PROVA SCRITTA D'ESAME DEL 18 DICEMBRE 2023
TIPO A

Primo appello modulo di Analisi Matematica, a.a. 23/24

Avete a disposizione 3 ore per lo svolgimento dell'esame.
Non sono concesse calcolatrici, cellulari, né alcun apparecchio elettronico. Sono permessi gli appunti.
Gli esercizi vanno risolti giustificando i passaggi con le proprietà e i teoremi appresi durante il corso.

Esercizio 1 (5 punti)**.** Calcolare (se esiste) il limite della seguente funzione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{16x^4+x^2}}$$

Esercizio 2 (6 punti)**.** Calcolare (se esiste) il limite qui indicato

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(1-\cos(x))}-\cos(x)}{\sin(x)\cdot\ln(1+2x)}$$

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor al quarto ordine per $x \to 0$ di alcune tra le funzioni più utilizzate

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

Per ogni funzione che non appare in questa lista è necessario giustificare come avete ottenuto il suo sviluppo di Taylor

Esercizio 3 (7 punti)**.** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2-2x+1}.$$

È possibile aiutarsi con un disegno approssimativo del grafico della funzione. Indicare,

- il dominio massimale
- gli intervalli di crescenza e decrescenza
- i punti stazionari dicendo in più se si tratta di massimi o minimi locali
- l'esistenza o meno di asintoti verticali
- calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^x \mathrm{d}x.$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Calcolare (se esiste) il valore del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} \mathrm{d}x$$