Metodi Matematici della Fisica - supplemento

Alexandre Kamenchtchik

March 31, 2021

1 Norme equivalenti e non-equivalenti

Consideriamo l'insieme di tutte le funzioni reali continue $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definite sull'intervallo chiuso $[0, 1]$. Loro costituiscono uno spazio lineare $X = C([0, 1])$. Possiamo introdurre in questo spazio due norme:

$$||f||_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \tag{1}$$

e

$$||f||_1 = \int_0^1 dx |f(x)|. \tag{2}$$

Entrambe le norme sono ben definite per ogni funzione continua sull'intervallo compatto $[0, 1]$. Possiamo chiamare due spazi lineari topologici forniti di queste norme X_∞ e X_1.

Consideriamo un'applicazione lineare A che agisce da X_1 a X_∞ come l'applicazione indentità:

$$A = \mathrm{Id} : X_1 \to X_\infty. \tag{3}$$

Questa applicazione lineare non è limitata. Infatti, consideriamo una successione di funzioni:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= n^2 x, && \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\
f_n(x) &= 2n - n^2 x, && \text{per } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\
f_n(x) &= 0, && \text{per } \frac{2}{n} \leq x \leq 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

È facile vedere che

$$||f_n||_1 = 1, \tag{5}$$

mentre

$$||f_n||_\infty = n. \tag{6}$$

Essendo non-limitata questa applicazione non è continua. Quindi non tutte le retroimmagini degli insiemi aperti nello spazio X_∞ sono gli insiemi aperti nello spazio X_1.

Inversamente, consideriamo l'applicazione lineare inversa:

$$A^{-1} = \mathrm{Id} : X_\infty \to X_1. \tag{7}$$

Questa applicazione è limitata e continua e le retroimmagini degli insiemi aperti nello spazio X_1 sono gli insiemi aperti nello spazio X_∞.

Abbiamo visto che le norme (1) e (2) inducono le topologie diverse e la topologia dello spazio X_∞ è più fine (più forte) della topologia dello spazio X_1.

È possibile generalizzare questo esempio. Introduciamo una famiglia di norme

$$||f||_p = \left(\int_0^1 dx |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty. \tag{8}$$

Ora consideriamo una successione di funzioni

$$g_n(x) = \left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{p+1}{p}} x, \quad \text{per} \ \ 0 \le x \le \frac{1}{n},$$
$$g_n(x) = \left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{p+1}{p}} \left(\frac{2}{n} - x\right), \quad \text{per} \ \ \frac{1}{n} \le \frac{2}{n},$$
$$g_n(x) = 0, \qquad \text{per} \ \ \frac{2}{n} \le x \le 1. \tag{9}$$

Allora,

$$||g_n||_p = 1. \tag{10}$$

Possiamo anche calcolare le norme delle funzioni della successione (9) per $q \neq p$. Abbiamo

$$||g_n||_q = \left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{11}$$

Se $q > p$, allora le norme (11) crescono con la crescita di n. Quindi l'operatore

$$\mathrm{Id} : X_p \Rightarrow X_q \tag{12}$$

non è limitato e non è continuo. Questo significa che le norme $|| \cdot ||_p$ definiscono le topologie non-equivalenti e la topologia indotta dalla norma $|| \cdot ||_q$ è più forte della topologia indotta dalla norma $|| \cdot ||_p$ se $p < q$.

2 La disuguaglianza di Minkowski

La disuguaglianza di Minkowski non è valida per $p < 1$. Consideriamo un controesempio. Introduciamo due funzioni

$$f(x) = 1, \ \text{se} \ x \in [0, 1],$$
$$f(x) = 0, \ \text{se} \ x \notin [0, 1], \tag{13}$$

e

$$g(x) = 1, \text{ se } x \in [1,2],$$
$$g(x) = 0, \text{ se } x \notin [1,2]. \tag{14}$$

Allora

$$||f||_p = ||g||_p = 1. \tag{15}$$

Poi

$$f(x) + g(x) = 1, \text{ se } x \in [0,2],$$
$$f(x) + g(x) = 0, \text{ se } x \notin [0,2]. \tag{16}$$

Quindi,

$$||f+g||_p = (\int_0^2 dx)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}. \tag{17}$$

La disuguaglianza di Minkowski

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p \tag{18}$$

richiede

$$2^{\frac{1}{p}} \leq 2, \tag{19}$$

che è vero solo se

$$p \geq 1.$$

3 Lemma di Fatou

Consideriamo una successione di funzioni sommabili non-negative:

$$f_n(x) = 1, \text{ se } x \in [n, n+1],$$
$$f_n(x) = 0, \text{ se } x \notin [n, n+1]. \tag{20}$$

$$||f_n||_1 = 1.$$

Quindi,

$$\liminf_{n\to\infty} ||f_n||_1 = 1.$$

Poi

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Quindi

$$||f||_1 = 0$$

e

$$||f||_1 < \liminf_{n\to\infty} ||f_n||_1.$$

4 Idenità di polarizzazione

$$\begin{aligned} q(x+y,x+y) &= q(x,x+y)+q(y,x+y) \\ &= q(x,x)+q(x,y)+q(y,x)+q(y,y). \end{aligned} \tag{21}$$

$$q(x-y,x-y) = q(x,x)-q(x,y)-q(y,x)+q(y,y). \tag{22}$$

$$q(x+y,x+y)-q(x-y,x-y) = 2q(x,y)+2(y,x). \tag{23}$$

$$q(x+iy,x+iy) = q(x,x)+iq(x,y)-iq(y,x)+q(y,y). \tag{24}$$

$$q(x-iy,x-iy) = q(x,x)-iq(x,y)+iq(y,x)+q(y,y). \tag{25}$$

$$q(x-iy,x-iy)-q(x+iy,x+iy) = -2iq(x,y)+2iq(y,x). \tag{26}$$

$$i(q(x-iy,x-iy)-q(x+iy,x+iy)) = 2(q(x,y)-q(y,x)). \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(q(x+y,x+y)-q(x-y,x-y) \\ &+iq(x-iy,x-iy)-iq(x+iy,x+iy)) \\ &= q(x,y). \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &q(y,x) = \frac{1}{4}(q(y+x,y+x)-q(y-x,y-x) \\ &+iq(y-ix,y-ix)-iq(y+ix,y+ix)) \\ &= \frac{1}{4}(q(x+y,x+y)-q(x-y,x-y) \\ &+iq(-i(x+iy,-i(x+iy)))-iq(i(x-iy),i(x-iy))) \\ &= \frac{1}{4}(q(x+y,x+y)-q(x-y,x-y) \\ &+iq(x+iy,x+iy)-iq(x-iy,x-iy)). \end{aligned} \tag{29}$$

