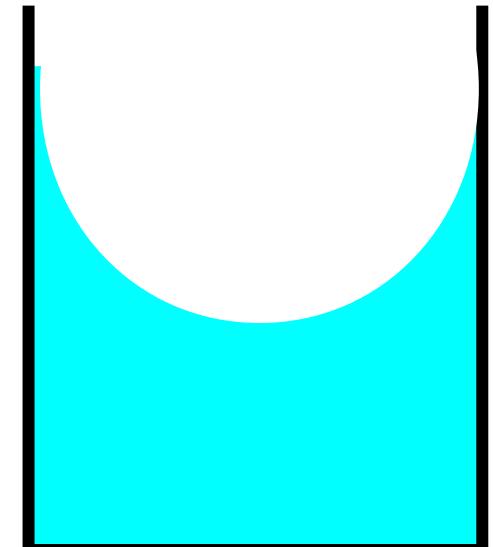


Forza apparente
centrifuga

Gravità

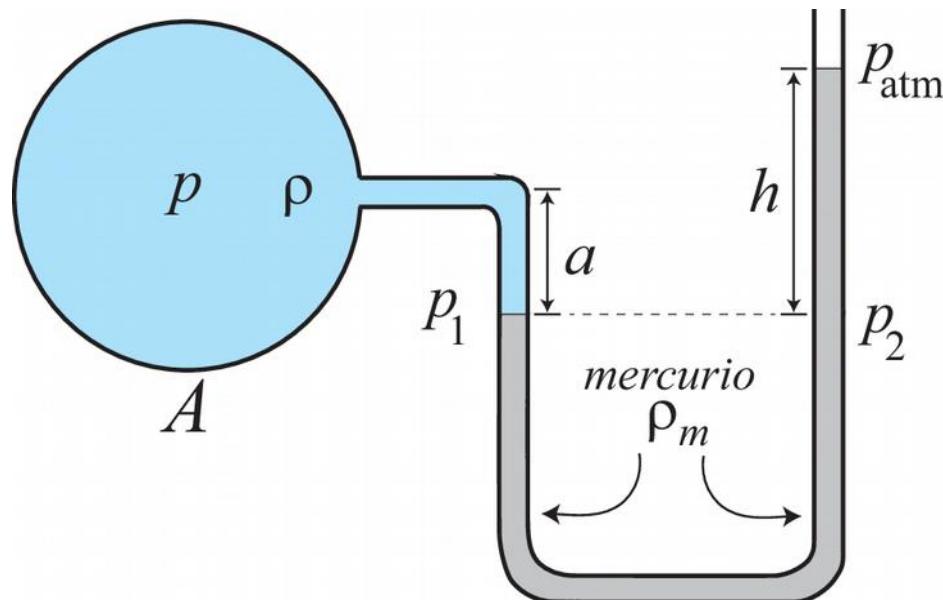
Dato che $g = \frac{\partial(gz)}{\partial z}$, $\omega^2 r = \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2 r^2)}{\partial r}$

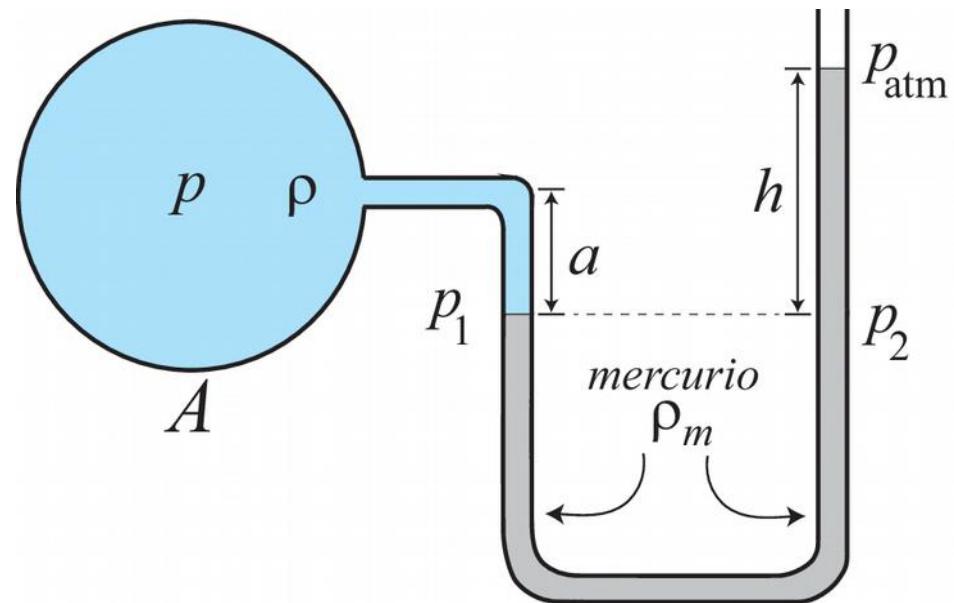
$$\nabla p = \rho \nabla \left(\underbrace{\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - gz}_{\text{Potenziale roto-gravitazionale}} \right)$$



$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - gz = k \quad (\text{superfici equipotenziali e isobariche})$$

Esercizio 6. Un manometro è uno strumento per misurare la pressione di un fluido. La figura mostra un “manometro a mercurio”, che consiste in un tubo a U contenente mercurio di densità $\rho_m = 13,500 \text{ kg/m}^3$. Se il fluido nel recipiente A è caratterizzato da pressione p e densità ρ mostrare che la pressione relativa nel recipiente è $p - p_{atm} = \rho_m gh - \rho ga$; il termine ρga è trascurabile se $\rho \ll \rho_m$, sicché $p - p_{atm}$ è proporzionale a h .



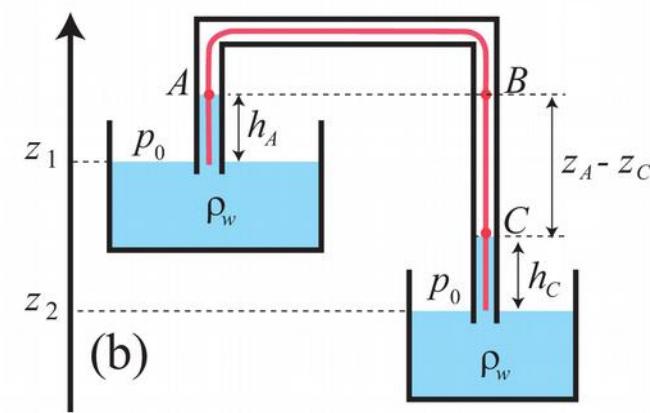
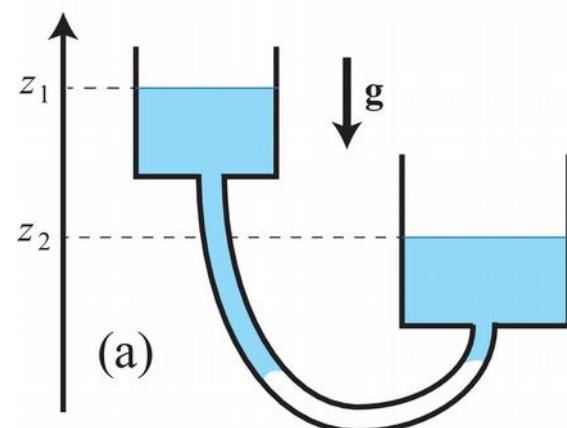


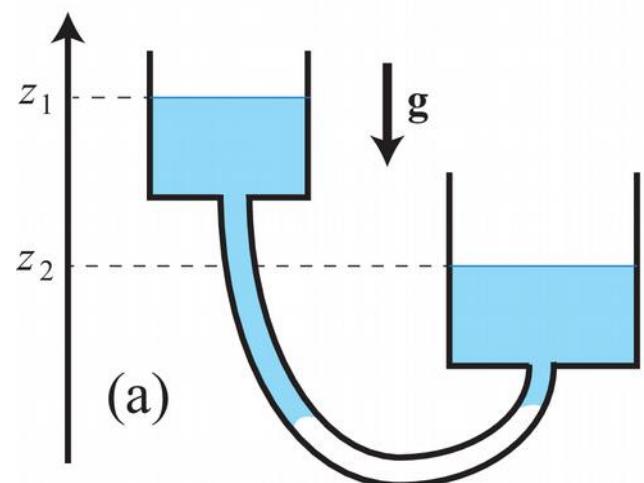
$$p_1 = p_2 \text{ ovvero } p + \rho g a = p_{atm} + \rho_m g h$$

Esercizio 7. Consideriamo 2 vasi comunicanti come illustrato in Figura, pieni d'acqua a temperatura normale (20°C) con densità $\rho_w = 10^3 \text{ kg/m}^3$ (costante) e superfici esposte alla pressione atmosferica p_0 .

- 1) cosa avviene se il tubo è parzialmente pieno d'aria ed è disposto sotto oppure sopra ai contenitori;
- 2) cosa avviene se il tubo, pur essendo pieno di acqua, è sollevato fino a raggiungere una quota superiore a $h_0 = p_0/\rho g$ al di sopra di entrambi i livelli z_1, z_2 (per l'acqua $h_0 = 10.3 \text{ m}$).

[Suggerimento: calcolare la pressione nel punto più alto del tubo, tenendo conto che la pressione di vapor saturo dell'acqua a 20°C vale $p_{vs} = 2.3 \text{ kPa}$ e che la densità ρ_v del vapore è trascurabile rispetto a ρ_w]





Cosa succede?

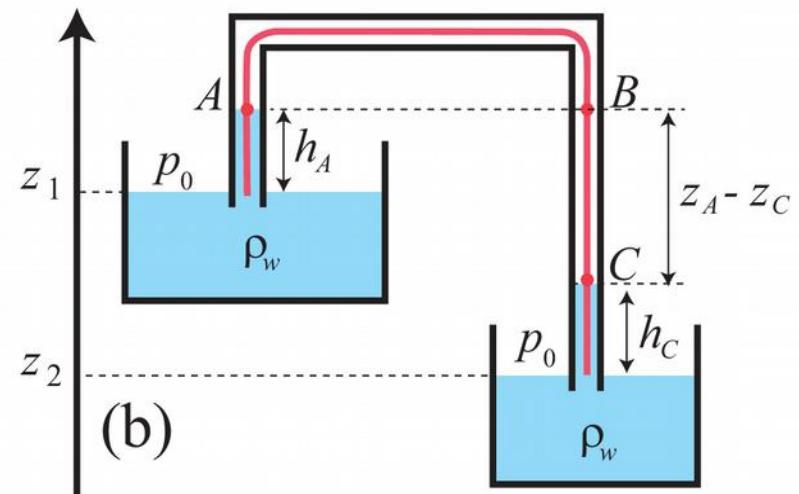
$$p_A = p_0 - \rho_w g h_A = p_B$$

$$p_C = p_0 - \rho_w g h_C$$

Equilibrio se:

$$p_C - p_A = \rho_a g(z_A - z_C)$$

$$\rho_w g(h_A - h_C) = \rho_a g(z_A - z_C)$$

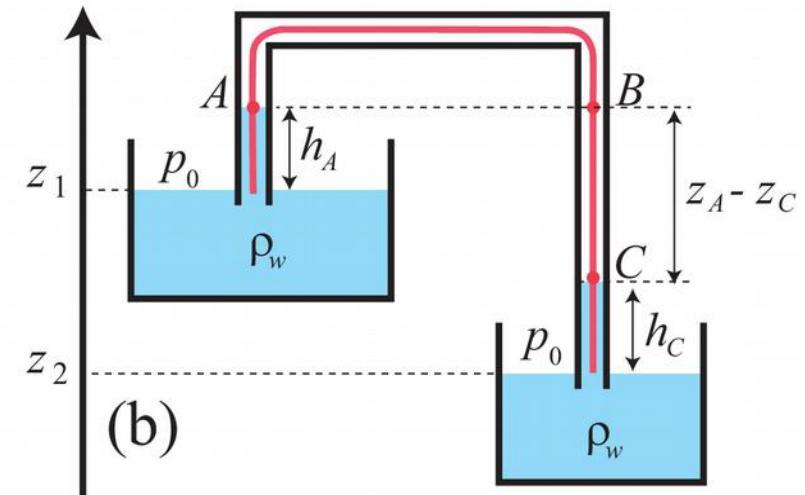


Nel caso $\rho_a \ll \rho_w$ allora $h_A \simeq h_C$

Nel caso $\rho_a = \rho_w$

$$z_1 = z_2 + h_C + (z_A - z_C) - h_A$$

$z_1 - z_2 = (z_A - z_C) \times (1 - \rho_a / \rho_w)$ dovrebbe essere nullo



Se infine il tubo è inizialmente pieno d'acqua e viene sollevato fino ad una quota $h = p_0 / \rho_w g$, la pressione $p_0 - \rho_w gh$ a tale quota si annullerebbe, ma ciò non può avvenire perché alla quota $h_{vs} = h - p_{vs} / \rho_w g$ il tubo si riempie di **vapore**.

$$h - h_{vs} = p_{vs} / \rho_w g = 2.3 \cdot 10^3 / (10^3 \times 9.81) = 0.23 \text{ m.}$$

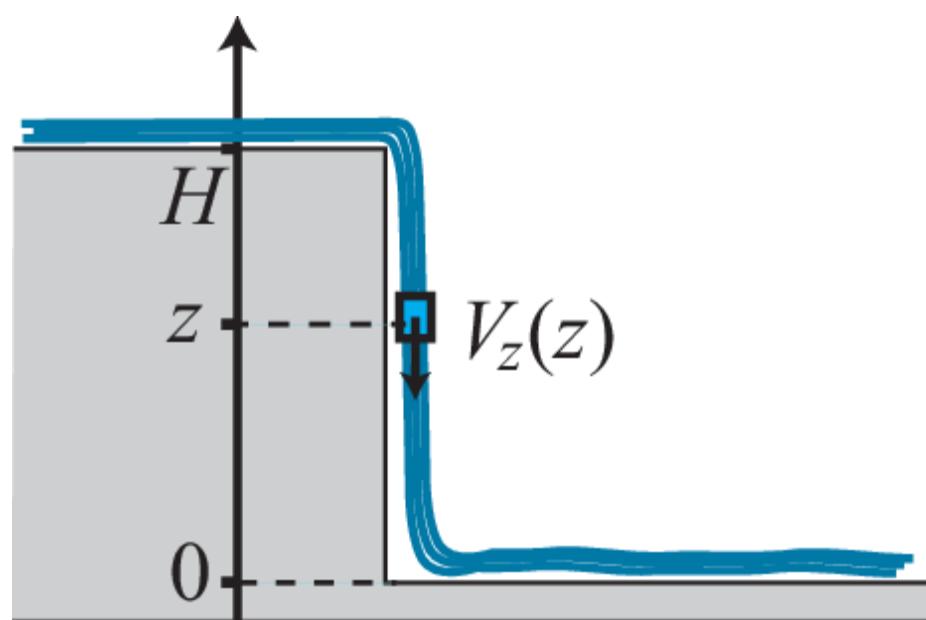
Esercizio 8. In una cascata, la velocità di caduta di una massa d'acqua m in un punto z al di sotto del livello di caduta H (asse z rivolto in su) si ottiene facilmente dalla legge di conservazione dell'energia

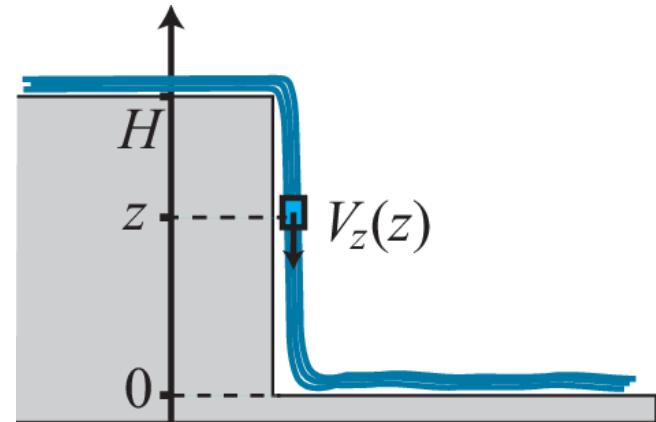
$$mgH = mgz + \frac{1}{2} mV_z^2.$$

Calcolare l'accelerazione verticale della massa dV/dt secondo la formula

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

vedremo che l'accelerazione è dovuta interamente al termine avvettivo.

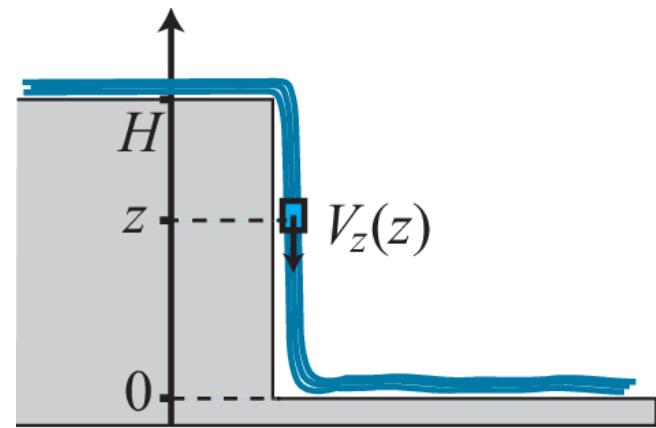




$$mgH + \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2) = mgz + \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$$

$$V_z^2(z) = 2g(H - z) \quad \implies \quad V_z = -\sqrt{2g(H - z)}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$$

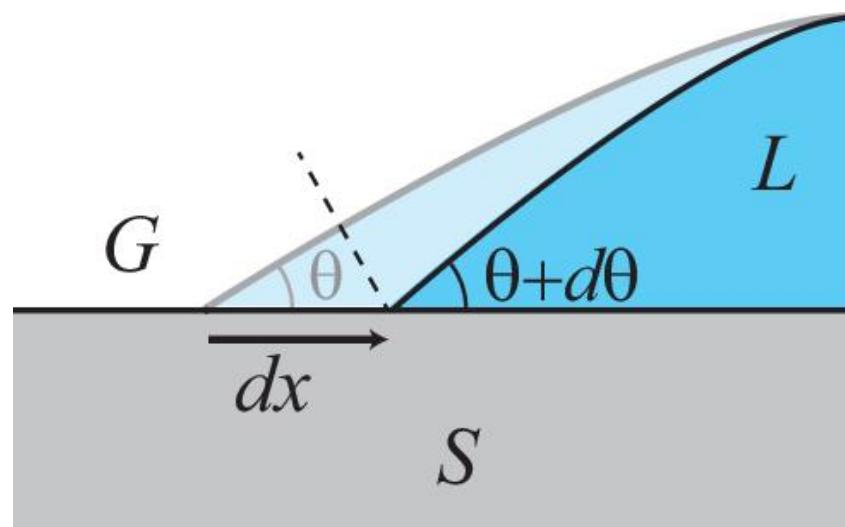


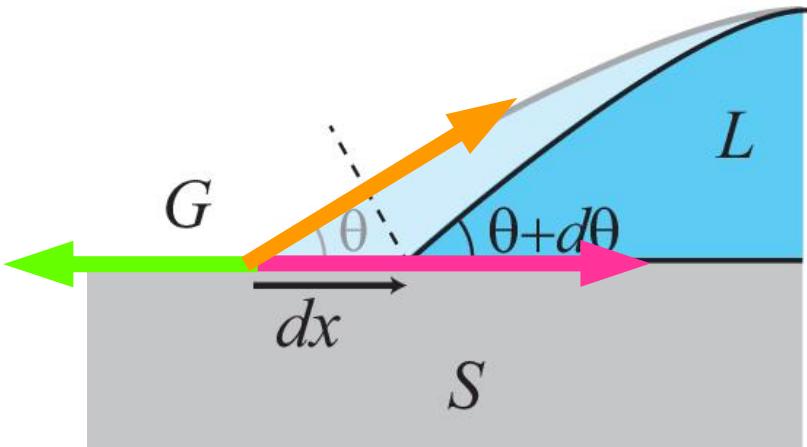
$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \left(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (V_x, V_y, V_z)$$

$$= \left(0, 0, -\sqrt{2g(H-z)} \times \left[-\frac{1}{2\sqrt{2g(H-z)}} \right] \times (-2g) \right)$$

$$= (0, 0, -g)$$

Esercizio 9. Ricavare l'equazione di Young $\gamma_{SL} + \gamma_{LG} \cos\theta_c = \gamma_{SG}$ assumendo che sia stazionaria (minima) l'energia complessiva delle tre superfici SG (solido-gas), SL (solido-liquido), LG(liquido-gas) a seguito di una variazione dx della posizione della linea di contatto.



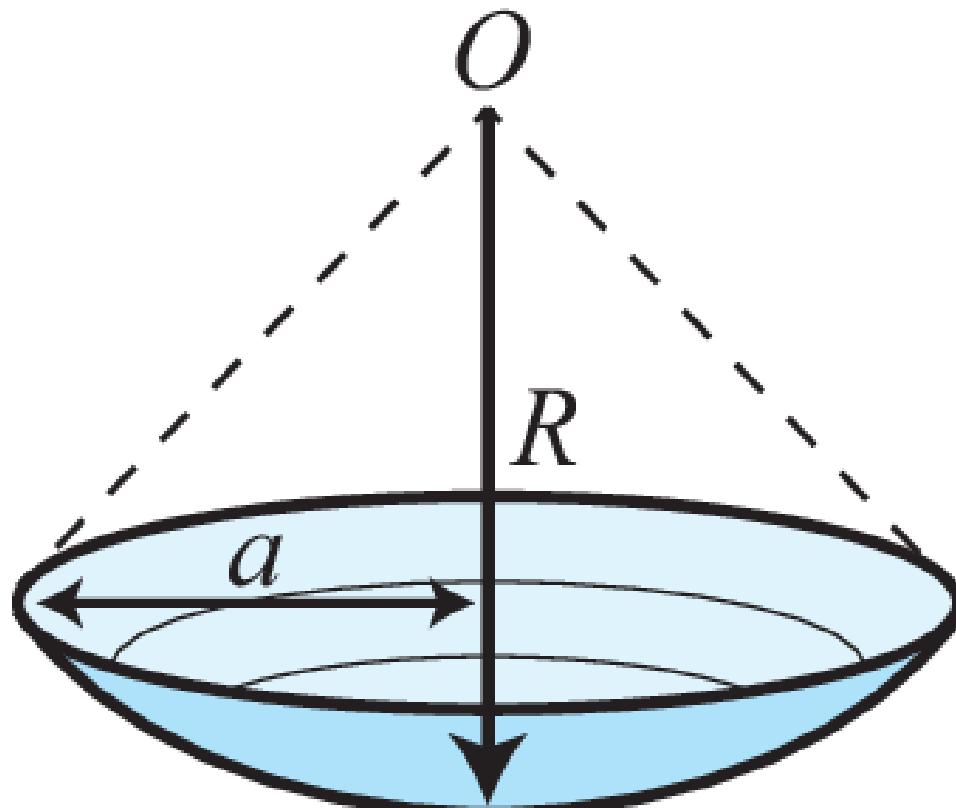


Considerando un elemento dl di linea normale al foglio:

- l'area SG aumenta di $dxdl$ e l'energia aumenta di $dW_{SG} = \gamma_{SG} dl dx$
- per LS l'energia diminuisce di $dW_{LS} = \gamma_{LS} dl dx$
- per LG l'energia diminuisce di $dW_{LG} = \gamma_{LG} dl dx \cos\theta$

All'equilibrio l'energia deve essere minima e quindi $dW_{SG} - dW_{LS} - dW_{LG} = 0$
da cui segue $(\gamma_{SG} - \gamma_{LS} - \gamma_{LG} \cos\theta) dl dx = 0$ e quindi l'equazione di Young.

Esercizio 10. Mostrare che la forza di pressione che agisce su una calotta sferica con raggio di curvatura R e base circolare di raggio a è uguale alla pressione moltiplicata per l'area della sezione πa^2 (vedi Figura). [Suggerimento: impiegare coordinate sferiche con origine nel centro di curvatura O]



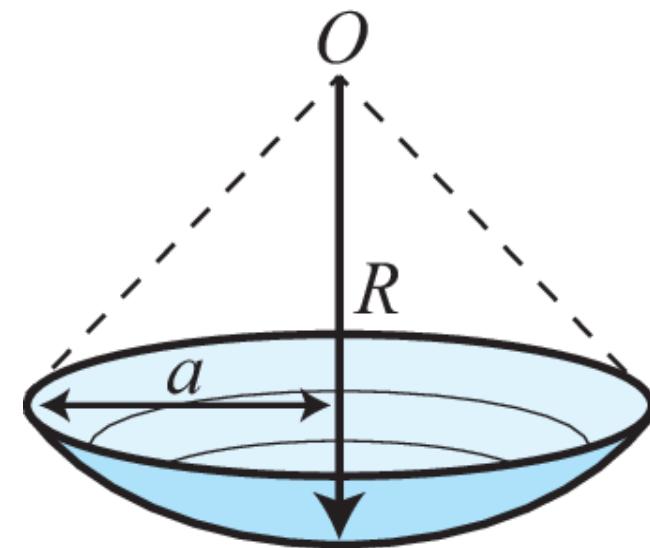
La forza di pressione agisce in direzione radiale

$$\hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

Su un elemento di superficie

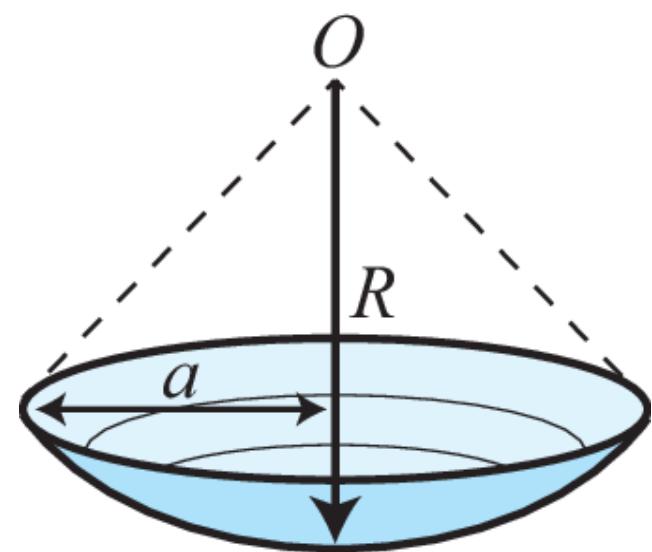
$$dS = R^2 d\phi \sin \theta d\theta$$

$$\phi \in [0, 2\pi] \quad \theta \in [0, \theta_0] \quad \theta_0 = \arcsin(a/R)$$



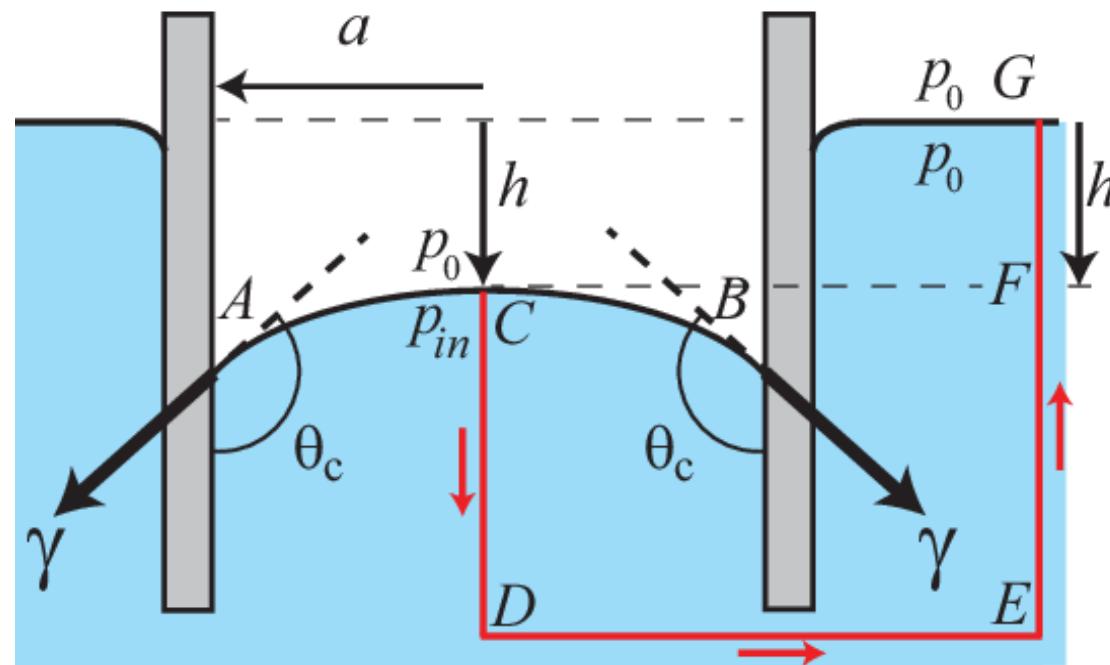
$$F_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (p \sin \theta \cos \phi) R^2 d\phi \sin \theta d\theta = 0$$

