Part I

Spazi vettoriali

1 Spazi vettoriali

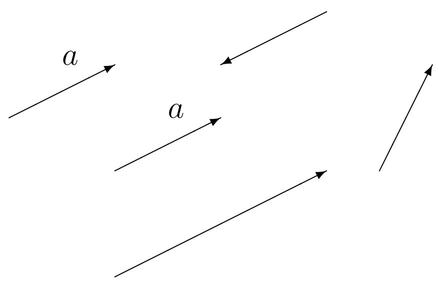
1.1 Spazi vettoriali geometrici $\mathcal{V}^n$ $(n = 1, 2, 3)$

1.1.1 Segmenti orientati, vettori

Segmenti orientati e vettori. Ambito del discorso: uno fra la retta, il piano, lo spazio della geometria Euclidea. Un "segmento orientato" ha un primo ed un ultimo estremo, ed è completamente determinato da essi; ad ogni segmento corrispondono due segmenti orientati, uno "opposto" dell'altro; se il segmento non è ridotto ad un punto, i due segmenti opposti sono diversi. Rappresentiamo ciascun segmento orientato con una freccia dal primo all'ultimo estremo.

Ciascun segmento orientato ha una ben definita lunghezza; ciascun segmento orientato non ridotto a un punto ha una ben definita direzione e un verso. Fatto: per ogni dati punto, lunghezza, direzione, verso, dal punto esce un unico segmento orientato con la data lunghezza, direzione, verso.

Considerando uguali segmenti orientati che hanno la stessa lunghezza, direzione e verso si ottengono dei nuovi enti, che diciamo "vettori". In altri termini: ogni segmento orientato dà uno ed un solo vettore, ogni vettore è dato da qualche segmento orientato, due segmenti orientati danno lo stesso vettore se solo se hanno stessa lunghezza, direzione e verso. Indichiamo i vettori con lettere latine miuscole $a, b, \ldots, u, v, \ldots$ Fatto: per ogni punto ed ogni vettore, dal punto esce un unico segmento orientato che dà il vettore.

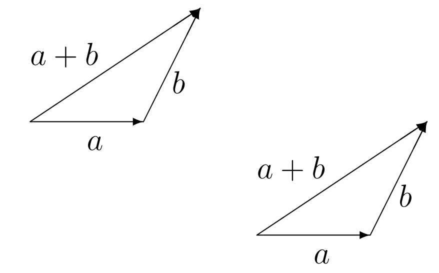


In questa figura c'è un'unica coppia di segmenti orientati che che danno lo stesso vettore, indicato con a.

Ai segmenti orientati ridotti a un punto corrisponde un unico vettore, detto vettore nullo, e indicato con $\underline{0}$. A due segmenti orientati opposti corrispondono due vettori opposti, indicato uno di essi con a, indichiamo l'altro con $-a$; ovviamente $-(-a) = a$.

1.1.2 Somma di vettori, prodotto di numeri per vettori

Somma di vettori. Siano dati un primo ed un secondo vettore a, b; scelto un punto, dal punto esce un unico segmento orientato che dà il vettore a; dal punto finale del segmento orientato esce un unico segmento orientato che dà il vettore b; congiungendo il primo punto del primo segmento orientato con l'ultimo punto del secondo segmento orientato si ha un terzo segmento orientato; questo terzo segmento orientato dà il vettore somma $a + b$. Partendo da punti diversi si hanno costruzioni diverse, ma tutti i segmenti orientati ottenuti danno lo stesso vettore.

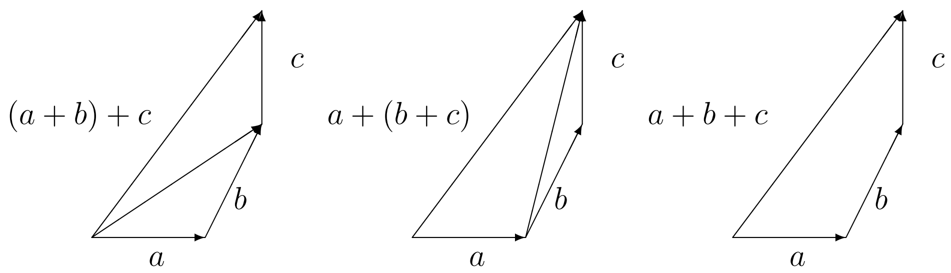


L'operazione di somma di vettori, come la somma di numeri reali, possiede le seguenti proprietà.

Associatività I due modi diversi per sommare tre vettori, lasciando invariato l'ordine, sono equivalenti:

(1) $\qquad (a + b) + c = a + (b + c) \qquad$ per ogni a, b, c

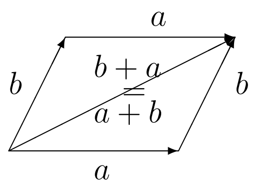
Si può dunque parlare di somma di tre vettori e scrivere la somma senza usare parentesi. $a + b + c$ si può ottenere direttamente come segue: da un punto, il vettore a dà un secondo punto, dal quale b dà un terzo punto, dal quale c dà un quarto punto, e il primo e l'ultimo punto danno il vettore $a + b + c$.



Commutatività. I due modi di sommare due vettori sono equivalenti:

(2) $\qquad a + b = b + a \qquad$ per ogni a, b

Il valore comune delle due somme si può descrivere come segue. Dato un punto, dal punto escono due segmenti orientati che danno a e b, che danno due punti, dai quali escono due segmenti orientati che danno b ed a. I quattro segmenti orientati sono lati di un parallelogramma e la diagonale del parallelogramma dà il vettore somma $a + b = b + a$.



Vettore nullo. Il vettore nullo $\underline{0}$ possiede (ed è l'unico a possedere) la proprietà

(3) $\qquad a + \underline{0} = a = \underline{0} + a \qquad$ per ogni a

Opposti. Per ogni vettore a, il vettore opposto $-a$ possiede (ed è l'unico a possedere) la proprietà

(4) $\qquad a + (-a) = \underline{0} = (-a) + a.$

Equazioni. Come per i numeri reali, anche per i vettori queste proprietà permettono di risolvere le equazioni espresse in termini di somma:

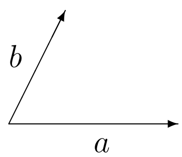
per ogni a, b l'equazione $x + a = b$ ha un'unica soluzione, $x = b + (-a)$.

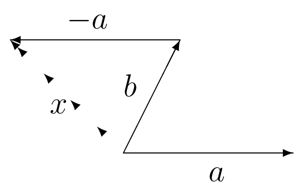
Infatti, ciascuna delle seguenti uguaglianze implica la successiva

$$x + a = b; \qquad x + a + (-a) = b + (-a); \qquad x + \underline{0} = b + (-a); \qquad x = b + (-a);$$

quindi, se c'è una soluzione, essa è $b + (-a)$.
Si lascia al lettore di verificare che $b + (-a)$ è una soluzione.

$b + (-a)$ si scrive in breve $b - a$ e si dice "differenza di b meno a".





Prodotto di numeri per vettori. Sia a un vettore. Si definisce il prodotto di un numero intero relativo per a ponendo

$n\,a = a + a + \cdots + a$ (n volte), $\qquad$ per ogni $n = 1, 2, \ldots,$

$0\,v = \underline{0};$

$n\,a = (-a) + (-a) + \cdots + (-a)$ ($|n|$ volte), $\qquad$ per ogni $n = -1, -2, \ldots,$

Si definsce il prodotto di un numero razionale per a ponendo per ogni $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{n}\,a = (\text{unica soluzione dell'equazione } nx = a),$$

e per ogni $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ed $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{m}{n}\,a = m\,(\frac{1}{n}\,a).$$

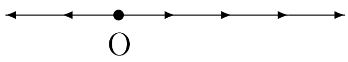
Ogni numero reale può essere dato da una successione di numeri razionali non negativi. Si definsce il prodotto di un numero reale per a mediante una successione di prodotti di numeri razionali per a. Ad esempio, $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ si può vedere come "limite" della successione di numeri razionali

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \ldots$$

e si definisce $\sqrt{2}\,v$ come "limite" della successione di vettori

$$1\,a,\ 1.4\,a,\ 1.41\,a,\ 1.414\,a,\ \ldots$$

Un'illustrazione dei vettori $\frac{m}{2}\,a$ per $-2 \leq m \leq 4$; tutti i vettori sono rappresentati da segmenti orientati uscenti dal punto O.



