DIMOSTRAZIONI PROPRIETÁ TRASFORMATA

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$

CONIUGAZIONE

DIM

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = \int x^*(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

PER DEFINIZIONE

$$= \int \underbrace{\left(x(t)\, e^{j\omega t}\right)^*}_{\text{II}} dt$$

$$X^*(-\omega)$$

PERCHÉ $(S \cdot z)^* = S^* \cdot z^*$ CON $S, z \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = X(\omega)\, e^{-j\omega t_0}$$

TRASLAZIONE TEMPORALE

DIM

CAMBIO VARIABILE $\xi = t - t_0$

$t = +\infty \Rightarrow \xi = +\infty - t_0$
MA COMUNQUE È INFINITO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty-t_0}^{+\infty-t_0} X(\xi)\, e^{-j\omega(\xi+t_0)}\, dt$$

- RICHIAMO $\xi = t$, OSSERVO CHE IL TERMINE $e^{-j\omega t_0}$ È UNA COSTANTE, PORTO FUORI E OTTENGO $= X(\omega)\, e^{-j\omega t_0}$

$$\boxed{F[\dot{x}(t)] = j\omega X(\omega)}$$

DERIVATA

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$$

FORMULA DI SINTESI

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\underbrace{\frac{d}{dt}e^{j\omega t}}\, d\omega$$

IL RESTO NON DIPENDE DA t, È UNA COSTANTE

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\underbrace{e^{j\omega t}\cdot j\omega}\, d\omega$$

DERIVATA

$$= F^{-1}\left[X(\omega)\cdot j\omega\right]$$

$$\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = X(\omega)\, Y(\omega)$$

CONVOLUZIONE

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega(t-\tau)}\, d\omega}_{y(t-\tau)}\, d\tau$$

INVERSE ORDINE DI INTEGRAZIONE

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega} Y(\omega) \underbrace{\int_{\tau} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau}_{X(\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\omega} Y(\omega)\, X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}_{\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)\, X(\omega)]}$$

FORMULA DI SINTESI

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} \quad \text{SE} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0$$

INTEGRALE

DIM DA FARE ANCORA