Se $q(z,z) \in \mathbb{R}$, allora

$$q(y,x) = \overline{q(y,x)}. \tag{30}$$

5 Disuguaglianza di Schwarz e disuguaglianza di Minkowski

$$\begin{aligned}
&x = \alpha y, \\
&q(\alpha y, y) = \bar{\alpha} q(y, y), \\
&|q(\alpha y, y)| = |\alpha| q(y, y), \\
&q(x, x) = |\alpha|^2 q(y, y) \\
&|q(x, y)|^2 = q(x, x) q(y, y).
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
&0 \leq q(x + \lambda y, x + \lambda y) \\
&= q(x, x) + \lambda q(x, y) + \bar{\lambda} q(y, x) + |\lambda|^2 q(y, y). \\
&q(x, x) + 2\Re(\lambda q(x, y)) + |\lambda|^2 q(y, y) \geq 0, \\
&\mu = \frac{\Re(\lambda q(x, y))}{|q(x, y)|}, \\
&q(x, x) + 2\mu |q(x, y)| + \mu^2 q(y, y) \geq 0, \\
&4|q(x, y)|^2 - 4q(x, x) q(y, y) \leq 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{q(x + y, x + y)} \leq \sqrt{q(x, x)} + \sqrt{q(y, y)} \\
&q(x + y, x + y) = q(x, x) + 2\Re q(x, y) + q(y, y) \\
&\leq q(x, x) + 2\sqrt{q(x, x)}\sqrt{q(y, y)} + q(y, y). \\
&\Re q(x, y) \leq |q(x, y)| \leq \sqrt{q(x, x)}\sqrt{q(y, y)}.
\end{aligned} \tag{33}$$

$$|q(x, y)| = \sqrt{q(x, x)}\sqrt{q(y, y)} \tag{34}$$

se $x = \lambda y$.

$$\begin{aligned}
&\Re q(x, y) = \Re q(\lambda y, y) = \Re \bar{\lambda} q(y, y) \\
&= |q(x, y)| = |q(\lambda y, y)| = |\lambda| q(x, y)|
\end{aligned} \tag{35}$$

se
$$\lambda > 0.$$

6 La regola del parallelogramma, l'identità di polarizzazione, spazi di Banach e spazi di Hilbert

In uno spazio di Hilbert con la norma definita come
$$||x|| \equiv \sqrt{\langle x, x\rangle},$$
vale la regola del parallelogramma:
$$\begin{aligned}&||x+y||^2 + ||x-y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2||x||^2 + 2||y||^2. \end{aligned} \tag{36}$$
Se abbiamo uno spazio di Banach con la norma che soddisfa la regola del parallelogramma, possiamo introdurre il prodotto scalare come
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \equiv \frac{1}{4}(&||x+y||^2 - ||x-y||^2 \\ &+i||x-iy||^2 - i||x+iy||^2).\end{aligned} \tag{37}$$
Per lo spazio lineare su $\mathbb{R}$, introduciamo
$$\langle x, y\rangle \equiv \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2). \tag{38}$$
Consideriamo un controesempio che mostra che negli spazi L^p con $p \neq 2$ la regola del parallelogramma non sia soddisfatta. Consideriamo le funzioni
$$\begin{aligned} &f(x) = 1, \text{ se } x \in [0,1], \\ &f(x) = 0, \text{ se } x \notin [0,1], \end{aligned} \tag{39}$$

e

$$\begin{aligned} g(x) &= 1, \text{ se } x \in [1,2], \\ g(x) &= 0, \text{ se } x \notin [1,2]. \end{aligned} \tag{40}$$

Allora

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)| &= 1, \text{ se } x \in [0,2], \\ |f(x)+g(x)| &= 0, \text{ se } x \notin [0,2] \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| &= 1, \text{ se } x \in [0,2], \\ |f(x)-g(x)| &= 0, \text{ se } x \notin [0,2] \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &||f+g||_p = 2^{\frac{1}{p}} \\ &||f-g||_p = 2^{\frac{1}{p}} \\ &||f||_p = ||g||_p = 1. \end{aligned} \tag{43}$$

La regola del parallelogramma darebbe

$$2^{\frac{2}{p}+1} = 4, \tag{44}$$

che non è vero se

$$p \neq 2.$$

7 Metodo di Gram-Schmidt, un esempio

Consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2([-1,1])$. I monomi

$$f_n(x) = x^n,$$

rappresentano un sistema di vettori linearmente indipendenti. Allora

$$f_0(x) = 1.$$

$$||f_0|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx 1} = \sqrt{2}.$$

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$u_1(x) = f_1(x) - y_0(x) \int_{-1}^{1} dx' f_1(x') y_0(x')$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1}^{1} dx' \frac{x'}{\sqrt{2}} = x,$$

$$||u_1|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx' x'^2} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$y_1(x) = \frac{u_1(x)}{||u_1||} = \sqrt{\frac{3}{2}} x.$$

$$u_2(x) = x^2 - y_0(x) \int_{-1}^{1} dx' x'^2 y_0(x') - y_1(x) \int_{-1} 1 dx' x'^2 y_1(x')$$

$$= x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} dx' x'^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$||u_2|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx \left(x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{8}{45}},$$

$$y_2(x) = \frac{u_2(x)}{||u_2||} = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