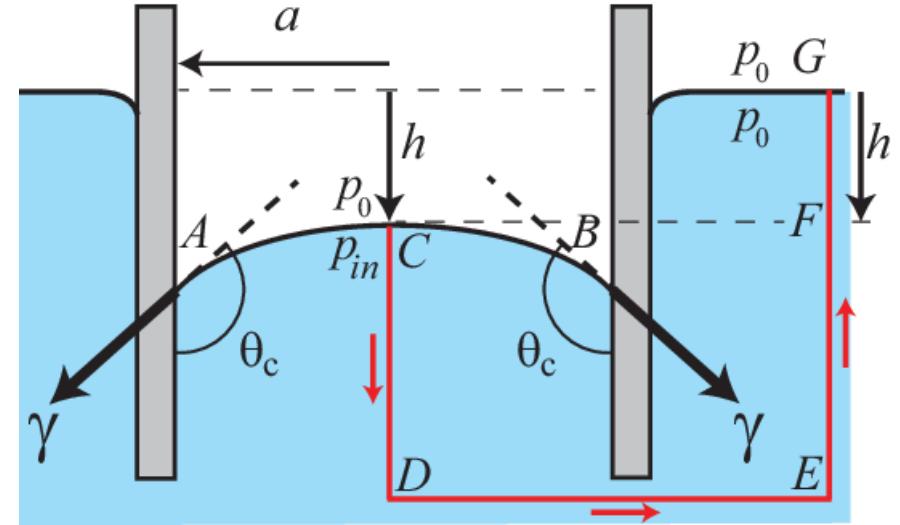
$$F_y = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (p \sin \theta \sin \phi) R^2 d\phi \sin \theta d\theta = 0$$



$$\begin{aligned}
 F_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (p \cos \theta) R^2 d\phi \sin \theta d\theta = \\
 &2\pi p R^2 \left[-\frac{1}{2} \cos^2 \theta \right]_0^{\theta_0} = \pi p R^2 \left[-1 + \sin^2 \theta \right]_0^{\theta_0} = \pi p R^2 \sin^2 \theta_0 = p\pi a^2
 \end{aligned}$$

Esercizio 11. Calcolare la pressione p_{in} sulla faccia inferiore della superficie convessa illustrata in figura. Mostrare che la legge di Jurin è valida anche per una superficie convessa, eseguendo l'integrale dell'equazione di equilibrio idrostatico $\nabla p = \rho g$ lungo il percorso CDEFG evidenziato in rosso.





$$p(z_D) = p_{in} - \rho g(z_D - z_C)$$

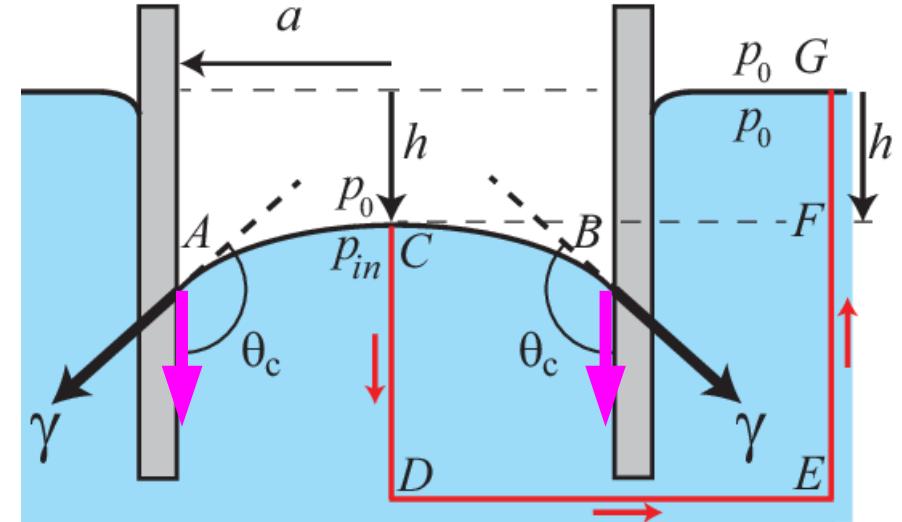
$$p(z_E) = p(z_D)$$

$$p(z_F) = p(z_E) - \rho g(z_F - z_E)$$

$$= p_{in} - \rho g(z_D - z_C) - \rho g(z_F - z_E)$$

$$= p_{in}$$

$$p_0 = p(z_G) = p_{in} - \rho g(z_G - z_F)$$



$$p_{in} = p_0 + \rho g(z_G - z_F) = p_0 - \rho g h$$

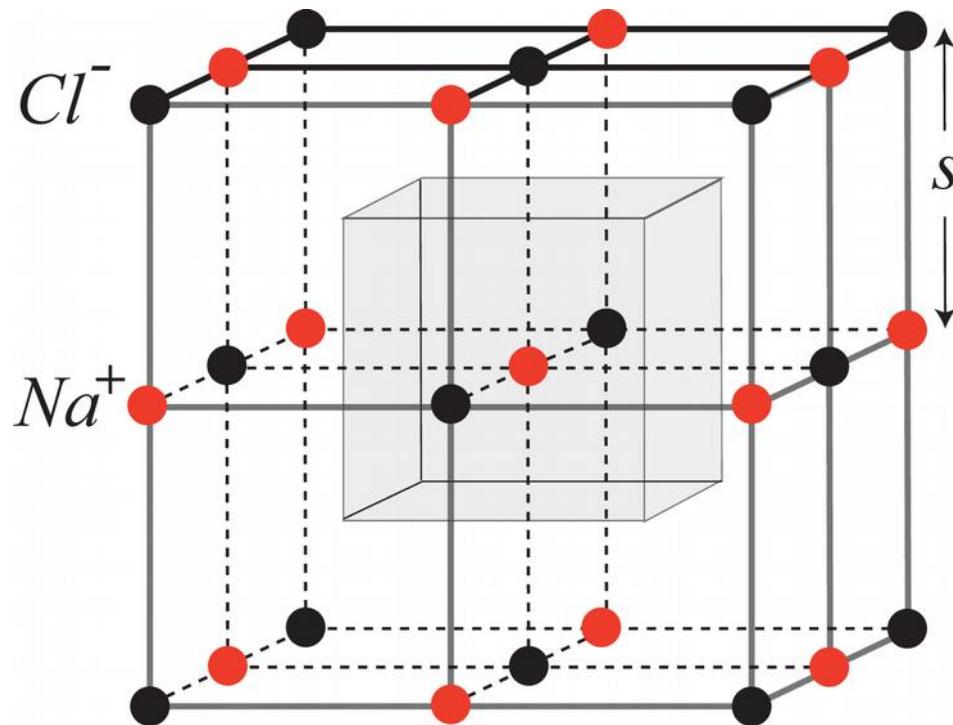
$$h = (z_C - z_G) = (z_F - z_G)$$

Se c'è equilibrio:

$$(p_{in} - p_0)\pi a^2 - 2\pi a \gamma \cos(\pi - \theta_c) = 0$$

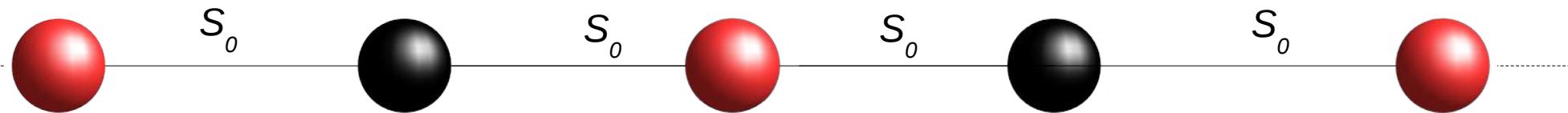
$$h = \frac{2\gamma \cos \theta_c}{\rho g a}$$

Esercizio 13. Calcolare la costante di Madelung A per un reticolo lineare di ioni con carica $\pm q$ disposti in alternanza a distanza s_0 l'uno dall'altro e, facendo riferimento alla figura, calcolare un valore approssimato della costante di Madelung A considerando solo gli ioni raffigurati.



$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{s_0}$$
 \longrightarrow
 $A = 2$

Energia potenziale



$$W_{lin} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{s_0} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{s_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} =$$

Serie armonica

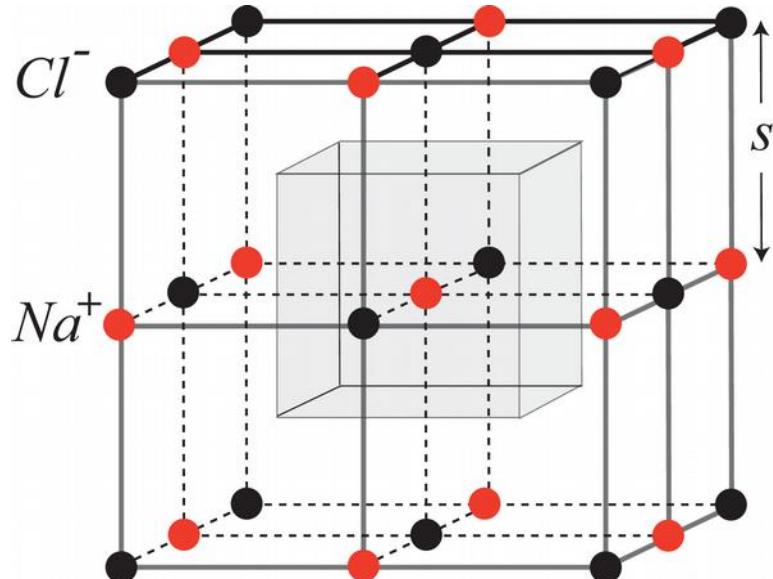
$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{s_0} \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad A = 2 \ln 2 = 1,386$$

Per un reticolo 3D

$$A = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+j+k+1}}{\sqrt{i^2 + j^2 + k^2}}$$

$i = j = k = 0$ deve essere omesso

La convergenza è molto lenta, quindi si raggruppano i termini di cubetti di spigolo $d_n = 2nS_0$ via via crescente.



$$n = 1$$

In questo caso le serie sono limitate tra -1 e +1

$$A_1 = 6 \times \frac{1}{1} + 12 \frac{(-1)}{\sqrt{2}} + 8 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 2, 13$$

$n = 1$

In questo caso le serie sono limitate tra -1 e +1

$A = 2.13$

$n = 2$

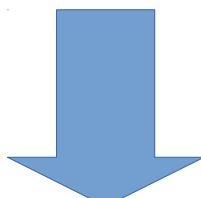
In questo caso le serie sono limitate tra -2 e +2

$A = 1.52$

$N \rightarrow \infty$

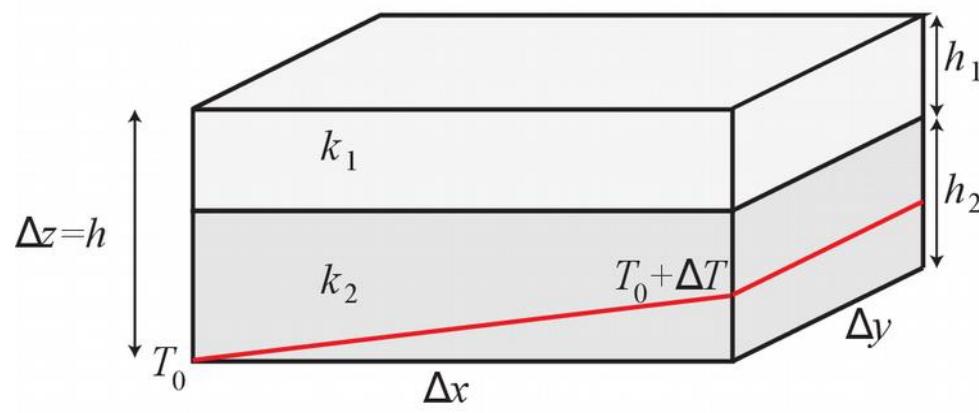
In questo caso le serie sono limitate tra $-\infty$ e $+\infty$

$A = 1.7476$

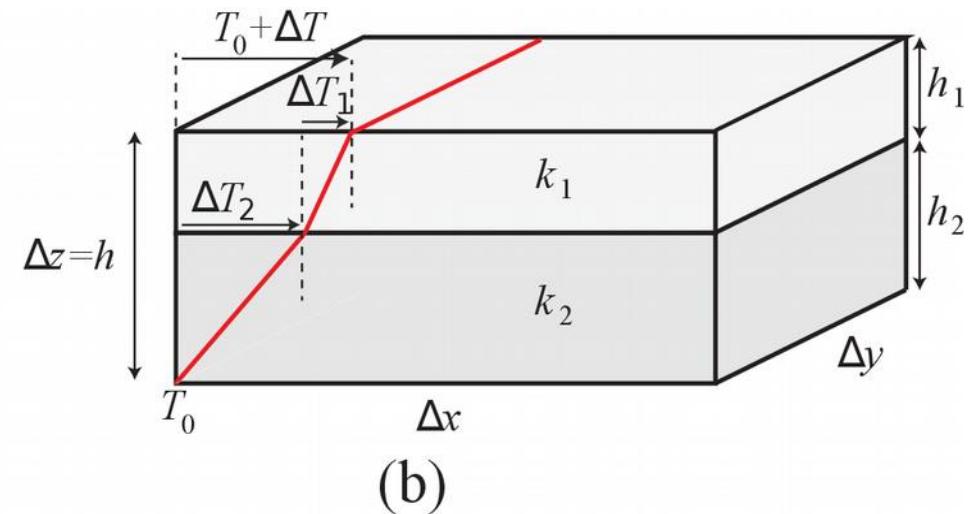


Lenta convergenza

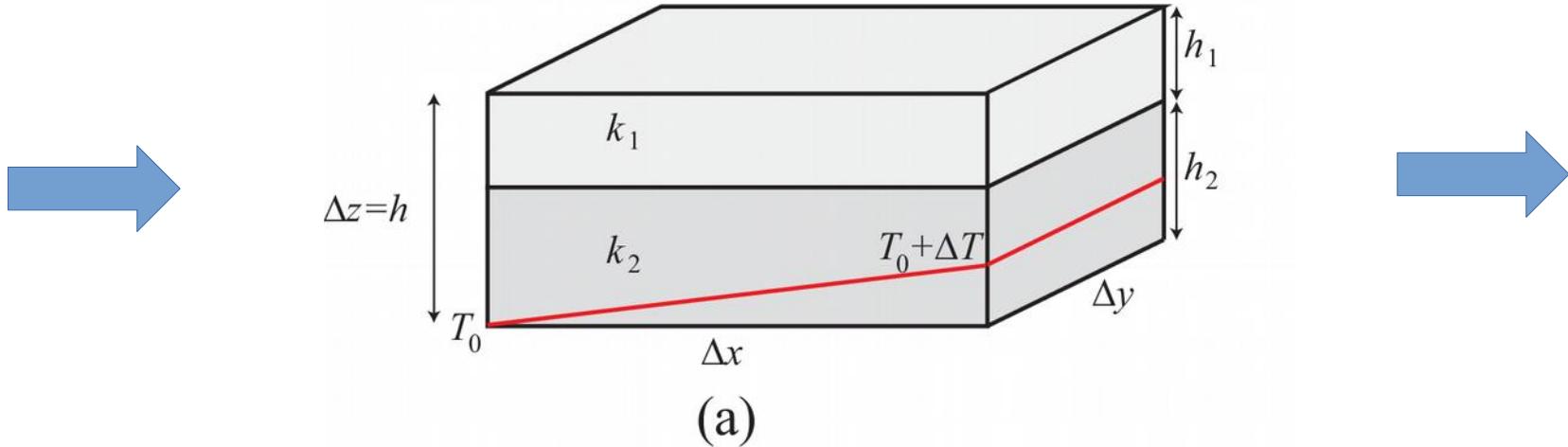
Esercizio 17. Consideriamo un corpo composto da strati piani paralleli alternati di 2 diversi materiali, di spessore rispettivamente h_1 , h_2 e dotati di conducibilità termica k_1 e k_2 . Mostrare che il flusso di calore attraverso il materiale composito nelle direzioni parallela e normale agli strati soddisfa alla legge di Fourier ma la conducibilità termica è differente nelle due direzioni; determinare i valori di k_{\parallel} e k_{\perp} in funzione di h_1 , h_2 , k_1 , k_2 ; verificare che, se $k_1 = k_2 = k$, si ottiene $k_{\parallel} = k$ e $k_{\perp} = k$ e valutare i comportamenti per $h_1 \rightarrow 0$, $k_1 \rightarrow 0$ nei due diversi casi. [Suggerimento: il flusso di calore deve essere continuo al passaggio da uno strato all'altro]



(a)



(b)



$$q_1 = -k_1 \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$q_2 = -k_2 \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Attraverso la superficie $\Delta z \times \Delta y$

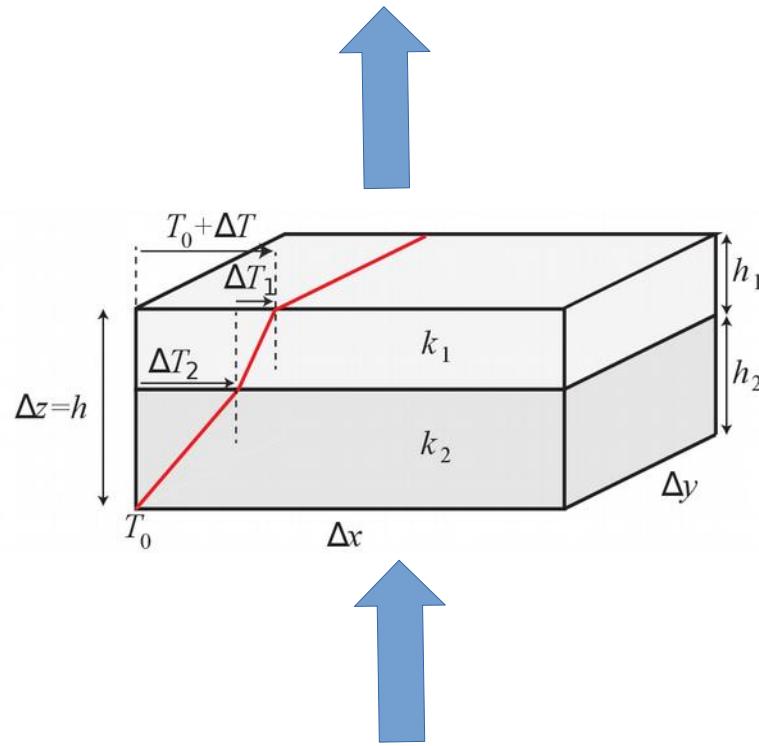
$$q_{||} \times (h \Delta y) = q_1 \times (h_1 \Delta y) + q_2 \times (h_2 \Delta y)$$

$$q_{\parallel} = - \left(k_1 \frac{h_1}{h} + k_2 \frac{h_2}{h} \right) \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$k_{\parallel} = k_1 \frac{h_1}{h} + k_2 \frac{h_2}{h}$$

Se $h_1 \rightarrow 0$ $h_2 \rightarrow h$ e $k_{\parallel} \rightarrow k_2$

se $k_1 \rightarrow 0$ $k_{\parallel} \rightarrow k_2 \frac{h_2}{h}$



$$q_1 = -k_1 \frac{\Delta T_1}{h_1} = q_2 = -k_2 \frac{\Delta T_2}{h_2}$$

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2$$

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = -q_{\perp} \left(\frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2} \right)$$

$$q_{\perp} = -\frac{\Delta T}{\left(\frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2} \right)} \quad q_{\perp} = -k_{\perp} \frac{\Delta T}{h}$$

$$k_{\perp} = \frac{h}{\frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_2 \frac{h_1}{h} + k_1 \frac{h_2}{h}}$$

$$h_1 \rightarrow 0 \quad h_2 \rightarrow h \quad k_{\perp} = k_2$$

$$k_1 \rightarrow 0 \quad k_{\perp} \rightarrow 0$$

Esercizi svolti per il corso di Fisica dei solidi e dei fluidi

Capitolo 2

Massimo Nespoli

Esercizio 1. Integrare l'equazione $p\rho^{-\gamma} = \text{costante}$ per la densità di un gas perfetto lungo un profilo adiabatico. Mostrare che la densità si annulla per $z = z_{\max} = c_p T_0 / g$, dove T_0 è la temperatura al suolo ($z = 0$). Perché questo risultato è irrealistico se applicato ad un'atmosfera planetaria? (Suggerimento: calcolare la temperatura che si dovrebbe avere alla quota z_{\max}).

$$p\rho^{-\gamma} = \text{costante}$$

Prendiamo il logaritmo

$$\ln p - \gamma \ln \rho = \text{costante}$$

Deriviamo rispetto a z

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = 0$$

Ma

$$p = p_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^\gamma$$

Quindi

$$\frac{1}{p_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^\gamma} \frac{dp}{dz} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = 0$$



Valori al suolo: $z = 0$

Dato che

$$dp = -\rho g dz$$

$$\frac{d\rho}{\rho^{2-\gamma}} = -\frac{g}{\gamma p_0 \rho_0^{-\gamma}} dz$$

Integriamo

$$\left[\frac{1}{(\gamma - 1)} \rho^{\gamma - 1} \right]_0^z = -\frac{g}{\gamma p_0 \rho_0^{-\gamma}} z$$

$$\rho(z)^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1} = -\frac{g(\gamma-1)}{\gamma p_0 \rho_0^{-\gamma}} z$$

dividendo ambo i membri per $\rho_0^{\gamma-1}$

$$\left[\frac{\rho(z)}{\rho_0} \right]^{\gamma-1} - 1 = -\frac{g(\gamma-1)}{\gamma p_0 \rho_0^{-1}} z$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left[1 - \frac{g(\gamma-1)}{\gamma p_0 \rho_0^{-1}} z \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$p_0 = R\rho_0 T_0$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left[1 - \frac{g(\gamma - 1)}{\gamma p_0 \rho_0^{-1}} z \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \rho_0 \left[1 - \frac{g(\gamma - 1)}{\gamma R T_0} z \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$\gamma = c_p/c_v$ e $R = c_p - c_v$, e quindi $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{c_p}$

$$\rho(z) = \rho_0 \left[1 - \frac{gz}{c_p T_0} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



$$\rho(z) = \rho_0 \left[1 - \frac{gz}{c_p T_0} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

La densità si annullerebbe per

$$z_{max} = c_p T_0 / g$$

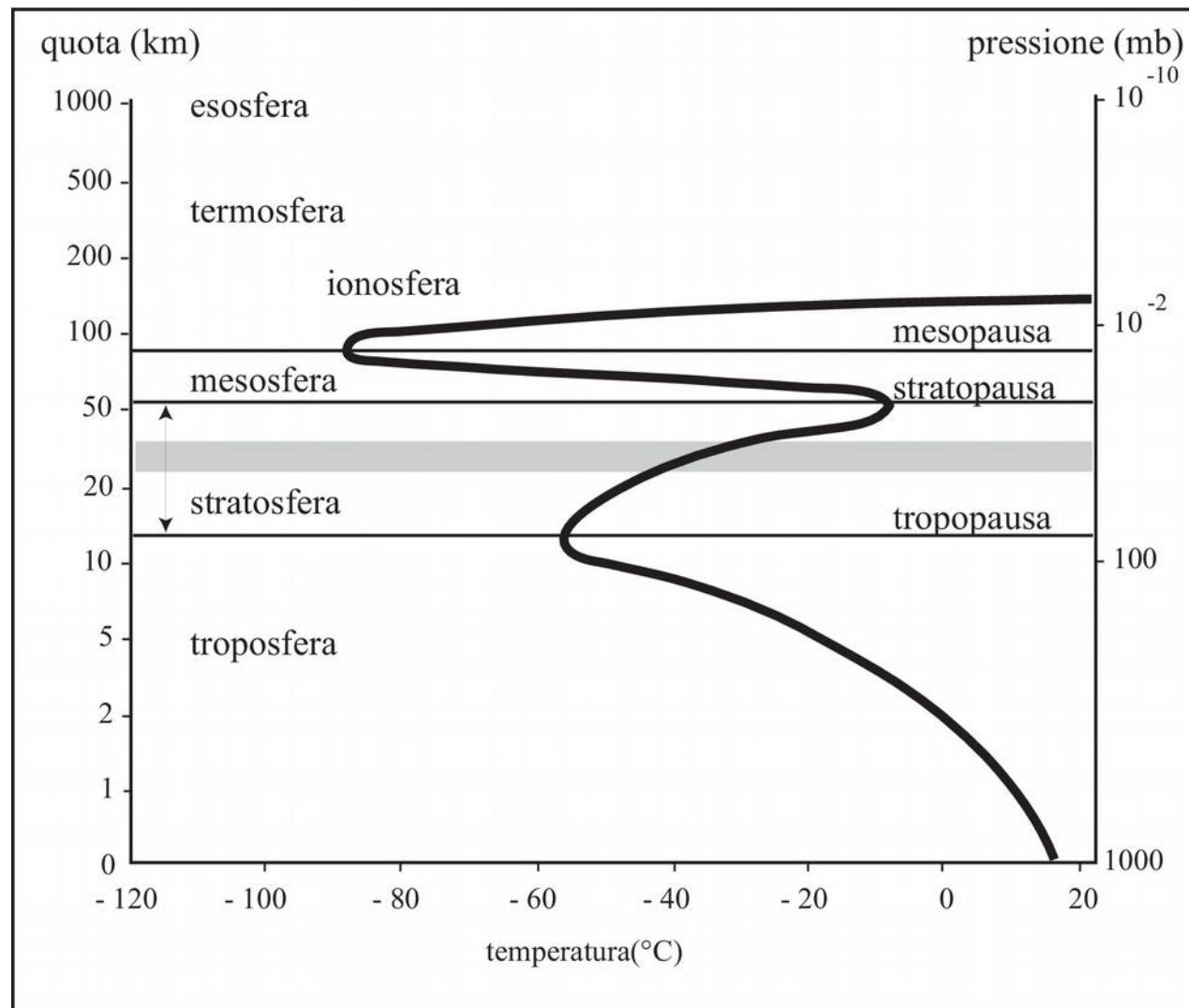
Se però consideriamo il gradiente adiabatico di un gas perfetto

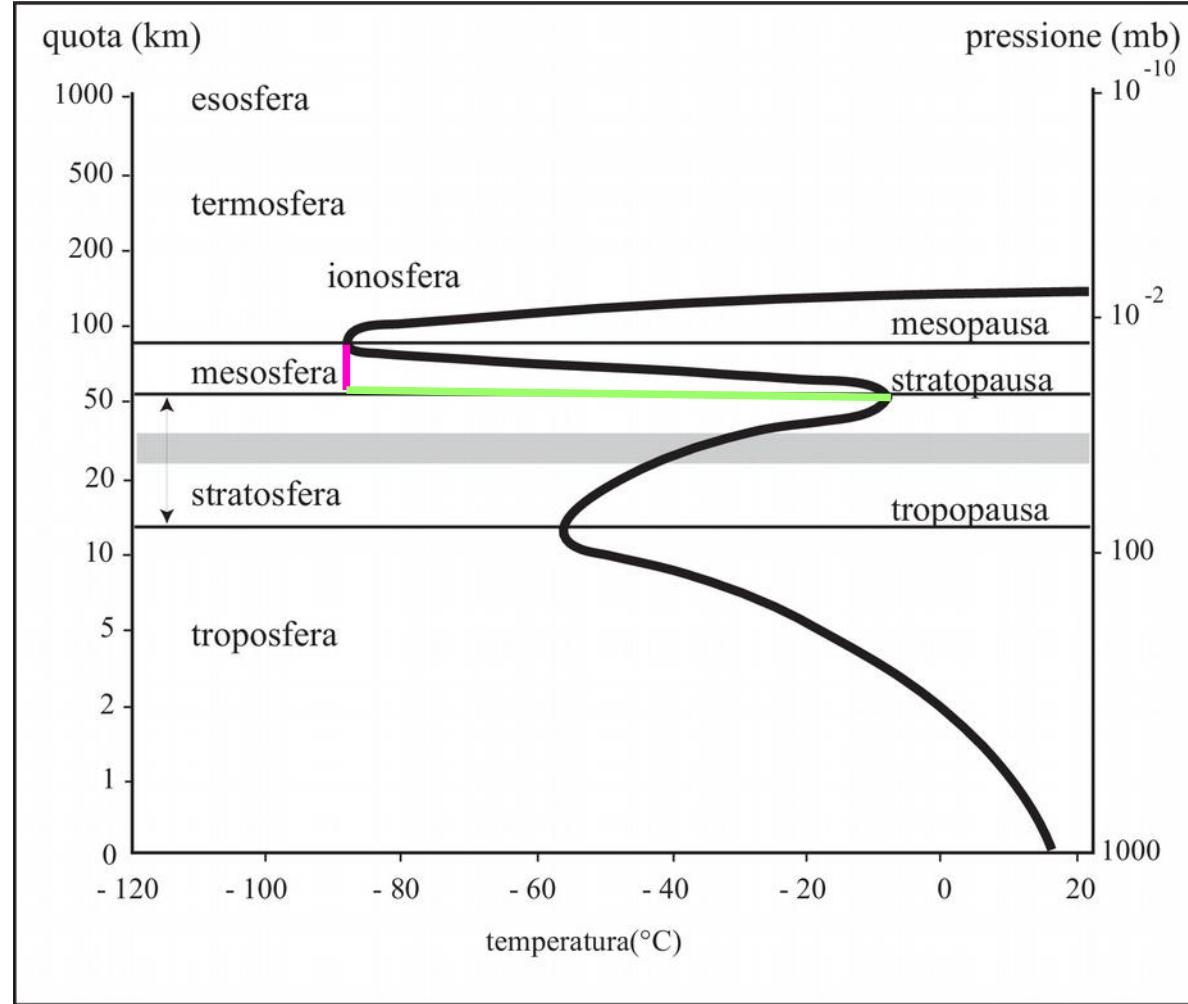
$$\Gamma = \frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p}$$

$$T(z_{max}) = T_0 - \frac{g}{c_p} \times \frac{c_p T_0}{g} = 0 \text{ K}$$

In realtà prima di della quota z_{max} , l'abbassamento della temperatura provoca la **condensazione del gas** (aumento di densità!) e quindi il fluido non può salire ulteriormente.