Proprietà. Le operazioni prodotto di numeri per numeri, somma di numeri per numeri, prodotto di numeri per vettori, somma di vettori sono legate dalla proprietà

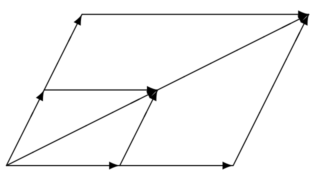
(5) $\quad r\,(a+b) = r\,a + r\,b;$

(6) $\quad (r+s)\,a = r\,a + s\,a;$

(7) $\quad (rs)\,a = r\,(s\,a);$

(8) $\quad 1\,a = a.$

Un'illustrazione della (5):



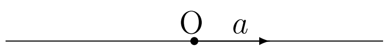
Indichiamo con $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3$ rispettivamente gli insiemi dei vettori della retta, piano e spazio Euclidei, con le operazioni di somma di vettori e di prodotto di numeri per vettori. Diciamo che questi insiemi con queste operazioni sono gli "spazi vettoriali geometrici".

1.1.3 Rappresentazione.

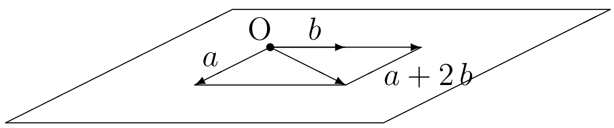
Per "vedere" tutti i vettori, è utile rappresentarli con segmenti orientati uscenti da un punto fissato. Fissato un punto O, si ha che ogni segmento orientato uscente da O dà un vettore e ogni vettore è dato da un'unico segmento orientato uscente da O. Si ha così una corrispondenza biunivoca fra segmenti orientati uscenti da O e vettori. Per semplicità di linguaggio, a volte riferiremo termini e concetti dati per vettori anche a segmenti orientati e viceversa.

Fatti:

> *sia dato un vettore $a \neq \underline{0}$; allora:*
> *il segmento orientato a sta su un'unica retta per O;*
> *per ogni numero r, il segmento orientato $r\,a$ sta sulla retta;*
> *ogni segmento orientato che sta sulla retta è del tipo $r\,a$ per un unico r;*



siano dati due vettori a, b con direzioni diverse; allora:
i segmenti orientati a, b stanno su un'unico piano per O;
per ogni due numeri r, s il segmento orientato $r\,a + s\,b$ sta sul piano;
ogni segmento orientato sul piano è del tipo $r\,a + s\,b$ per due unici r, s.



dati tre segmenti orientati a, b, c che non stanno su un piano per O,
ogni segmento orientato è del tipo $r\,a + s\,b + t\,c$ per tre unici $r, s, t \in \mathbb{R}$.

1.1.4 Sistemi di riferimento

D'ora innanzi, tranne avviso contrario, identificheremo i vettori di uno spazio vettoriale geometrico con i segmenti orientati che escono da un stesso punto fissato O.

$\mathcal{V}^1$. Un sistema di riferimento per la retta vettoriale $\mathcal{V}^1$ è un vettore $i \in \mathcal{V}^1$ non nullo, $i \neq \underline{0}$. Ciascun vettore $a \in \mathcal{V}^1$ si scrive in un unico modo come multiplo di i

$$a = r\,i \qquad (r \in \mathbb{R})$$

il coefficiente r si dice la "coordinata" di a rispetto al riferimento i. Osserviamo che i vettori i e $\underline{0}$, essendo dati da $i = 1\,i$ e $\underline{0} = 0\,i$ hanno coordinate rispettive 1 e 0.

$\mathcal{V}^2$. Un sistema di riferimento per il piano vettoriale $\mathcal{V}^1$ è dato da un primo ed un secondo vettore $i, j \in \mathcal{V}^2$ che non stanno su una stessa retta per O; in altri termini: $i \neq \underline{0}$ e $j \neq \alpha\,a$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Ciascun vettore $a \in \mathcal{V}^2$ si scrive in un unico modo come "combinazione lineare" di i e j

$$a = r\,i + s\,j \qquad (r, s \in \mathbb{R});$$

i coefficienti r ed s (nell'ordine) si dicono "coordinate" di a rispetto al riferimento i, j. Osserviamo che

$$i = 1\,i + 0\,j, \quad j = 0\,i + 1\,j, \quad \underline{0} = 0\,i + 0\,j,$$

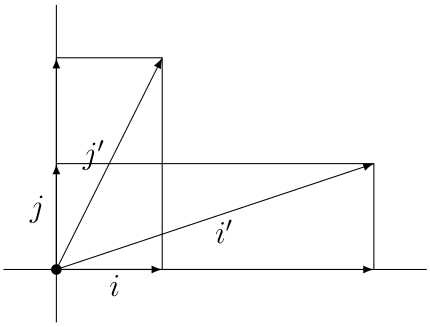
dunque: i ha coordinate 1,0 e j ha coordinate 0,1 e $\underline{0}$ ha coordinate 0,0, rispetto a i, j.

Problema. Siano Rif : i, j e Rif$'$: i', j' due riferimenti in $\mathcal{V}^2$. Sapendo che in Rif

i' ha coordinate $3, 1$

j' ha coordinate $1, 2$,

si determinino le coordinate di i, j in Rif$'$.



Sappiamo che

$i' = 3i + j,$

$j' = i + 2j.$

Indicate le coordinate di i in Rif$'$ con le incognite x', y' si ha

$i = x'i' + y'j';$

sostituendo ad i', j' le loro scritture rispetto a i, j si ha

$i = x'(3i + j) + y'(i + 2j);$

usando le proprietà delle operazioni, possiamo scrivere il 2° membro come combinazione lineare di i, j (cfr. il prossimo paragrafo per i passaggi)

$i = (3x' + y')i + (x' + 2y')j;$

essendo i, j un riferimento di $\mathcal{V}^2$, i coefficienti di i, j al 1° membrio devono coincidere coi coefficienti di i, j al 2° membro:

$$\begin{cases} 1 & = 3x' + y' \\ 0 & = x' + 2y' \end{cases};$$

questo sistema ha l'unica soluzione

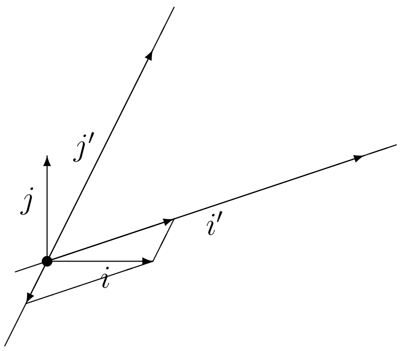
$x' = \frac{2}{5}\ y' = -\frac{1}{5}$

Quindi

$i = \frac{2}{5}i' - \frac{1}{5}j'$

e le coordinate di i nel riferimento i', j' sono $\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}$.

Un controllo grafico:

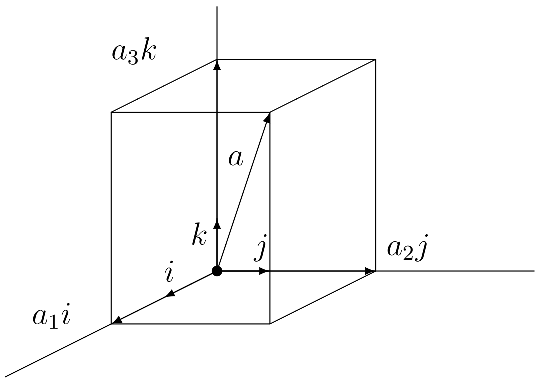


Si lascia al lettore di determinare le coordinate di j in Rif$'$ e di effettuare il relativo controlo grafico.

$\mathcal{V}^3$. Un sistema di riferimento per lo spazio vettoriale $\mathcal{V}^3$ è dato da un primo, secondo, terzo vettore $i, j, k \in \mathcal{V}^3$ che non stanno su uno stesso piano per O; in altri termini: $i \neq \underline{0}$ e $j \neq \alpha\, a$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \neq \alpha\, a + \beta b$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ciascun vettore $a \in \mathcal{V}^3$ si scrive in un unico modo come "combinazione lineare" di i, j, k

$$a = a_1\, i + a_2\, j + a_3\, k;$$

i coefficienti a_1, a_2, a_3 si dicono "coordinate" di a rispetto al riferimento i, j, k.



Osserviamo che i ha coordinate 1,0, 0 e j ha coordinate 0,1,0 e k ha coordinate 0,0,1 e $\underline{0}$ ha coordinate 0,0,0 rispetto a i, j, k.

1.1.5 Calcoli

Il calcolo

$$x'(3i + j) + y'(i + 2j) = (3x' + y')i + (x' + 2y')j$$

è stato svolto usando le proprietà delle operazioni; i passaggi sono:

$$\begin{aligned}
& x'(3i + j) + y'(i + 2j) \\
&= x'(3i) + x'j + y'i + y'(2j) \\
&= x'(3i) + y'i + x'j + y'(2j) \\
&= (x'3)i + y'i + x'j + (y'2)j \\
&= (x'3 + y')i + (x' + y'2)j;
\end{aligned}$$

abbiamo usato le proprietà (5), (2), (7), (6).