8 La base numerabile e lo spazio di Hilbert separabile

Abbiamo una base ortonormale numerabile in uno spazio di Hilbert. Possiamo costruire un insieme di vettori che rappresentano tutte le combinazioni lineari finite di vettori della base con dei coefficienti razionali. È facile capire che questo insieme è denso nello spazio di Hilbert. Come possiamo mostrare che questo insieme è numerabile? La dimostrazione è costruttiva. Ricordiamo che l'insieme di tutti i numeri razionali è numerabile. Quindi, possiamo ad ogni numero razionale mettere in corrispondenza un numero naturale - il suo numero:

$$q \to n(q).$$

La base ortonormale è anche numerabile. Allora mettiamo in corrispondenza al primo vettore della base il numero primo 2, al secondo vettore della base mettiamo in corrispondenza il numero primo 3, al n-esimo vettore della base mettiamo in corrispondenza il numero primo p_n, laddove i numeri primi sono disposti nell'ordine crescente:

$$e_i \to p(i).$$

Ora consideriamo una combinazione lineare finita di vettori della base con i coefficienti razionali:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i e_{\alpha_i}.$$

Possiamo prescrivere a questa combinazione il numero:

$$\prod_{i=1}^{N} p(\alpha_i)^{n(q_i)}.$$

È chiaro che questo numero viene definito univocamente. Ogni combinazione lineare ha il suo numero e ad ogni numero naturale corrisponde una certa combinazione lineare finita con coefficienti razionali. Quindi, l'insieme di queste combinazioni è numerabile.

9 Polinomi di Legendre

$$L^2([-1,1])$$

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{45}$$

Calcoliamo il prodotto scalare di P_n e P_m, con $n > m$.

$$\int_{-1}^{1} dx P_n(x) P_m(x) = \int_{-1}^{1} dx \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^n}(x^2-1)^m$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \Big|_{-1}^{1}$$

$$- \int_{-1}^{1} dx \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m$$

$$= (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} dx \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^2-1)^n \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}(x^2-1)^m = 0.$$

Possiamo anche calcolare la norma delle funzioni $P_n(x)$.

$$\int_{-1}^{1} dx P_n^2(x) = (-1)^n \int_{-1}^{1} dx (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n$$

$$= (2n)! \int_{-1}^{1} dx (1-x^2)^n = 2(2n)! \int_{0}^{1} dx (1-x^2)^n.$$

Introducendo una variabile nuova

$$y \equiv x^2, \ x = \sqrt{y}, \ dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}},$$

abbiamo

$$2(2n)!\int_0^1 dx(1-x^2)^n = (2n)!\int_0^1 dy(1-y)^n y^{-\frac{1}{2}}$$
$$= (2n)!B\left(n+1,\frac{1}{2}\right),$$

laddove B è la funzione beta di Eulero, definita come

$$B(a,b) \equiv \int_0^1 dx(1-x)^{a-1}x^{b-1}. \tag{46}$$

Usando la formula

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \tag{47}$$

laddove Γ è la funzione gamma di Eulero

$$\Gamma(a) \equiv \int_0^\infty dx e^{-x}x^{a-1}, \tag{48}$$

otteniamo

$$(2n)!B\left(n+1,\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}. \tag{49}$$

Ricordiamo che

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{50}$$

Inoltre, vale la relazione di ricorrenza

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \tag{51}$$

Usando (51), otteniamo

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!!}, \tag{52}$$

dove

$$(2n+1)!! \equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1). \tag{53}$$

Sostituendo (50) e (52) all'equazione (49), otteniamo

$$\frac{(2n)!\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}=\frac{(2n)!n!2^{n+1}}{(2n+1)!!}. \tag{54}$$

Poi

$$\frac{(2n)!}{(2n+1)!!}=\frac{(2n)!!}{2n+1}=\frac{2^n n!}{2n+1}.$$

Finalmente,

$$\int_{-1}^{1}dxP_n^2(x)=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

e i polinomi di Legendre normalizzati sono

$$\tilde{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

10 Polinomi di Chebyshev

$$L^2([-1,1])$$

Introduciamo un prodotto scalare nuovo:

$$\langle f,g\rangle\equiv\int_{-1}^{1}dx\frac{\bar{f}(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{55}$$

Consideriamo un sistema di funzioni

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x). \tag{56}$$

Dimostriamo che queste funzioni sono polinomi. Introduciamo la nuova variabile θ tale che

$$\cos\theta=x. \tag{57}$$

Secondo la formula di De Moivre

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

e

$$\cos n\theta = \Re e[(\cos\theta + i\sin\theta)^n] = f(\cos\theta, \sin^2\theta) = f(x, 1-x^2).$$

Per esempio,

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos 0 = 1,\\
T_1(x) &= \cos\theta = x,\\
T_2(x) &= \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x.
\end{aligned}$$

Dimostriamo che i polinomi di Chebyshev $T_n(x)$ e $T_m(x)$ con $n \neq m$ sono ortogonali.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) = \int_0^{\pi} d\theta \cos n\theta \cos m\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta (\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\Big|_0^{\pi} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Poi,

$$\int_{-1}^{1} dx \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} d\theta \cos^2 n\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta (1+\cos 2n\theta) = \frac{\pi}{2}, \tag{58}$$

E polinomi di Chebyshev normalizzati sono

$$\tilde{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x). \tag{59}$$

11 Polinomi di Hermite

$$L^2(\mathbb{R}).$$

Il prodotto scalare è

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) \bar{f}(x) g(x). \tag{60}$$

Polinomi di Hermite

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{61}$$

Dimostriamo l'ortogonalità di questi polinomi.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} H_m(x) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} H_m(x). \end{aligned}$$

Supponiamo che $n > m$. Allora integrando per parti $m+1$ volte, abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} H_m(x) \\ = & (-1)^{m+1} \int_{-\infty}^{infty} dx \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} e^{-x^2} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} H_m(x) = 0. \end{aligned}$$

Possiamo calcolare anche la norma:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} H_n(x)\\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right)\\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} ((-2x)^n + \cdots)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (2^n n!) = 2^n n! \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

I polinomi di Hermite normalizzati sono

$$\tilde{H}_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!} (\pi)^{\frac{1}{4}}} H_n(x). \tag{62}$$

12 I polinomi di Laguerre

Consideriamo lo spazio di Hilbert

$$L^2([0, \infty))$$

con il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^{\infty} e^{-x} \bar{f}(x) g(x). \tag{63}$$

I polinomi di Laguerre sono

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \tag{64}$$

Dimostriamo la loro ortogonalità.