Esercizio 2. Nell'atmosfera terrestre la mesosfera si estende dalla quota di 50 km (stratopausa) dove la temperatura è mediamente di ~ 270 K fino alla quota di 80 km (mesopausa) dove la temperatura vale ~ 180 K. Dire se sono possibili moti convettivi nella mesosfera, motivando la risposta.





Gradiente adiabatico:

$$\Gamma = \frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} \sim -10 \text{ K/km}$$

Nella mesosfera:

$$\frac{180 - 270}{80 - 50} = -3 \text{ K/km}$$

Stabile!

Esercizio 3. Consideriamo un sistema termodinamico, caratterizzato da calore specifico a V costante $c_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$ ed equazione di stato

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{K_T} + \alpha dT$$

dove K_T è la incompressibilità isoterma e α è il coefficiente di espansione termica. Determinare un'espressione per la variazione di entropia dS per incrementi dT e dV di temperatura e volume specifico.

[Suggerimento: utilizzare l'energia libera di Helmholtz per calcolare $\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T$

Quindi mostrare che si ottiene la seguente espressione per l'incompressibilità adiabatica:

$$K_S = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S = K_T \left(1 + \frac{K_T \alpha^2 T}{\rho c_v} \right)$$

$$dS = \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT}_{\frac{c_v}{T} dT} + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV}_{?}$$

Dato che

$$F = E - TS \quad dF = -pdV - SdT$$

Allora

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \right) = \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V}_{\frac{\alpha}{\beta_T}}$$

Per l'equazione di stato

Quindi posso riscrivere dS come...

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV = \frac{c_v}{T} dT + K_T \alpha dV$$

- Servendoci dell'equazione di stato possiamo ricavare dT in funzione di dV e dp
- Nel caso di una adiabatica $dS=0$

Quindi

(continuate voi)

Esercizio 4. A causa della elevata densità del nucleo, l'accelerazione di gravità nel mantello terrestre è approssimativamente costante con la profondità: $g \sim 10 \text{ m/s}^2$. Inoltre, il mantello inferiore da 670 km di profondità fino a 2900 km (confine nucleo mantello) può essere considerato chimicamente omogeneo. Calcolare la densità ρ_b delle rocce alla base del mantello inferiore, assumendo un profilo di pressione litostatico, un valore medio di incompressibilità $K = 5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ e una densità del mantello a 670 km pari a $\rho_0 = 4400 \text{ kg/m}^3$.

Variazione della densità per effetto della compressione

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{\delta V}{V}$$

Volume specifico

$$K = -V \frac{\delta p}{\delta V} \implies \delta\rho = \rho \frac{\delta p}{K}$$

Dato che

$$dp = \rho g dz$$

$$\delta\rho = \rho^2 \frac{g}{K} dz$$

Integriamo...

$$\left[-\frac{1}{\rho} \right]_{h_0}^{h_b} = \frac{g(h_b - h_0)}{K}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_b} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{g(h_b - h_0)}{K}$$

$$= \frac{1}{4.4 \cdot 10^3} - \frac{10 \times 2.230 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^{11}} = 1.83 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \rho_b = 5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

N.B. La stima più precisa è pari a $\rho_b = 5550 \text{ kg/m}^3$ (K in realtà varia da $3 \cdot 10^{11}$ fino a $6.6 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$).

Esercizio 5. La presenza di basalto fuso alla base della litosfera oceanica (profondità ~ 100 km) indica una temperatura locale di $T_0 \sim 1500$ K. Supponendo che al di sotto della litosfera, per effetto della convezione, sia presente un regime adiabatico, quale dovrebbe essere la temperatura alla base del mantello (profondità ~ 2900 km)? (Ignorare l'effetto delle transizioni di fase nel mantello, considerare uniforme la gravità $g \sim 10$ m/s², il calore specifico $c_p = 10^3$ J/kgK e il coefficiente di espansione termica $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹).

Gradiente adiabatico

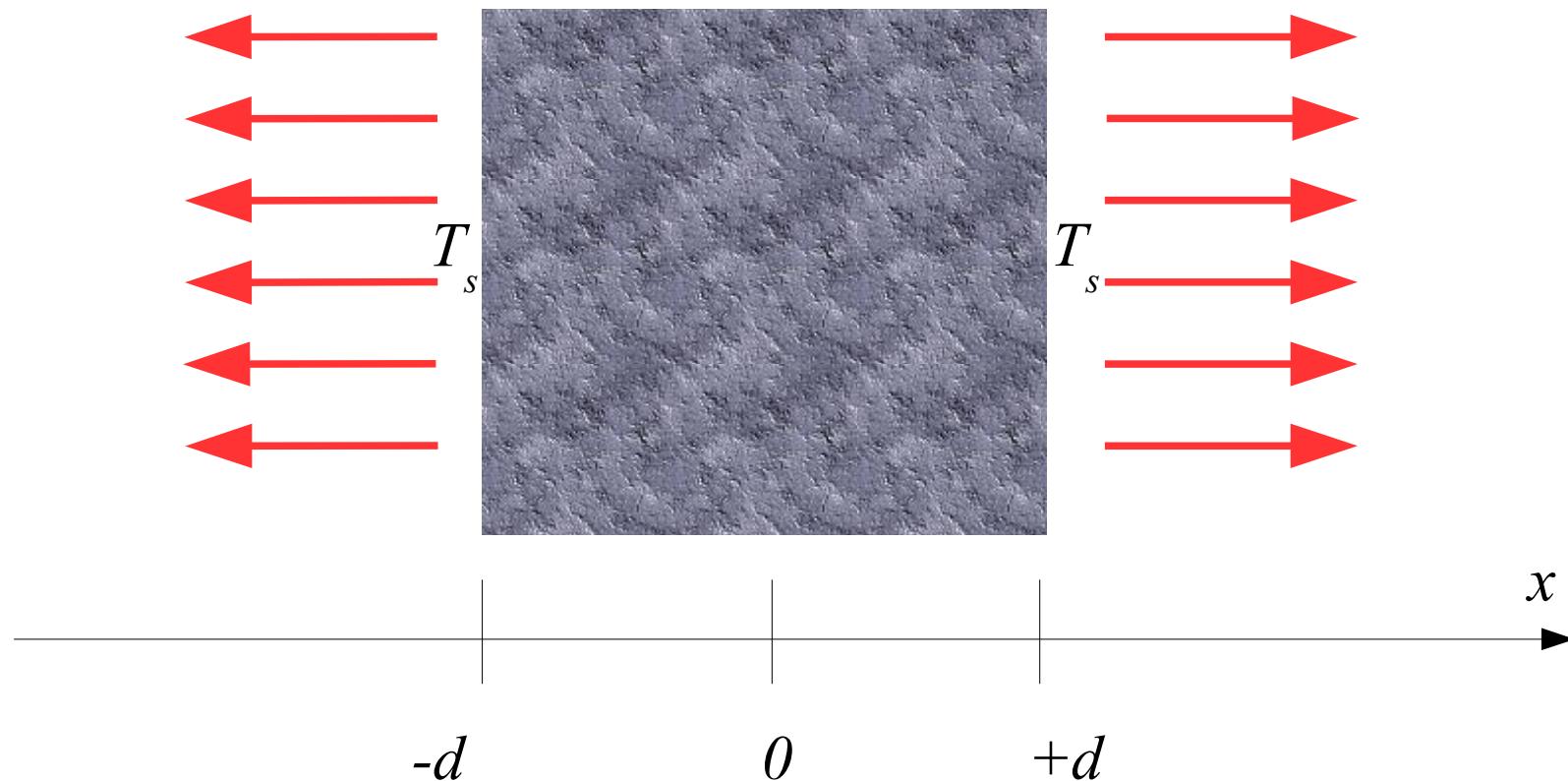
$$\frac{dT}{dz} = \frac{g\alpha T}{c_p}$$

$$\ln \frac{T(z)}{T_0} = \frac{g\alpha}{c_p} (z - z_0)$$

$$\Rightarrow T(z) = T_0 \exp \left\{ \frac{g\alpha}{c_p} (z - z_0) \right\}$$

$$T_b = 1500 \times \exp \left\{ \frac{10 \times 3 \cdot 10^{-5}}{10^3} \times (2.8 \cdot 10^6) \right\} = 3475 \text{ K}$$

Esercizio 6. Consideriamo l'equazione stazionaria di conduzione del calore, in presenza di sorgenti ($Q = \text{costante}$) in uno strato di spessore $2d$ nella direzione x , con superfici in $x = \pm d$ che irraggiano come corpi neri nello spazio circostante, secondo la legge di Stefan-Boltzmann $q = \sigma T_s^4$. Determinare la soluzione per la temperatura T in $-d < x < d$, la posizione e il valore del massimo di Temperatura, la temperatura T_s delle superfici. (Può essere conveniente sfruttare la simmetria del problema, per cui T deve essere una funzione pari di x).



Equazione del calore

$$\cancel{\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \rho Q + k \nabla^2 T}$$

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + \rho Q = 0$$

Condizioni al contorno:

$$q = -k \frac{dT}{dx} = \pm \sigma T_s^4 \text{ in } x = \pm d$$

Integriamo

$$k \frac{dT}{dx} = -\rho Q x + c_1 \implies \begin{cases} k \frac{dT}{dx} = -\rho Q d + c_1 = -\sigma T_s^4 & \text{in } x = +d \\ k \frac{dT}{dx} = +\rho Q d + c_1 = +\sigma T_s^4 & \text{in } x = -d \end{cases}$$

Quindi $c_1 = 0$ e $T_s = [\rho Q \frac{d}{\sigma}]^{1/4}$

Integriamo ancora...

$$T(x) = -\frac{1}{2k} \rho Q x^2 + c_2 \implies c_2 = T_s + \frac{1}{2k} \rho Q d^2$$

$$T(x) = T_s + \frac{1}{2k} \rho Q (d^2 - x^2)$$

La temperatura massima
è in $x=0$

Esercizio 7. Consideriamo l'equazione stazionaria del calore in assenza di sorgenti ($Q = 0$), in un semispazio $z \geq 0$ alla cui superficie $z = 0$ sia presente una temperatura variabile lungo l'orizzontale x in modo sinusoidale: $T(x, z = 0) = T_0 + \Delta T \sin(\alpha x)$ con α numero d'onda (assunto reale). Determinare la soluzione per la temperatura nel semispazio $z > 0$. [Suggerimento: assumere una soluzione separabile $T(x, z) = T_0 + f(z) \sin(\alpha x)$].

Equazione del calore

$$\cancel{\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \rho Q + k \nabla^2 T}$$

$$k \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) = 0$$

Condizione al contorno

$$T(x, 0) = T_0 + \Delta T \sin \alpha x$$

Supponiamo una soluzione

$$T(x, z) - T_0 = f(z) \sin \alpha x$$

Allora dovrà valere

$$-\alpha^2 f(z) \sin \alpha x + f''(z) \sin \alpha x = 0$$

Allora dovrà valere

$$f'' = \alpha^2 f \implies f(z) = A e^{\alpha z} + B e^{-\alpha z}$$

Ma A deve essere nullo!

Quindi riscrivendo la soluzione completa

$$T(x, z) = T_0 + B e^{-\alpha z} \sin \alpha x = T_0 + \Delta T e^{-\alpha z} \sin \alpha x$$

Esercizio 8. Consideriamo l'equazione transiente del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T$$

in assenza di sorgenti ($Q = 0$), nel caso 1-dimensionale (variabile spaziale x). Supponiamo che la soluzione sia un'onda complessa di calore

$$T(x, t) = T_0 e^{i(\kappa x - \omega t)}$$

Determinare la relazione di dispersione per il numero d'onda κ (complesso) in funzione di ω , assunto reale. Determinare la soluzione e la velocità di fase con cui si propaga l'onda. Verificare che l'attenuazione della temperatura al crescere di x è consistente con il tempo caratteristico di conduzione $\tau_c = L^2/D$.

$$-i\omega T_0 e^{i(\kappa x - \omega t)} = -\kappa^2 D T_0 e^{i(\kappa x - \omega t)}$$

$$\implies \kappa^2 = i \frac{\omega}{D} \implies \kappa = \pm(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

α

$\kappa^{(-)} = -(1+i)\alpha$ va scartata perché diverge per $x \rightarrow \infty$.

$$T(x, t) = \Re \left\{ T_0 e^{i[(1+i)\alpha x - \omega t]} \right\} = T_0 e^{-\alpha x} \cos(\alpha x - \omega t)$$

Esercizio 9. Il pianeta Venere possiede un'atmosfera molto densa e formata principalmente di CO_2 . La temperatura al suolo è $T_s = 730 \text{ K}$, ma quanto vale la sua temperatura di equilibrio T_{eq} con la radiazione solare? Spiegare il motivo della differenza fra T_{eq} e T_s e valutare la quota h alla quale l'atmosfera di Venere diventa trasparente alla radiazione uscente, supponendo un profilo adiabatico di temperatura. [Dati: Albedo $A = 0.75$, distanza Venere-Sole $d_{VS} = 0.723 \text{ AU}$, costante solare alla distanza della Terra dal Sole $S_T = 1370 \text{ W/m}^2$, raggio di Venere $R_V = 6051 \text{ km}$, Massa di Venere $M_V = 4.87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, costante di gravitazione $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$, costante di Stefan $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$, calore specifico dell'anidride carbonica $c_p = 10^3 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$.]

$$\pi R_V^2 S_V (1 - A) = 4\pi R_V^2 \sigma T_{eq}^4$$

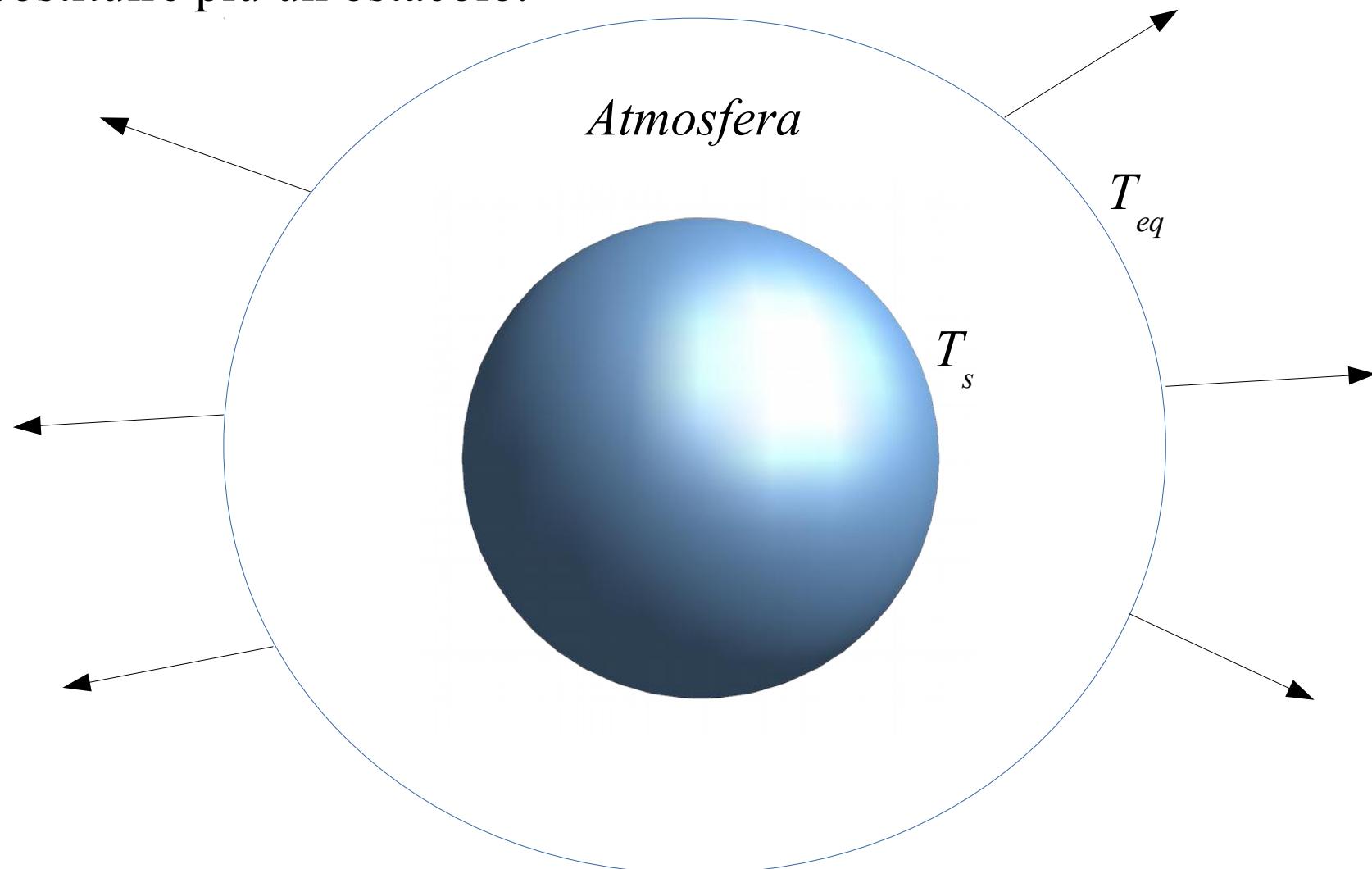
$$S_V d_{VS}^2 = S_T d_{TS}^2$$

$$S_V = 1370/(0.723)^2 = 2620 \text{ w/m}^2$$

$$T_{eq} = \left[\frac{S_V(1-A)}{4\sigma} \right]^{1/4} = \left(\frac{2620 \times 0.25}{4 \times 5.67 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/4}$$

$$= 232 \text{ K}$$

La temperatura della superficie di Venere è quindi 500 gradi più calda della temperatura di equilibrio. Responsabile di ciò è l'effetto serra dovuto alla capacità della CO_2 di assorbire e riemettere la radiazione infrarossa (trasferimento radiativo). La radiazione infrarossa viene quindi emessa nello spazio al “top” dell’atmosfera di Venere, dove la CO_2 è talmente rarefatta da non costituire più un ostacolo.



$$g = \frac{GM_V}{R_V^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \times 4.87 \cdot 10^{24}}{(6.051 \cdot 10^6)^2} = 8.87 \text{ m/s}^2$$

$$\Gamma = \frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} = 8.87 \cdot 10^{-3} \text{ K/m} = 8.87 \text{ K/km}$$

$$\Delta z = \frac{\Delta T}{dT_a/dz} = \frac{500}{8.87} = 56 \text{ km}$$

$T_s - T_{eq}$

Esercizi svolti per il corso di Fisica dei solidi e dei fluidi

Capitolo 3

Massimo Nespoli

Esercizio 1. L'isotopo ^{40}K del potassio decade secondo due modalità
 $^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ca}$ con costante di decadimento $\lambda_1 = 4.96 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$ e $^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ar}$
con costante $\lambda_2 = 5.81 \cdot 10^{-11} \text{ a}^{-1}$. Determinare la costante di decadimento
complessiva per il ^{40}K e il suo tempo di dimezzamento.

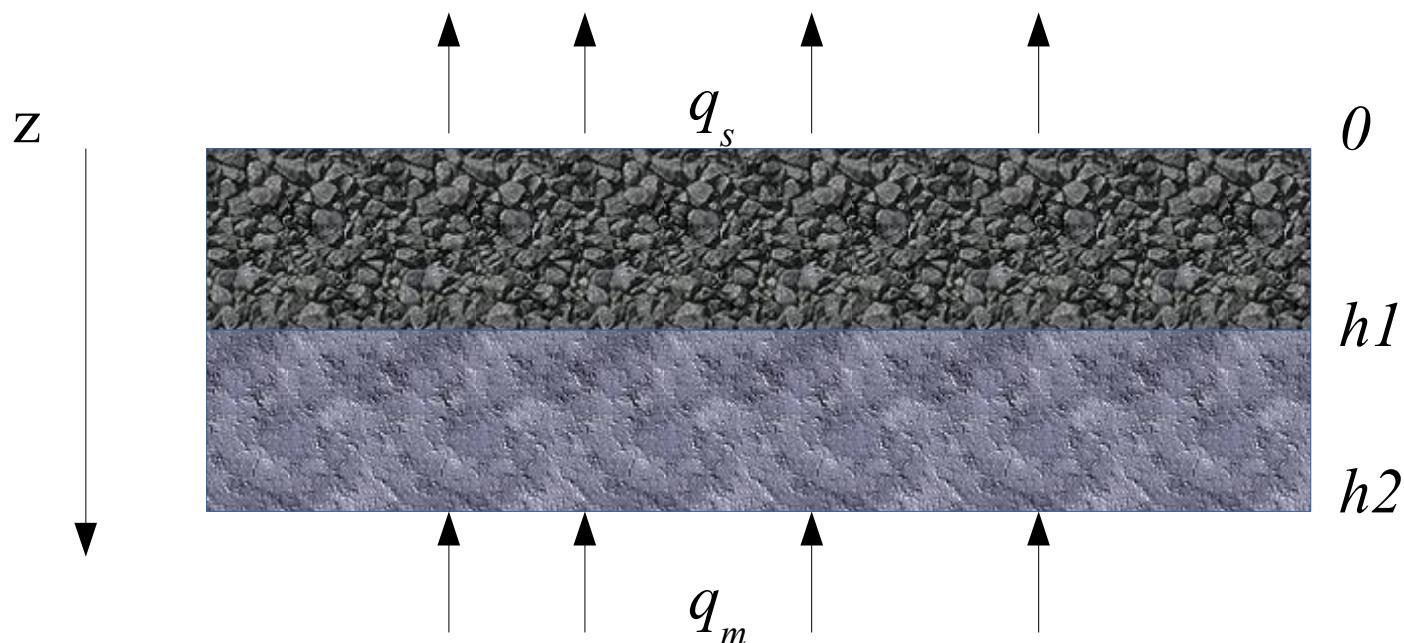
La costante di decadimento λ è la probabilità che avvenga un decadimento in un' unità di tempo, quindi

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = (4.96 + 0.581) \text{ a}^{-1} = 5.54 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$$

Mentre

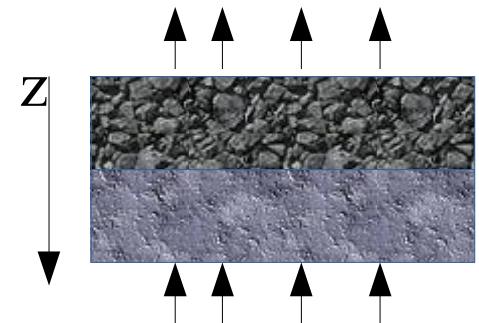
$$\tau_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 1.25 \text{ Ga}$$

Esercizio 2. La crosta continentale presenta una transizione fra una composizione prevalentemente granitica (crosta superiore) e una basaltica (crosta inferiore). Consideriamo un modello di crosta a due strati, con produzione di calore H_1 e conducibilità k_1 nel primo strato $0 < z < h_1$ (crosta superiore) e H_2 , k_2 nel secondo strato $h_1 < z < h_2$ (crosta inferiore). In $z = h_2$ sia presente un flusso ascendente di calore q_m incognito, proveniente dal mantello. Determinare il flusso di calore q_m e la temperatura T_2 in $z = h_2$. Dati: $k_1 = 2 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $k_2 = 3 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $h_1 = 10 \text{ km}$, $h_2 = 30 \text{ km}$, $\rho_1 H_1 = 2 \mu\text{W/m}^3$, $\rho_2 H_2 = 0.3 \mu\text{W/m}^3$, $T_s = 0^\circ\text{C}$, $q_s = 56 \text{ mW/m}^2$.



Equazione del calore

$$\cancel{\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right)} = \rho Q + k \nabla^2 T$$



Nel primo strato:

$$0 \leq z \leq h_1$$

$$k_1 \frac{d^2 T}{dz^2} = -\rho_1 H_1$$

Integrando...