1.2 Spazi vettoriali numerici $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$

1.2.1 Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$

Una coppia ordinata di numeri reali ha una prima e una seconda "componente" numero reale; in prima battuta, si rappresenta scrivendo le sue componenti, nell'ordine, fra parentesi tonde; così, quella che ha prima e seconda componente 2 e 3 si scrive $(2, 3)$. Due coppie ordinate sono uguali (se e) solo se ciascuna componente dell'una è uguale alla rispettiva componente dell'altra, $(2, 3) \neq (3, 2)$. L'insieme delle coppie di numeri reali si indica con $\mathbb{R}^2$.

C'è una coppia "nulla" $\underline{0} = (0,0)$. Per ogni coppia si ha una coppia "opposta" definita da $-(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$.

Per ogni due coppie si ha una coppia "somma" definita da

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

L'operazione di somma di coppie, come l'operazione di somma di numeri reali, soddisfa le proprietà

$$\begin{array}{rll} (1)\ \text{associativa} & (a+b)+c = a+(b+c) & \\ (2)\ \text{commutativa} & a+b = b+a & \\ (3)\ \text{del vettor nullo} & a+\underline{0} = a = \underline{0}+a & \\ (4)\ \text{degli opposti} & a+(-a) = \underline{0} = (-a)+a & (a,b,c \in \mathbb{R}^2) \end{array}$$

Motiveremo in seguito questa affermazione più in generale, per l'operazione di somma di $n-$ple. Come per i numeri reali, anche per le coppie queste proprietà permettono di risolvere le equazioni espresse in termini di somma:

per ogni a, b l'equazione $x + a = b$ ha un'unica soluzione, $x = b + (-a)$.

Ad esempio, l'equazione

$$(x_1, x_2) + (2, 3) = (7, 9)$$

ha l'unica soluzione

$$(x_1, x_2) = (7, 9) + (-2, -3) = (5, 6).$$

Per ogni numero ed ogni coppia si ha una coppia "prodotto" definita da

$$r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

Le operazioni prodotto di numeri, somma di numeri, prodotto di numeri per coppie, somma di coppie sono legate dalle proprietà

$$\begin{array}{rll} (5)\ \text{semidistributiva} & r\,(a+b) = r\,a + r\,b & \\ (6)\ \text{semidistributiva} & (r+s)\,a = r\,a + s\,a & \\ (7)\ \text{semiassociativa} & r\,(s\,a) = (rs)\,a & \\ (8)\ \text{del numero } 1 & 1\,a = a & (a, b \in \mathbb{R}^2,\ r, s, 1 \in \mathbb{R}). \end{array}$$

Motiveremo in seguito questa affermazione più in generale, per le operazioni sulle $n-$ple. L'insieme $\mathbb{R}^2$, con queste operazioni, è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

Ci sono due coppie "unità", $(1, 0)$ e $(0, 1)$; ogni coppia si scrive in un unico modo come combinazione lineare delle coppie unità, con coeficienti le componenti; ad esempio

$$(2, 3) = (2, 0) + (0, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1);$$

in generale,

$$(a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1).$$

Notazione. Una coppia ordinata si può scrivere anche come riga o colonna

$$(2,3), \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Per il calcolo, la usuale scrittura in riga è meno agevole della scrittura in colonna; ad esempio:

$$(1,2)+(3,4)=(3,6); \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$3\,(1,2)=(3,6); \quad 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Per questa ragione, di regola scriveremo le coppie, terne, ... $n-$ple come colonne.

Scrittura di sistemi. Consideriamo il sistema di due equazioni nelle due incognite x, y, con coefficienti e termini noti in $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x+5y=9 \end{cases};$$

il sistema delle due uguaglianze equivale all'unica uguaglianza

$$\begin{bmatrix} 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix};$$

il 1° membro può essere scomposto come

$$\begin{bmatrix} 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y \\ 5y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix};$$

il sistema può essere scritto come

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

un'unica equazione in due incognite, con coefficienti e termine noto in $\mathbb{R}^2$.

1.2.2 Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

Sia n un intero positivo fissato. Una $n-$pla ordinata di numeri reali, in breve una $n-$pla di numeri reali, ha una prima, seconda, ..., $n-$ma "componente" numero reale. Due $n-$ple sono uguali (se e) solo se ciascuna componente dell'una è uguale alla rispettiva componente dell'altra. In prima battuta, una $n-$pla ordinata si indica scrivendo le sue componenti, nell'ordine, fra parentesi tonde. L'insieme delle $n-$ple di numeri reali si indica con $\mathbb{R}^n$.

Spesso, se si indica una $n-$pla con una lettera, allora si indicano le sue componenti con la stessa lettera con indici $1, \ldots, n$. Dunque per ogni due $n-$ple a, b, si ha

$a = b$ se e solo se $a_i = b_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

La $n-$pla con tutte le componenti uguali a 0 si dice $n-$pla nulla e si indica con $\underline{0}$:

$(\underline{0})_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Prendendo gli opposti delle componenti di $n-$pla a, si ha la $n-$pla opposta di a, che si indica con $-a$:

$(-a)_i = -a_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Sommando le componenti di una $n-$pla a con le rispettive componenti di una $n-$pla b, si ottiene la $n-$pla somma di a e b, che si indica con $a + b$:

$(a + b)_i = a_i + b_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Moltiplicando un numero r per le componenti di una $n-$pla a si ottiene la $n-$pla prodotto di r per a, che si indica con $r\, a$:

$(r\, a)_i = r\, a_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Le operazioni sui numeri reali soddisfano le proprietà (1), ..., (8); le operazioni sulle $n-$ple sono definite componente per componente come le rispettive operazioni sui numeri reali; così le operazioni sulle $n-$ple soddisfano le proprietà (1), .., (8). Ad esempio, la (5) si prova come segue: per ogni $r \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$,

$r\,(a + b) = r\, a + r\, b$

equivale a

$(r\,(a + b))_i = (r\, a + r\, b)_i$ per ogni i,

equivale a

$r\,(a + b)_i = (r\, a)_i + (r\, b)_i$ per ogni i,

equivale a

$r\,(a_i + b_i) = r\, a_i + r\, b_i$ per ogni i,

vale perchè in $\mathbb{R}$.

L'insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple di numeri reali, con queste operazioni, è lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Ci sono n $n-$ple "unità"

$$e_1, \text{ definita da } (e_1)_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$e_2, \text{ definita da } (e_2)_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$e_n, \text{ definita da } (e_n)_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ogni $n-$pla si scrive in un unico modo come combinazione lineare delle $n-$ple unità,

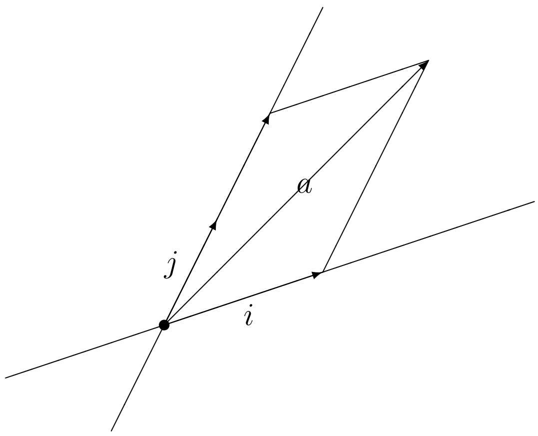
$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$.

1.3 $\mathcal{V}^n$ ed $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2.3)$

1.3.1 $\mathcal{V}^2$ ed $\mathbb{R}^2$.

Sia fissato in $\mathcal{V}^2$ un riferimento i, j. Ogni vettore geometrico si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare di i, j; i due coefficienti della combinazione lineare, nell'ordine, danno una coppia ordinata, che diciamo "la coordinata" del vettore rispetto al riferimento. Associando a ciascun vettore la sua coordinata si ha una funzione

$$\mathcal{V}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad ri + sj \mapsto (r, s)$$



$$a = 1i + 2j \mapsto (1, 2)$$

Questa funzione è una biiezione. In particolare, si ha

$$i \mapsto (1, 0), \quad j \mapsto (0, 1), \quad \underline{0} \mapsto (0, 0).$$

La biiezione è compatibile con le operazioni.