$$\int_0^\infty e^{-x}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})e^x\frac{d^m}{dx^m}(x^me^{-x})$$
$$=\int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})e^x\frac{d^m}{dx^m}(x^me^{-x})$$
$$=(-1)^{m+1}\int_0^\infty \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^ne^{-x})\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}L_m(x)=0.$$

Calcoliamo la norma:

$$\int_0^\infty dxe^{-x}L_n^2(x)=\int_0^\infty dx\frac{d^n}{dx^n}(xe^{-n})\left(e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})\right)$$
$$=(-1)^n\int_0^\infty dx(x^ne^{-n})\frac{d^n}{dx^n}\left(e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})\right)$$
$$=n!\int_0^\infty dxe^{-x}x=n!\Gamma(n+1)=(n!)^2.$$

I polinomi di Laguerre normalizzati sono

$$\tilde{L}_n(x)=\frac{1}{n!}L_n(x). \tag{65}$$

13 Calcolo delle norme degli operatori continui. Un esempio

Nello spazio di Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$, abbiamo un operatore T:

$$Tf(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy\cos(x-y)f(y)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}dy\frac{\cos y}{\sqrt{\pi}}f(y)+\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}dy\frac{\sin y}{\sqrt{\pi}}f(y)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\langle e_1,f\rangle e_1+\frac{1}{2}\langle e_2,f\rangle e_2,$$

laddove

$$e_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ e_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},$$
$$||e_1|| = ||e_2|| = 1,\ \langle e_1, e_2 \rangle = 0.$$

Possiamo rappresentare qualsiasi $f \in L^([-\pi, \pi])$ come

$$f = f_\perp + \langle e_1, f \rangle e_1 + \langle e_2, f \rangle e_2, \tag{66}$$

dove

$$\langle e_1, f \rangle = \langle e_2, f \rangle = 0.$$

Allora

$$Tf = \frac{1}{2}\langle e_1, f \rangle e_1 + \frac{1}{2}\langle e_2, f \rangle e_2, \tag{67}$$

$$||Tf|| = \frac{1}{2}\sqrt{|\langle e_1, f \rangle|^2 + |\langle e_1, f \rangle|^2}, \tag{68}$$

mentre

$$||f|| = \sqrt{||f_\perp||^2 + |\langle e_1, f \rangle|^2 + |\langle e_1, f \rangle|^2}. \tag{69}$$

$$\frac{||Tf||}{||f||} \leq \frac{1}{2} \tag{70}$$

e

$$\frac{||Tf||}{||f||} = \frac{1}{2} \tag{71}$$

se $f_\perp = 0$. Quindi,

$$||T|| = \frac{1}{2}. \tag{72}$$

Per l'operatore

$$I + 2T,$$

$$Tf = f_\perp + 2\langle e_1, f \rangle e_1 + 2\langle e_2, f \rangle e_2.$$

Quindi

$$||I + 2T|| = 2.$$

14 Convergenza debole di operatori continui

Consideriamo una successione di operatori continui $\{A_n\|$ che agiscono in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Diciamo che questa successione converge **debolemente** all'operatore A se per ogni coppia di due vettori $x, y \in \mathcal{H}$ la successione numerica $\langle y, A_n x\rangle$ converge a $\langle y, Ax\rangle$. In altre parole

$$\lim_{n\to\infty} \langle y, A_n x\rangle = \langle y, Ax\rangle$$

o

$$\lim_{n\to\infty} \langle y, (A_n - A)x\rangle = 0.$$

Ogni successione di operatori che converge fortemente converge anche debolmente. Infatti, a causa della disuguaglianza di Schwarz, abbiamo

$$|\langle y, (A_n - A)x\rangle| \leq ||y|| \cdot ||(A_n - A)x||,$$

e quando

$$\lim_{n\to\infty} ||(A_n - A)x|| = 0,$$

cioè la convergenza forte ha luogo, anche la convergenza debole è presente.

L'affermazione inversa non è vera. Consideriamo un controesempio. Nello spazio l^2, consideriamo una successione di operatori A_n definite come segue:

$$A_n(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n\text{volte}}, x_1, x_2, \cdots). \quad (73)$$

Ovviamente

$$||A_n(x_1, \cdots)|| = ||(x_1, \cdots)||,$$

e la successione $\{A_n\}$ non converge fortemente. Tuttavia essa converge debolmente. Davvero

$$\begin{aligned}
&\langle y, A_n x\rangle \\
&= \sum_{k=1} \bar{y}_k (A_n x_k) = \sum_{k=n+1} \bar{y}_k x_{k-n} \\
&= \sum_{k=1} \bar{y}_{k+n} x_k.
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Schwarz, otteniamo

$$|\sum_{k=1} \bar{y}_{k+n} x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=n} |y_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1} |x_k|^2}.$$

Ma

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n} |y_k|^2 = 0.$$

La nostra successione converge debolmente a $A = 0$.

È possibile anche definire la convergenza debole nello spazio di Banach generale X. Diciamo che la successione degli operatori continui A_n converge all'operatore A, se per ogni $x \in X$ ed ogni funzionale lineare continuo $y \in X^*$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \langle y, (A_n - A)x\rangle = 0.$$

15 Operatori non limitati

Vediamo che il dominio di un operatore non limitato non può coincidere con tutto lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Supponiamo di avere un operatore non limitato A. Possiamo sempre trovare un vettore e_1 normalizzato tale che

$$||Ae_1|| > 1.$$

Poi possiamo considerare uno sottospazio complementare ortogonale a e_1 e trovare li un vettore normalizzato e_2 tale che

$$||Ae_2|| > 2.$$

Continuando questa procedura possiamo trovare nello sottospazio complementare ortogonale allo sottospazio generato dai vettori $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ un vettore normalizzato e_n tale che

$$||Ae_n|| > n.$$

Poi possiamo costruire una base ortonormale, usando questi vettori. Prendiamo un vettore

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n,$$

che appartiene allo spazio di Hilbert visto che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Senza perdere la generalità possiamo considerare un operatore che si comporta come

$$Ae_n = ne_n.$$

Allora

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} e_n$$

e poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1$$

diverge, il vettore Ax non appartiene allo spazio di Hilbert.