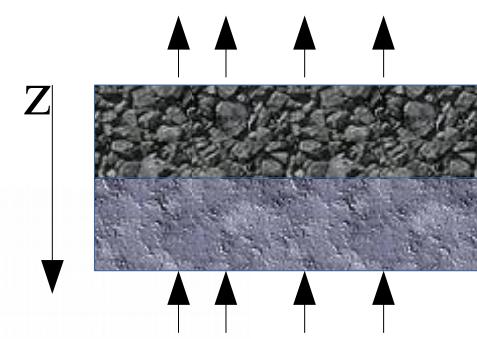
$$k_1 \frac{dT}{dz} = q = -\rho_1 H_1 z + c_1$$

$$c_1 = q_s$$

Integriamo ancora...

$$T = -\frac{1}{2k_1} \rho_1 H_1 z^2 + \frac{q_s}{k_1} z + c_2$$

$$c_2 = T_s$$



Alla base del primo strato:

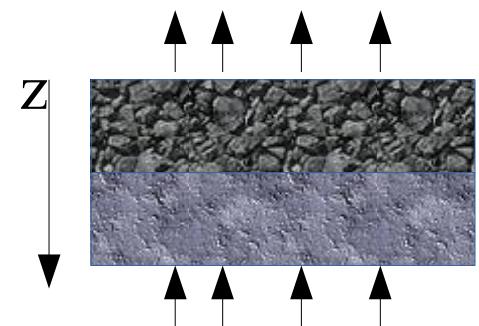
$$q(h_1) = q_s - \rho_1 H_1 h_1 = 36 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$$

$$T(h_1) = -\frac{1}{2k_1} \rho_1 H_1 h_1^2 + \frac{q_s}{k_1} h_1 + T_s$$

$$= 230^\circ C$$

Nel secondo strato: $h_1 \leq z \leq h_2$

$$k_2 \frac{d^2 T}{dz^2} = -\rho_2 H_2$$



Integriamo....

$$k_2 \frac{dT}{dz} = -\rho_2 H_2 z + d_1$$

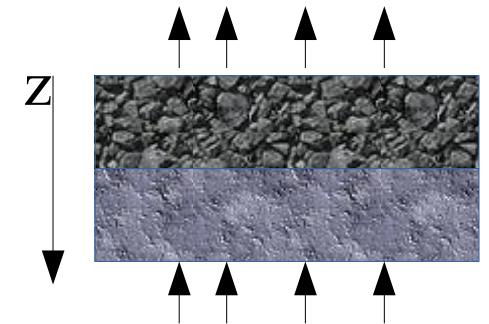
Flusso e temperatura alla base del primo strato debbono essere uguali a flusso e temperatura alla sommità del secondo strato

$$q(h_1) = -\rho_2 H_2 h_1 + d_1$$

$$d_1 = 39 \cdot 10^{-3} W/m^2$$

Alla base del secondo strato ($z = h_2$)

$$q_m = q(h_2) = d_1 - \rho_2 H_2 h_2$$



$$= 30 \text{ mW/m}^2$$

Se integriamo di nuovo l'equazione dello strato 2:

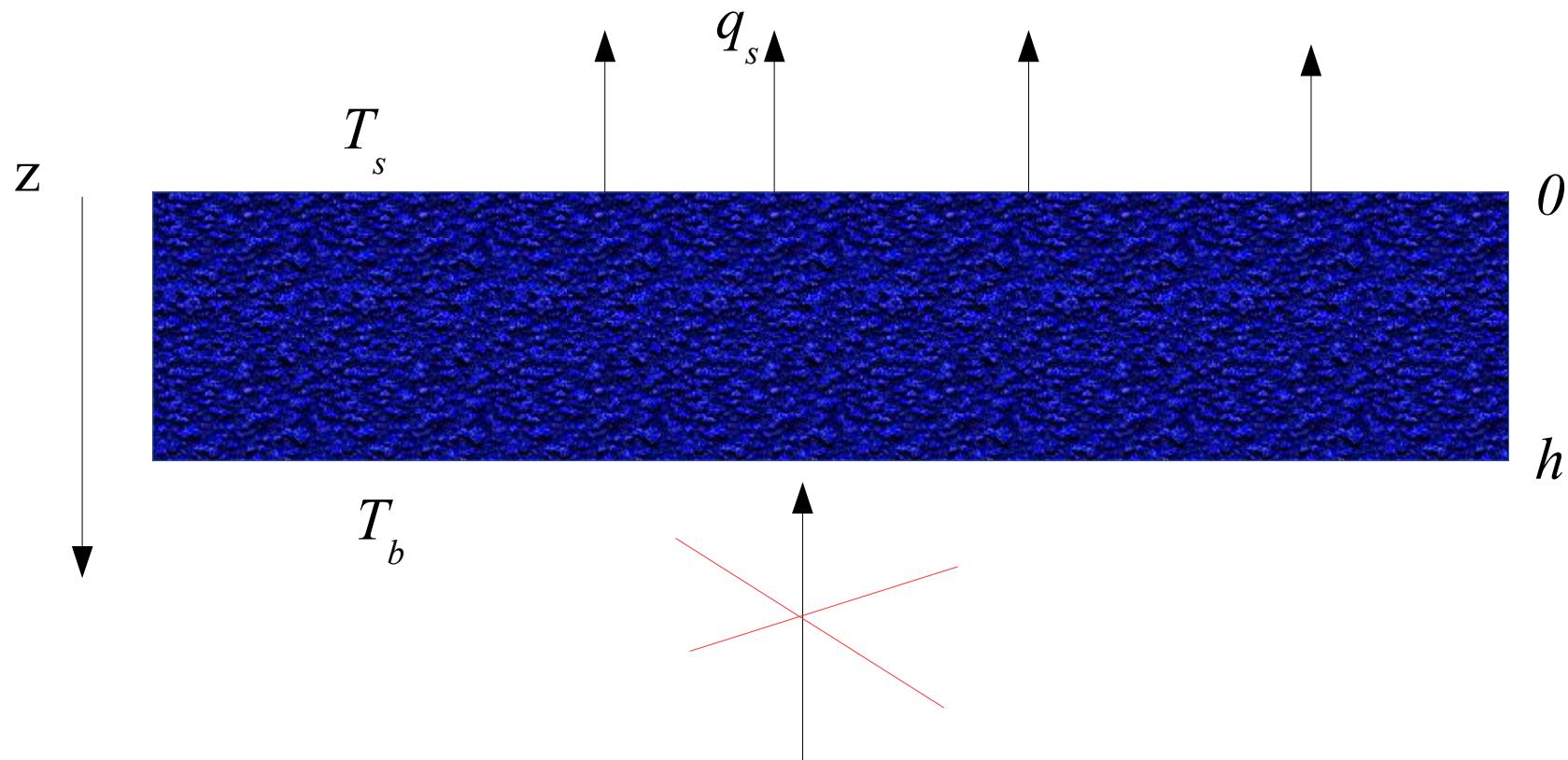
$$T(z) = \frac{d_1}{k_2} z - \frac{\rho_2 H_2}{2k_2} z^2 + d_2$$

$$d_2 = T(h_1) - \frac{d_1}{k_2} h_1 + \frac{\rho_2 H_2}{2k_2} h_1^2$$



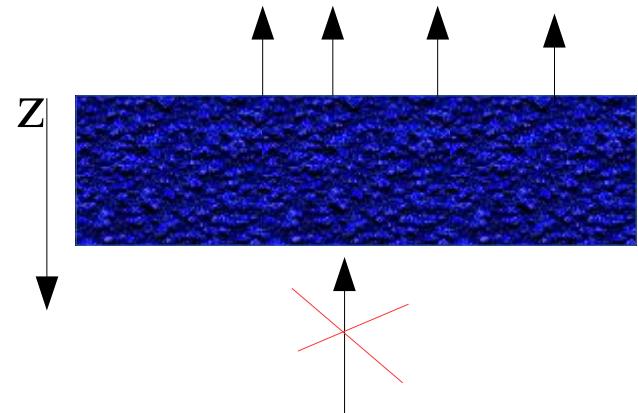
Ricavo anche $T(h_2) = 350 \text{ }^\circ\text{C}$

Esercizio 3. Assumiamo che gli elementi radioattivi nella Terra siano uniformemente distribuiti all'interno di uno strato superficiale di spessore h incognito. Il flusso di calore alla superficie sia $q_s = 70 \text{ mW/m}^2$ mentre alla base dello strato il flusso di calore è nullo. Se la conducibilità termica dello strato vale $k = 4 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$, la temperatura superficiale è $T_s = 0^\circ\text{C}$, la temperatura alla base dello strato è $T_b = 1200^\circ\text{C}$ determinare lo spessore h dello strato e la produzione volumetrica di calore ρH . [Assumere uno stato stazionario].



Equazione del calore

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \rho Q + k \nabla^2 T$$



$$k \frac{d^2 T}{dz^2} + \rho H = 0$$

Integriamo....

$$k \frac{dT}{dz} = q = -\rho H z + c_1$$

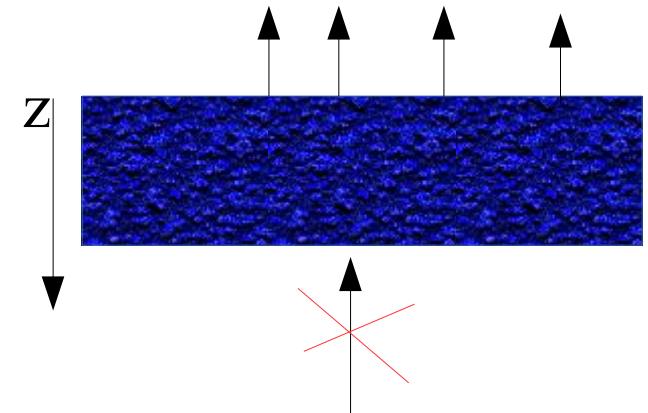
Il flusso di calore in superficie deve essere q_s :

$$c_1 = q_s$$

Inoltre $q = 0$ in $z = h$ sicché $q_s = \rho H h$

Integriamo di nuovo...

$$T(z) = \frac{q_s}{k}z - \frac{1}{2k}\rho Hz^2 + T_s$$



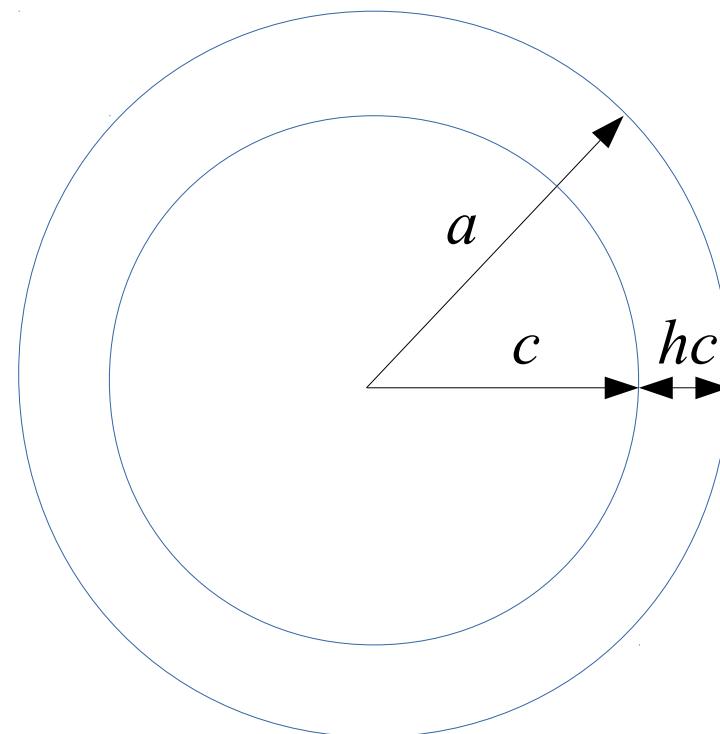
$$T(h) = T_s + \frac{q_s}{k}h - \frac{1}{2k}q_s h = T_s + \frac{q_s}{2k}h$$

Quindi:

$$h = [T(h) - T_s] \frac{2k}{q_s} = 1200 \frac{2 \times 4}{70 \cdot 10^{-3}} = 137 \text{ km}$$

$$\rho H = \frac{q_s}{h} = \frac{70 \cdot 10^{-3}}{137 \cdot 10^3} = 0.51 \cdot 10^{-6} W/m^3$$

Esercizio 4. Supponiamo che la Luna possa essere descritta come una sfera di raggio $a = 1738$ km con una crosta di spessore $h_c = 60$ km, densità $\rho_c = 2700 \text{ kg/m}^3$ e produzione di calore $H_c = 7 \times 10^{-11} \text{ W/kg}$ (10 volte maggiore di quello stimato per il mantello terrestre). Al di sotto della crosta, $r < c = (1738 - 60)$ km, sia presente un mantello omogeneo con densità $\rho_m = 3300 \text{ kg/m}^3$ e produzione di calore H_m . Determinare il valore di H_m in modo che il flusso superficiale sia $q_s = 18 \text{ mW/m}^2$ (media misurata nella missioni Apollo) e calcolare la temperatura presente al centro della Luna impiegando un valore uniforme di conducibilità $k = 3.3 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$.



Equazione del calore

$$\cancel{\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \rho Q + k \nabla^2 T}$$

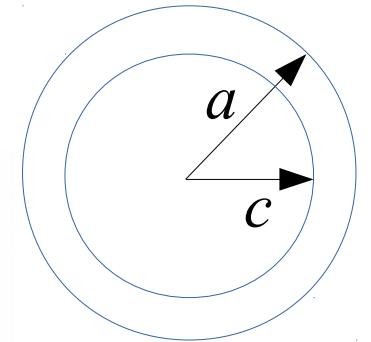
$$k \nabla^2 T = -\rho H$$

Il Laplaciano va scritto in coordinate sferiche:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right)$$

Nel mantello:

$$k_m \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\rho_m H_m r^2$$



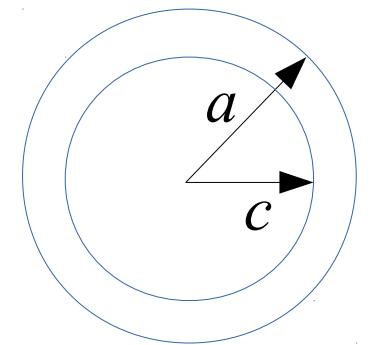
$$k_m \left(\frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho_m H_m}{3} r + \frac{c_1}{r^2}$$

Nella crosta:

$$k_c \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\rho_c H_c r^2$$

$$k_c \left(\frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho_c H_c}{3} r + \frac{d_1}{r^2}$$

$$\ln r = a$$

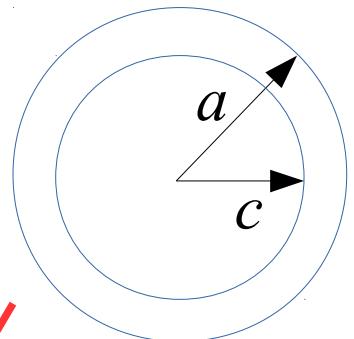


$$q_s = \frac{\rho_c H_c}{3} a - \frac{d_1}{a^2} \implies d_1 = \frac{\rho_c H_c}{3} a^3 - q_s a^2 \\ = 2.764 \cdot 10^{11} W$$

Abbiamo quindi calcolato d_1 , ora calcoliamo la produzione di calore nel mantello:

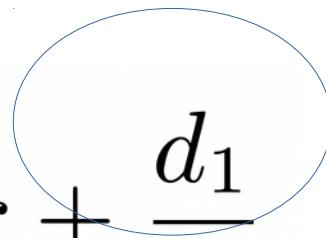
Nel mantello:

$$k_m \left(\frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho_m H_m}{3} r + \frac{c_1}{r^2}$$

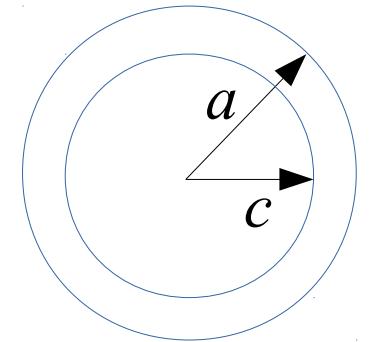


Nella crosta:

$$k_c \left(\frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho_c H_c}{3} r + \frac{d_1}{r^2}$$



In $r = c$, continuità del flusso



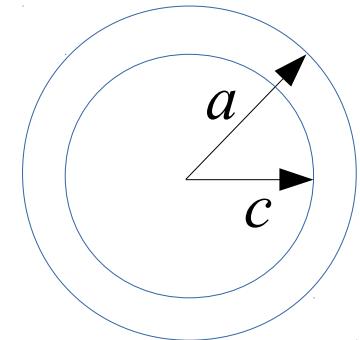
$$\frac{\rho_m H_m}{3} c = \frac{\rho_c H_c}{3} c - \frac{d_1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \rho_m H_m = \rho_c H_c - \frac{3d_1}{c^3}$$

$$= 1.35 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^3$$

Integriamo nuovamente per ottenere la temperatura. Nella crosta:

$$T(r) = -\frac{\rho_c H_c}{6k_c} r^2 - \frac{d_1}{k_c r} + d_2$$

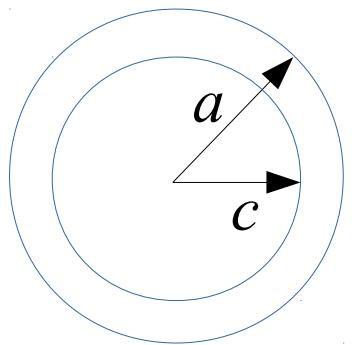


$$T(a) = T_s$$

$$d_2 = T_s + \frac{d_1}{k_c a} + \frac{\rho_c H_c}{6k_c} a^2$$

Quindi

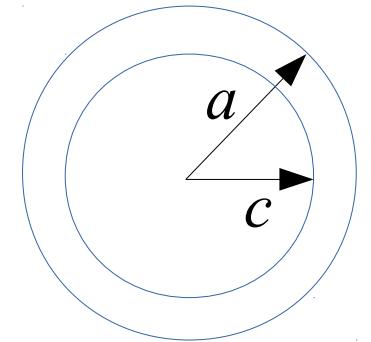
$$T(r) = T_s + \frac{\rho_c H_c}{6k_c} (a^2 - r^2) - \frac{d_1}{k_c} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$



$$\begin{aligned} T(c) - T_s &= \frac{\rho_c H_c}{6k_c} (a^2 - c^2) - \frac{d_1}{k_c} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) = \\ &= 233 K \end{aligned}$$

Nel mantello:

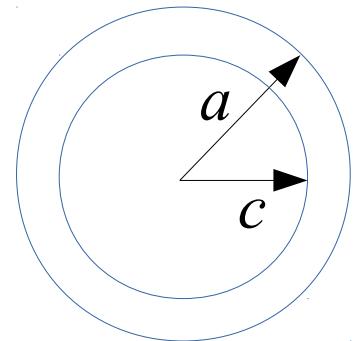
$$T(r) = -\frac{\rho_m H_m}{6k_m} r^2 + T_0$$



Temperatura al centro della
Luna ($r=0$), che vogliamo
trovare

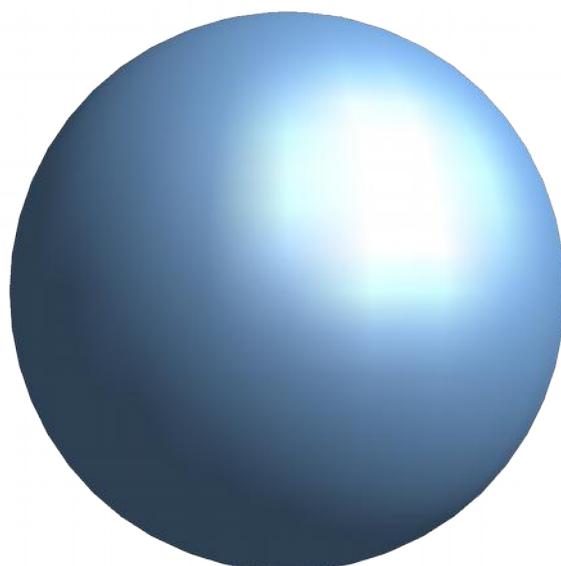
Per la continuità di T in $r = c$

$$T(c) = -\frac{\rho_m H_m}{6k_m} c^2 + T_0$$



$$T_0 - T_s = 233 + \frac{1.35 \cdot 10^{-8}}{6 \times 3.3} 1.678^2 \cdot 10^{12} = 2150 K$$

Esercizio 5. Consideriamo un pianeta sferico privo di atmosfera, di raggio a e densità uniforme ρ , contenente radionuclidi che producono una quantità H (costante) di calore per unità di massa e per unità di tempo. Sia inoltre k la conducibilità termica del materiale. Se il flusso di calore che giunge alla superficie viene disperso per irraggiamento di corpo nero nello spazio circostante, quale sarebbe la temperatura superficiale T_s del pianeta ? (non considerare fonti esterne di calore come la radiazione solare). E quale sarebbe la temperatura T_0 al centro del pianeta, assumendo un regime conduttivo stazionario ? Nel caso della Terra, che Temperatura otterremmo ? (impiegare valori numerici medi $a = 6371 \text{ km}$, $\rho = 5500 \text{ kg/m}^3$, $H = 7.4 \cdot 10^{-12} \text{ W/kg}$, $k = 3 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$).



Equazione del calore

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \rho Q + k \nabla^2 T$$

$$k \nabla^2 T = -\rho H$$

$$k \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\rho H$$

Integriamo:

$$k \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho H r}{3} + \frac{c_1}{r^2}$$

$$q_s = \sigma T_s^4$$

$$T_s = \left[\frac{\rho H a}{3\sigma} \right]^{1/4} = \left[\frac{5.5 \cdot 10^3 \times 7.4 \cdot 10^{-12} \times 6.371 \cdot 10^6}{3 \times 5.67 \cdot 10^{-8}} \right]^{1/4} = 35 \text{ K}$$

Integriamo di nuovo:

$$T(r) = -\frac{\rho H r^2}{6k} + c_2$$

$$T(r = a) = T_s$$

$$T(r) - T_s = \frac{\rho H}{6k} (a^2 - r^2)$$

Quindi al centro della Terra:

$$T(0) - T_s = \frac{\rho H}{6k} a^2 = \frac{5.5 \cdot 10^3 \times 7.4 \cdot 10^{-12}}{6 \times 3} 6.371^2 \cdot 10^{12} = 91,780 K$$

Esercizio 6. Sulla Luna l'escursione di temperatura fra la faccia illuminata dal Sole e quella oscura è di ~ 300 K. A che profondità le variazioni di temperatura sono limitate a ± 10 K rispetto al valore medio ?

Dati: periodo di rotazione della luna $P = 28$ giorni, diffusività termica delle rocce lunari $D \sim 10^{-6}$ m²/s.

Prendiamo la soluzione del riscaldamento periodico di un semispazio:

$$T(z, t) = \Delta T e^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

$$\delta = \sqrt{2D/\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

$$\delta = \sqrt{2 \cdot 10^{-6} / 2.6 \cdot 10^{-6}} = 0.877 \text{ m}$$

Le oscillazioni di temperatura si riducono a 10 K se:

$$\Delta T e^{-z/\delta} = 10$$

$$e^{-z/\delta} = \frac{10}{150}$$

$$z = \delta \times \ln 15 = 0.877 \times 3.27 = 2,37 \text{ m}$$

Esercizio 7. Sul pianeta Mercurio la temperatura superficiale oscilla fra 700 K e 100 K, rispettivamente fra la faccia rivolta verso il Sole e la faccia opposta. Supponiamo che la variazione di temperatura sia armonica. Calcolare a che profondità h nel sottosuolo di Mercurio le oscillazioni di temperatura sono contenute entro ± 10 K dal valore medio.

Dati: periodo di rotazione siderale di Mercurio 60 giorni, periodo di rivoluzione siderale 90 giorni (valori approssimati per facilitare i calcoli). Assumere per i parametri termici delle rocce di Mercurio valori tipici delle rocce terrestri.

Dopo una rivoluzione, Mercurio ha effettuato 1.5 rotazioni siderali e quindi mostra al Sole la faccia opposta a quella iniziale. Occorrono 2 rivoluzioni per compiere 3 giorni siderali mercuriani e mostrare la stessa faccia al Sole: quindi la durata del giorno solare mercuriano è

$$\tau_M = 180 \text{ giorni} = 1.55 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi/\tau_M = 4.04 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$\Delta T = 300 \text{ K}$$

$$\delta = \sqrt{2D/\omega} = \sqrt{2 \cdot 10^{-6}/4.04 \cdot 10^{-7}} = 2.22 \text{ m}$$

$$\Delta T e^{-z/\delta} = 10 \implies z = \delta \ln 30 = 7.57 \text{ m}$$

Esercizio 8. Il suolo ghiacciato nelle regioni artiche è detto permafrost ed è caratterizzato da elevata rigidità; se nell'arco dell'anno la temperatura supera lo zero, il ghiaccio fonde e il suolo diventa fango. Tuttavia, per garantire la stabilità del suolo, è sufficiente che esso resti ghiacciato in profondità, anche se gli strati più superficiali raggiungono temperature maggiori di zero. Assumiamo che nell'arco dell'anno la temperatura in superficie vari in modo periodico ($\sim \Delta T \cos \omega t$) attorno alla temperatura media T_0 ; alla profondità z , $T(z, t)$ oscilla durante l'anno fra due profili $T_{\min}(z)$ e $T_{\max}(z)$. Calcolare a quale profondità $T_{\max}(z)$ è minima, tenendo conto del flusso di calore q_s proveniente dalla crosta e trascurando il calore latente di fusione del ghiaccio. La conducibilità termica sia k e la diffusività termica sia D . Una località ha temperatura media annuale di -2 °C con oscillazioni stagionali di ± 10 °C; se $q_s = 60$ mW/m², $k = 3$ W m⁻¹ K⁻¹ e $D = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s il suolo è stabile lungo tutto l'arco dell'anno ?



Riscaldamento periodico + regime conduttivo stazionario

$$T(z, t) = T_0 + \frac{q_s}{k} z + \Delta T e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$$

$$\delta = \sqrt{2D/\omega} = \sqrt{2k/\rho c_p \omega}$$

$$\sim 3.17 \text{ m}$$

$$T_{max}(z) = T_0 + \frac{q_s}{k} z + \Delta T e^{-z/\delta}$$

$$T_{min}(z) = T_0 + \frac{q_s}{k} z - \Delta T e^{-z/\delta}$$

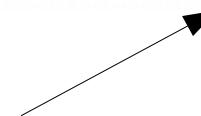
Il suolo è stabile se esiste almeno un valore di z per cui $T_{max} < 0$. Prendiamo il minimo di T_{max} :

$$\frac{q_s}{k} - \frac{\Delta T}{\delta} e^{-z/\delta} = 0 \implies e^{-z/\delta} = \frac{q_s \delta}{k \Delta T}$$

$$z_0 = \delta \ln \frac{k \Delta T}{q_s \delta} \simeq 3.17 \ln \left(\frac{3 \times 10}{60 \cdot 10^{-3} \times 3.17} \right) = 16 \text{ m}$$

In z_0 la temperatura massima vale:

$$T_{max}(z_0) = -2 + 2 \cdot 10^{-2} \times 16 + 10 \cdot e^{-16/3.17} = -1.62^\circ C$$



Quindi è stabile!

Esercizio 9. Consideriamo una calotta glaciale su una regione continentale: il flusso di calore proveniente dall'interno della Terra determina un gradiente di temperatura all'interno del ghiaccio:

- 1) quale sarebbe lo spessore massimo di ghiaccio nell'ipotesi che la calotta sia immobile e non ci siano ulteriori precipitazioni? [Assumere un flusso di calore $q_c = 70 \text{ mW/m}^2$ proveniente dalla crosta e una temperatura superficiale $T_s = -30 \text{ }^\circ\text{C}$; la conducibilità termica del ghiaccio sia $k = 2.2 \text{ W/m K}$].
- 2) se le precipitazioni aggiungono uno spessore di ghiaccio di 20 cm/a, sarebbe possibile raggiungere uno spessore stazionario in assenza di moti orizzontali del ghiacciaio? [Il calore latente di fusione del ghiaccio vale $L = 3.2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$, la sua densità $\rho_g = 900 \text{ kg/m}^3$].