Somma. Per ogni tre vettori e rispettive tre coppie coordinate, la somma di primi due vettori dà il terzo se e solo se la somma delle prime due coppie dà la terza. In simboli:

$$r'i + s'j + r''i + s''j = ri + sj \quad \text{in } \mathcal{V}^2$$

se e solo se

$$(r', s') + (r'', s'') = (r, s) \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Infatti, sia l'uguaglianza in $\mathcal{V}^2$ che quella in $\mathbb{R}^2$ equivalgono al sistema delle due uguaglianze $r' + r'' = r$ e $s' + s'' = s$ in $\mathbb{R}$.

Prodotto per numeri. Per ogni due vettori e rispettive due coppie coordinate, il prodotto di un numero per il primo vettore dà il secondo se e solo se il prodotto del numero per la prima coppia dà la seconda. In simboli:

$$t(r'i + s'j) = ri + sj \quad \text{in } \mathcal{V}^2$$

se e solo se

$$t(r', s') = (r, s) \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Infatti, sia l'uguaglianza in $\mathcal{V}^2$ che quella in $\mathbb{R}^2$ equivalgono al sistema delle due uguaglianze $tr' = r$ e $ts' = s$ in $\mathbb{R}$.

Possiamo quindi sostituire i vettori con le loro coppie coordinate e i calcoli sui vettori con quelli sulle coppie.

Problema. Siano $\mathrm{Rif} : i, j$ e $\mathrm{Rif}' : i', j'$ due riferimenti in $\mathcal{V}^2$, con $i' = 5i + 2j$ e $j' = 2i + 4j$. Se un vettore a ha coordinata $(-1, 2)$ in Rif, allora quale coordinata ha in Rif'?

Indicate con x', y' le coordinate di a in Rif', si ha

$$x'i' + y'j' = a$$

A questa equazione in $\mathcal{V}^2$ corrisponde, tramite il riferimento Rif, l'equazione in $\mathbb{R}^2$

$$x' \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + y' \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

questa equazione corrisponde al sistema

$$\begin{cases} 5x' + 2y' = -1 \\ 2x' + 4y' = \ \ 2 \end{cases}$$

Si lascia al lettore di completare l'esercizio ed effettuare un controllo grafico.

1.4 Spazi vettoriali

1.4.1 Definizione, commenti

Gli spazi vettoriali geometrici e gli spazi vettorialòi numerici sono i primi esempi di "spazio vettoriale", nel senso della

Definizione. Uno "spazio vettoriale" reale è
- un insieme V di elementi qualsiasi detti "vettori" indicati con lettere minuscole $a, b, \ldots$, con un dato elemento detto "vettore nullo" indicato con $\underline{0}$ e per ogni vettore a un vettore "opposto" indicato con $-a$;
- un'operazione "somma", che ad ogni $a, b \in V$ associa un $a + b \in V$;
- un'operazione "prodotto esterno", che ad ogni $r \in \mathbb{R}$ e $a \in V$ associa un $r\, a \in V$;
tali che valgano le proprietà evidenziate per gli spazi vettoriali geometrici, cioè:

proprietà dell'operazione somma:

$$\begin{array}{rll}
(1)\ \text{associativa} & (a+b)+c = a+(b+c) & \\
(2)\ \text{commutativa} & a+b = b+a & \\
(3)\ \text{del vettor nullo} & a+\underline{0} = a = \underline{0}+a & \\
(4)\ \text{degli opposti} & a+(-a) = \underline{0} = (-a)+a & \qquad\qquad (a,b,c \in V)
\end{array}$$

proprietà di legame fra le operazioni

$$\begin{array}{rll}
(5)\ \text{semidistributiva} & r\,(a+b) = r\,a + r\,b & \\
(6)\ \text{semidistributiva} & (r+s)\,a = r\,a + s\,a & \\
(7)\ \text{semiassociativa} & r\,(s\,a) = (rs)\,a & \\
(8)\ \text{del numero 1} & 1\,a = a & \qquad\qquad (a,b \in V,\ r,s,1 \in \mathbb{R}).
\end{array}$$

Commenti.

(1) Uno spazio vettoriale non è mai vuoto, deve contenere almeno un elemento, il vettore nullo. Un insieme con un unico elemento si può dotare, in un unico modo, della struttura di spazio vettoriale. Infatti: l'unico elemento deve essere il vettore nullo $\underline{0}$ e questo elemento deve avere un opposto, che deve essere lo stesso elemento, $-\underline{0} = \underline{0}$; deve essere $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ e per ogni $r \in \mathbb{R}$ deve essere $r\underline{0} = \underline{0}$. Si verifica facilmente che l'insieme $\{\underline{0}\}$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale (in una qualsiasi delle uguaglianze (1), ..., (8) il 1° e il 2° membro risultano uguali a $\underline{0}$). Questo spazio

vettoriale, essenzialmente unico, si dice "spazio vettoriale nullo". Geometricamente, può essere pensato come un punto, può essere indicato con $\mathcal{V}^0$ oppure con $\mathbb{R}^0$.

(2) Sia negli spazi vettoriali geometrici che in quelli numerici, il vettore nullo è l'unico a soddisfare la (3). Questa unicità non compare fra le proprietà (1), ..., (8), ma si può dedurre da esse. Infatti, indicati con $\underline{0}'$ e $\underline{0}''$ due vettori che soddisfano la (3), si deve avere $\underline{0}' = \underline{0}' + \underline{0}'' = \underline{0}''$. Analogamente, ma un po' meno facilmente, si prova che l'opposto di un elemento a è l'unico a soddisfare la (4).

(3') Equazioni. Dalle (1), ..., (4) segue che in uno spazio vettoriale le equazioni nell'operazione di somma si risolvono come nei numeri reali:

> per ogni $a, b \in V$ l'equazione $x + a = b$ ha un'unica soluzione, $b + (-a)$, si scrive in breve $b - a$ e si dice "differenza" b meno a.

(3") Equazioni. Dalle (7), (8) segue che in uno spazio vettoriale

> per ogni $r \neq 0$ in $\mathbb{R}$ e $b \in V$, l'equazione $rx = b$ ha un'unica soluzione, $\frac{1}{r}b$.

Non è però vero che per ogni $a \neq \underline{0}$ e $b \in V$ l'equazione $xa = b$ nell'incognita numerica x abbia soluzione. Ad esempio, l'equazione non ha alcuna soluzione se $V = \mathcal{V}^2$ e a, b sono non nulli con direzioni diverse oppure se $V = \mathbb{R}^2$ e $a = (1, 0)$ e $b = (0, 1)$.

(4) Legge di annullamento del prodotto. Dalle (1), ..., (8) si può dedurre che

> per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $a \in V$, $ra = \underline{0}$ se e solo se $r = 0$ oppure $a = \underline{0}$.

1.4.2 Combinazioni lineari

Abbiamo già considerato le combinazioni lineari di uno, due, tre vettori geometrici e ne abbiamo visto il significato geometrico in termini di rette, piani, spazio. Diamo ora la definizione generale. Data una sequenza di vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ di uno spazio vettoriale V e una sequenza di numeri $r_1, r_2, \ldots, r_m$, sommando i prodotti dei vettori per i rispettivi numeri si ottiene un vettore di V

$$r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ma_m$$

che si dice "combinazione lineare" dei vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Come casi particolari, si hanno i singoli vettori (un coefficiente 1 e gli altri 0) e il vettore nullo (tutti i coefficienti 0).

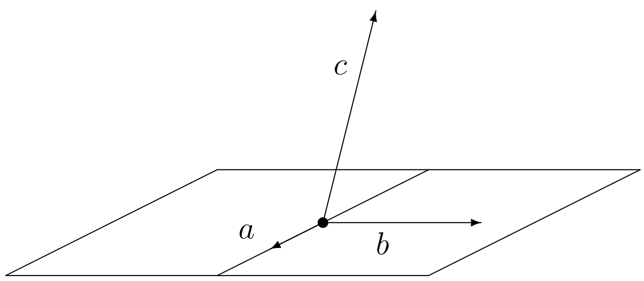
Fatto. Ogni espressione ottenuta con le operazioni di somma di vettori e prodotto di numeri per vettori a partire da vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ si può semplificare in una combinazione lineare di $a_1, a_2, \ldots, a_m$; la semplificazione si può effettuare come nell'usuale calcolo letterale.

2 Indipenenza Lineare, Basi, Dimensione

2.1 Indipendenza Lineare

2.1.1 Indipendenza lineare, I

In uno spazio vettoriale geometrico, identificati i vettori con i segmenti orientati uscenti da un punto fissato, diciamo che: (1) un vettore è indipendente se non è ridotto al punto; (2) una coppia di vettori è indipendente se il 1° non è il punto e il 2° non sta sulla retta del 1°; (3) una terna di vettori è indipendente se il 1° non è il punto, il 2° non sta sulla retta del 1°, il 3° non sta sul piano del 1° e 2°. Ciascuna delle condizioni coinvolte si può esprimere nell'algebra degli spazi vettoriali: (1) a non ridotto al punto equivale a $a \neq \underline{0}$; (2) b non sta sulla retta di a equivale a b non è multiplo reale di a; (3) c non sta sul piano di a, b equivale a c non è combinazione lineare di a, b.