I componenti di un vettore
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$
appartenente allo spazio di Hilbert devono comportarsi come
$$c_n \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}},\ \varepsilon > 0,\ n \to \infty.$$
Se abbiamo un operatore non limitato con gli autovalori che si comportano come
$$Ae_n \sim n^{\alpha} e_n,\ \alpha > 0$$
allora i componenti del vettore che appartiene al dominio dell'operatore devono comportarsi come
$$c_n \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha+\varepsilon}},\ n \to \infty.$$
Si vede cha dal punto di vista insiemistico lo spazio di Hilbert è molto più grande del dominio di un operatore non limitato.

Tuttavia, il dominio degli operatori non limitati è denso nello spazio di Hilbert. Davvero, qualsiasi operatore non limitato è ben definito sullo sottospazio di tutti i vettori che hanno un numero finito dei componenti diversi da zero. E questo sottospazio è denso nello spazio di Hilbert.

16 Proiettori nonortogonali

Consideriamo un operatore P, definito su $\mathbb{R}^2$, che agendo su un vettore parallelo all'asse x non cambia questo vettore, e agendo su un vettore parallelo alla retta che costituisce l'angolo α con l'asse x, annichila questo vettore.

La matrice, che corrisponde a questo operatore ha la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cot\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Davvero, quando questo operatore agisce sul vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cot\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{75}$$

Quando questo operatore agisce sul vettore

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cot\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Che cosa succede quando operatore P agisce su un vettore unitario arbitrario ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cot\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\phi\sin\alpha - \cos\alpha\sin\phi}{\sin\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

o

$$\begin{pmatrix} \frac{\sin(\alpha-\phi)}{\sin\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La norma di questo vettore ùguale a

$$\frac{|\sin(\alpha-\phi)|}{|\sin\alpha|}.$$

il valore massimo di questo numero è
$$||P|| = \frac{1}{|\sin\alpha|} \geq 1,$$
ed è uguale a 1 quando $|\alpha| = \frac{\pi}{2}$, cioè l'operatore P è un proiettore ortogonale. Proiettore (76) non è autoaggiunto, ma è idempotente:
$$\begin{pmatrix} 1 & -\cot\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\cot\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cot\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

17 La formula di inversione per la trasformata di Fourier e la funzione delta di Dirac

La formula
$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f \quad (79)$$
può essere riscritta come
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \mathcal{F}(k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} f(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)} \right) f(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) f(y) = f(x). \end{aligned}$$

Allora, possiamo scrivere
$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)}. \quad (80)$$

Dall'altro lato
$$\mathcal{F}(\delta(x-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \delta(x-a) = \frac{e^{-ika}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (81)$$

Possiamo vedere la relazione (80) anche come

$$\langle f_a, f_b \rangle = \delta(a-b), \tag{82}$$

dove

$$f_a(k) = \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Chiamando

$$\delta_a(x) \equiv \delta(x-a),$$

possiamo costruire la convoluzione di due funzioni delta di Dirac:

$$(\delta_a * \delta_b)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta_a(x-y)\delta_b(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y-a)\delta(y-b) = \delta(x-a-b) = \delta_{a+b}(x).$$

Davvero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (\delta_a * \delta_b)(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-a-b) f(x) = f(a+b),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y-a)\delta(y-b) f(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y-b) \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-y-a) f(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y-b) f(y+a) = f(a+b).$$

18 L'identità di Plancherel: un esempio

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{83}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}\right)\Big|_{z=i}$$
$$= 2\pi i \left(\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}\right)\Big|_{z=i} = -2\pi i \times \frac{2}{(z+i)^3}\Big|_{z=i} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{1+x^2} = -\sqrt{2\pi} i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-ikz}}{1+z^2}\right)\Big|_{z=-i}$$
$$= -\sqrt{2\pi} i \left(\frac{e^{-ikz}}{2z}\right)\Big|_{z=-i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k}, \ k > 0.$$
$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}^2(k) = 2 \int_0^{\infty} dk \frac{\pi}{2} e^{-2k} = \frac{\pi}{2}.$$

19 Equazione cubica

L'equazione cubica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{84}$$

ha tre soluzioni complesse. Questo segue dal teorema fondamentale dell'algebra. Consideriamo il caso della equazione cubica con i coefficienti reali. In questo caso due situazioni sono possibili: possono essere 3 radici reali o una radice reale e due radici complesse, coniugati tra loro. È facile vedere che deve esistere almeno una radice reale. Consideriamo il grafico della funzione

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Questa funzione tende all'infinito quando $x \to \infty$ e tende a $-\infty$ quando $x \to -\infty$. Quindi il grafico deve almeno una volta attraversare la retta $y = 0$. Visto che il prodotto delle radici dell'equazione cubica è uguale a $-c$ e la loro somma è uguale a $-a$, vediamo che i due radici non reali devono essere complessi coniugati. Davvero

$$
\begin{aligned}
&(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + ax^2 + bx + c, \\
&x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 \\
&= x^3 + ax^2 + bx + c, \\
&(x_1 + x_2 + x_3) = -a, \\
&(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = b, \\
&x_1x_2x_3 = -c. \qquad (85)
\end{aligned}
$$

Introduciamo una variabile nuova

$$x = y - \frac{a}{3}. \qquad (86)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (84), otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c \\
&= y^3 + y\left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right) + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3}\right) \\
&= 0. \qquad (87)
\end{aligned}
$$

Introducendo le nuove notazioni

$$
\begin{aligned}
d &= b - \frac{a^2}{3}, \\
h &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}, \qquad (88)
\end{aligned}
$$

possiamo riscrivere l'equazione (87) come

$$y^3 + dy + h = 0. \qquad (89)$$

Notiamo che il termine, proporzionale a y^2 non è presente. Il mezzo usato per escludere questo termine è lo stesso che usiamo, risolvendo l'equazione quadratica. Davvero, avendo l'equazione

$$x^2 + px + q = 0, \tag{90}$$

introduciamo una incognita nuova:

$$x = y - \frac{p}{2},$$

che trasforma l'equazione (90) all'equazione

$$\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(y - \frac{p}{2}\right) + q = y^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = 0. \tag{91}$$