Equazione del calore

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \rho Q + k \nabla^2 T$$

Disponiamo l'asse z all'ingiù con $z = 0$ alla superficie e $z = h$ al contatto con la crosta rocciosa. Se il flusso geotermico prosegue all'interno del ghiaccio, l'equazione stazionaria di conduzione richiede che sia:

$$k \frac{d^2 T}{dz^2} = 0$$

Integriamo:

$$k \frac{dT}{dz} = c_1 = q_c \quad \forall z \in [0, h]$$

Poiché: $k \frac{dT}{dz} = q_c$ in $z = h$

Integriamo di nuovo:

$$T(z) = \frac{q_c}{k} z + c_2$$

$c_2 = T_s$ per la condizione in $z = 0$

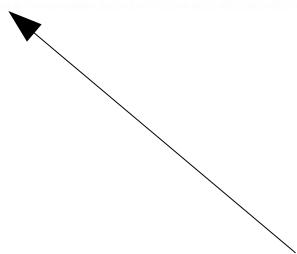
Per non far fondere il ghiaccio, la temperatura deve essere sempre maggiore o uguale a 0°C .

$$\frac{q_c}{k} h + T_s \leq 0$$

$$h \leq -kT_s/q_c = 940 \text{ m}$$

Se però uno strato di ghiaccio di spessore a si accumula per unità di tempo, per avere uno spessore stazionario deve verificarsi scioglimento di un pari spessore alla base $z = h$; quindi l'intero spessore del ghiacciaio sprofonda con velocità a , con temperatura T_s in $z=0$ e temperatura $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ in $z = h$. Il flusso di calore q_c proveniente dalla crosta è speso in parte per sciogliere il ghiaccio e in parte prosegue per conduzione nel ghiacciaio. Il calore necessario per sciogliere lo spessore a nell'unità di tempo vale $q_0 = \rho_g La$:

$$q_0 = 900 \times 3.2 \cdot 10^5 \times 0.2 / 3.15 \cdot 10^7 = 1.83 \text{ W/m}^2$$



Ma è molto più grande di q_c , quindi
il ghiacciaio aumenta di spessore !!

Esercizio 11. Per determinare gli effetti dell'erosione sul flusso di calore misurato alla superficie terrestre, consideriamo la rimozione istantanea al tempo $t = 0$ di uno spessore h di suolo. Prima dell'erosione la temperatura T_0 aveva il seguente andamento in funzione della profondità z (misurata a partire dalla superficie erosa): $T_0(z) = Ts + \beta(z+h)$, con β gradiente geotermico imperturbato e Ts temperatura superficiale (trascuriamo quindi il contributo delle sorgenti di calore). Dopo l'erosione la nuova superficie è tenuta alla temperatura Ts . Mostrare che la temperatura dopo l'erosione ha il seguente andamento:

$$T(z, t) = Ts + \beta z + \beta h \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad \text{con } D \text{ diffusività termica}$$

Come cambia il flusso di calore superficiale in seguito all'erosione?
 [Traccia: scrivere $T(z, t) = T_0(z) + T^*(z, t)$ con $T_0(z) = Ts + \beta(z + h)$; T e T^* obbediscono all'equazione di conduzione della temperatura; determinare le condizioni iniziali e al contorno per il transiente T^* e infine risolvere l'equazione col metodo di similarità.]

Equazione del calore

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \rho Q + k \nabla^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Condizioni iniziali e al contorno:

$$T(z, 0^+) = T_s + \beta(z + h), \quad T(0, t) = T_s, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=\infty} = \beta$$

Posto $T = T_s + \beta(z + h) + T^*(z, t)$

$$T^*(z, 0^+) = 0, \quad T^*(0, t) = -\beta h, \quad \left. \frac{\partial T^*}{\partial z} \right|_{z=\infty} = 0$$

Ma questo problema è come il raffreddamento istantaneo di un semispazio:

$$T^*(z, t) = c_1 + c_2 \operatorname{erf}(\eta) \quad \text{con } \eta = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}$$

Per $z = 0$ e $\eta = 0$, $\operatorname{erf}(0) = 0 \implies c_1 = -\beta h$

per $z = \infty$ e $t = 0^+$ e $\eta = \infty$, $\operatorname{erf}(\infty) = 1 \implies c_2 = \beta h$

$$T^*(z, t) = \beta h \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} \right) - 1 \right\}$$

$$T(z, t) = T_s + \beta z + \beta h \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} \right)$$

Esercizio 13. Gli strati superficiali di un meteorite, attraversando l'atmosfera terrestre, si scaldano per attrito fino al punto di fusione e vengono asportati. Consideriamo il seguente modello: la superficie del meteorite in $z = 0$ sia alla temperatura di fusione T_f e l'attrito generi una quantità costante di calore q per unità di superficie e di tempo. Il meteorite sia abbastanza grande da poterlo considerare infinito, di modo che la temperatura nell'interno del meteorite (per $z \gg 0$) sia T_0 , costante e il regime sia stazionario. Il materiale del meteorite abbia densità ρ , calore specifico c_p e calore latente di fusione L . Determinare lo spessore V asportato dalla superficie per unità di tempo. [Nota: l'interno del meteorite si avvicina alla superficie $z = 0$ con velocità $v_z = -V$].



Equazione del calore

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \rho Q + k \nabla^2 T$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T = D \nabla^2 T$$

$$-V \frac{dT}{dz} = D \frac{d^2 T}{dz^2}$$

Con condizioni al contorno

$$T(z=0) = T_f, \quad T(z \rightarrow \infty) = T_0$$

Soluzione: Del tipo $T=A+B\exp(-V/D^*z)$

$$T(z) = (T_f - T_0) \exp \left\{ -\frac{\rho c V}{k} z \right\} + T_0$$

Il calore q generato dall'attrito deve ripartirsi fra il calore necessario per fondere lo spessore V per unità di tempo e il flusso di calore che si propaga verso l'interno per conduzione

$$q = \rho L V - \left[k \frac{dT}{dz} \right]_{z=0} = \rho L V + k(T_f - T_0) \frac{\rho c V}{k}$$

$$V = \frac{q}{\rho [L + c(T_f - T_0)]}$$

Esercizi svolti per il corso di Fisica dei solidi e dei fluidi

Capitolo 4

Massimo Nespoli

Esercizio 1. Mostrare, in base alla definizione di tensore che il simbolo di Kronecker δ_{ij} è un tensore con elementi di matrice invarianti per rotazioni. Mostrare inoltre che la traccia A_{kk} di un tensore A_{ij} è invariante (è uno scalare).

In base alla definizione, il simbolo di Kronecker è un tensore se:

$$\delta'_{ij} = C_{ik} C_{jl} \delta_{kl}$$

Nella somma sugli indici k, l , sono nulli tutti i prodotti con $k \neq l$

$$\delta'_{ij} = C_{ik} C_{jk}$$

Che è il prodotto della riga i -esima della matrice ortogonale **C** per la riga j -esima e quindi

$$\delta'_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j, \delta'_{ij} = 1 \text{ se } i = j$$

$$A_{kk} = A_{ij} \delta_{ij}$$

Esercizio 2. Mostrare che, se A_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ è un tensore, la seguente espressione, data dalla somma dei complementi algebrici degli elementi diagonali, è invariante (cioè è uno scalare)

$$J_2 = (A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) + (A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}) + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})$$

[Suggerimento: Riscrivere J_2 tramite $I_1 = A_{kk}$ e $I_2 = A_{ij}A_{ji}$, che sono chiaramente invarianti per il teorema di contrazione].

$$(A_{kk})^2 = (A_{11} + A_{22} + A_{33})^2$$

$$= A_{11}A_{11} + A_{22}A_{22} + A_{33}A_{33} + 2A_{11}A_{22} + 2A_{11}A_{33} + 2A_{22}A_{33}$$

$$A_{ij}A_{ji} = (A_{11}A_{11} + A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{21}A_{12} + A_{22}A_{22} + \dots)$$

Quindi, nella differenza fra le precedenti espressioni si cancellano i termini quadratici A_{11}^2 , A_{22}^2 , A_{33}^2 e restano, moltiplicati per 2, gli altri termini

$$2J_2 = (A_{kk})^2 - A_{ij}A_{ji}$$

Esercizio 3. Impiegando la notazione indiciale, mostrare che valgono le seguenti identità (ϕ è un campo scalare, A e B sono campi vettoriali) :

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \phi$$

$$\frac{\partial(\phi A_i)}{\partial x_i} = \phi \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + A_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

$$e_{ijk} \frac{\partial(\phi A_k)}{\partial x_j} = e_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} A_k + e_{ijk} \phi \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{klm} A_l B_m) =$$

$$[\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}] \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j} B_m + \frac{\partial B_m}{\partial x_j} A_l \right)$$

$$= \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} B_j + \frac{\partial B_j}{\partial x_j} A_i \right) - \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_j} B_i + \frac{\partial B_i}{\partial x_j} A_j \right)$$

N.B.

$$e_{ijk} e_{klm} = [\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}]$$

Esercizio 4. Impiegare l'identità $e - \delta$ per ottenere l'identità

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(e_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m \right)$$

$$= [\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}] \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} A_i$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} A_i$$

Esercizio 5. Dati due punti di coordinate $P = (0, 0)$ e $Q = (30, 10)$ (coordinate in km) nel piano xy , calcolare la variazione della loro distanza per effetto di una deformazione descritta dal seguente tensore (2-D): $\varepsilon_{xx} = 10^{-6}$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 3 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_{yy} = -10^{-6}$.

$$ds - ds_0 = \frac{\epsilon_{ij} dx_i dx_j}{ds_0}$$



Distanza dopo della
deformazione

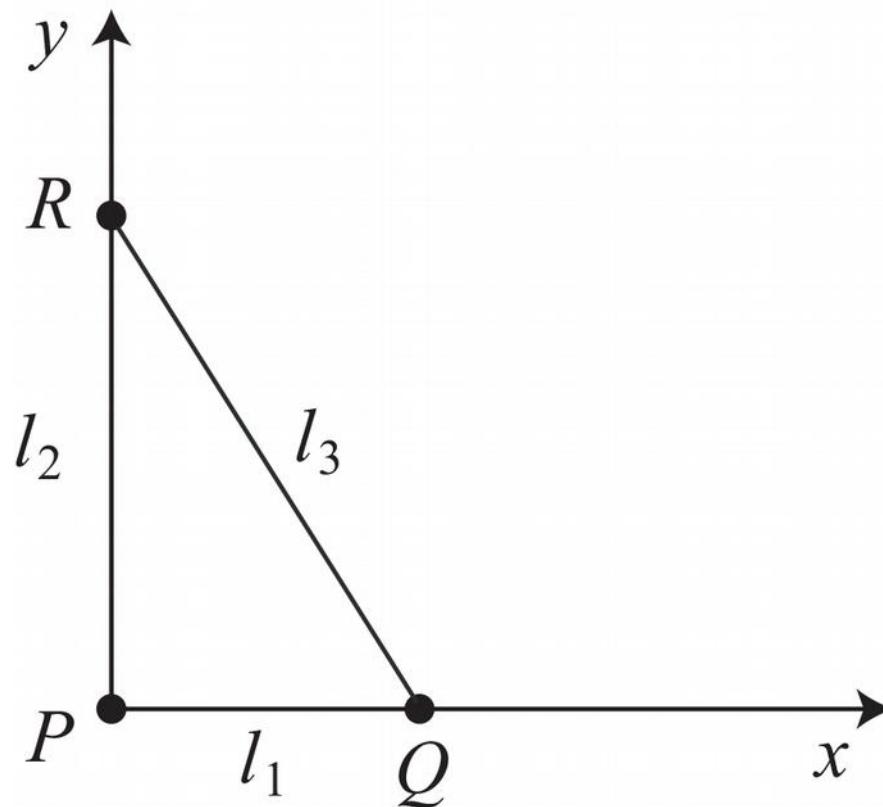
Distanza prima della
deformazione

$$dx_1 = 3 \cdot 10^4 \text{ m}, \quad dx_2 = 10^4 \text{ m}, \quad ds_0 = \sqrt{30^2 + 10^2} = 3.16 \cdot 10^4 \text{ m}$$

$$ds - ds_0 = \frac{\epsilon_{11} dx_1^2 + 2\epsilon_{12} dx_1 dx_2 + \epsilon_{22} dx_2^2}{ds_0}$$

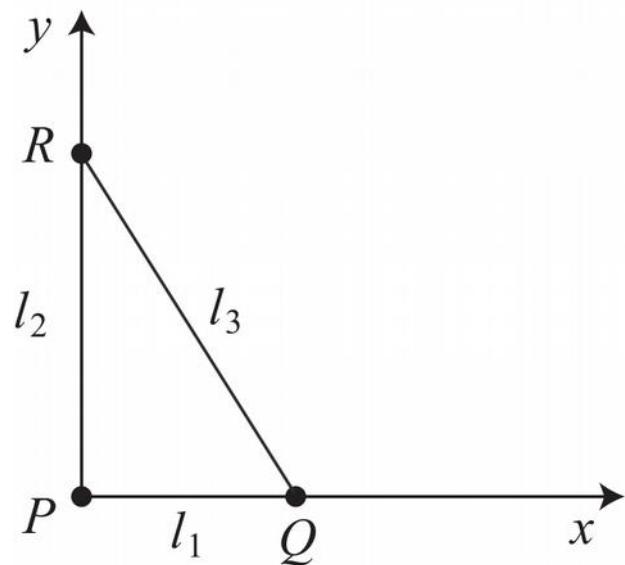
$$ds - ds_0 = \frac{10^{-6} \times 9 \cdot 10^8 + 6 \cdot 10^{-6} \times 3 \cdot 10^8 - 10^{-6} \times 10^8}{3.16 \cdot 10^4} \text{ m} = 8.23 \text{ cm.}$$

Esercizio 6. Consideriamo tre punti con coordinate (in km) $P = (0, 0)$, $Q = (10, 0)$ km e $R = (0, 20)$ km nel piano orizzontale xy ; dette l_1 , l_2 ed l_3 le distanze PQ , PR , QR , un processo deformativo provoca variazioni $\delta l_1 = 4$ cm, $\delta l_2 = 0$ cm, $\delta l_3 = 2$ cm. Determinare le componenti ε_{xx} , ε_{xy} , ε_{yx} , ε_{yy} del tensore bidimensionale di deformazione nel piano xy .



$$ds - ds_0 = \frac{\epsilon_{ij} dx_i dx_j}{ds_0}$$

$$ds - ds_0 = \frac{\epsilon_{11} dx_1^2 + 2\epsilon_{12} dx_1 dx_2 + \epsilon_{22} dx_2^2}{ds_0}$$



PQ

$$dx_1 = 10^4 \text{ m}, \quad dx_2 = 0$$

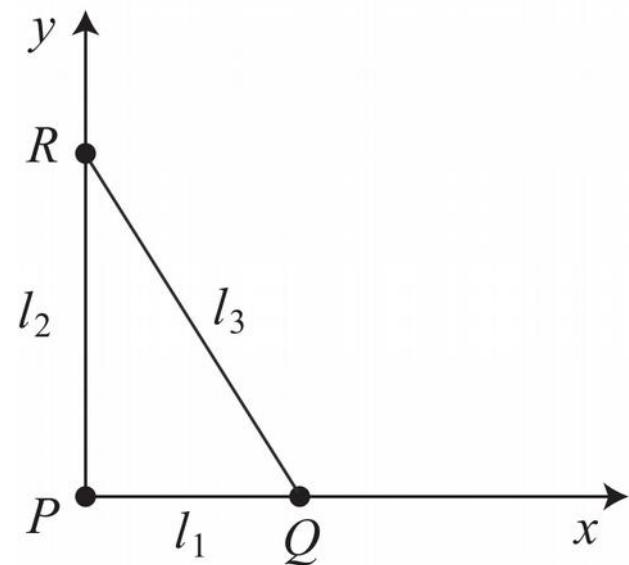
$$ds_0 = dx_1$$

$$ds - ds_0 = \delta l_1 = \epsilon_{11} dx_1$$

$$\epsilon_{11} = 4 \cdot 10^{-6}$$

$$ds - ds_0 = \frac{\epsilon_{ij} dx_i dx_j}{ds_0}$$

$$ds - ds_0 = \frac{\epsilon_{11} dx_1^2 + 2\epsilon_{12} dx_1 dx_2 + \epsilon_{22} dx_2^2}{ds_0}$$



PR

$$dx_1 = 0, \quad dx_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ m}$$

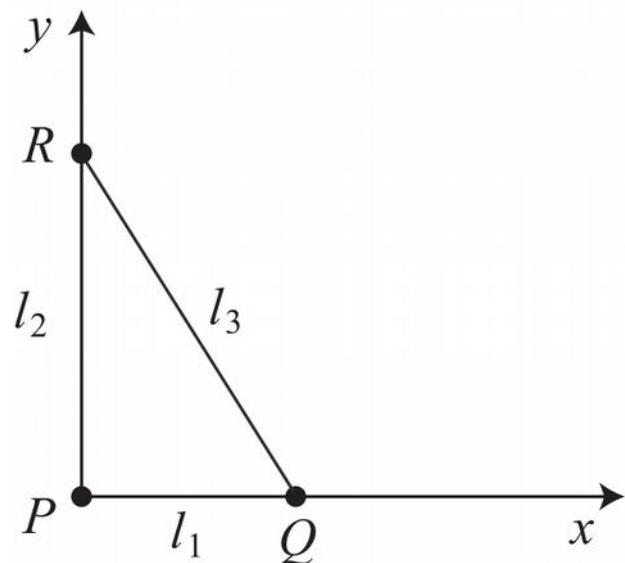
$$ds_0 = dx_2$$

$$ds - ds_0 = \delta \ell_2 = \epsilon_{22} dx_2$$

$$\epsilon_{22} = 0$$

$$ds - ds_0 = \frac{\epsilon_{ij} dx_i dx_j}{ds_0}$$

$$ds - ds_0 = \frac{\epsilon_{11} dx_1^2 + 2\epsilon_{12} dx_1 dx_2 + \epsilon_{22} dx_2^2}{ds_0}$$

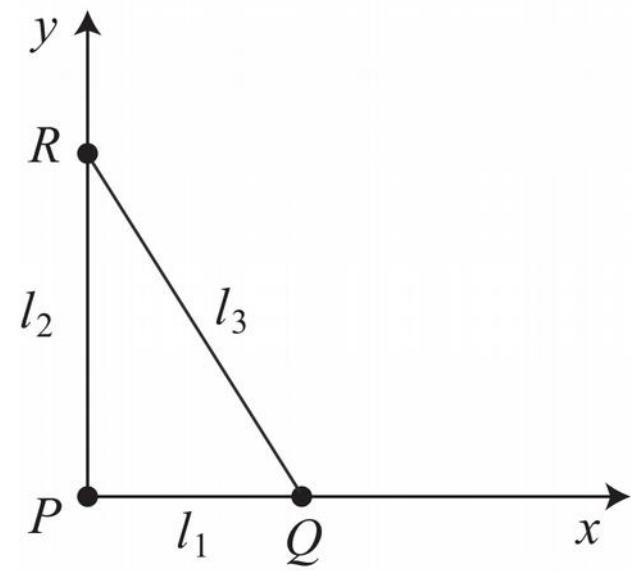


RQ

$$dx_1 = 10^4 \text{ m}, \quad dx_2 = -2 \cdot 10^4 \text{ m}$$

$$ds_0 = \sqrt{5} \cdot 10^4 \text{ m}$$

$$ds - ds_0 = \delta \ell_3 = 2 \cdot 10^{-2}$$



$$= \frac{\epsilon_{11}dx_1^2 + 2\epsilon_{12}dx_1dx_2 + \epsilon_{22}dx_2^2}{ds_0} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \times 10^8 - 2\epsilon_{12} \times 10^4 \times 2 \cdot 10^4 + 0}{\sqrt{5} \cdot 10^4} \text{ m}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{-2\sqrt{5} \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^2}{4 \cdot 10^8} = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot 10^{-6} = -1.18 \cdot 10^{-7}$$

Esercizio 7. Determinare assi principali e valori principali del seguente tensore di deformazione nel piano xy :

$$\epsilon_{ij} = 10^{-6} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

In che direzioni si avranno gli allungamenti/accorciamenti relativi massimi e minimi?

Determiniamo gli autovalori:

$$\epsilon_{ij} = 10^{-6} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det |\epsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$$

Evitiamo di portarci dietro il fattore 10^{-6} (mettiamo una sbarretta per ricordarci che calcoliamo la soluzione a meno di questo fattore):

$$(1 - \bar{\lambda})(1 - \bar{\lambda}) - 1 = 0$$

$$\bar{\lambda}_1 = 0, \bar{\lambda}_2 = 2$$

Per gli autovettori:

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_{11}n_1 + \bar{\epsilon}_{12}n_2 = \bar{\lambda}n_1 \\ \bar{\epsilon}_{21}n_1 + \bar{\epsilon}_{22}n_2 = \bar{\lambda}n_2 \end{cases}$$

Posto $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 = 0$

$$n_2/n_1 = -\epsilon_{11}/\epsilon_{12} = -1$$

$$n_1 = 1/\sqrt{2}, \ n_2 = -1/\sqrt{2} \quad \text{oppure} \ n_1 = -1/\sqrt{2}, \ n_2 = 1/\sqrt{2}$$

Potremmo fare a meno di fare conti per trovare il secondo autovettore poiché sappiamo che deve essere ortogonale al primo, ma proseguiamo comunque

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_{11}n_1 + \bar{\epsilon}_{12}n_2 = \bar{\lambda}n_1 \\ \bar{\epsilon}_{21}n_1 + \bar{\epsilon}_{22}n_2 = \bar{\lambda}n_2 \end{cases}$$

Posto $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2 = 2$

$$n_2/n_1 = 2 - \epsilon_{11}/\epsilon_{12} = 1$$

$$n_1 = 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = 1/\sqrt{2} \quad \text{oppure} \quad n_1 = -1/\sqrt{2}, \quad n_2 = -1/\sqrt{2}$$

Esercizio 8. Consideriamo una deformazione descritta dalla seguente matrice

$$\epsilon_{ij} = 10^{-6} \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Trovare le direzioni di allungamento e accorciamento massimi, fornendo le direzioni angolari φ, θ in coordinate polari sferiche.

$$\det|\epsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \quad \epsilon_{ij} = 10^{-6} \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\lambda^3 + (4^2 + 3^2)\lambda = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = \pm 5 \end{array} \right.$$

Massimo
e minimo

$$\lambda = 5$$

$$\epsilon_{ij} = 10^{-6} \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -5n_1 + 3n_2 = 0 \\ 3n_1 - 5n_2 + 4n_3 = 0 \\ 4n_2 - 5n_3 = 0 \end{cases} \implies n_2/n_1 = 5/3, n_3/n_2 = 4/5$$

$$\mathbf{n}_{max} = \frac{(3, 5, 4)}{5\sqrt{2}}$$

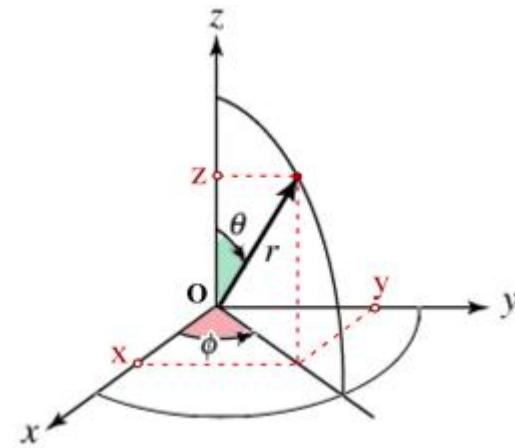
$$\lambda = -5$$

$$\epsilon_{ij} = 10^{-6} \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} +5n_1 + 3n_2 = 0 \\ 3n_1 + 5n_2 + 4n_3 = 0 \\ 4n_2 + 5n_3 = 0 \end{cases} \implies n_2/n_1 = -5/3, \quad n_3/n_2 = -4/5$$

$$\mathbf{n}_{min} = \frac{(3, -5, 4)}{5\sqrt{2}}$$

In coordinate sferiche



$$\begin{cases} n_1 = |\mathbf{n}| \sin \theta \cos \phi \\ n_2 = |\mathbf{n}| \sin \theta \sin \phi \\ n_3 = |\mathbf{n}| \cos \theta \end{cases} \implies \cos \theta = n_3, \quad \tan \phi = \frac{n_2}{n_1}$$

Allungamento massimo ($5 \cdot 10^{-6}$):

$$\theta = \arccos \frac{4}{5\sqrt{2}} = 55.6^\circ \quad \phi = \arctan \frac{5}{3} = 59.0^\circ$$

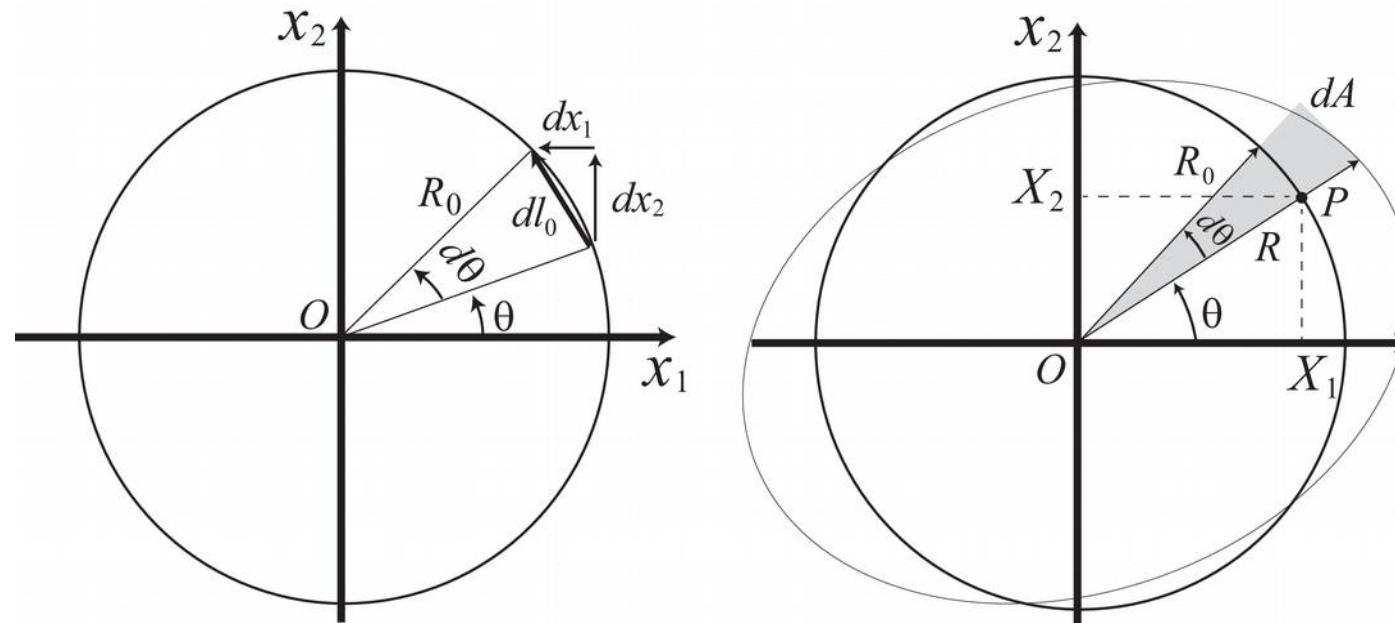
Allungamento minimo ($-5 \cdot 10^{-6}$):

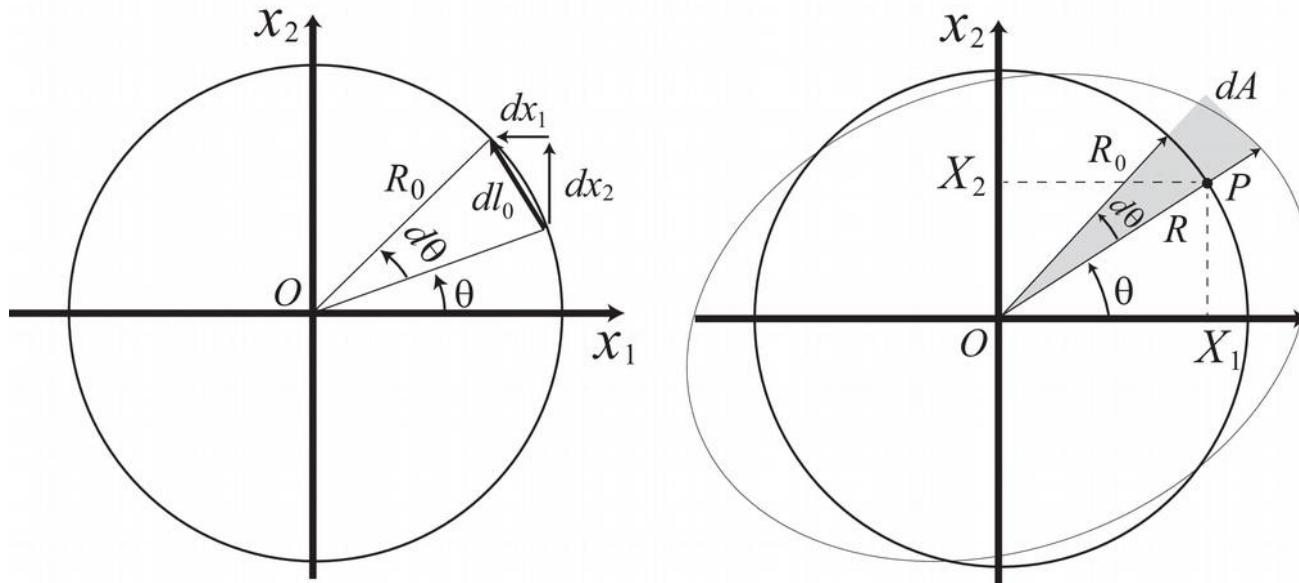
$$\theta = \arccos \frac{4}{5\sqrt{2}} = 55.6^\circ \quad \phi = \arctan \frac{-5}{3} = -59.0^\circ \equiv 301^\circ$$

Esercizio 9. Calcolare la variazione del perimetro e dell'area di un cerchio di raggio R_0 , soggetto ad una deformazione infinitesima descritta dal tensore 2D

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} \quad \text{con } \epsilon_{ij} \ll 1$$

Commentare il risultato ottenuto in termini di proprietà tensoriali.
 [Suggerimento: calcolare dapprima la lunghezza dl dell'elemento di linea deformato e quindi integrare su tutta la lunghezza della curva].