Def. In uno spazio vettoriale, una sequenza di vettori si dice "linearmente indipendente" se

il 1° vettore non è $\underline{0}$;
ogni altro vettore non è combinazione lineare dei precedenti;

in altri termini: una sequenza $a_1, a_2, \ldots, a_m$ si dice linearmente indipendente se

$a_1 \neq \underline{0}$;
ogni a_i $(i > 1)$ non è combinazione lineare di $a_1, ..., a_{i-1}$.

Spesso, al posto di "la sequenza dei vettori è linearmente indipendente" si dice in breve che "i vettori sono linearmente indipendenti".

Esempi. In $\mathbb{R}^3$, gli esempi più semplici di sequenze linearmente indipendenti sono

- un vettore unità, ad esempio $(1, 0, 0)$;

- due vettori unità, ad esempio $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$

- i tre vettori unità: $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

(motivazione: chiaro che $(1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$ e che $(0, 1, 0)$ non è combinazione lineare di $(1, 0, 0)$; proviamo, nel modo più grezzo, che $(0, 0, 1)$ non è combinazione lineare di $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$; altrimenti, esisterebbero $r, s \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned}(0, 0, 1) &= r(1, 0, 0) + s(0, 1, 0)\\ &= (r, s, 0)\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{cases} 0 = r \\ 0 = s \\ 1 = 0 \end{cases},$$

impossibile)

Domanda. In $\mathbb{R}^3$ ci sono 4 vettori linearmente indipendenti?

Di certo, se alla sequenza dei 3 vettori unità si aggiunge un qualsiasi vettore si ottiene una sequenza di 4 vettori non linearmente indipendente; infatti, ogni (r, s, t) in $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei 3 vettori unità:

$$(r, s, t) = r(1, 0, 0) + s(0, 1, 0) + t(0, 0, 1).$$

La domanda rimane comunque aperta. Risponderemo più avanti.

Osservazione. Se una sequenza è linearmente indipendente, allora tutte le sottosequenza iniziali sono linearmente indipendenti; in simboli: se $a_1, a_2, \dots, , a_m$ è linearmente indipendente, allora anche le sequenze

$a_1;$

$a_1, a_2;$

$\vdots$

$a_1, a_2, \dots, a_{m-1}.$

sono linearmente indipendenti.

Domanda. E le altre sottosequenze?
Osserviamo che ciascuna sottoseqeunza costituita da un singolo vettore a_p è linearmente indipendente. Altrimenti si avrebbe $a_p = \underline{0}$; per $p = 1$ si avrebbe una contraddizione diretta con l'indipendenza della sequenza; per $p > 1$ si avrebbe $a_p = 0a_1 + \cdots + 0a_{p-1}$ ancora in contraddizione con l'indipendenza della sequenza.
Risponderemo alla domanda più avanti.

Esempio. Sia n un intero positivo fissato. In $\mathbb{R}^n$, la sequenza dei vettori unità $e_1, e_2, \dots, e_n$ è linearmente indipendente (dunque anche le sue sottosequenze iniziali lo sono).

Infatti:

$e_1 \neq \underline{0}$, chiaro;
e_i (con $i > 1$) non è combinazione lineare di $e_1, ..., e_{i-1}$; altrimenti, esisterebbero $r_1, \dots, r_{i-1}$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$e_i = r_1 e_1 + \cdots + r_{i-1} e_{i-1}$$

in particolare, nella $i-$ma componente si avrebbe

$$1 = r_1 0 + \cdots + r_{i-1} 0 = 0,$$

impossibile.

Definizione Una sequenza di vettori che non è linearmente indipendente, cioè tale che

il 1° vettore è $\underline{0}$, oppure
c'è un vettore che è combinazione lineare dei precedenti

si dice “linearmente dipendente”.

Fare esempi di sequenze linearmente dipendenti è facile. Basta prendere il 1° vettore nullo e gli altri vettori qualsiasi, oppure il 1° vettore non nullo, il 2° multiplo del 1° e gli altri qualsiasi, oppure ...

2.1.2 Riconoscimento

Problema. Stabilire se una data sequenza di vettori in uno spazio vettoriale numerico è linearmente indipendente o dipendente.

Esempio 1-1. Consideriamo la sequenza dei 3 vettori a, b, c di $\mathbb{R}^4$

a	b	c
1	1	1
1	2	3
1	4	9
1	8	27

Vediamo cosa si può dire facilmente con ciò che sappiamo (poco più della definizione).

E' chiaro che $a \neq \underline{0}$.
E' pure chiaro che b non è multiplo di a (non c'è alcun $r \in \mathbb{R}$ tale che $b = ra$).
Non è immediatamente chiaro se c è o meno combinazione lineare di a, b; per vederlo, dovremmo verificare se esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che $c = ra + sb$; questa equazione in $\mathbb{R}^4$ equivale al sistema di 4 equazioni

$$\begin{cases} 1 = r + \ \ s \\ 3 = r + 2s \\ 9 = r + 4s \\ 27 = r + 8s \end{cases}$$

non lo facciamo. Riprenderemo l'esempio con altri strumenti un poco più avanti.

Un modo per riconoscere se un complesso di dati ha o meno una certa proprietà è applicare ai dati delle operazioni che lasciano invariata la proprietà e che possono semplificare i dati.

Def. Una “operazione elementare” su una sequenza di più di un vettore è sommare ad un vettore (non il 1°) un multiplo del 1° vettore. In simboli: un'operazione elementare su una sequenza di vettori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (con $m > 1$) è un'operazione del tipo “rimpiazzare a_i con $a_i + ra_1$”, per un certo indice $i > 1$ ed un certo $r \in \mathbb{R}$. In termini un po' informatici: si hanno m variabili vettoriali $a_1, a_2, \ldots, a_m$ e si dà un comando del tipo

$$a_i := a_i + ra_1,$$

che trasforma la variabile $i-$ma, così il nuovo valore della i° variabile diviene il vecchio valore della i° variabile più r per il valore della 1° variabile.

Osservazione. Se, per un certo indice $i > 1$ ed un certo numero r, si esegue su una sequenza di vettori l'operazione “sommare allo i° vettore r per il 1° vettore” e poi, sulla nuova sequenza, l'operazione "sommare allo i° vettore $(-r)$ per il 1° vettore" allora si ottiene la sequenza di partenza. In breve: ogni operazione elementare è "invertibile".

Fatto 1. Ciascuna operazione elementare conserva l'indipendenza lineare, specificamente: una sequenza di vettori è linearmente indipendente se e solo se la sequenza ottenuta con l'operazione è linearmente indipendente.

Questa affermazione si può provare facilmente per sequenze di due vettori. La proveremo in tutta generalità più avanti.

Esempio 1-2. Consideriamo di nuovo i vettori

a	b	c
1	1	1
1	2	3
1	4	9
1	8	27

Annulliamo la 1° componente di b e quella di c, usando le operazioni

$$b := b - a, \quad c := c - a;$$

ottieniamo

a	b	c
1	0	0
1	1	2
1	3	8
1	7	26

Osserviamo che

$a \neq \underline{0}$;
b non è multiplo di a;
c è combinazione lineare di a, b? esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che $c = ra + sb$? guardiamo la 1° componente, dovrebbe essere: $0 = r1 + s0$, quindi dovrebbe essere $r = 0$; la domanda diviene: esiste un $s \in \mathbb{R}$ tale che $c = sb$? No.

La sequenza a, b, c ottenuta è linearmente indipendente, dunque anche la sequenza a, b, c data è linearmente indipendente.

Fatto 2. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vettori in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ tali che in una certa componente, diciamo la h°, si abbia

$$(a_1)_h \neq 0; \quad (a_i)_h = 0 \quad \text{per ogni } i > 1.$$

Allora $a_1, a_2, \ldots, a_m$ è linearmente indipendente se e solo se $a_2, \ldots, a_m$ è linearmente indipendente.

Motiveremo questa affermazione più avanti.

I due fatti evidenziati permettono di fondare la

Procedura
Input: sequenza di m vett. in un $\mathbb{R}^n$;
Output:"lin. indip." o "lin. dip."

Descrizione:
se 1° vett $= \underline{0}$, allora scrivi "lin. dip." e termina;
se 1° vett $\neq \underline{0}$ e $m = 1$, allora scrivi "lin indip" e termina;
se 1° vett $\neq \underline{0}$ e $m > 1$, allora
- in 1° vett. scegli una componente che sia $\neq 0$;
- con opportune operazioni elementari, annulla la componente negli altri vettori;
- cancella 1° vett.