La soluzione dell'ultima equazione

$$y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \tag{92}$$

ci da la formula nota

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Tornando all'equazione cubica (89), vediamo quando essa può avere 3 radici reali. La funzione

$$f(y) = y^3 + dy + h \tag{93}$$

ha la derivata

$$f'(y) = 3y^2 + d. \tag{94}$$

Se

$$d \geq 0,$$

la derivata non può essere uguale a zero ad un valore reale di y. Quindi, la funzione $f(y)$ non ha dei punti estremi locali ed è monotona. Essa attraversa l'asse x una volta sola e abbiamo solo una radice reale e due complesse coniugate. Se

$$d < 0,$$

allora la funzione $f(y)$ ha un massimo locale a

$$y_1 = -\sqrt{\frac{|d|}{3}}$$

ed il minimo locale a

$$y_2 = \sqrt{\frac{|d|}{3}}.$$

Il valore della funzione $f(y)$ nel punto del massimo locale è

$$f(y_1) = h + 2\left(\frac{|d|}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Il valore della funzione $f(y)$ nel punto del minimo locale è

$$f(y_2) = h - 2\left(\frac{|d|}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Il grafico della funzione $f(y)$ attraversa l'asse x tre volte e l'equazione cubica ha tre radici reali se

$$f(y_1) > 0$$

e

$$f(y_2) \leq 0$$

$$|d|^3 > \frac{27}{4}h^2. \tag{95}$$

Torniamo all'equazione (89). Ricordiamo la formula

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \tag{96}$$

ed, in particolare,

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)^3 = t^3 + 3t + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^3}. \tag{97}$$

Introduciamo ora un riscalamento della incognita y nell'equazione (89):

$$y = \alpha z. \tag{98}$$

Allora abbiamo

$$\alpha^3 z^3 + \alpha d z + h = 0, \tag{99}$$

o

$$z^3 + \frac{d}{\alpha^2} z + \frac{h}{\alpha^3} = 0. \tag{100}$$

Scegliamo α in tal modo che

$$\frac{d}{\alpha^2} = -3, \tag{101}$$

cioè

$$\alpha = \sqrt{-\frac{d}{3}}. \tag{102}$$

Sostituendo (102) nell'equazione (100)), otteniamo

$$z^3 - 3z + q = 0, \tag{103}$$

laddove

$$q = h\left(-\frac{3}{d}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{104}$$

Ora possiamo introdurre un altra incognita t:

$$z = t + \frac{1}{t}. \tag{105}$$

Sostituendo l'espressione (105) nell'equazione (103) e usando la formula (97), ottenitamo

$$\begin{aligned}
&\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3\left(t+\frac{1}{t}\right)+q\\
&=t^3+3t+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^3}-3t-\frac{3}{t}+\frac{1}{t^3}+q\\
&=t^3+\frac{1}{t^3}+q=0.
\end{aligned} \tag{106}$$

Questo è una equazione quadratica rispetto all'incognita

$$u=t^3. \tag{107}$$

Infatti,

$$u^2+qu+1=0. \tag{108}$$

Scegliamo una delle soluzioni di questa equazione:

$$u_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-1}. \tag{109}$$

Studieremo questa soluzione. I tre casi sono possibili.

1. Il numero d è positivo. In questo caso il numero q è immaginario e lo è anche il numero u_1. Possiamo rappresentare il numero u_1 come

$$u_1=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right). \tag{110}$$

Ora possiamo tornare da u a t trovando tre soluzioni:

$$\begin{aligned} t_1 &= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ t_2 &= e^{i\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ t_3 &= e^{i\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{111}$$

Ora possiamo tornare all'incognita z, usando la formula (105):

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \cos\frac{\pi}{6}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \\ &+ i\sin\frac{\pi}{6}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \\ &+ \frac{i}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]. \end{aligned} \tag{112}$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+e^{-i\frac{5\pi}{6}}\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&= \cos\frac{5\pi}{6}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&+i\sin\frac{5\pi}{6}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&+\frac{i}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right].
\end{aligned}
\tag{113}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= e^{i\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+e^{-i\frac{3\pi}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&= \cos\frac{3\pi}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&+i\sin\frac{3\pi}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&= -i\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right].
\end{aligned}
\tag{114}
$$

Ora possiamo tornare alla incognita y. Notiamo che abbiamo fissato il parametro α come

$$\alpha = i\mathrm{sgn}(h)\sqrt{\frac{|d|}{3}}. \tag{115}$$

Allora

$$y_1 = \frac{i}{2}\mathrm{sgn}(h)\sqrt{|d|}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(h)\sqrt{\frac{|d|}{3}}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]. \tag{116}$$

$$y_2 = -\frac{i}{2}\mathrm{sgn}(h)\sqrt{|d|}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(h)\sqrt{\frac{|d|}{3}}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]. \tag{117}$$

$$y_3 = \mathrm{sgn}(h)\sqrt{\frac{|d|}{3}}\left[\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{1+\frac{|q|^2}{4}}-\frac{|q|^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right]. \tag{118}$$

Vediamo che uno di queste radici - y_3 è reale, mentre y_1 e y_2 sono complesse coniugate. Transizione dalla incognita y alla incognita x è semplice (vedi Eq. (86)).

2. Il numero d è negativo e

$$\frac{h^2}{|d|^3} > \frac{4}{27}. \tag{119}$$

In questo caso α è reale ed anche q è reale. Inoltre,

$$\frac{q^2}{4} > 1, \tag{120}$$

e $\sqrt{\frac{q^2}{4} - 1}$ è reale. Questo significa che

$$u_1 = -\frac{|q|}{2} + \sqrt{\frac{|q|^2}{4} - 1} = e^{i\pi}\left(\frac{|q|}{2} - \sqrt{\frac{|q|^2}{4} - 1}\right). \tag{121}$$

Quindi

$$\begin{aligned} t_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{|q|}{2} - \sqrt{\frac{|q|^2}{4} - 1}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ t_2 &= e^{i\pi}\left(\frac{|q|}{2} - \sqrt{\frac{|q|^2}{4} - 1}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ t_3 &= e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{|q|}{2} - \sqrt{\frac{|q|^2}{4} - 1}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{122}$$

Poi,

$$
\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&=\cos\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&+i\sin\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&+i\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].\\
z_2 &= e^{i\pi}\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}+e^{-i\pi}\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\\
&=-\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
z_3 &= \cos\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&-i\sin\frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&-i\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{|q|}{2}-\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{|q|}{2}+\sqrt{\frac{|q|^2}{4}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].
\end{aligned}
\tag{123}
$$

Ricordando che

$$\alpha = \sqrt{\frac{|d|}{3}}$$

è reale, vediamo, che in questo caso abbiamo una radice reale

$$y_2 = \alpha z_2$$

e due radici complesse coniugate.

