Algebra Lineare (modulo di C.I.); Informatica per il Management; 21.07.23

1. Sono date le sequenze di vettori

$$\mathcal{A}: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathcal{B}: \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{C}: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siano A, B, C le matrici che hanno colonne rispettivamente $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ e siano F, G, H le applicazioni lineari associate ad A, B, C.

a) Le sequenze $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono linearmente indipendenti, sono base di $\mathbb{R}^n$?

b) Le matrici A, B, C sono invertibili, con quale inversa?

c) Le equazioni BX = A e BX = C hanno soluzioni, quali?

d) Le applicazioni F, G, H sono iniettive, suriettive, biiettive, con quale inversa?

2. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si determini una base di $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^T)$.

3. E' data l'applicazione lineare T :↺ $\mathbb{R}^3$ rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 & 5 \\ -2 & 11 & 10 \\ 5 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

ed è noto che 15 e -15 sono autovalori.

Si stabilisca se T è diagonalizzabile; in tal caso si scriva una matrice diagonale D che rappresenta T e si scriva una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $[T]_{\mathcal{B}} = D$.