Ripeti.

Esempio 2. Illustriamo la procedura, così come sarebbe eseguita da una macchina, per

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$a \neq \underline{0}$; scelgo la 1° componente, la annullo in $b, \ldots, e$, con le operazioni

$$b := b - a, \quad c := c - a, \quad e := e - a,$$

cancello a; ottengo

$$\begin{array}{cccc} b & c & d & e \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

$b \neq \underline{0}$; scelgo la 3° componente e la annullo in c, d, e, con l'operazione

$$d := d + b,$$

cancello b; ottengo

$$\begin{array}{ccc} c & d & e \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array};$$

$c \neq \underline{0}$; scelgo la 2° componente e la annullo in d, e, con l'operazione

$$d := d + c,$$

cancello c; ottengo

$$\begin{array}{cc} d & e \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{array};$$

$d \neq \underline{0}$; devo scegliere la 4° componente, la annullo in e con l'operazione

$$e := e - \tfrac{1}{3}d,$$

cancello d; ottengo

e
0
0 ;
0
0

$e = \underline{0}$; la sequenza a, b, c, d, e è lin. dip.

Abbiamo trovato che la sequenza dei 5 vettori a, b, c, d, e di $\mathbb{R}^4$ è linearmente dipendente. Non è un caso.

Teorema. Ogni sequenza di $m > n$ vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente dipendente.

Dimostrazione. Siano $a_1, \ldots, a_{n+1}, \ldots$ vettori in $\mathbb{R}^n$. Li consideriamo come colonne di una matrice e li rappresentiamo con una tabella

a_1	$\ldots$	a_n	a_{n+1}	$\ldots$
$*$	$\ldots$	$*$	$*$	$\ldots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$*$	$\ldots$	$*$	$*$	$\ldots$

Applichiamo la procedura.
Se $a_1 = \underline{0}$, allora i vett. sono lin dip.; altrimenti, a_1 ha una componente $\neq 0$, supponiamo per semplicità la 1°, con operazioni elementari la annulliamo negli altri vettori.
Se $a_2 = \underline{0}$, allora i vett. sono lin dip.; altrimenti, a_2 ha una componente $\neq 0$, supponiamo per semplicità la 2°, con operazioni elementari la annulliamo negli altri vettori.
$\ldots$
Se $a_n = \underline{0}$, allora i vett. sono lin dip.; altrimenti, a_n ha una componente $\neq 0$, che deve essere la n°, con operazioni elementari la annulliamo negli altri vettori.
A questo punto si ha una sequenza del tipo

a_1	$\ldots$	a_n	a_{n+1}	$\ldots$
$\blacklozenge$	$\ldots$	0	0	$\ldots$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$*$	$\ldots$	$\blacklozenge$	0	$\ldots$

con $a_{n+1} = \cdots = \underline{0}$. Concludiamo che i vettori iniziali $a_1, \ldots, a_{n+1}, \ldots$ sono linearmente dipendenti.

2.1.3 Indipendenza lineare, II

Sia $a_1, \ldots, a_m$ una sequenza di vettori di uno spazio vettoriale V. Assegnando a ciascun vettore il coefficiente 0, si ottiene una combinazione lineare $0a_1 + \cdots + 0a_m = \underline{0}$; l'equazione

$$(*) \qquad r_1 a_1 + \cdots + r_m a_m = \underline{0}$$

nelle incognite $r_1, \ldots, r_m$ su $\mathbb{R}$ ha la soluzione ovvia $0, \ldots, 0$ (tutte le incongnite $r_i = 0$), ma potrebbe avere anche altre soluzioni.

Ogni soluzione non ovvia dell'equazione $(*)$ dà una relazione fra i vettori. Precisamente, supponiamo che $(*)$ abbia una soluzione non ovvia $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_m$ e indichiamo con i il massimo indice tale che $\overline{r}_i \neq 0$; se $i > 1$, da $\overline{r}_1 a_1 + \cdots + \overline{r}_i a_i = \underline{0}$ e $\overline{r}_i \neq 0$ si ricava

$$a_i = -\frac{\overline{r}_1}{\overline{r}_i} a_1 - \cdots - \frac{\overline{r}_{i-1}}{\overline{r}_i} a_{i-1},$$

cioè a_i è combinazione lineare dei precedenti. Se $i = 1$, da $\overline{r}_1 a_1 = \underline{0}$ e $\overline{r}_1 \neq 0$ si ricava $a_1 = \underline{0}$. Abbiamo così visto che

se l'equazione $(*)$ *ha una soluzione diversa da quella ovvia, allora*

la sequenza è linearmente dipendente.

Viceversa, ogni relazione fra i vettori dà una soluzione non ovvia dell'equazione $(*)$. Precisamente, se per un certo indice $i > 1$ esistono dei numeri $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_{i-1}$ tali che $a_i = \overline{r}_1 a_1 + \cdots + \overline{r}_{i-1} a_{i-1}$, allora

$$\overline{r}_1 a_1 + \cdots + \overline{r}_{i-1} a_{i-1} - a_i = \underline{0}$$

e l'equazione $(*)$ ha la soluzione non ovvia $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_{i-1}, -1, 0, \ldots 0$. Inoltre, se $a_1 = \underline{0}$, allora l'equazione $(*)$ ha la soluzione non ovvia $1, 0, \ldots, 0$. Abbiamo così visto che

se la sequenza è linearmente dipendente, allora

l'equazione $(*)$ *ha una soluzione diversa da quella ovvia.*

Queste considerazioni provano che la seguente definizione di dipendenza lineare è equivalente a quella che abbiamo dato in precedenza:

Def. Una sequenza di vettori si dice linearmente dipendente se ha una combinazione lineare uguale al vettore nullo non ovvia. In simboli: $a_1, \ldots, a_m$ si dice linearmente dipendente se esistono $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_m$ in $\mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\overline{r}_1 a_1 + \cdots + \overline{r}_m a_m = \underline{0}.$$

Per la stessa ragione, la seguente definizione di indipendenza lineare è equivalente a quella che abbiamo dato in precedenza:

Def. Una sequenza di vettori si dice linearmente indipendente se ha un'unica combinazione lineare uguale al vettore nullo, quella ovvia. In simboli: $a_1, \ldots, a_m$ si dice linearmente indipendente se l'equazione

$$r_1 a_1 + \cdots + r_m a_m = \underline{0}$$

nelle incognite $r_1, \ldots, r_m$ su $\mathbb{R}$ ha l'unica soluzione $0, \ldots, 0$.

Esempio. L'esempio più semplice di sequenza di vettori numerici linearmente indipendente è dato dalla seqeunza dei vettori unità di $\mathbb{R}^n$. Lo abbiamo già provato, usando la prima definizione; lo proviamo ancora, usando la seconda. Consideriamo l'equazione

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = \underline{0}$$

nelle incognite reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Valutando l'uguaglianza sulla 1°, 2°, ..., n° componente si ha il sistema di uguaglianze

$$\begin{cases} x_1 1 + x_2 0 + \cdots + x_n 0 = 0 \\ x_1 0 + x_2 1 + \cdots + x_n 0 = 0 \\ \vdots \\ x_1 0 + x_2 0 + \cdots + x_n 1 = 0 \end{cases},$$

quindi l'unica soluzione di $(*)$ è $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Una conseguenza della nuova definizione:

Fatto. La proprietà di lineare dipendenza/indipendenza di una sequenza di vettori non dipende dall'ordine dei vettori; in altri termini: due sequenze di vettori che differiscono solo per l'ordine sono entrambe linearmente dipendenti oppure entrambe linearmente indipendenti. Non motiviamo questa affermazione in generale, ma solo in un caso particolare, lo scambio dei primi due vettori. Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ linearmente dipendente; esistono $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3, \ldots$ non tutti 0 tali che $\overline{r}_1 a_1 + \overline{r}_2 a_2 + \overline{r}_3 a_3 + \cdots = \underline{0}$; per la proprietà commutativa, $\overline{r}_2 a_2 + \overline{r}_1 a_1 + \overline{r}_3 a_3 + \cdots = \underline{0}$, con $\overline{r}_2, \overline{r}_1, \overline{r}_3, \ldots$ non tutti 0; quindi $a_2, a_1, a_3, \ldots,$ è linearmente dipendente.

Conseguenza. Avevamo osservato che una sequenza linearmente indipendente ha tutte le sottosequenze iniziali linearmente indipendenti; ora possiamo affermare che tutte le sottosequenze (e i loro riordinamenti) sono linearmente indipendenti; in particolare, tutte le sottosequenze della sequenza di vettori unità di $\mathbb{R}^n$ (e i loro riordinamenti) sono linearmente indipendenti.

