**Cognome** ______________________________ **Nome** ______________________________

**Matricola** ______________________________ **Fila 1**

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica**
**Esame di INFORMATICA TEORICA (6 CFU), 08/06/2023**

*Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Solo se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.*

*Nota: nelle domande da Q2 a Q6 una risposta giusta da 1 punto, una risposta sbagliata sottrae 0.25 punti. Si puó scegliere di non rispondere, nel qual caso non vengono dati né sottratti punti.*

Q1 (5 punti). Nel seguito, sia code($-$) una funzione iniettiva calcolabile che codifichi macchine di Turing come stringhe in $\{0,1\}^*$. Per ciascuno dei seguenti linguaggi, indica se é (1) decidibile, (2) indecidibile ma riconoscibile, (3) non riconoscibile.

| | Linguaggio | Decidicible | Indecidibile ma riconoscibile | Non riconoscibile |
|---|---|---|---|---|
| (a) | $\{y \in \{0,1\}^\star \mid y = \text{code}(M)$ per qualche TM $M$ e $M$ si ferma sulla stringa $010\}$ | | | |
| (b) | $\{y \in \{0,1\}^\star \mid y = \text{code}(M)$ per qualche TM $M$ e $M$ va sempre a destra durante la computazione$\}$ | | | |
| (c) | $\{y \in \{0,1\}^\star \mid y = \text{code}(M)$ per qualche TM $M$ e $M$ non si ferma su $\text{code}(M)\}$ | | | |
| (d) | $\{y \in \{0,1\}^\star \mid y = \text{code}(M)$ per qualche TM $M$ e $M$ si ferma su almeno una stringa di lunghezza pari$\}$ | | | |
| (e) | $\{\langle y, x\rangle \in \{0,1\}^\star \times \{0,1\}^\star \mid y = \text{code}(M)$ e $x = \text{code}(M')$ per qualche TM $M, M'$, e $M$ si ferma sulle stesse stringe di $M'\}$ | | | |

$a$: (2), $b$: (1), $c$: (3), $d$: (2). $e$: (3)

Q2 (5 punti). Indica (con un Si o No) a quali dei linguaggi di Q2 (indicati con (a), (b), (c) e (d)) é applicabile il teorema di Rice.

| | Rice? | | Rice? | | Rice? | | Rice? | | Rice? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | | (b) | | (c) | | (d) | | (e) | |

Il teorema di Rice si applica ad $a$ e $d$.

Q3 (5 punti). Per ciascuno dei seguenti linguaggi, indica se l'algoritmo noto di complessità minore é nella classe $P$ o $NP$. Si assume che $\langle - \rangle$ sia una codifica di un oggetto del problema (grafo, strategia, formula, etc.) come stringa del linguaggio. Come in classe, assumiamo che calcolare $\langle - \rangle$ impieghi tempo al piú polinomiale.

| | Linguaggio | P | NP |
|---|---|---|---|
| (a) | Considera il seguente problema riferito a grafi diretti $G$: $$\{\langle G, s, t\rangle \mid \text{ esiste un percorso da } s \text{ a } t \text{ in } G\}$$ | | |
| (b) | Dato un grafo indiretto $G$, ricorda che un $k$-clique in $G$ é un sottografo $G'$ di $G$ con $k$ nodi, tale che ogni coppia di nodi di $G'$ é collegata da un arco. Considera il linguaggio $$\{\langle G, k\rangle \mid G \text{ ha un } k\text{-clique}\}$$ | | |
| (c) | Dato un grafo indiretto $G$, ricorda che un $k$-clique in $G$ é un sottografo $G'$ di $G$ con $k$ nodi, tale che ogni coppia di nodi di $G'$ é collegata da un arco. Considera il linguaggio $$\{\langle G\rangle \mid G \text{ ha un 3-clique}\}$$ | | |
| (d) | Considera il seguente problema riferito a grafi indiretti $G$: $$\{\langle G\rangle \mid \text{ esiste un percorso in } G \text{ che visita tutti i nodi esattamente una volta}\}$$ | | |
| (e) | Considera il seguente problema riferito a grafi diretti $G$: $$\{\langle G, s, t\rangle \mid \text{ non esiste alcun percorso da } s \text{ a } t \text{ in } G\}$$ | | |

