

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

Fila 1

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di INFORMATICA TEORICA (6 CFU), 21/05/2025

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Solo se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

Nota: nelle domande da Q1 a Q4 una risposta giusta da 1 punto, una risposta sbagliata sottrae 0.25 punti. Si può scegliere di non rispondere, nel qual caso non vengono dati né sottratti punti.

Q1 (5 punti). Nel seguito, sia $\text{code}(-)$ una funzione iniettiva calcolabile che codifichi macchine di Turing come stringhe in $\{0,1\}^*$. Per ciascuno dei seguenti linguaggi, indica se é (1) decidibile, (2) indecidibile ma riconoscibile, (3) non riconoscibile.

	Linguaggio	Decidibile	Indecidibile ma riconoscibile	Non riconoscibile
(a)	$\{y \in \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M \text{ e } M \text{ si ferma sulla stringa } 000\}$			
(b)	$\{y \in \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M \text{ e } M \text{ va sempre a destra durante la computazione}\}$			
(c)	$\{y \in \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M \text{ e } M \text{ non si ferma su } \text{code}(M)\}$			
(d)	$\{y \in \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M \text{ e } M \text{ si ferma su almeno una stringa di lunghezza pari}\}$			
(e)	$\{\langle y, x \rangle \in \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ e } x = \text{code}(M') \text{ per qualche TM } M, M', \text{ e } M \text{ si ferma sulle stesse stringhe di } M'\}$			

a: (2), b: (1), c: (3), d: (2). e: (3)

Q2 (5 punti). Indica (con un Si o No) a quali dei linguaggi di Q2 (indicati con (a), (b), (c) e (d)) é applicabile il teorema di Rice.

	Rice?		Rice?		Rice?		Rice?		Rice?
(a)		(b)		(c)		(d)		(e)	

Il teorema di Rice si applica ad a e d.

Q3 (5 punti). Per ciascuno dei seguenti linguaggi, indica se l'algoritmo noto di complessità minore é nella classe P o NP . Si assume che $\langle - \rangle$ sia una codifica di un oggetto del problema (grafo, strategia, formula, etc.) come stringa del linguaggio. Come in classe, assumiamo che calcolare $\langle - \rangle$ impieghi tempo al piú polinomiale.

	Linguaggio	P	NP
(a)	<p>Considera il seguente problema riferito a grafi diretti G:</p> $\{\langle G, s, t \rangle \mid \text{esiste un percorso da } s \text{ a } t \text{ in } G\}$		
(b)	<p>Dato un grafo indiretto G, ricorda che un k-clique in G é un sottografo G' di G con k nodi, tale che ogni coppia di nodi di G' é collegata da un arco. Considera il linguaggio</p> $\{\langle G, k \rangle \mid G \text{ ha un } k\text{-clique}\}$		
(c)	<p>Dato un grafo indiretto G, ricorda che un k-clique in G é un sottografo G' di G con k nodi, tale che ogni coppia di nodi di G' é collegata da un arco. Considera il linguaggio</p> $\{\langle G \rangle \mid G \text{ ha un } 3\text{-clique}\}$		
(d)	<p>Considera il seguente problema riferito a grafi indiretti G:</p> $\{\langle G \rangle \mid \text{esiste un percorso in } G \text{ che visita tutti i nodi esattamente una volta}\}$		
(e)	<p>Considera il seguente problema riferito a grafi diretti G:</p> $\{\langle G, s, t \rangle \mid \text{non esiste alcun percorso da } s \text{ a } t \text{ in } G\}$		

(a) P. (b) NP. (c) P. (d) NP. (e) P.

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

Fila 1

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di INFORMATICA TEORICA (6 CFU), 21/05/2025

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Solo se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

Q4 (11 punti). Indica (senza dimostrazione) quali di queste affermazioni sono vere, quali sono false, e quali sono problemi aperti.

		V	F	Aperto
(a)	Il linguaggio $FL = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M \text{ e } M \text{ accetta tutte le stringhe}\}$ é riconoscibile.			
(b)	Se L é in NP , allora anche il suo complemento é in NP .			
(c)	Sia L in P . Se $SAT \leq_p L$, allora $P = NP$.			
(d)	La classe dei linguaggi in P é chiusa sotto l'operazione di unione.			
(e)	$3SAT$ é in P .			
(f)	$PSPACE = NPSPACE$.			
(g)	Esistono linguaggi L_1 e L_2 tali che $L_1 \leq L_2$ ma $L_1^- \not\leq L_2^-$, dove L^- indica il complemento di L .			
(h)	Esiste un linguaggio decidibile non in $PSPACE$.			
(i)	Esiste un linguaggio $EXPTIME$ -completo in P .			
(j)	$NP \subseteq PSPACE$.			
(k)	Se $P = NP$, allora il linguaggio della fermata $HALT$ é in P , dove: $HALT = \{\langle y, x \rangle \in \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M \text{ e } M \text{ si ferma su } x\}$			

- (a) Falso.
- (b) Problema aperto.
- (c) Vero.
- (d) Vero.
- (e) Problema aperto.

- (f) Vero (teorema di Savitch).
- (g) Falso.
- (h) Vero, per il teorema di gerarchia di spazio.
- (i) Falso, per il teorema di gerarchia di tempo.
- (j) Vero
- (k) Falso

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

Fila 1

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di INFORMATICA TEORICA (6 CFU), 21/05/2025

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Solo se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

Q5 (5 punti). Considera i seguenti linguaggi L_1 e L_2 .

$$L_1 = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M, \text{ e } M \text{ si ferma sulla string vuota } \epsilon\}$$

$$L_2 = \{y \in \{0,1\}^* \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M, \text{ e } M \text{ si ferma su } \text{code}(M)\}$$

Dimostra che esiste una mapping reduction da L_1 a L_2 (notazione $L_1 \leq L_2$).

Vogliamo costruire una funzione decidibile f tale che $y \in L_5$ se e solo se $f(y) \in L_4$. Innanzitutto, se y non è il codice di alcuna TM, allora fissiamo $f(y) = y$. Altrimenti, abbiamo che $y = \text{code}(M)$ per qualche M . In questo caso, definiamo $f(y) = \text{code}(M')$, dove M' è definita come segue: su input $\text{code}(M')$, pulisci il nastro e simula M sul nastro vuoto. Su input diverso, entra in un ciclo.

Verifichiamo che f è computabile: il problema di determinare se $y = \text{code}(M)$ per qualche M è decidibile, ed anche il problema di costruire M' a partire da M .

Infine, verifichiamo che f sia una riduzione:

- Se $y \in L_1$, allora esiste M tale che $y = \text{code}(M)$ e M ferma sul nastro vuoto, quindi M' ferma su $\text{code}(M')$, quindi $M' \in L_4$.
- Se $y \notin L_1$, allora si hanno due casi. Primo caso: $y \neq \text{code}(M)$ per qualsiasi M , ed allora $f(y) = y \notin L_2$. Nel secondo caso, $y = \text{code}(M)$ per qualche M e M non ferma sul nastro vuoto, quindi M' non ferma su $\text{code}(M')$, quindi $f(y) = \text{code}(M') \notin L_4$.