2.2 Basi, Dimensione

2.2.1 Basi

Abbiamo visto che negli spazi vettoriali geometrici $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3$ si possono dare dei sistemi di riferimento, costituiti da uno, due e tre vettori indipendenti, e che i riferimenti danno delle identificazioni con gli spazi vettoriali numerici $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. In altri termini, in ciascun spazio vettoriale geometrico, un riferimento è dato da una sequenza di vettori linearmente indipendente tale che ogni vettore dello spazio vettoriale sia combinazione lineare della sequenza. Questa descrizione dei riferimenti ha senso in uno spazio vettoriale qualsiasi.

Def. Una sequenza di vettori di uno spazio vettoriale V si dice "base" di V se è linearmente indipendente e ogni vettore di V è sua combinazione lineare. In altri termini: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ è una base di V se è linearmente indipendente e ogni $v \in V$ si può scrivere come

$$v = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_m a_m;$$

la $m-$pla dei coefficienti è univocamente determinata di v, si dice $m-$pla "coordinata" di v rispetto alla base.

Motiviamo l'unicità. Sia

$$v = r_1' a_1 + r_2' a_2 + \cdots + r_m' a_m,$$

$$v = r_1'' a_1 + r_2'' a_2 + \cdots + r_m'' a_m;$$

sottraendo membro a membro, si ha

$$\underline{0} = (r_1'' - r_1')a_1 + (r_2'' - r_2')a_2 + \cdots + (r_m'' - r_m')a_m;$$

per l'indipendenza della sequenza, tutti i coefficienti devono essere nulli, dunque $r_1'' = r_1$, $r_2'' = r_2$, $\ldots$ $r_m'' = r_m$.

Esempio. In ciascuno spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$, si ha una base ovvia, quella dei vettori unità $e_1, e_2, \ldots, e_n$; si dice "base canonica" di $\mathbb{R}^n$. La $n-$pla coordinata di un vettore rispetto alla base canonica è il vettore stesso.

Esempio. Una qualsiasi sequenza linearmente indipendente di n vettori $a_1, \ldots, a_n$ di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$. Infatti, per ogni $v \in V$ la sequenza degli $n+1$ vettori $a_1, \ldots, a_n, v$ è linearmente dipendente, così v deve essere combinazione lineare di $a_1, \ldots, a_n$.

Abbiamo così un modo per costruire basi di $\mathbb{R}^n$. E' naturale chiedersi se in questo modo otteniamo tutte le basi di $\mathbb{R}^n$. Risponderemo più avanti.

Esempio. Per ogni n fissato, le $n-$ple di vettori del tipo

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \hline \blacklozenge & * & \cdots & * \\ 0 & \blacklozenge & & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \blacklozenge \end{array}$$

con $\blacklozenge \neq 0$ e $*$ qualsiasi è linearmente indipendente; quindi è una base di $\mathbb{R}^n$. Il calcolo delle coordinate di un vettore rispetto a questa base è particolarmente semplice.

Esempio. Consideriamo la base a, b, c di $\mathbb{R}^3$ e il vettore v

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} v \\ \hline 7 \\ 6 \\ 2 \end{array}$$

La terna delle coordinate di v rispetto alla base a, b, c è la soluzione dell'equazione

$$xa + yb + zc = v;$$

cioè del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ \qquad y + 4z = 6 \\ \qquad\qquad z = 2 \end{cases}$$

Dalla 3° equazione abbiamo $z = 2$;
sostituendo nella 2° equazione otteniamo $y + 8 = 6$, da cui $y = -2$;
sostituendo nella 1° otteniamo $x - 4 + 6 = 7$, da cui $x = 5$.

La terna coordinata di v rispetto alla base a, b, c è $(5, -2, 6)$.

2.2.2 Notazione

In un qualsiasi spazio vettoriale, per la proprietà associativa dell'operazione di somma, ha senso scrivere la somma di tre vettori, più in generale di una sequenza di vettori, senza usare parentesi; per abbreviare, si usa il simbolo di sommatoria, definito da

$$a_1 + \cdots + a_m = \sum_1^m a_i.$$

Per la proprietà commutativa della somma, la somma di due sommatorie con lo stesso numero di addendi si può scrivere come un'unica sommatoria:

$$\sum_1^m a_i + \sum_1^m b_i = \sum_1^m (a_i + b_i);$$

per la proprietà (5), il prodotto di un numero per una sommatoria si può scrivere come sommatoria

$$s \sum_1^m a_i = \sum_1^m (sa_i).$$

2.2.3 Dimensione

In $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3$ tutte le basi hanno rispettivamente 1, 2, 3 vettori.
In $\mathbb{R}^n$, non ci sono basi con più di n vettori (più di n vettori sono linearmente dipendenti), ci sono basi con n vettori (la base canonica, n vettori indipendenti), ci sono basi con meno di n vettori?
Cosa si può dire per uno spazio vettoriale qualsiasi?

Una definzione di base, equivalente a quella data:

Def. Una sequenza di vettori di uno spazio vettoriale V è una base di V se ogni vettore di V si scrive in un unico modo come sua combinazione lineare. In altri termini: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ è una base di V se per ogni $v \in V$ si ha

$$v = \sum_{i=1}^m r_i a_i$$

per un'unica $m-$pla dei coefficienti, la "coordinata" di v rispetto alla base.

Associando a ciascun vettore la sua $m-$pla coordinata si ha un'applicazione

$$V \to \mathbb{R}^m, \qquad \sum_{i=1}^m r_i a_i \mapsto (r_i)_1^m$$

che ha le seguenti proprietà:

- è una biiezione, in quanto ogni $m-$pla è la $m-$pla coordinata di uno ed un solo vettore di V;

- è compatibile con le operazioni in V e in $\mathbb{R}^m$:

$$\sum_1^n r'_i a_i + \sum_1^n r''_i a_i = \sum_1^n r_i a_i \quad \text{in V}$$

se e solo se

$$(r'_i)_1^m + (r''_i)_1^m = (r_i)_1^m \quad \text{in } \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$$

(le uguaglianze in V e in $\mathbb{R}^m$ equivalgono al sistema delle m uguaglianze $r'_i + r''_i = r_i$ in $\mathbb{R}$);

$$s\sum_1^n r_i' a_i = \sum_1^n r_i a_i \quad \text{in V}$$

se e solo se

$$s(r_i')_1^m = (r_i)_1^m \quad \text{in } \mathbb{R}^{\mathrm{m}};$$

(le uguaglianze in V e in $\mathbb{R}^m$ equivalgono al sistema delle m uguaglianze $sr_i' = r_i$ in $\mathbb{R}$).

Dunque lo spazio vettoriale V si può identificare con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$. Ogni proprietà di una sequenza di vettori, che abbia senso per un qualsiasi spazio vettoriale, sarà vera per dei vettori in V se e solo se sarà vera per i corrispondenti vettori in $\mathbb{R}^m$.

Th. Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori; questo numero si dice "dimensione" dello spazio vettoriale e si indica con $\dim(V)$.

Dimostrazione. Siano $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_m$ due basi di V. Usando la base $a_1, \ldots, a_n$, abbiamo una identificazione $V \leftrightarrow \mathbb{R}^n$; la sequenza $b_1, \ldots, b_m$ viene identificata con una sequenza $c(b_1), \ldots, c(b_m)$ linearmente indipendente in $\mathbb{R}^n$; dunque deve essere $m \leq n$. Usando la base $b_1, \ldots, b_m$, abbiamo una identificazione $V \leftrightarrow \mathbb{R}^m$; la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ viene identificata con una sequenza $c(a_1), \ldots, c(a_n)$ linearmente indipendente in $\mathbb{R}^m$; dunque deve essere $n \leq m$. In definitiva, $n = m$.

Esempi. Gli spazi vettoriali geometrici $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3$ hanno dimensione rispettivamente 1, 2, 3 (così come doveva essere):

$$\dim(\mathcal{V}^n) = n, \quad n = 1, 2, 3.$$

Per ciascun intero positivo n, lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n,

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Spazio nullo. Consideriamo lo spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$; geometricamente, lo possiamo pensare come un punto e così siamo portati a dire che ha dimensione 0. Da un punto di vista formale, osserviamo che in questo spazio ciascuna sequenza di vettori è linearmente dipendente ... non ci sono sequenze di almeno un vettore linearmentre indipendenti. Siamo così condotti a introdurre una sequenza vuota $\emptyset$, dichiarare che è linearmente indipendente, e che ha un'unica combinazione lineare, $\underline{0}$. Con queste convenzioni, $\{\underline{0}\}$ ha un'unica base, la sequenza vuota $\emptyset$, che ha 0 vettori, cosi $\dim\{\underline{0}\} = 0$.

