

**Algebra Lineare (C.I. con Analisi Matematica) - 27.05.24**

*tempo 1h 30'*

1. Siano

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 \end{array}, \quad V = \text{Span}\{a, b, c, d\}.$$

- 1) Si determinino una base di  $V$  e le relative coordinate di  $d$ ;
- 2) Si determinino una base ortogonale di  $V$  e le relative coordinate di  $d$ ;
- 3) Si stabilisca se  $e \in V$ ;
- 4) Si effettui una verifica.

2. Siano

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = (x, y, 2x + y);$$

$$G \text{ lineare t.c. } G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

- a) Si stabilisca se  $G \circ F$  è invertibile e nel caso si calcoli l'inversa;
- b) Analogamente per  $F \circ G$ ;
- c) Si verifichi quanto trovato.

3. Sia

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Si determini se possibile una base ortogonale di  $\mathbb{R}^3$  di autovettori di  $T$ ;
- b) Si verifichi quanto trovato.