DIMOSTRAZIONI PROPRIETÁ $\delta(t)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t_0-t)\,dt}$$

PARITÁ

DIM

SCRITTURA CON FUNZIONE AUSILIARIA DI $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t_0-t)\,dt = \lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,D(t_0-t,\Delta)\,dt$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\underbrace{\frac{1}{\Delta}}_{\text{VALORE } D(t_0-t,\,\Delta)}\int_{t_0-\Delta}^{t_0} x(t)\,dt = \frac{1}{\cancel{\Delta}}\underbrace{x(t_0)\,\cancel{\Delta}}_{\text{AREA INFINITESIMALE NEL PUNTO CONSIDERATO}} = x(t_0)$$

CHE É DEFINIZIONE STESSA DI $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)$

$$\boxed{x(t) * \delta(t) = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau}$$

$\delta(t)$ EL. NEUTRO CONVOLUZIONE

DIM

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t_0-t)\,dt$$

SOSTITUISCO, IN ORDINE : $\overset{①}{t\to\tau}$, $\overset{②}{t_0\to t}$

DOPO LA ② OTTENGO $x(t) = x(t)*\delta(t)$

É LA DEFIN. DI CONVOLUZIONE

$$\Rightarrow ① \rightarrow x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t_0-\tau)\,d\tau \qquad ② \rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{\delta(\alpha t) = \frac{\delta(t)}{|\alpha|} \quad , \alpha \neq 0}$$

CAMBIO DI ARGOMENTO

o

SCALATURA

DIM

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(\alpha t)\,dt$$

SOSTITUISCO

$\xi = \alpha t$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi/\alpha)\,\delta(\xi)\,\frac{d\xi}{|\alpha|} =$$

VAL. ASS. × AVERE ?

$$= \frac{1}{|\alpha|} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi/\alpha)\,\delta(\xi)\,d\xi}_{= x(0)} = \frac{1}{|\alpha|}\,x(0) =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\frac{\delta(t)}{|\alpha|}\,dt$$

Scanned with CamScanner

$$\boxed{F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt = 1}$$

TRASFORMATA DEL $\delta(t)$

$\boxed{\text{DIM IMMEDIATA}} \rightarrow$ PER DEFINIZIONE, $\delta(t)$ CAMPIONA LA FUNZIONE IN 0

$\Rightarrow e^{j0} = 1$

$\boxed{\text{DIM CON FUNZIONE AUSILIARIA}} \rightarrow \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} f_\Delta(t)$ IN SENSO INTEGRALE

$$\Rightarrow \lim_{\Delta \to 0} F[\underbrace{D(t,\Delta)}] = \lim_{\Delta \to 0} \underbrace{\overset{=1}{I} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\omega \Delta/2)}{\omega \Delta/2} e^{-j\omega \frac{\Delta}{2}}}$$

$f_\Delta(t)$ CONSIDERATA, CIOÈ GRADINO

DALL'ES. 2 CONOSCIAMO LA TRASF. GRADINO

$= I \dfrac{\operatorname{sen}(\omega \tau/2)}{\tau/2}$

- τ QUI È $= \Delta$
- $F[x(t-t_0)] = X(\omega) e^{-j\omega t_0}$
- $I = 1$ PERCHÉ $\delta(t)$ HA Δ NEI TEMPI E $1/\Delta$ NELLE Y

$$\Rightarrow \lim_{\Delta \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\omega \Delta/2)}{\frac{\omega \Delta}{2}}}_{\to 1} \underbrace{e^{-j\omega \frac{\Delta}{2}}}_{\to 1} = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = U(t)}$$

INTEGRALE $\delta(t)$ É IL GRADINO UNITARIO

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ CON $x(\tau) = \delta(\tau)$

DIM

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, U(t-\tau)\, d\tau = \delta(t) * U(t) = \boxed{U(t)}$$

NOTA: $\dfrac{d\,U(t)}{dt} = \delta(t)$ (NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI, ALTRIMENTI $= 0$)

NOTA: $U(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

DIM ALTERNATIVA

$$aux(\tau, t) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} aux(\tau, t)\, \delta(\tau)\, d\tau = aux(0, t)$$

CIOÉ $aux(\tau, t)$ MI PERMETTE DI SCRIVERE $\delta(\tau)$ E DEFINIRLO NELL'INTEGRALE FRA $-\infty$ e $+\infty$

~~Ve~~ ESISTONO ALTRE FUNZIONI GRADINO $\rightarrow$ $\boxed{1(t) = U(t) - \frac{1}{2}}$

$\rightarrow$ $\boxed{segno(t) = 2 \cdot 1(t)}$