3. Consideriamo l'ultimo caso

$$d < 0, \ \frac{h^2}{|d|^3} < \frac{4}{27}. \tag{124}$$

Ora abbiamo il fattore α reale, ma

$$u = \frac{q}{2} + i\sqrt{1 - \frac{q^2}{4}}. \tag{125}$$

u è un numero complesso con il modulo uguale ad 1. Quindi, è comodo scrivere

$$u = e^{3\imath\phi}, \tag{126}$$

dove

$$\cos 3\phi = \frac{q}{2}, \ \sin 3\phi = \sqrt{1 - \frac{q^2}{4}}. \tag{127}$$

Poi

$$z = \left(\frac{q}{2} + i\sqrt{1 - \frac{q^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} - i\sqrt{1 - \frac{q^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{128}$$

Quindi, formalmente abbiamo risolto l'equazione cubica anche in questo caso. Tuttavia, notiamo che

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\cos\phi, \\
z_2 &= 2\cos\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\phi - \sqrt{3}\sin\phi, \\
z_3 &= 2\cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\phi - \sqrt{3}\sin\phi.
\end{aligned} \tag{129}$$

Tutte e tre radici sono reali, sono espresse tramite operazioni algebriche con i numeri complessi, ma per esprimere queste radici attraverso operazioni algebriche con numeri reali dobbiamo trovare $\cos\phi$, conoscendo $\cos 3\phi$. Ma per fare questo dobbiamo risolvere un altra equazione cubica che segue dalla formula di DeMoivre:

$$\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi, \tag{130}$$

che non è possibile generalmente. Comunque ci sono i valori particolari di 3ϕ, per i quali conoscendo $\cos 3\phi$ è possibile trovare $\cos\phi$, per esempio

$$3\phi = \frac{n}{2^k}\pi,\ \frac{n}{2^k}\frac{3}{5}\pi$$

ed alcuni altri.

20 Equazione quartica

È facile rappresentare un equazione quartica nella forma

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{131}$$

Poi

$$x^4 + 2\sqrt{c}x^2 + c = 2\sqrt{c}x^2 - ax^2 - cx. \tag{132}$$

$$(x^2+\sqrt{c})^2 = 2\sqrt{c}x^2 - ax^2 - cx. \tag{133}$$

Introduciamo una nuova incognita ausiliaria y, aggiungendola all'espressione tra le parentesi nel primo membro dell'equazione (133) e aggiungiamo al secondo membro dell'equazione (133) i termini di compensazione.

$$(x^2+y+\sqrt{c})^2 = 2\sqrt{c}x^2 - ax^2 - cx + y^2 + 2yx^2 + 2y\sqrt{c}. \tag{134}$$

Riscriviamo l'equazione (134) come

$$(x^2+y+\sqrt{c})^2 = (2\sqrt{c}-a+2y)x^2 - cx + y^2 + 2y\sqrt{c}. \tag{135}$$

Abbiamo a destra un trinomio quadratico rispetto a x. È possibile rappresentarlo come un quadrato completo? Sì, se il discriminante di questo trinomio è uguale a zero:

$$c^2 - 4(y^2+2y)(2\sqrt{c}-a+2y) = 0. \tag{136}$$

o

$$y^3 + (\sqrt{c}+2)y^2 + 2\sqrt{c}y - \frac{c^2}{8} = 0. \tag{137}$$

L'equazione (137) è una equazione cubica ed è possibile trovare le sue soluzioni. Scegliendo una di queste soluzioni, diciamo y_1, possiamo riscrivere l'equazione (136) come

$$(x^2+y_1+\sqrt{c})^2 = \left(\frac{cx}{2\sqrt{y_1^2+2y_1}} - \sqrt{y_1^2+2y_1}\right)^2. \tag{138}$$

Questo equazione è equivalente alle due equazioni quadratiche

$$x^2+y_1+\sqrt{c} = \frac{cx}{2\sqrt{y_1^2+2y_1}} - \sqrt{y_1^2+2y_1}, \tag{139}$$

e

$$x^2+y_1+\sqrt{c} = -\frac{cx}{2\sqrt{y_1^2+2y_1}} + \sqrt{y_1^2+2y_1}, \tag{140}$$

che possono essere risolti in un modo usuale. Quindi otteniamo 4 soluzioni dell'equazione quartica.

21 Serie

Consideriamo la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots=? \tag{141}$$

Espandiamo in una serie di Mc Laurin la funzione $f(x)=\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}
&f(x)=\ln(1+x),\\
&f'(x)=\frac{1}{1+x},\\
&f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\\
&f^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{1}{(n-1)!(1+x)^n},\\
&f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\\
&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots.
\end{aligned}$$

Se $x=1$, otteniamo

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots=\ln 2.$$

Consideriamo un altra serie:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

Per calcolare questa serie rappresentiamo la funzione $\frac{1}{1+x^2}$

come la progressione geometrica:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \quad (142)$$

Integriamo l'equazione (142) da 0 a 1:

$$\int_0^1 dx \frac{1}{1+x^2} = \text{arctan} x|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}|_0^1.$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

21.1 Problema di Basilea e la funzione zeta

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (143)$$

Il risultato può essere ottenuto in vari modi. Ricordiamo il teorema di Vieta. Abbiamo un polinomio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \quad (144)$$

Esso può essere rappresentato come

$$P_n = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad (145)$$

laddove x_k sono le soluzioni dell'equazione

$$P_n(x) = 0. \quad (146)$$

Confrontando le espressioni (144) e (145), otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \tag{147}$$

$$\sum_{1\leq k<m\leq n} x_k x_m = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \tag{148}$$

e cosi via. Introducendo la grandezza

$$t = \frac{1}{x}, \tag{149}$$

possiamo riscrivere il polinomio $P(x)$ come

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_n}\right) \\ &= \frac{a_n(t_1 - t)\cdots(t_n - t)}{t^n t_1 \cdots t_n}, \end{aligned} \tag{150}$$

dove $t_k = \frac{1}{x_k}$. Usando il fatto che

$$x_1 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}, \tag{151}$$

cioè

$$t_1 \cdots t_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_1}, \tag{152}$$

possiamo riscrivere (150) come segue

$$P_n(x) = \frac{a_0(t - t_1)\cdots(t - t_n)}{t^n}. \tag{153}$$

Confrontando Eq. (153) con Eq. (150) abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = -\frac{a_1}{a_0},$$
$$\sum_{1\le k<m\le n} t_k t_m = -\frac{a_2}{a_0},$$
$$\sum_{1\le k<m<p\le n} t_k t_m t_p = \frac{a_2}{a_0}, \tag{154}$$

e cosi via.