Spazio delle successioni. Una successione di numeri reali è data da una 1° componente, una 2° componente, ..., per ogni intero positivo una componente, tutte numeri reali; formalmente, è una funzione che associa a ciascun intero positivo un numero reale; due successioni si dicono uguali se per ogni intero positivo hanno componenti uguali. Indichiamo l'insieme delle successioni di numeri reali con $\mathbb{R}^\infty$. Una successione si indica scrivendo tra parentesi tonde alcune prime componenti, ..., la $n-$ma, ...; ad esempio, associando a ciascun intero il suo reciproco si ha la successione $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. Di regola, indicata una successione con una lettera a, indichiamo l'ennesima componente della successione con a_n e poniamo $a = (a_n)_1^\infty$. La successione $a + b$ somma di due successioni a, b e la successione ra prodotto di un numero r per una successione a sono definite componente per componente, così

$$(a + b)_n = a_n + b_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$(ra)_n = ra_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

L'insieme $\mathbb{R}^\infty$, con queste operazioni, è uno spazio vettoriale; il vettore nullo è la successione costante uguale a 0. I vettori unità sono le successioni che hanno una componente 1 e tutte le altre 0:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

per ogni intero positivo p, il vettore unità e_p è dato da

$$(e_p)_i = \begin{cases} 1, & i = p \\ 0, & i \neq p. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^\infty$ non ha alcuna base. Infatti, se avesse una base, ci sarebbe un massimo numero di vettori linearmente indipendenti; ma questo massimo non esiste, in quanto per ogni intero positivo p, la sequenza $e_1, e_2, \ldots, e_p$ è linearmente indipendente.

Commento. C'è una definizione generale di base come famiglia di vettori (magari infinta non numerabile); rispetto a questa definizione, si prova che ogni spazio vettoriale ha una base. Noi trattaremo solo spazi con basi finite, cioè spazi di dimensione finita.

2.3 Sottospazi. Sistemi lineari

2.3.1 Spazio generato da alcuni vettori

Il piano vettoriale $\mathcal{V}^2$ è contenuto nello spazio vettoriale $\mathcal{V}^3$? In senso stretto, no. $\mathcal{V}^2$ è pensato come entità a sè, non come parte di $\mathcal{V}^3$; possiamo pensare di identificare "il" piano vettoriale $\mathcal{V}^2$ con "un" piano vettoriale contenuto in $\mathcal{V}^3$, e non c'è alcun modo "canonico" di effettuare questa identificazione.

Fissato nello spazio un punto O, rappresentiamo i vettori con i segmenti orientati uscenti da O. Due vettori indipendenti a, b, stanno su un'unico piano per O, tutti i vettori combinazione lineare di a, b stanno su quel piano e ogni vettore che sta su quel piano si scrive come combinazione lineare di a, b. Così, possiamo descrivere i piani vettoriali contenuti in $\mathcal{V}^3$ come gli insiemi delle combinazioni lineari di due vettori indipendenti. Questa costruzione si può estendere ad un numero qualsiasi di vettori contenuti in uno spazio vettoriale qualsiasi.

Def. L'insieme delle combinazioni lineari di una sequenza di vettori si dice "spazio generato" dalla sequenza; indicata la sequenza con $a_1, \ldots, a_m$, si indica lo spazio generato con $\mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_m\}$:

$$\mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_m\} = \{\sum_{i=1}^{m} r_i a_i;\ r_i \in \mathbb{R}\}.$$

Osservazione. Lo spazio generato da una sequenza di vettori non dipende dall'ordine dei vettori; in altri termini, due sequenze di vettori che differiscono solo per l'ordine generano lo stesso spazio.

Prop. Lo spazio generato da una sequenza di vettori di uno spazio vettoriale V, con le operazioni di V, è uno spazio vettoriale.

Infatti, indicata la sequenza dei vettori con $a_1, \ldots, a_m$, si ha:

• la somma di due combinazioni lineari dei vettori è una combinazione lineare dei vettori:

$$\sum_i r'_i a_i + \sum_i r''_i a_i = \sum_i (r'_i + r''_i) a_i;$$

• il prodotto di un numero per una combinazione lineare dei vettori è una combinazione lineare dei vettori:

$$s \sum_i r'_i a_i = \sum_i (s r'_i) a_i$$

• $\sum 0 a_i = \underline{0}$ soddisfa la (3) e per ogni $\sum r_i a_i$ la $\sum (-r_i) a_i$ soddisfa la (4);

• le identità (1), (2), (4), ..., (8) valgono per le combinazioni lineari dei vettori perchè valgono per tutti i vettori di V.

Commento. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}^3$, il punto vettoriale, le rette vettoriali, i piani vettoriali, l'intero spazio vettoriale sono gli spazi generati rispettivamente da nessun, uno, due, tre vettori indipendenti.

Fatto. Se una sequenza di vettori di uno spazio vettoriale è linearmente indipendente, allora è una base dello spazio da essa generato; in altri termini, se $a_1, \ldots, a_m$ è linearmente indipendente, allora è una base di $\mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_m\}$, così $\dim(\mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_m\}) = m$.

Ogni spazio generato da una seqeunza (finita) di vettori ha una base. Un modo per provare questa affermazione e per determinare una base è basato sulla seguente

Prop. Se un vettore di una sequenza è combinazione lineare degli altri, allora la sequenza con il vettore e la sequenza senza il vettore generano lo stesso spazio: se in $a, \ldots, c, d$ il vettore d è combinazione lineare degli altri, allora

$$\mathrm{Span}\{a, \ldots, c, d\} = \mathrm{Span}\{a, \ldots, c\}$$

Infatti, posto $d = ra + \cdots + tc$, si ha:

da una parte, ogni combinazione lineare di $a, \ldots, c$ è anche una combinazione lineare di $a, \ldots, c, d$ (stessi coefficienti, più coefficiente 0 per d);

dall'altra parte, ogni combinazione lineare di $a, \ldots, c, d$ è anche una combinazione lineare di $a, \ldots, c$:

$$\begin{aligned} & \alpha a + \cdots + \gamma c + \delta d \\ = & \alpha a + \cdots + \gamma c + \delta(ra + \cdots + tc) \\ = & (\alpha + \delta r) a + \cdots + (\gamma + \delta t) c. \end{aligned}$$

Esempio. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori

a	b	c
1	0	2
0	1	3
2	1	7
1	2	8

Si ha $c = 2a + 3b$, quindi $\mathrm{Span}\{a, b, c\} = \mathrm{Span}\{a, b\}$; inoltre, a, b è linearmente indipendente; quindi a, b è una base di $\mathrm{Span}\{a, b, c\}$.

La base da un'identificazione $\mathrm{Span}\{a, b, c\} \to \mathbb{R}^2$; ad esempio, a, b, c vengono identificati rispettivamente con $(1, 0), (0, 1), (2, 3)$ e $a + 3c$ con $(1, 0) + 3(2, 3) = (7, 9)$.

$\dim(\mathrm{Span}\{a, b, c\}) = 2$; essendo ogni coppia di vettori presi fra a, b, c linearmente indipendente, non solo a, b ma anche a, c e b, c sono basi di questo spazio.

C'è un altro modo di determinare una base di uno spazio generato. E' basato sulla

Prop. Ogni operazione elementare su una sequenza di vettori lascia invariato lo spazio generato.

Dimostrazione. Per l'invertibilità delle operazioni elementari, basta provare che ogni operazione elementare manda lo spazio generato in sè. Possiamo ordinare i vettori in una seqeunza $a, b, c, \ldots$ in modo che l'operazione elementare sia sostituire b con $b + ra$. E' chiaro che ogni combinazione lineare di $a, b + ra, c, \ldots$ si può riscrivere come combinazione lineare di $a, b, c, \ldots$, quindi $\mathrm{Span}\{a, b, c, \ldots\} \supseteq \mathrm{Span}\{a, b + ra, c, \ldots\}$.

Esempio. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori

d	e	f	g
1	0	2	1
0	1	1	2
2	3	7	8

Applichiamo le operazioni elementari

$$f' = f - 2d; \quad g' = g - d;$$

otteniamo

d	e	f'	g'
1	0	0	0
0	1	1	2
2	3	3	6

Si ha $\mathrm{Span}\{d, e, f, g\} = \mathrm{Span}\{d, e, f', g'\} = \mathrm{Span}\{d, e\}$; inoltre, d, e è linearmente indipendente. Quindi d, e è una base di $\mathrm{Span}\{d, e, f, g\}$.