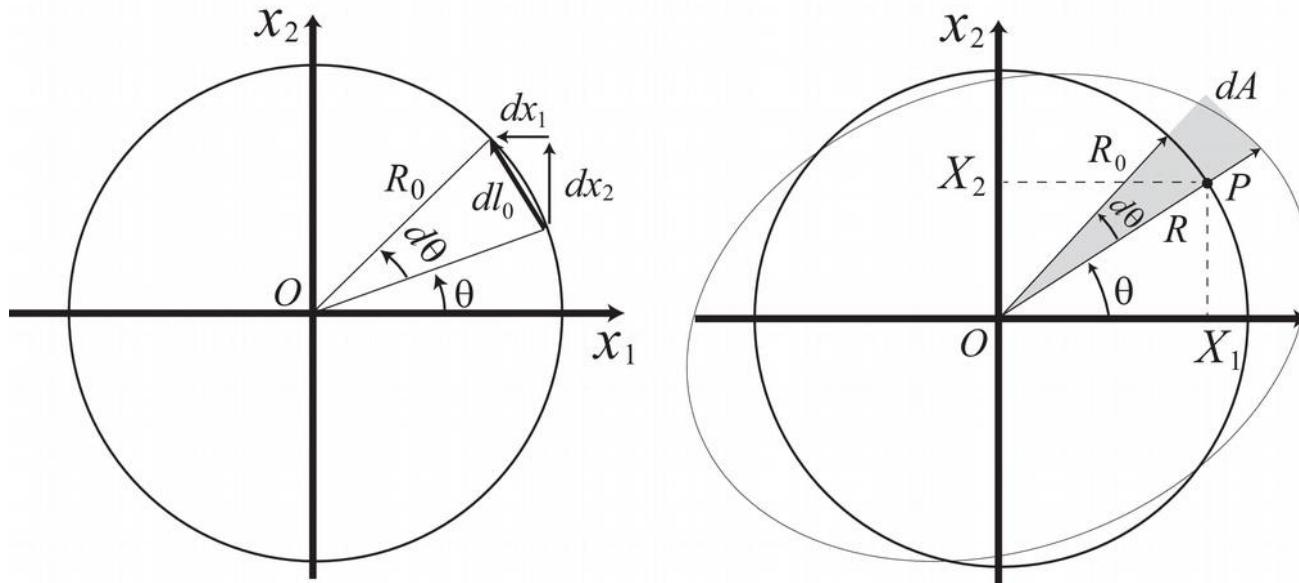


$$d\ell - d\ell_0 = \frac{\epsilon_{ij} dx_i dx_j}{d\ell_0}$$

$$dx_1 = -d\ell_0 \sin \theta$$

$$dx_2 = d\ell_0 \cos \theta$$

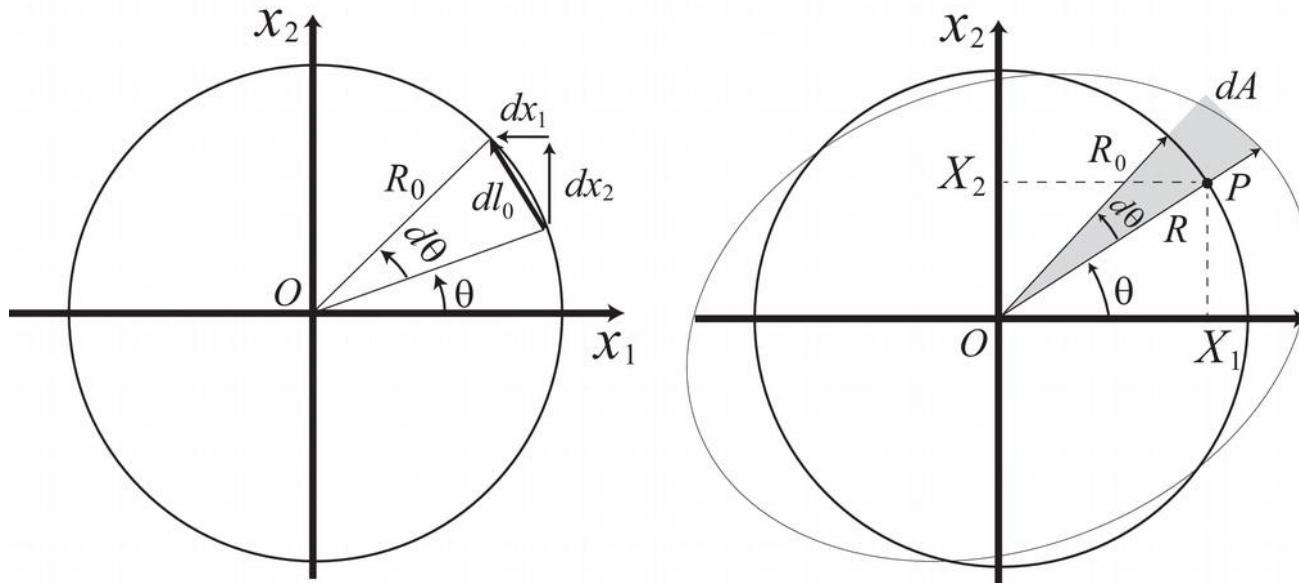
$$d\ell_0 = R_0 d\theta$$



$$d\ell - d\ell_0 = \frac{\epsilon_{11}dx_1^2 + 2\epsilon_{12}dx_1dx_2 + \epsilon_{22}dx_2^2}{d\ell_0}$$

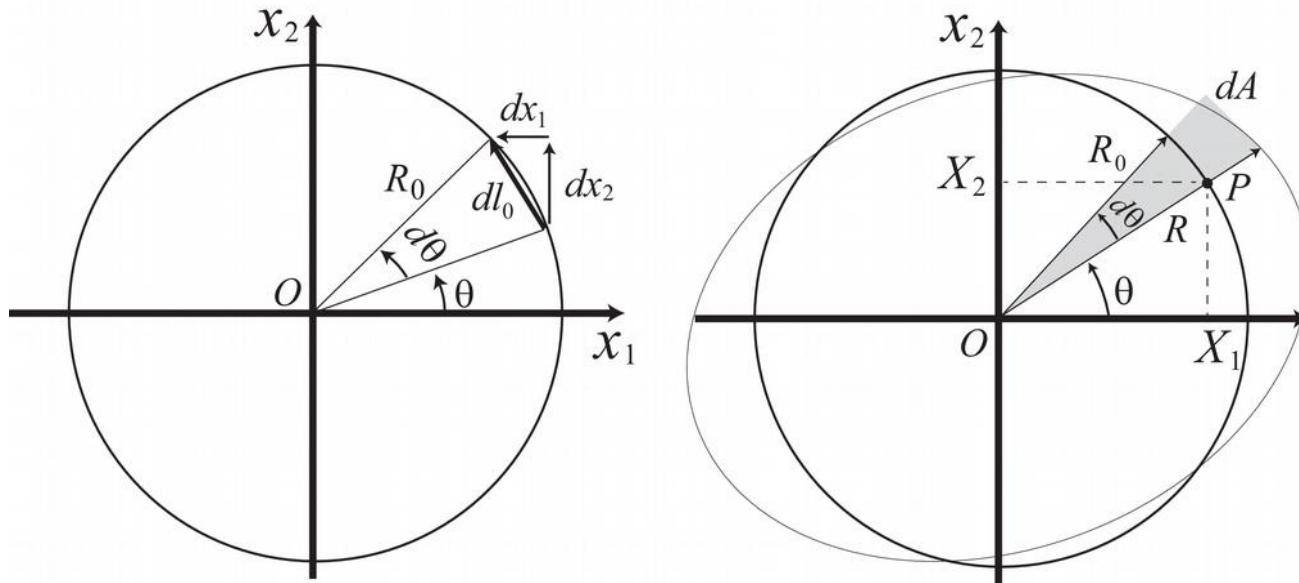
$$= (\epsilon_{11} \sin^2 \theta - 2\epsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{22} \cos^2 \theta) d\ell_0$$

$$d\ell = R_0 d\theta (1 + \epsilon_{11} \sin^2 \theta - 2\epsilon_{12} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{22} \cos^2 \theta)$$



La lunghezza della curva deformata è quindi:

$$\ell = \int_0^{2\pi} d\ell = R_0 (2\pi + \epsilon_{11}\pi - \epsilon_{12} \cdot 0 + \epsilon_{22}\pi) = 2\pi R_0 \left(1 + \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2}\right)$$



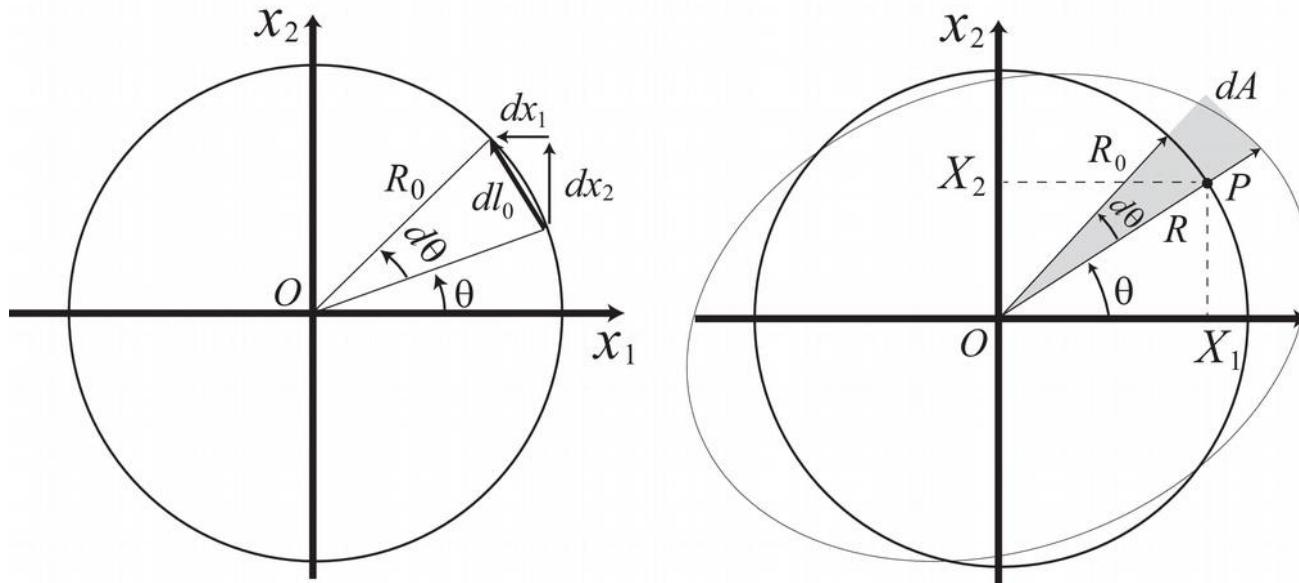
Per l'area:

$$dA_0 = \frac{1}{2} R_0 \cdot R_0 d\theta$$

$$dA = \frac{1}{2} R \cdot R d\theta$$

Il vettore \vec{OP} ha componenti $X_1 = R_0 \cos \theta$, $X_2 = R_0 \sin \theta$

$$R^2 - R_0^2 = 2\epsilon_{ij} X_i X_j = 2R_0^2(\epsilon_{11} \cos^2 \theta + 2\epsilon_{12} \cos \theta \sin \theta + \epsilon_{22} \sin^2 \theta)$$



$$dA = \frac{1}{2}R^2d\theta = \frac{1}{2}R_0^2(1 + 2\epsilon_{11} \cos^2 \theta + 4\epsilon_{12} \cos \theta \sin \theta + 2\epsilon_{22} \sin^2 \theta)d\theta$$

Integrando da 0 a 2π ...

$$A = \frac{1}{2}R_0^2(2\pi + 2\epsilon_{11}\pi + 2\epsilon_{22}\pi) = \pi R_0^2(1 + \epsilon_{kk})$$

NB $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$

Esercizio 10. Consideriamo il tensore di sforzo descritto dalla seguente matrice

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$

Calcolare la forza di superficie che agisce su un piano descritto dalla equazione $x - 2y + 2z = 0$, la trazione normale e la trazione di taglio.

Il piano $x - 2y + 2z = 0$ ha normale unitaria $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$

$$T_i = n_j \tau_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 3 = 1 & \text{se } i = 1 \\ \frac{1}{3} \times 2 - \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 1 = 0 & \text{se } i = 2 \\ \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 = 1 & \text{se } i = 3 \end{cases}$$

$$N_i = (T_k \cdot n_k) n_i = (1 \times \frac{1}{3} + 0 + 1 \times \frac{2}{3}) \frac{1}{3}(1, -2, 2) = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$$

$$S_i = T_i - N_i = (1, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, -2, 2) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

Esercizio 11. Consideriamo un tensore di sforzo in due dimensioni con sforzi principali τ_1 e τ_2 (con $\tau_1 > \tau_2$). A seguito di deformazioni tettoniche, si aggiunge a detta configurazione uno sforzo di taglio $\Delta\tau$ sicché lo sforzo viene ad essere descritto dalla seguente matrice:

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_1 & \Delta\tau \\ \Delta\tau & \tau_2 \end{vmatrix}$$

Mostrare che, se $\Delta\tau$ è “piccolo”, le variazioni degli sforzi principali sono del secondo ordine in $\Delta\tau$, mentre le variazioni degli assi principali sono del primo ordine. Cosa accade invece se $\tau_1 = \tau_2$?

$$\det|\epsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \quad \tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_1 & \Delta\tau \\ \Delta\tau & \tau_2 \end{vmatrix}$$

$$(\tau_1 - \lambda)(\tau_2 - \lambda) - \Delta\tau^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (\tau_1 + \tau_2)\lambda + (\tau_1\tau_2 - \Delta\tau^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}[(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2 + 4\Delta\tau^2}] \\ &= \frac{1}{2}[(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2 + 4\Delta\tau^2}] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2 + 4\Delta\tau^2}]$$

$|\Delta\tau| \ll (\tau_1 - \tau_2)$, sviluppando in serie al primo ordine otteniamo

$$(1+x)^{1/2} = 1 + x/2 + o(x)$$

$$\lambda \simeq \frac{1}{2} \left[(\tau_1 + \tau_2) \pm (\tau_1 - \tau_2) \left(1 + 2 \frac{\Delta\tau^2}{(\tau_1 - \tau_2)^2} \right) \right]$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \simeq \tau_1 + \frac{\Delta\tau^2}{\tau_1 - \tau_2} \\ \lambda_2 \simeq \tau_2 - \frac{\Delta\tau^2}{\tau_1 - \tau_2} \end{cases}$$

L'autovettore relativo a λ_1

$$(\tau_1 - \lambda_1)n_1 + \Delta\tau n_2 = 0$$

$$\Delta\theta_1 = \arctan \frac{n_2}{n_1} \simeq \frac{n_2}{n_1} = -\frac{\tau_1 - \lambda_1}{\Delta\tau} = \frac{\Delta\tau}{\tau_1 - \tau_2}$$

l'autovettore relativo a λ_2

$$\Delta\tau n_1 + (\tau_2 - \lambda_2)n_2 = 0$$

$$\Delta\theta_2 = \arctan \frac{n_1}{n_2} \simeq \frac{n_1}{n_2} = -\frac{\tau_2 - \lambda_2}{\Delta\tau} = -\frac{\Delta\tau}{\tau_1 - \tau_2}$$

Se $\tau_1 = \tau_2$

$$\lambda = \frac{1}{2}[(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2 + 4\Delta\tau^2}]$$

Gli autovalori cambiano di $+ \text{ o } - \Delta\tau$, quindi al primo ordine

Gli autovettori sono arbitrari

Esercizio 12. Consideriamo il tensore di sforzo bi-dimensionale τ_{ij} , nel piano xy ($x = x_1$, $y = x_2$), descritto dalla seguente matrice

$$\tau_{ij} = 10^6 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{Pa})$$

Determinare sforzi principali, assi principali, trazione di taglio massima e orientamento della sua superficie di applicazione.

$$\det|\epsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0 \quad \tau_{ij} = 10^6 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{Pa})$$

$$(1 - \bar{\lambda})(3 - \bar{\lambda}) - 4 = 0 \implies \bar{\lambda}^2 - 4\bar{\lambda} - 1 = 0$$

$$\bar{\lambda}_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Per l'autovalore $\bar{\lambda}_1 = 2 + \sqrt{5}$

$$\begin{cases} n_1 + 2n_2 = \bar{\lambda}_1 n_1 \\ 2n_1 + 4n_2 = \bar{\lambda}_1 n_2 \end{cases} \implies \frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

per l'autovalore $\bar{\lambda}_2$

$$\begin{cases} n_1 + 2n_2 = \bar{\lambda}_2 n_1 \\ 2n_1 + 4n_2 = \bar{\lambda}_2 n_2 \end{cases} \implies \frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$$

Gli sforzi principali sono:

$$\sigma_1 = \bar{\lambda}_1 \cdot 10^6 = 2 + \sqrt{5} \cdot 10^6 \simeq 4.24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \bar{\lambda}_2 \cdot 10^6 = 2 - \sqrt{5} \cdot 10^6 \simeq -0.24 \text{ MPa}$$

Gli angoli formati da ciascuno degli assi principali con l'asse x_1 sono:

$$\theta_{1,2} = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \begin{cases} \arctan \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \Rightarrow \theta_1 = 58^\circ \text{ oppure } \theta_1 = 238^\circ \\ \arctan \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \Rightarrow \theta_2 = -32^\circ \text{ oppure } \theta_2 = 148^\circ \end{cases}$$

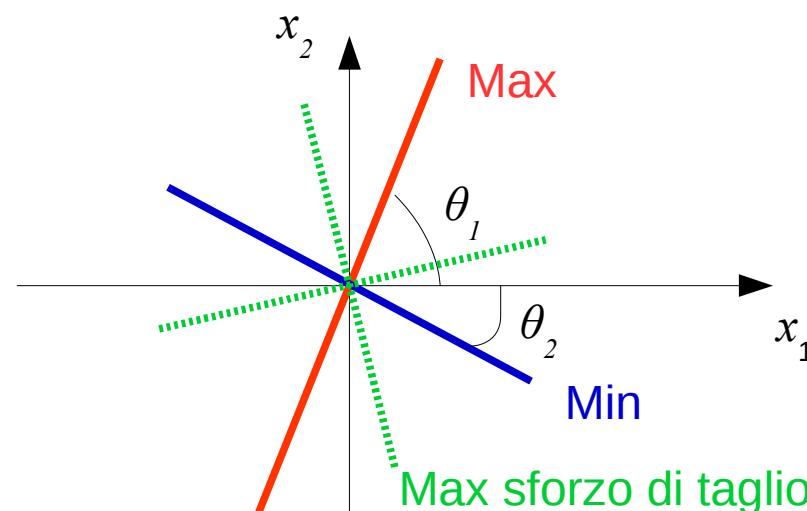
La trazione di taglio massima è:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{5} \text{ MPa} \simeq 2.24 \text{ MPa}$$

E agisce nei piani intermedi

$$(58^\circ + 148^\circ)/2 = 103^\circ, (58^\circ - 32^\circ)/2 = 13^\circ$$



Esercizio 13. Consideriamo il tensore di sforzo tri-dimensionale τ_{ij} , nel piano x_1, x_2, x_3 , descritto dalla seguente matrice

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} -10 & 2 & -2 \\ 2 & -9 & 0 \\ -2 & 0 & -11 \end{vmatrix} \quad (\text{MPa})$$

Scomporre il tensore nelle componenti isotropa e deviatorica, determinare sforzi principali, assi principali, trazione di taglio massima e orientamento della sua superficie di applicazione. Se il materiale ha una resistenza al taglio $\tau_0 = 5 \text{ MPa}$ rimane integro ?

La componente isotropa vale $\frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -10\delta_{ij}$ MPa

La componente deviatorica $\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}$ è

$$\tau'_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{MPa})$$

$$\det|\epsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0 \longrightarrow -3, 0, 3$$

Trazione di taglio massima (il materiale rimane integro)

$$\frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_1) = 3 \text{ MPa}$$

$$\tau'_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{MPa})$$

$$\begin{aligned} 0n_1 + 2n_2 - 2n_3 &= -3n_1 \\ 2n_1 + n_2 + 0n_3 &= -3n_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = \frac{1}{3}(2, -1, 2) \\ -2n_1 + 0n_2 - n_3 &= -3n_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0n_1 + 2n_2 - 2n_3 &= 0 \\ 2n_1 + n_2 + 0n_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = \frac{1}{3}(-1, 2, 2) \\ -2n_1 + 0n_2 - n_3 &= 0 \end{aligned}$$

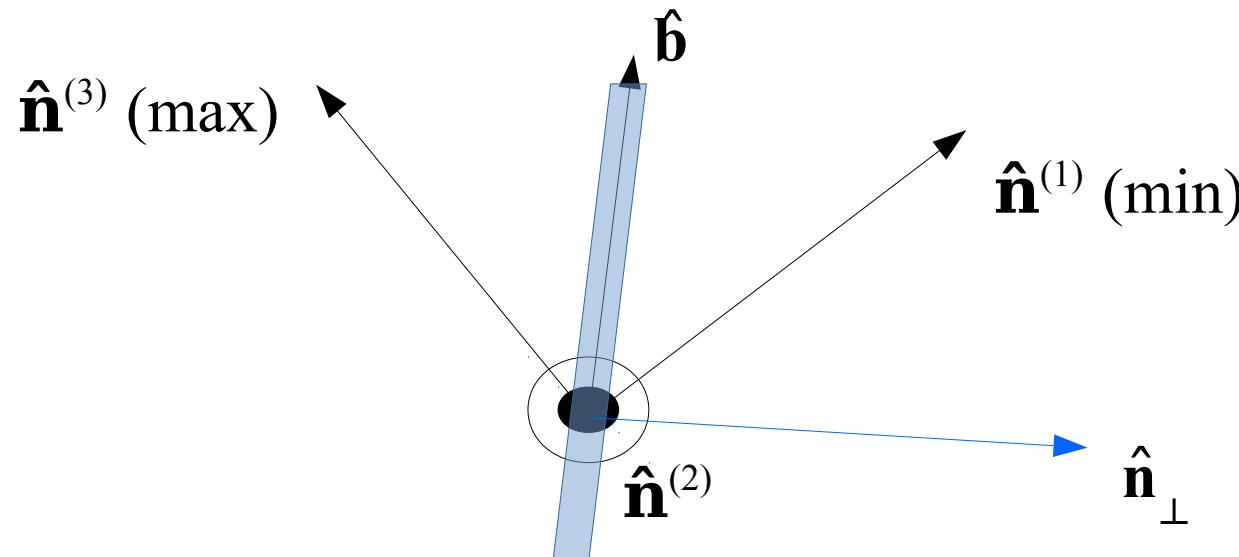
$$\begin{aligned} 0n_1 + 2n_2 - 2n_3 &= 3n_1 \\ 2n_1 + n_2 + 0n_3 &= 3n_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = \frac{1}{3}(2, 2, -1) \\ -2n_1 + 0n_2 - n_3 &= 3n_3 \end{aligned}$$

La superficie di taglio massimo è il piano che contiene l'asse intermedio $\hat{\mathbf{n}}^{(2)}$ e la bisettrice \mathbf{b} degli assi $\hat{\mathbf{n}}^{(1)}$ e $\hat{\mathbf{n}}^{(3)}$. Il piano di taglio massimo è dato da tutte le combinazioni lineari di $\hat{\mathbf{n}}^{(2)}$ e \mathbf{b}

$$\hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{n}}^{(1)} + \hat{\mathbf{n}}^{(3)})/\sqrt{2}.$$

L'equazione del piano si trova anche cercando un vettore $\hat{\mathbf{n}}_{\perp}$ normale a $\hat{\mathbf{n}}^{(2)}$ e a $\hat{\mathbf{b}}$: per es. $\hat{\mathbf{n}}_{\perp} = \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \times \hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$

$$y - z = 0$$



Esercizio 14. In una regione della crosta terrestre è presente uno stato di sforzo descritto dal tensore τ_{ij} che, nel sistema di coordinate geografico ($x = x_1$ diretto verso Nord, $y = x_2$ verso Est, $z = x_3$ verticale verso il centro della Terra), è dato dalla seguente matrice

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} (-\rho g z + 3\Delta\sigma) & +2\Delta\sigma & 0 \\ +2\Delta\sigma & -\rho g z & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g z \end{vmatrix}$$

dove ρ è la densità della crosta, g la gravità, z la profondità e $\Delta\sigma > 0$. Che tipo di faglie ci aspettiamo siano presenti in tale regione e, nell'ipotesi che le faglie siano sul piano di massimo shear, quale sarà il loro orientamento? [Suggerimento: scomporre preliminarmente τ_{ij} nelle componenti isotropa e deviatorica].

La classificazione delle faglie si basa sull'ipotesi che un asse principale di sforzo sia verticale: se l'asse verticale è relativo allo sforzo principale massimo si hanno faglie inverse, se minimo si hanno faglie normali, se intermedio si hanno faglie trasformi.