Supponiamo che le relazioni simili valgono anche per le serie di potenze infinite. Consideriamo la funzione $\frac{\sin x}{x}$ espansa in una serie di Mc Laurin:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots . \tag{155}$$

È comodo introdurre la variabile

$$z \equiv x^2.$$

Allora abbiamo

$$f(z) = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots . \tag{156}$$

Sapendo, che

$$\sin x = 0, \text{ se } x = n\pi, \; n \in \mathbb{Z}, \tag{157}$$

vediamo che

$$f(z) = 0, \text{ se}, z = n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}, \tag{158}$$

o

$$t_n = \frac{1}{n^2\pi^2}. \tag{159}$$

Ora, applicando la formula (154), otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6}, \tag{160}$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{161}$$

Possiamo arrivare alla formula (161) in modo più rigoroso. Consideriamo la funzione

$$g(x) = x \in L^2([-\pi,\pi]). \tag{162}$$

Il quadrato della sua norma è

$$||g||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 = \frac{2}{3}\pi^3. \tag{163}$$

La serie di Fourier per la funzione g è

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{164}$$

dove i coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-in} e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-in} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{-in} \cos n\pi, \ n \neq 0, \\ g_0 &= 0. \end{aligned} \tag{165}$$

Applicando l'identità di Parseval

$$\sum_n |g_n|^2 = ||g||^2, \tag{166}$$

otteniamo

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n^2}=\frac{2}{3}\pi^3. \tag{167}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ora possiamo introdurre la funzione zeta di Riemann:

$$\zeta_R(s)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}. \tag{168}$$

Abbiamo calcolato

$$\zeta_R(2)=\frac{\pi^2}{6}. \tag{169}$$

Possiamo calcolare

$$\zeta_R(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}. \tag{170}$$

Consideriamo la funzione

$$h(x)=x^2. \tag{171}$$

La sua norma

$$\int_{-\pi}^{\pi}dxh^2(x)=\int_{-\pi}^{\pi}dxx^4=\frac{2}{5}\pi^5. \tag{172}$$

I coefficienti di Fourier:

$$
\begin{aligned}
h_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{3}\pi^3, \\
h_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 e^{-inx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-in} x^2 e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{-in} \int_{-\pi}^{\pi} dx x e^{-inx} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{-in} \frac{2\pi}{-in} \cos n\pi \\
&= \frac{2\sqrt{2\pi}\cos n\pi}{n^2}, \ \ n \neq 0. \qquad (173)
\end{aligned}
$$

Sostituendo le espressioni (172) e (173) nell'identità di Parseval, otteniamo

$$
\frac{2}{9}\pi^5 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\pi}{n^4} = \frac{2}{5}\pi^5. \qquad (174)
$$

Ne segue

$$
\begin{aligned}
\zeta_R(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\pi}{n^4} = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{2}{5}\pi^5 - \frac{2}{9}\pi^5 \right) \\
&= \frac{\pi^4}{90}. \qquad (175)
\end{aligned}
$$

Possiamo calcolare anche

$$
\zeta_R(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}. \qquad (176)
$$

Introduciamo la funzione

$$
k(x) = x^3. \qquad (177)
$$

Il quadrato della sua norma è

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx x^6 = \frac{2\pi^7}{7}. \tag{178}$$

I coefficienti di Fourier

$$\begin{aligned}
k_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} x^3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-in} e^{-inx} x^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{3}{-in} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} x^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{-in} 2\pi^3 - \frac{3}{-in} \frac{2\sqrt{2\pi}\cos n\pi}{n^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}\cos n\pi}{(-in)} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right),\ n \neq 0.
\end{aligned}$$

Poi

$$|k_n|^2 = \frac{2\pi}{n^2} \left(\pi^4 - \frac{12\pi^2}{n^2} + \frac{36}{n^4}\right), \tag{179}$$

Usando l'identità di Parseval, otteniamo

$$\frac{2\pi^7}{7} = 4\pi^5 \zeta_R(2) - 48\pi^3 \zeta_R(4) + 144\pi \zeta_R(6). \tag{180}$$

Quindi,

$$\zeta_R(6) = \frac{\pi^6}{945}. \tag{181}$$

21.1.1 Continuazione analitica

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt e^{-nt} t^{s-1} \right),$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{s-1}.$$

$$\begin{aligned}
\zeta_R(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} dt e^{-nt} t^{s-1}\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} dt t^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} dt t^{s-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t}\frac{1}{1-\left(1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}\right)}\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t}\frac{1}{t\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}-\frac{t^3}{24}\right)}\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} dt t^{s-2} e^{-t}\frac{1}{1-\left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}\right)}\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} dt t^{s-2} e^{-t}\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}+\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{6}+\frac{t^3}{8}\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} dt t^{s-2} e^{-t}\left(1+\frac{t}{2}+\frac{1}{12}t^2+0\times t^4\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\Gamma(s-1)+\frac{1}{2}\Gamma(s)+\frac{1}{12}\Gamma(s+1)+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Usando la relazione di ricorrenza

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \tag{182}$$

otteniamo

$$\zeta_R(s) = \frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}s+\cdots .$$

La funzione zeta ha un polo semplice a $s = 1$. Poi

$$\begin{aligned}
\zeta_R(0) &= -\frac{1}{2}, \\
\zeta_R(-1) &= -\frac{1}{12}, \\
\zeta_R(-2) &= 0, \\
\zeta_R(-2n) &= 0.
\end{aligned}$$