(a) P. (b) NP. (c) P. (d) NP. (e) P.

| | | |
|---|---|---|
| **Cognome** ______________________ | | **Nome** ______________________ |
| **Matricola** ______________________ | | **Fila 1** |

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica**
**Esame di INFORMATICA TEORICA (6 CFU), 08/06/2023**

*Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Solo se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.*

Q4 (10 punti). Indica (senza dimostrazione) quali di queste affermazioni sono vere, quali sono false, e quali sono problemi aperti.

| | Linguaggio | V | F | Aperto |
|---|---|---|---|---|
| (a) | Se $L$ é in $NP$, allora anche il suo complemento é in $NP$. | | | |
| (b) | Sia $L$ in $P$. Se $SAT \leq_p L$, allora $P = NP$. | | | |
| (c) | La classe dei linguaggi in $P$ é chiusa sotto l'operazione di unione. | | | |
| (d) | $3SAT$ é in $P$. | | | |
| (e) | $PSPACE = NPSPACE$. | | | |
| (f) | Esistono linguaggi $L_1$ e $L_2$ tali che $L_1 \leq L_2$ ma $L_1^- \not\leq L_2^-$, dove $L^-$ indica il complemento di $L$. | | | |
| (g) | Esiste un linguaggio decidibile non in $PSPACE$. | | | |
| (h) | Esiste un linguaggio $EXPTIME$-completo in $P$. | | | |
| (i) | $NP \subseteq PSPACE$. | | | |
| (j) | Se $P = NP$, allora il linguaggio della fermata $HALT$ é in $P$, dove: $HALT = \{\langle y, x\rangle \in \{0,1\}^\star \mid y = \text{code}(M) \text{ per qualche TM } M \text{ e } M \text{ si ferma su } x\}$ | | | |

(a) Falso.

(b) Vero.

(c) Vero.

(d) Problema aperto.
(e) Vero (teorema di Savitch).
(f) Falso.
(g) Vero, per il teorema di gerarchia di spazio.
(h) Falso, per il teorema di gerarchia di tempo.
(i) Vero
(j) Falso

**Cognome** ______________________ **Nome** ______________________

**Matricola** ______________________ **Fila 1**

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica**
**Esame di INFORMATICA TEORICA (6 CFU), 08/06/2023**

*Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Solo se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.*

Q5 (5 punti). Supponi $L$ sia un linguaggio $NP$-completo. Dimostra che se $L$ fosse in $P$, allora avremmo che $P = NP$.

Sia $L'$ un linguaggio in $NP$. Chiamiamo $M_f$ la TM che computa in tempo polinomiale la funzione di riduzione $f$ che testimonia la riduzione $L' \leq_p L$ (la quale esiste per $NP$-completezza di $L$). Chiamiamo $M$ la TM che decide $L$ in tempo polinomiale (la quale esiste per assunzione).
Definiamo ora il seguente algoritmo: su input $x$, computa $f(x)$ usando $M_f$, poi verifica se $f(x)$ é in $L$ usando $M$. Accetta se e solo se $f(x) \in L$.
Questo algoritmo decide $L'$. Infatti abbiamo $x \in L'$ se e solo se $f(x) \in L$ per definizione di mapping-reduction. Inoltre, l'algoritmo lavora in tempo polinomiale, in quanto $M_f$ e $M$ lavorano in tempo polinomiale. L'esistenza di tale algoritmo dimostra che $L'$ é in $P$. Dal momento che $L'$ era un generico problema in $NP$, abbiamo che $P = NP$.