DIMOSTRAZIONI PROPRIETÁ TRASFORMATA

$$\boxed{F\left[x^*(t)\right] = X^*(-\omega)}$$

CONIUGAZIONE

DIM

$$F\left[x^*(t)\right] = \int x^*(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

PER DEFINIZIONE

$$= \underbrace{\int \left(x(t)\, e^{j\omega t}\right)^* dt}_{= X^*(-\omega)}$$

PERCHÉ $(s \cdot z)^* = s^* \cdot z^*$ CON $s, z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{F\left[x(t-t_0)\right] = X(\omega)\, e^{-j\omega t_0}}$$

TRASLAZIONE TEMPORALE

DIM

CAMBIO VARIABILE $\xi = t - t_0$

$t = +\infty \Rightarrow \xi = +\infty - t_0$ MA COMUNQUE É INFINITO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty - t_0}^{+\infty - t_0} x(\xi)\, e^{-j\omega(\xi + t_0)}\, dt$$

- RICHIAMO $\xi = t$, OSSERVO CHE IL TERMINE $e^{-j\omega t_0}$ É UNA COSTANTE, PORTO FUORI E OTTENGO $= X(\omega)\, e^{-j\omega t_0}$

$$\boxed{F\left[\dot{x}(t)\right] = j\omega\, X(\omega)}$$

DERIVATA

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\, x(t) = \frac{d}{dt}\, \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}_{\text{FORMULA DI SINTESI}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, \underbrace{\frac{d}{dt}}_{\substack{\text{IL RESTO NON DIPENDE} \\ \text{DA } t\text{, È UNA COSTANTE}}} e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, \underbrace{e^{j\omega t} \cdot j\omega}_{\text{DERIVATA}}\, d\omega$$

$$= F^{-1}\left[X(\omega) \cdot j\omega\right]$$

$$\boxed{F\left[x(t) * y(t)\right] = X(\omega)\, Y(\omega)}$$

CONVOLUZIONE

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega(t-\tau)}\, d\omega}_{y(t-\tau)}\, d\tau$$

INVERTO ORDINE DI INTEGRAZIONE

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega} Y(\omega) \underbrace{\int_{\tau} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau}_{= X(\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\omega} Y(\omega)\, X(\omega)\, e^{j\omega t}}_{= F^{-1}\left[Y(\omega)\, X(\omega)\right]}\, d\omega$$

FORMULA DI SINTESI

$$\boxed{F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} \quad \text{SE} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0}$$

INTEGRALE

DIM DA FARE ANCORA