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} (-\rho g z + 3\Delta\sigma) & +2\Delta\sigma & 0 \\ +2\Delta\sigma & -\rho g z & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g z \end{vmatrix} \quad \tau'_{ij} = \Delta\sigma \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det |\tau'_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$$

$$(-\Delta\sigma - \lambda) [(2\Delta\sigma - \lambda)(-\Delta\sigma - \lambda) - 4\Delta\sigma^2] = 0$$

$$\text{Autovalori} \quad \lambda_{min} = -2\Delta\sigma, \lambda_{int} = -\Delta\sigma, \lambda_{max} = 3\Delta\sigma$$

$$\tau'_{ij} = \Delta\sigma \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(\lambda_{min} = -2\Delta\sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2n_x + 2n_y = -2n_x \\ 2n_x - n_y = -2n_y \\ -n_z = -2n_z \end{array} \right. \implies \mathbf{n}_{min} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)$$

$$(\lambda_{int} = -\Delta\sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2n_x + 2n_y = -n_x \\ 2n_x - n_y = -n_y \\ -n_z = -n_z \end{array} \right. \implies \mathbf{n}_{int} = (0, 0, 1) \text{ "Verticale"}$$

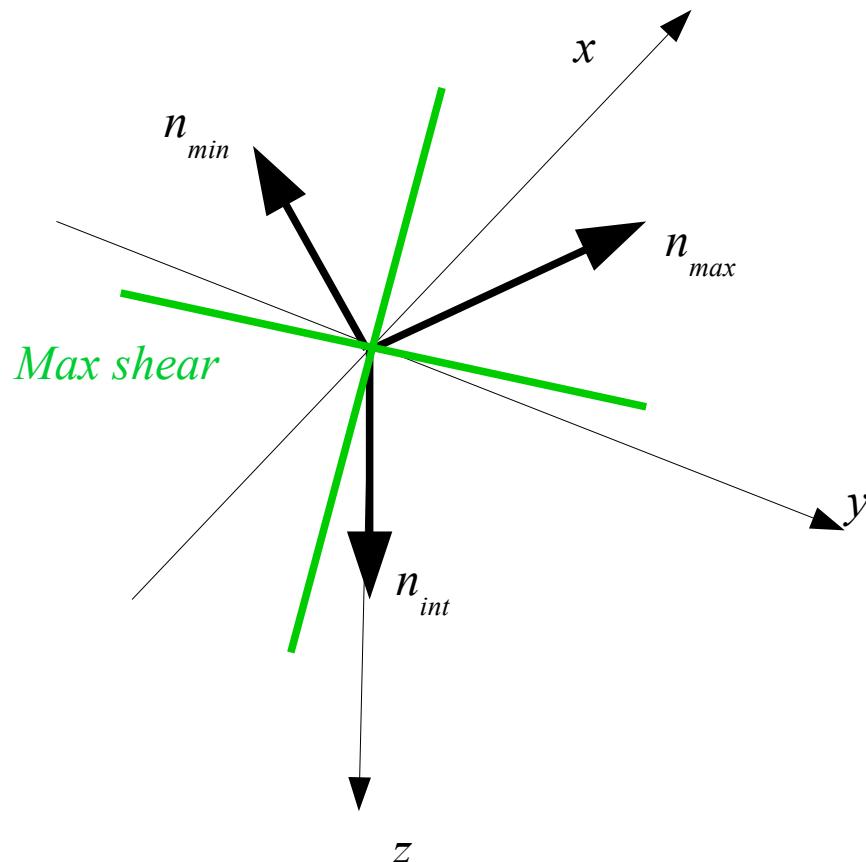
$$(\lambda_{max} = 3\Delta\sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2n_x + 2n_y = 3n_x \\ 2n_x - n_y = 3n_y \\ -n_z = 3n_z \end{array} \right. \implies \mathbf{n}_{max} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$$

L'asse principale intermedio è quindi verticale e le faglie saranno **trascorrenti**.

Nell'ipotesi che le faglie siano sul piano di massimo shear, l'orientamento sarà tale da contenere l'asse intermedio, quindi l'angolo di dip è di 90°

L'angolo di strike θ è intermedio fra gli assi principali massimo e minimo: la sua direzione è quindi data da $m = n_{max} \pm n_{min}$ e l'angolo di strike rispetto al Nord sarà

$$\theta = \arctan \frac{m_y}{m_x} = \begin{cases} \arctan \frac{-1}{3} = -18^\circ & \text{trascorrente sinistra} \\ \arctan \frac{3}{1} = 72^\circ & \text{trascorrente destra} \end{cases}$$



Esercizi svolti per il corso di Fisica dei solidi e dei fluidi

Capitolo 5

Massimo Nespoli

Esercizio 1. Un materiale elastico omogeneo e isotropo, con costanti di Lamè λ , μ e densità ρ , può essere attraversato da onde P, con velocità $V_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ e da onde S con velocità $V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Detta K la “incompressibilità”, sappiamo che, per considerazioni di stabilità termodianmica, deve essere $\mu>0$ e $K>0$; (a) calcolare i limiti inferiore e superiore ammissibili per il rapporto V_P/V_S . Infine, dato che non esistono in natura materiali con modulo di Poisson ν negativo e che molte rocce hanno $\nu\sim 1/4$ calcolare il rapporto V_P/V_S per $\nu = 0$ e (b) per $\nu = 1/4$ (c)

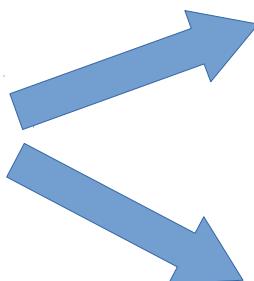
$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

$$V_P^2/V_S^2 = (K + \frac{4}{3}\mu)/\mu$$

posto $x = K/\mu$

$$\frac{V_P}{V_S} = \sqrt{x + \frac{4}{3}}$$

$$x > 0$$



$$\inf \left\{ \frac{V_P}{V_S} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \simeq 1.15$$

$$\sup \left\{ \frac{V_P}{V_S} \right\} = +\infty$$

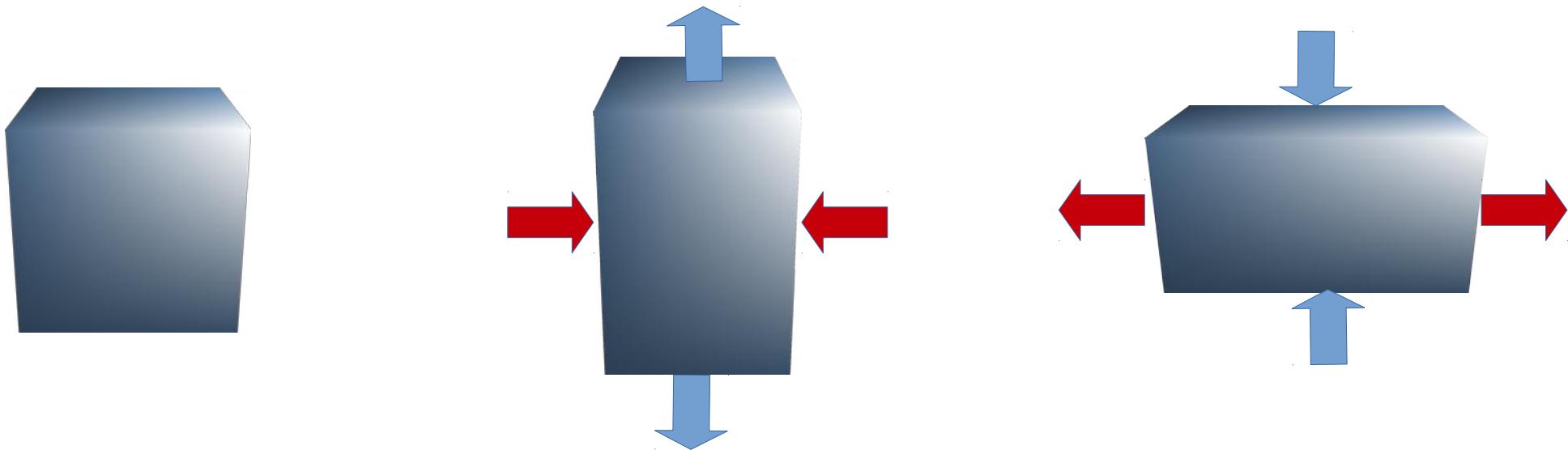
$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$\lambda = 0$ se $\nu = 0$ e quindi $V_P/V_S = \sqrt{2} \simeq 1.41$

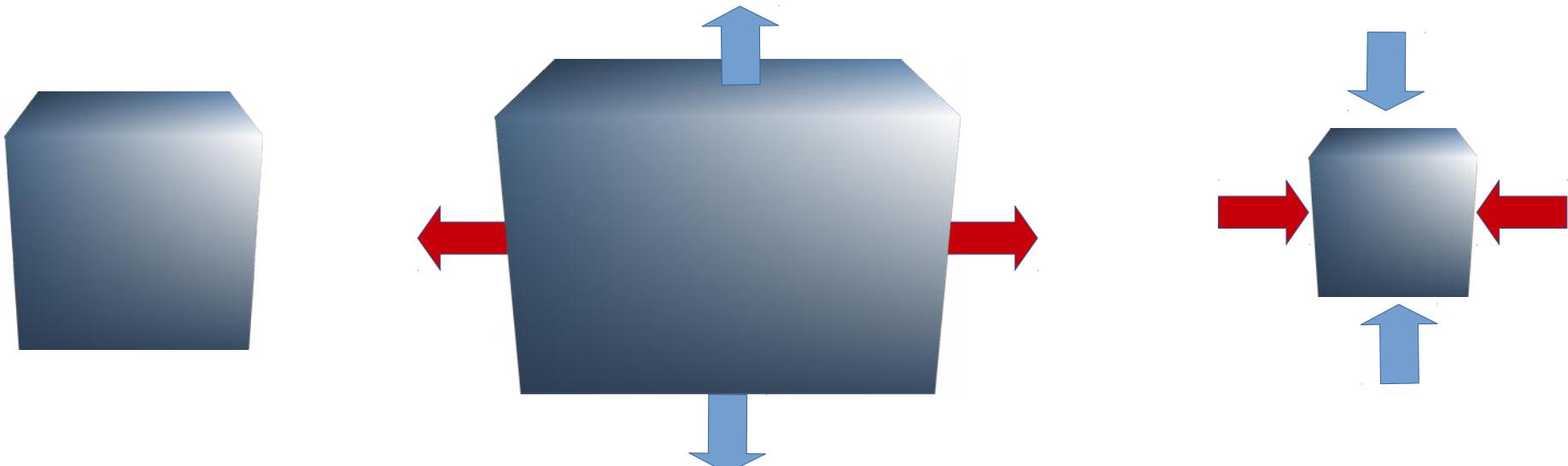
$\lambda = \mu$ se $\nu = 1/4$ $V_P/V_S = \sqrt{3} \simeq 1.73$

Nota:

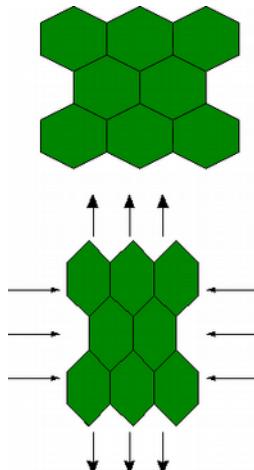
Moduli di Poisson $\nu > 0$ [Quando un materiale è compresso in una direzione, tende ad espandersi nell'altra o viceversa]



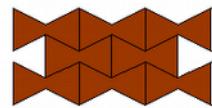
Moduli di Poisson $\nu < 0$ [Quando un materiale è compresso in una direzione, tende a comprimersi anche nell'altra e viceversa]



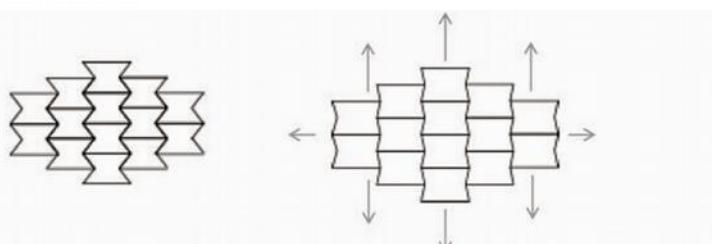
Moduli di Poisson $\nu < 0$ – Materiali auxetici



Tradizionale
(non auxetico)



Auxetico



Esercizio 2. Mostrare che in un materiale elastico isotropo gli assi principali di deformazione coincidono con gli assi principali di sforzo e che lo sforzo normale massimo, intermedio, minimo si trova sempre lungo la direzione in cui la deformazione è rispettivamente massima, intermedia, minima. Possiamo anche affermare che sforzi e deformazioni principali hanno lo stesso segno?

Relazione costitutiva

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Se è diagonale lo sforzo allora è diagonale anche la deformazione.

Nel sistema degli assi principali:

$$\tau_1 = \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 2\mu\epsilon_1$$

$$\tau_2 = \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 2\mu\epsilon_2$$

$$\tau_3 = \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 2\mu\epsilon_3$$

$$\tau_1 - \tau_2 = 2\mu(\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$\mu > 0$, se $\epsilon_1 > \epsilon_2$  $\tau_1 > \tau_2$ e viceversa

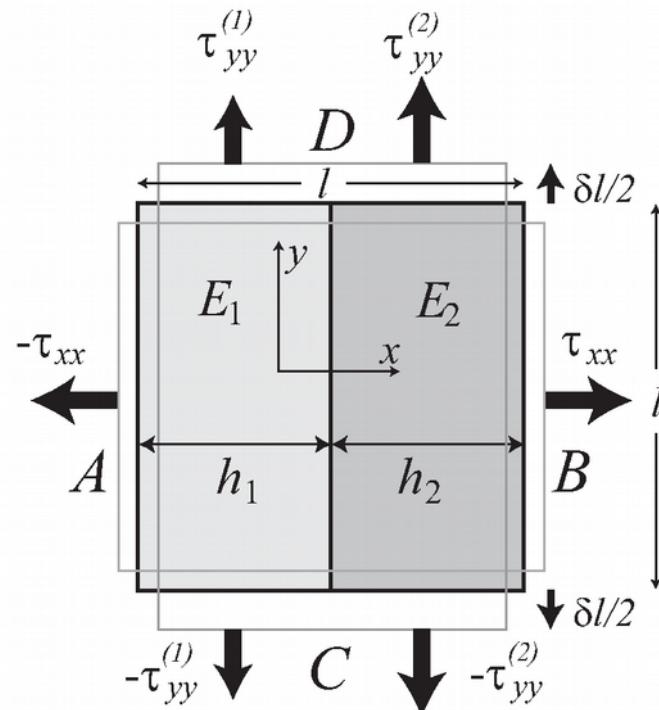
Se $\lambda > 0$ il segno di τ_1 può essere diverso da quello di ϵ_1 , se $\epsilon_2 + \epsilon_3$ ha segno opposto a ϵ_1

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 2\mu\epsilon_1 \\ \tau_2 &= \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 2\mu\epsilon_2 \\ \tau_3 &= \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 2\mu\epsilon_3\end{aligned}$$

Se ad esempio fosse $\epsilon_1 > 0$ e $\lambda = \mu$

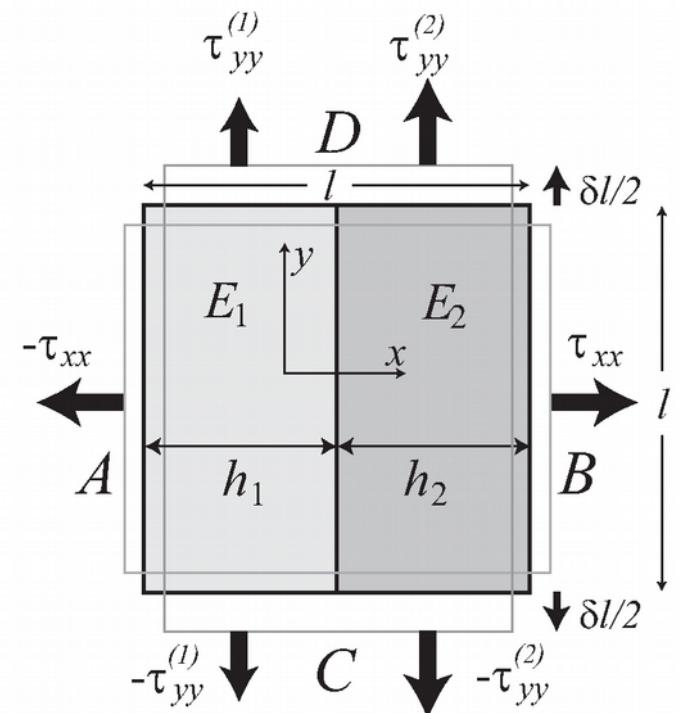
$$\tau_1 = \mu(3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \text{ e } \tau_1 < 0 \text{ se } (\epsilon_2 + \epsilon_3) < -3\epsilon_1$$

Esercizio 5. Consideriamo un materiale composto da una successione periodica di strati elastici isotropi, con moduli di Young E_1 per spessori h_1 e modulo E_2 per spessori h_2 lungo l'asse x . Entrambi i materiali hanno lo stesso modulo di Poisson ν . Sottoponiamo le superfici laterali A e B a trazioni $\pm\tau_{xx}$ in direzione normale agli strati (con tutte le altre componenti nulle) e calcoliamo la deformazione risultante (è sufficiente considerare una sola coppia di strati, come mostrato in figura). Calcolare l'allungamento complessivo $\delta h_1 + \delta h_2$ e il modulo di Young \bar{E}_\perp del materiale composito, assumendo $h_1 = h_2 = h$. Generiamo poi un'estensione uniforme $\delta l/l$ in direzione y parallela agli strati, applicando trazioni $\pm\tau_{yy}$ sulle porzioni delle facce C , D che competono allo strato 1 e $\pm\tau_{yy}^{(2)}$ per lo strato 2. Calcolare la forza di superficie complessiva da applicare alle facce C , D , lo sforzo medio τ_{yy} e il modulo di Young medio $\bar{E}_{||}$ nella nuova configurazione (sempre assumendo $h_1 = h_2 = h$). Mostrare infine che solo se $E_1 = E_2$ il materiale composito risulta isotropo.



$$\delta h_1/h_1 = \tau_{xx}/E_1$$

$$\delta h_2/h_2 = \tau_{xx}/E_2$$



Considerato che $h_1 = h_2 = h$, la deformazione complessiva di due strati è:

$$\frac{\delta\ell}{\ell} = \frac{\delta h_1 + \delta h_2}{h_1 + h_2} = \tau_{xx} \frac{\left[\frac{h_1}{E_1} + \frac{h_2}{E_2} \right]}{h_1 + h_2} = \tau_{xx} \frac{E_1 + E_2}{2E_1 E_2}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_\perp = \frac{\tau_{xx}}{\delta\ell/\ell} = \frac{2E_1 E_2}{(E_1 + E_2)}$$

Per avere lo stesso allungamento δl

$$\tau_1 = E_1 \frac{\delta\ell}{\ell} \text{ fra gli estremi degli strati (1)}$$

$$\tau_2 = E_2 \frac{\delta\ell}{\ell} \text{ fra gli estremi degli strati (2)}$$

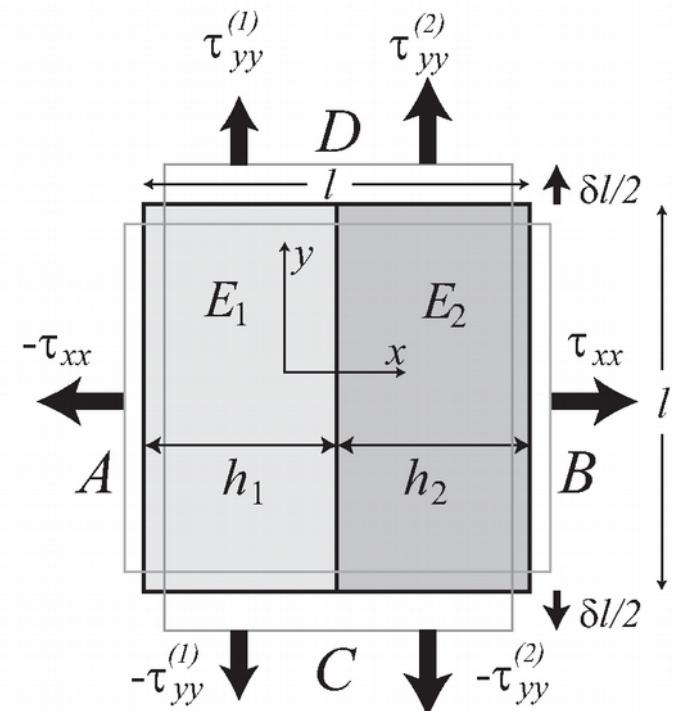
Trazione media:

$$\bar{\tau}_{\parallel} = \frac{\tau_1 h_1 + \tau_2 h_2}{h_1 + h_2} = \frac{E_1 + E_2}{2} \frac{\delta\ell}{\ell}$$

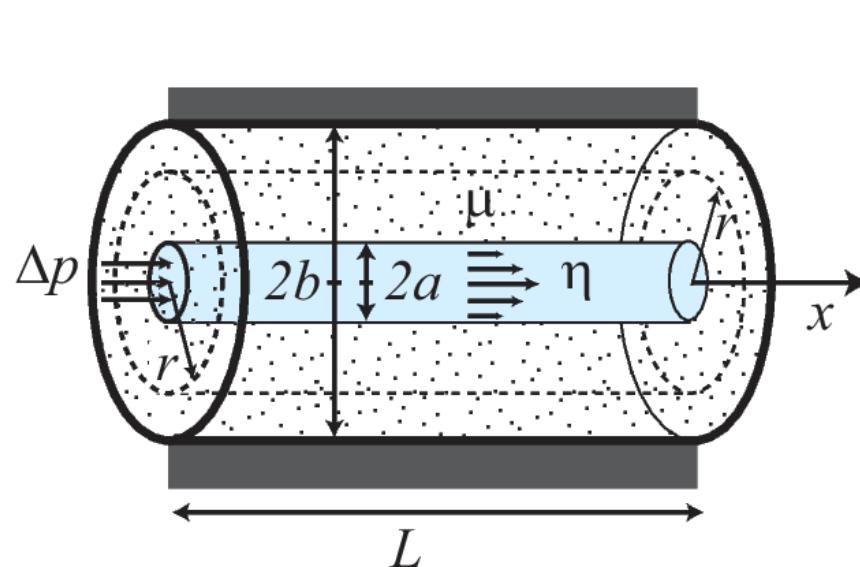
$$\Rightarrow \bar{E}_{\parallel} = \frac{\tau_{\parallel}}{\delta\ell/\ell} = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

Il mezzo è isotropo se $\bar{E}_{\perp} = \bar{E}_{\parallel}$

$$\frac{2E_1 E_2}{(E_1 + E_2)} = \frac{E_1 + E_2}{2} \quad \Rightarrow \quad 4E_1 E_2 = (E_1 + E_2)^2 \quad \Rightarrow \quad (E_1 - E_2)^2 = 0$$

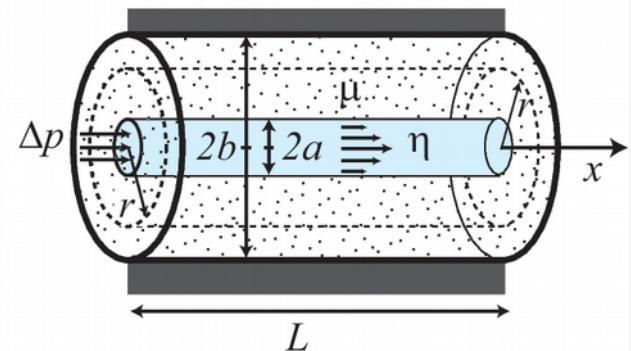


Esercizio 6. Un cilindro cavo di raggio interno a , raggio esterno b e lunghezza L lungo l'orizzontale x , è costituito da un materiale elastico con rigidità μ ed è fissato esternamente ad un contenitore rigido in $r = b$ (vedi figura). All'interno della cavità cilindrica fluisce in regime laminare un fluido newtoniano con viscosità η , sotto la spinta di una differenza di pressione Δp applicata in $x = 0$, $r \leq a$ rispetto a $x = L$. Imponendo la continuità della trazione τ_{rx} in $r = a$, determinare lo spostamento $u_x(r)$ del cilindro elastico per $a \leq r \leq b$ e in particolare in $r = a$. [Suggerimento: bilanciare la forza prodotta dal fluido sulla superficie cilндrica $r = a$, $x \in (0, L)$ con la forza su una superficie immaginaria cilindrica di raggio $r > a$, $x \in (0, L)$].



Il fluido scorre in regime laminare lungo x e quindi

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta} (a^2 - r^2)$$



$$\tau_{rx}(a) = \eta \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p a}{2L}$$

il segno “meno” è corretto per il fatto che τ_{rx} è la forza che il solido (in $r = a^+$) esercita sul fluido (in $r = a^-$) e quindi la forza che il fluido esercita sul solido è

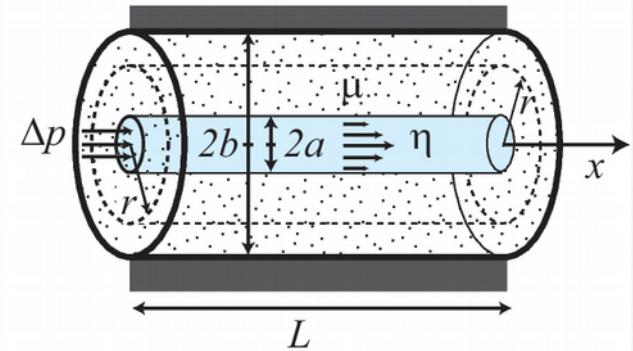
$$F = 2\pi a L \frac{\Delta p a}{2L} = \Delta p \pi a^2$$

N.B. Nel fluido

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta \left(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij} \right)$$

(Fluido newtoniano)

$$e_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$



Affinché il solido resti in quiete, sulla superficie cilindrica di raggio $r > a$ deve agire una forza contraria $F(r) = -2\pi r L \tau_{rx}(r)$ e quindi

$$2\pi r L \tau_{rx}(r) = 2\pi a L \tau_{rx}(a) \implies \tau_{rx}(r) = -\Delta p \frac{a^2}{2Lr}$$

$$\tau_{rx} = \mu \frac{du}{dr} \text{ per } r > a$$

$$u(r) = -\frac{\Delta p a^2}{2\mu L} [\ln r + c]$$

$$u(b) = 0 \implies c = -\ln b$$

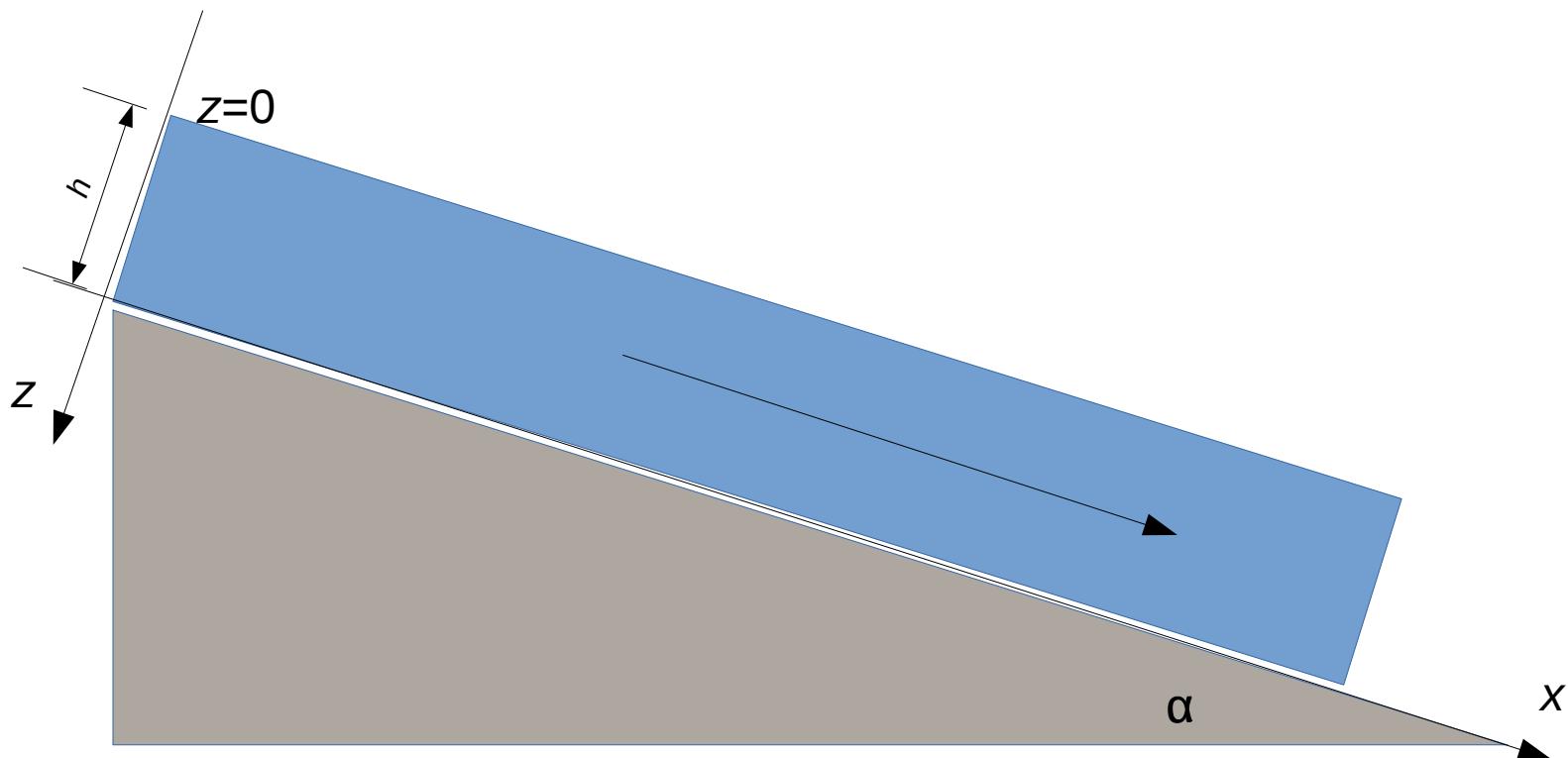
$$u(r) = \frac{\Delta p a^2}{2\mu L} \ln \frac{b}{r}$$

N.B. Nel mezzo elastico esterno

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

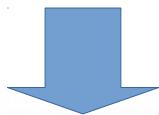
Esercizio 7. Un fluido newtoniano di viscosità η e spessore h scorre su un piano inclinato di α rispetto all'orizzontale. La superficie superiore del fluido sia libera da sforzi ($p = 0$ e $\tau_{xz} = 0$ in $z = 0$), mentre sulla superficie inferiore $z = h$ è $v_x = 0$ per attrito sul fondo rigido. Il flusso sia laminare (solo $v_x \neq 0$) e stazionario. Determinare le trazioni normale e di taglio impartite dal fluido alla superficie inferiore.



