Algebra Lineare (modulo di C.I.); Informatica per il Management; 26.05.23

1.

Siano $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $v_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ k \end{bmatrix}$.

a) Si determini una base di $\mathcal{C}(A)$.

b) Si determinino i k per i quali $v_k \in \mathcal{C}(A)$.

Siano $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) Si determini una base di $\mathcal{N}(A)$.

b') Si stabilisca se v_1, v_2, v_3 è una base di $\mathcal{N}(A)$.

2. Sono date le applicazioni

$\mathrm{F}(x, y) = (x, 2x + y)$;

G lineare, con $[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$;

H lineare: $\mathrm{H}(1,0,0) = (1,0)$, $\mathrm{H}(0,1,0) = (0,1)$, $\mathrm{H}(0,0,1) = (1,1)$.

a) Si stabilisca se l'applicazione è iniettiva, suriettiva, biiettiva;

b) Si calcoli se possibile l'applicazione inversa;

c) Si determinino le dimensioni degli spazi immagine e nucleo.

d) Si calcoli se possibile $\mathrm{G} \circ \mathrm{H}$.

3. Sia

$$\mathrm{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & -0.6 & -0.8 \end{bmatrix} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

a) Si determini se possibile una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di F.

b) Si scriva la relazione fra le matrici di F rispetto alle basi canonica e trovata.

Algebra Lineare (modulo di C.I.); Informatica per il Management; 23.06.23

1. Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   a) Si determinino il rango di A e le dimensioni di $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(A^T)$.

   b) Si determini una base per $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{R}(A)$ $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(A^T)$.

   c) Si calcoli AA^T e si stabilisca se è non singolare, in due modi.

2. In $\mathbb{R}^3$ sono date

   la base $(1,1,0), (2,0,1), (3,-1,-1)$ e il vettore $(-3,2,2)$.

   a) Si applichi alla base il processo di Gram-Schmidt e si effettui una verifica;

   c) Si calcolino le coordinate del vettore rispetto alla base ottenuta, in due modi.

3. Sia T $:\circlearrowleft \mathbb{R}^3$ lineare tale che

   $\mathrm{T}(1,0) = (2,k),\ \mathrm{T}(0,1) = (1,-2)$ $\quad$ (k parametro $\in \mathbb{R}$).

   a) Si determini per quali k l'applicazione T è rappresentabile da qualche matrice diagonale e si scrivano le matrici diagonali.

   b) Posto $k = 5$, si scrivano le matrici diagonali D e per ciascuna D si determini una base $\mathcal{B}$ tale che $[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}} = \mathrm{D}$.

Algebra Lineare (modulo di C.I.); Informatica per il Management; 21.07.23

1. Sono date le sequenze di vettori

$$A: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathcal{B}: \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{C}: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siano A, B, C le matrici che hanno colonne rispettivamente $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ e siano F, G, H le applicazioni lineari associate ad A, B, C.

a) Le sequenze $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono linearmente indipendenti, sono base di $\mathbb{R}^n$?

b) Le matrici A, B, C sono invertibili, con quale inversa?

c) Le equazioni BX = A e BX = C hanno soluzioni, quali?

d) Le applicazioni F, G, H sono iniettive, suriettive, biiettive, con quale inversa?

2. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si determini una base di $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^T)$.

3. E' data l'applicazionc lincarc T :$\circlearrowleft \mathbb{R}^3$ rapprcscntata rispctto alla basc canonica dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 & 5 \\ -2 & 11 & 10 \\ 5 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

ed è noto che 15 e -15 sono autovalori.

Si stabilisca se T è diagonalizzabile; in tal caso si scriva una matrice diagonale D che rappresenta T e si scriva una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $[T]_{\mathcal{B}} = D$.

Algebra Lineare (modulo di C.I.); Informatica per il Management; 11.09.23

1. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Si determini una base di $\mathcal{C}(A)$; la 4° e 5° colonna sono una base di $\mathcal{C}(A)$?

b) Si determini una base di $\mathcal{N}(A)$.

2. Sono date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e le applicazioni associate F e G.

a) Si stabilisca se la matrice è nonsingolare, in 2 modi.

b) Si calcoli se possibile la matrice inversa e si verifichi.

c) Si stabilisca se l'applicazione è iniettiva, suriettiva, biiettiva e si scriva *l'inversa.*

3. E' data l'applicazione lineare $T :\circlearrowleft \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

che ha autovalori 0 e 6.

a) *Si determini se possibile una base ortogonale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di* T.

b) Si verifichi quanto trovato.

c) Si scriva la matrice di T rispetto a $\mathcal{B}$.

Algebra Lineare (C.I. con Analisi Matematica) - 09.01.24
tempo 1h 30'

1. Sia $A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Si determinino una base di $\mathcal{C}(A)$ e una base di $\mathcal{R}(A)$;
   b) la 2° e 3° riga di A sono una base di $\mathcal{R}(A)$?
   c) si determinino i p tali che $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(A)$.

2. Sono dati il sistema $\begin{cases} x + \ y + 2z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 8t = 0 \end{cases}$ e un vettore soluzione, $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   a) si determini una base dello spazio delle soluzioni del sistema;
   b) si determini una base ortogonale dello spazio delle soluzioni;
   c) si calcolino le coordinate del vettore rispetto a questa base.

3. E' data l'applicazione lineare T di $\mathbb{R}^2$ i sé rappresentata da

   $$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   rispetto alla base canonica.

   a) si scriva la matrice di T rispetto alla base $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

   b) si determini una base di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di T e si scriva la matrice di T rispetto alla base.

Algebra Lineare (C.I. con Analisi Matematica) - 01.02.24

tempo 1h 30'

1. Siano
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$
e siano F, G, H le applicazioni lineari ad esse associate.
   a) Quali matrici sono moltiplicabili?
   b) Quali matrici sono invertibili? con quale inversa?
   c) Quali applicazioni sono componibili? Quali invertibili? Con quale inversa?
   d) Si risolvano, se possibile, le equazioni
   $$CX = B, \ CX = A;$$

2. Siano
$$V = \text{Span}\{(1,1,0,0),\ (2,0,0,2),\ (0,0,6,6)\}, \quad w = (0,4,4,0) \in V.$$
   a) si determini una base di V;
   b) si determini una base ortogonale di V;
   c) si calcolino le coordinate di w vettore rispetto a una base di V.

3. Sia
$$T : \mathbb{R}^3 \circlearrowleft, \ T(x,y,z) = (x, 3y+z, 2y+2z).$$
   a) Si determinino gli autovalori e le dimensioni degli autospazi di T;
   b) Se possibile, si scrivano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ di autovettori e la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$.