Tecniche di analisi degli algoritmi

Moreno Marzolla, Lorenzo Donatiello

Dipartimento di Infromatica, Università di Bologna

12 novembre 2014

Verificare equazioni di ricorrenza
esercizi

Risolvere le seguenti equazioni di ricorrenza:

$T(n) = 3T(n/5) + (\ln n)^2$
$T(n) = 2T(n/3) + n(\ln n)$
$T(n) = T(n/5) + (\ln n)^2$
$T(n) = 8T(n/2) + n^3$
$T(n) = 7T(n/5) + n^3$
$T(n) = T(n/2) + T(\sqrt{n}) + n$
$T(n) = T(n/3) + T(n/6) + n^{(\sqrt{(\ln n)}}$

Teorema fondamentale della ricorrenza
Master Theorem

Teorema

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \textit{se } n > 1 \\ 1 & \textit{se } n = 1 \end{cases} \tag{3}$$

ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ *se* $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ *per* $\epsilon > 0$;
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$ *se* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} log^k n)$ *con* $k \geq 0$;
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ *se* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ *per* $\epsilon > 0$ *e* $af(n/b) \leq cf(n)$ *per* $c < 1$ *e* n *sufficientemente grande.*

Teorema delle ricorrenze lineari con partizioni bilanciate

Teorema

Siano: $a \geq 1$ e $b \geq 2$ interi; c, d e β costanti reali tale che: $c > 0$, $d \geq 0$ e $\beta > 0$:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + c(n^\beta) & se\ n > 1 \\ d & se\ n = 1 \end{cases} \tag{5}$$

posto: $a = loga/logb$

1. $T(n) = O(n^\alpha)$ *se* $\alpha > \beta$;
2. $T(n) = O(n^\alpha \log n)$ *se* $\alpha = \beta$;
3. $T(n) = O(n^\beta)$ *se* $\alpha < \beta$.

Teorema

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & se\ n > 1 \\ 1 & se\ n = 1 \end{cases} \tag{3}$$

ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ *se* $f(n) = O(n^{\log_b a-\epsilon})$ *per* $\epsilon > 0$;
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$ *se* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} log^k n)$ *con* $k \geq 0$;
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ *se* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ *per* $\epsilon > 0$ *e* $af(n/b) \leq cf(n)$ *per* $c < 1$ *e* n *sufficientemente grande.*