Eq. Navier-Stokes

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left(\nabla^2 v_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$$

$$v_x(z) \neq 0 \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$



Viscosità cinematica

$$\begin{aligned} 1 \quad 0 &= g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ 2 \quad 0 &= g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 0 \end{aligned}$$

Dalla 2:

$p = \rho g \cos \alpha z + f(x)$ ma $f(x) = 0$ per la condizione di superficie libera in $z = 0$

Dalla 1:

$$v_x = -\frac{g}{\nu} \sin \alpha \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2$$

$$v_x = -\frac{g}{\nu} \sin \alpha \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2$$

$$\tau_{xz} = 0 \text{ in } z = 0 \text{ implica } \partial v_x / \partial z = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$v_x = 0 \text{ in } z = h \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{g}{\nu} \sin \alpha \frac{h^2}{2}$$

$$v_x(z) = \frac{1}{2\nu} g \sin \alpha [h^2 - z^2]$$

Sforzo alla base del fluido (che la parete esercita sul fluido)

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\rho g h \sin \alpha$$

Sforzo normale

$$T_z = p = \rho g h \cos \alpha$$

Applicazioni dell'equazione di Bernoulli

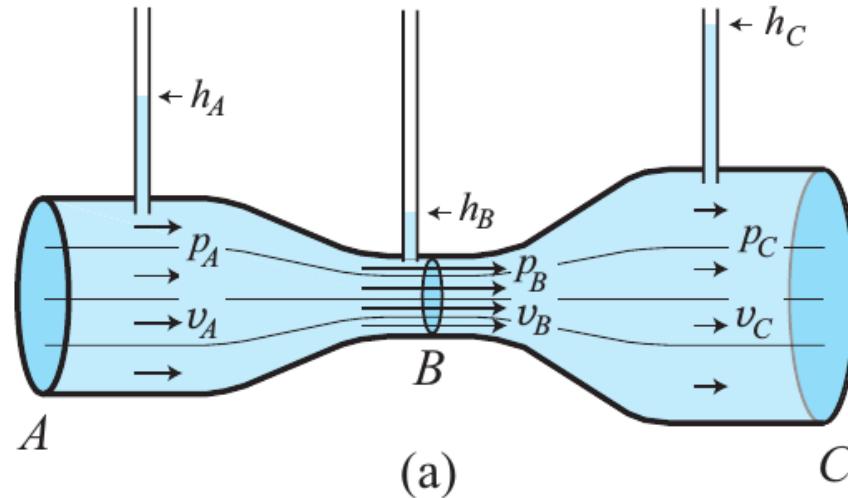
Fluido inviscido e barotropico

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{2} v^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho} \right] = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

Se il flusso non dipende dal tempo ed è irrotazionale ($\boldsymbol{\omega}=0$), la funzione di Bernoulli B è costante

$$B = \frac{1}{2} v^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho}$$

Tubo di Venturi



Se la portata deve rimanere costante lungo il tubo

$$Q = \pi r_A^2 v_A = \pi r_B^2 v_B = \pi r_C^2 v_C$$

La velocità deve essere inversamente proporzionale a r^2

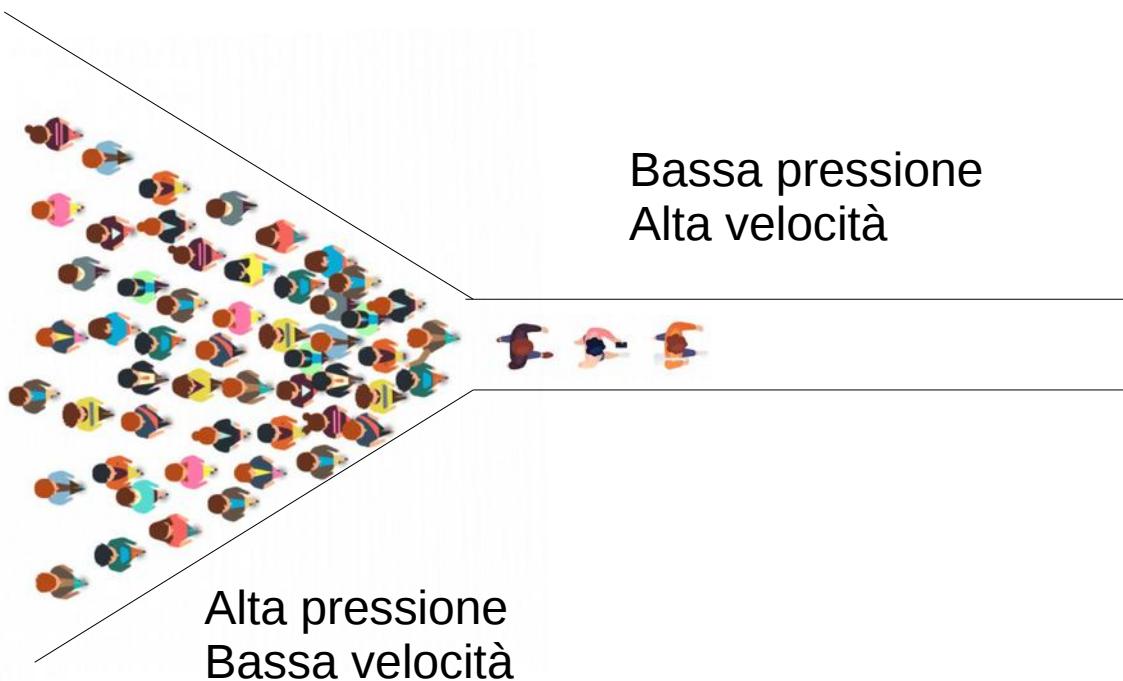
$$B = \frac{1}{2}v^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho}$$

$1/2(\rho v^2) + p = \text{costante}$
 p diminuisce proporzionalmente a r^4
 dove il tubo si restringe
 $(v$ aumenta)

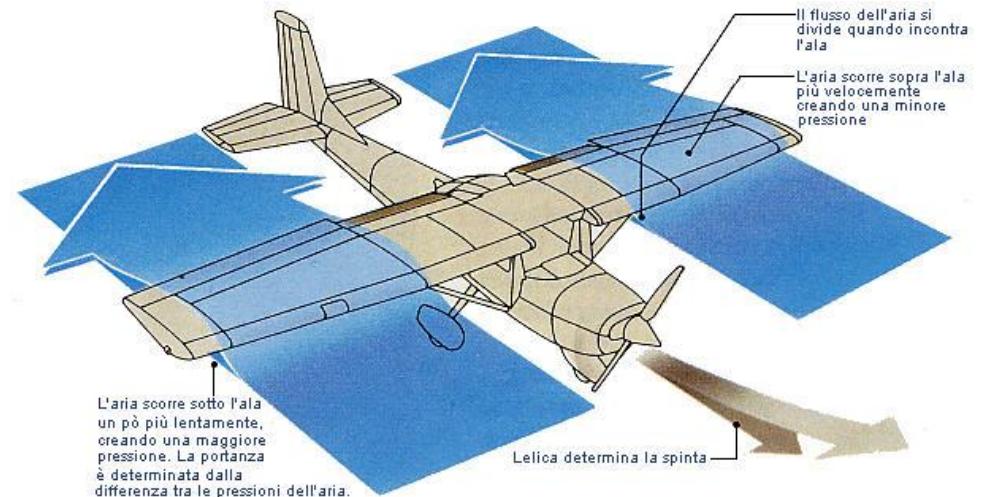
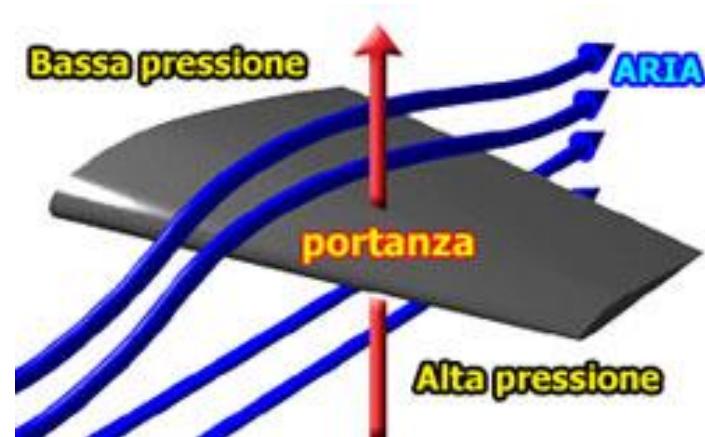
p aumenta dove il tubo si allarga
 $(v$ diminuisce)

Es1. Se il tubo in questione è un'arteria entro cui fluisce sangue, un ampliamento della sezione dovuto ad uno sfiancamento delle pareti dell'arteria provoca un aumento della pressione sanguigna che può portare alla rottura delle pareti (aneurisma)

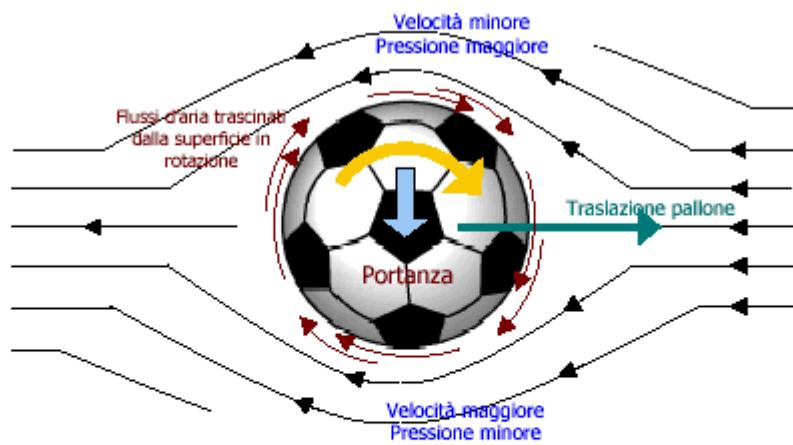
Es2.



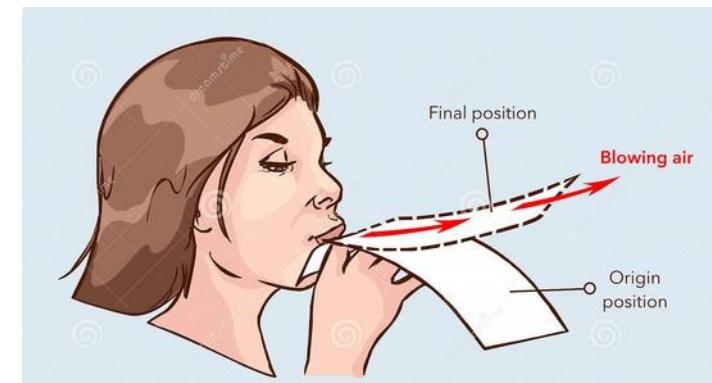
Es3.



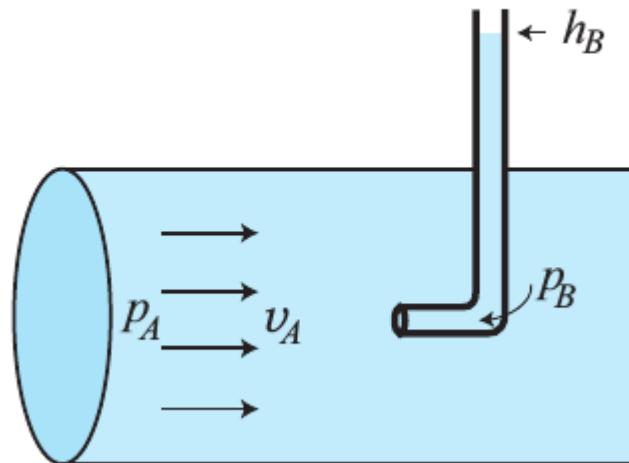
Es4



Es5



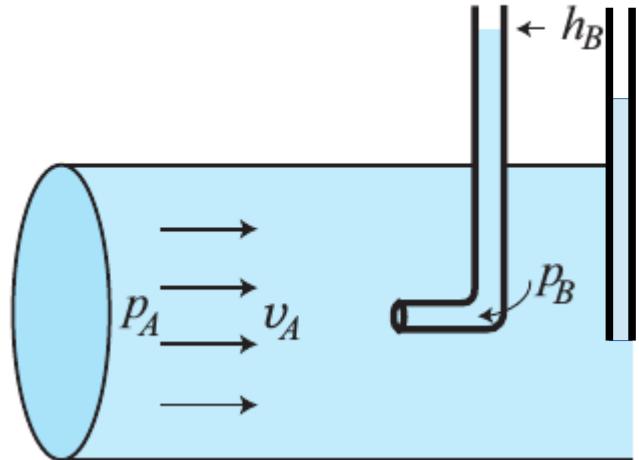
Tubo di Pitot



Il fluido, lontano dal tubo di Pitot (punto A in figura), si muove alla velocità v_A e una linea di flusso che penetra nel tubo di Pitot si trova ad avere velocità v_B nulla; per il teorema di Bernoulli la pressione p_B all'interno del tubo di Pitot deve essere superiore alla pressione p_A . Dalla misura della pressione nel tubo si può quindi risalire alla velocità del fluido.

$$p_B = p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

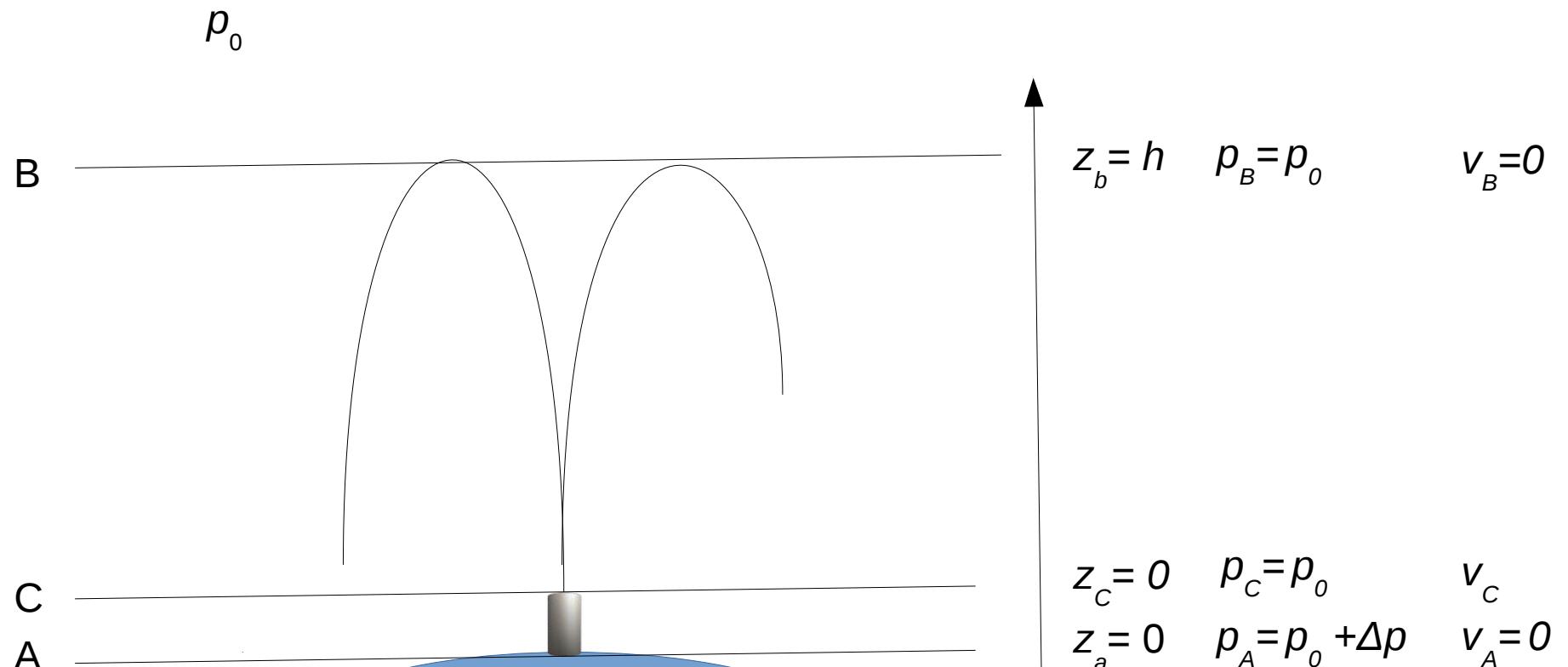
Es.



Un tubo di Pitot è fornito di due prese di pressione, una all'estremità anteriore disposta tangenzialmente alla corrente e una sul corpo disposta perpendicolarmente al flusso.

$$p_B = p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

Esercizio 14. Calcolare la pressione minima che occorre applicare nel serbatoio di una fontana per far giungere il getto d'acqua fino ad un'altezza $h = 10$ m. Assumere costante la densità dell'acqua ($\rho = 10^3$ kg/m³).



Per l'equazione di Bernoulli:

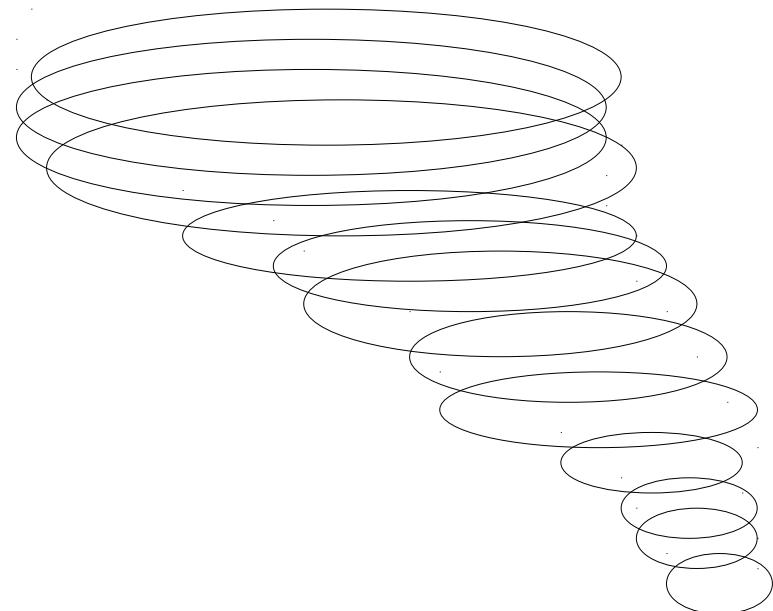
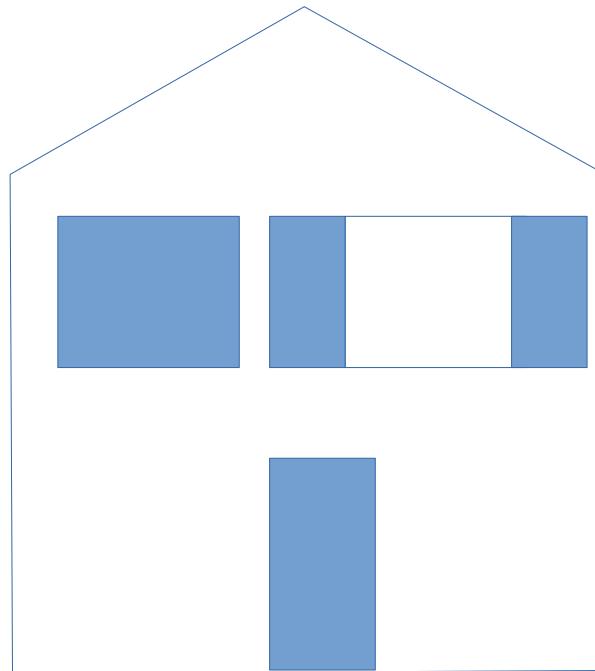
$$\cancel{\frac{1}{2}v_A^2 + \int_{p_0}^{p_A} \frac{dp}{\rho} + gz_A} = \cancel{\frac{1}{2}v_B^2 + \int_{p_0}^{p_B} \frac{dp}{\rho} + gz_B}$$

$$\implies \Delta p = \rho gh = 10^3 \times 9.8 \times 10 = 0.98 \cdot 10^5 \text{ Pa} \sim 0.97 \text{ atm}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}v_A^2 + \int_{p_0}^{p_A} \frac{dp}{\rho} + gz_A} = \frac{1}{2}v_C^2 + \int_{p_0}^{p_C} \frac{dp}{\rho} + gz_C$$

$$\implies v_C = \left[\frac{2\Delta p}{\rho} \right]^{1/2} = \sqrt{2gh}$$

Esercizio 15. In un tornado i venti superano spesso la velocità di 40 m/s (144 km/h). La massima velocità misurata è 135 m/s, durante un tornado in Oklahoma. Supposto che la pressione e la densità dell'aria siano $p_0 = 10^5$ Pa e $\rho_0 = 1.20 \text{ kg/m}^3$ calcolare la pressione (in eccesso di quella esterna) che si può generare all'interno di una casa se una finestra resta aperta ed esprimere il risultato in kg-peso/m². Assumere un flusso adiabatico con $\gamma = 1.4$.



Un flusso adiabatico è **barotropico** (la densità dipende solo dalla pressione) e quindi possiamo applicare l'equazione di Bernoulli stazionaria ad una linea di flusso che penetra dall'esterno all'interno della casa attraverso la finestra; la funzione di Bernoulli deve rimanere costante.

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \int_{p_0}^{p_0} \frac{dp}{\rho} + gz_0 = \frac{1}{2}v_1^2 + \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\rho} + gz_1$$



 “0” all'esterno “1” all'interno

È plausibile assumere che la quota della linea di flusso non vari in modo significativo (i venti in prossimità del suolo sono pressoché orizzontali)  $z_0 = z_1$

$$\cancel{\frac{1}{2}v_0^2 + \int_{p_0}^{p_0} \frac{dp}{\rho} + gz_0} = \cancel{\frac{1}{2}v_1^2 + \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\rho} + gz_1}$$

La densità varia con p in modo adiabatico sicché $p/\rho^\gamma = p_0/\rho_0^\gamma = k$.

$$\rho = \left[\frac{p}{k} \right]^{1/\gamma} \quad \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} k^{1/\gamma} \left[p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} k^{1/\gamma} \left[p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

$$\gamma = 1.4, \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{7}, k^{\frac{1}{\gamma}} = \left[\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}} = 3.11 \cdot 10^3$$

$$p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{2k^{\frac{1}{\gamma}}} v_0^2 + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{Per } v_0 = 40 \text{ m/s}$$

$$p_1 = 1.0096 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(Superiore all'esterna di
960 Pa = $960/9.8 = 9.8 \text{ kg}$
 peso/m^2)

Notare che, se avessimo ignorato le variazioni di densità nell'equazione di Bernoulli, dopo aver posto $z_0 = z_1$ e $v_1 = 0$ avremmo ottenuto un valore praticamente identico

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{0}{\rho_0} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_0} \implies p_1 - p_0 = \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 = \frac{1.20 \times 1.6 \cdot 10^3}{2} = 960 \text{ Pa}$$

Perchè la variazione di pressione è piccola

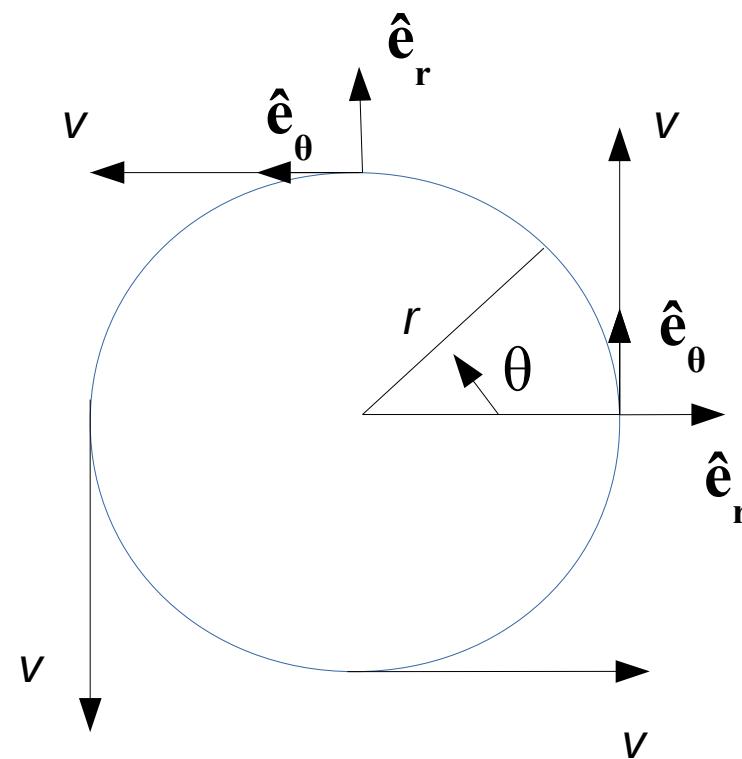
Δp cresce come v_0^2 e quindi nel caso del tornado in Oklahoma
 $\Delta p = 960 \times 135^2 / 40^2 = 1.09 \cdot 10^4$
 $\text{N/m}^2 \approx 10^3 \text{ kg} - \text{peso}/\text{m}^2$

P.S. Vale anche per un'auto con un finestrino aperto



Esercizio 16. Consideriamo un fluido in quiete, di densità ρ , soggetto alla gravità, in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare $\omega \hat{\mathbf{k}}$ (dove $\hat{\mathbf{k}}$ è un vettore unitario lungo l'asse verticale z , assunto diretto verso l'alto). Utilizzando il teorema di Bernoulli, determinare le superfici di pressione costante e, in particolare, la superficie libera del fluido dove la pressione eguaglia la pressione atmosferica.

Se il fluido appare in quiete, visto nel sistema rotazione, il campo di velocità (in direzione tangenziale) vale $v = \omega r \hat{\mathbf{e}}_\theta$, dove r è la distanza dall'asse di rotazione ed $\hat{\mathbf{e}}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ il vettore unitario in direzione tangenziale. [$\hat{\mathbf{e}}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$]



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right] = (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$$

$$\omega r \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial t} + \nabla \left[\frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right] = \omega r \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \omega \hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial t} = \frac{d \hat{\mathbf{e}}_\theta}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\hat{\mathbf{e}}_r \omega \text{ e } \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\nabla \left[\frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right] = 2\omega^2 r \hat{\mathbf{e}}_r \quad \nabla(\omega^2 r^2)$$

$$\nabla \left[-\frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz \right] = 0$$

$dp = 0$  $z - \frac{1}{2g} \omega^2 r^2 = costante$

