NOTE DEL CORSO DI ANALISI 1, INFORMATICA PER IL MANAGEMENT, A.A. 2023/24

MATTIA GALEOTTI

Indice

Email docente, galeotti.mattia.work@gmail.com. Tutor del corso è Enrico Masina, enrico.masina3@unibo.it. Utilizzeremo come riferimento la pagina su *Virtuale* relativa a questo corso, `https://virtuale.unibo.it/course/view.php?id=51633`, e il sito del docente `https://www.dm.unibo.it/~mattia.galeotti4/`

1. Teoria degli insiemi e logica di base

1.1. **Concetti primitivi della teoria degli insiemi.** La teoria degli insiemi funziona a partire da due oggetti fondamentali, gli **insiemi** per i quali utilizzeremo la notazione di lettere maiuscole $X, Y, A, B, C, \dots$ e gli **elementi** per i quali utilizzeremo la notazione di lettere minuscole $x, y, a, b, c, \dots$ In più, esiste una relazione fondamentale denominata **appartenenza** e indicata con il simbolo $\in$.

Questi concetti sono detti primitivi, non vengono definiti formalmente perché sono gli oggetti fondamentali, i "mattoni elementari" su cui si costruisce tutto il resto. Dobbiamo però indicare il "funzionamento" della relazione di appartenenza, che lega sempre un elemento a un insieme.

$$x \in X$$

significa che l'elemento x appartiene all'insieme X.

$$x \notin X$$

significa che l'elemento x non appartiene a X.

$$X \ni x$$

è un'altra notazione che indica sempre l'appartenenza di x a X.

Esempio 1.1. Gli insiemi non sono soltanto insiemi numerici,

$$STAGIONI = \{\text{autunno, inverno, primavera, estate}\}$$

$$(\text{Mattia Galeotti}) \in \{\text{docenti di UNIBO}\}$$

$$(\text{Grifone}) \notin \{\text{segni dello zodiaco}\}$$

1.2. **Notazioni insiemistiche.** Per descrivere un insieme si utilizzano due tipologie di notazione.

(1) Notazione per **tabulazione**, dove vengono elencati come in una lista tutti gli elementi dell'insieme
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
(2) Notazione per **proprietà**, dove gli elementi dell'insieme vengono indicati tramite una proprietà che li caratterizza, prendiamo lo stesso insieme del caso precedente
$$A = \{n \text{ numero naturale tale che } 0 < n < 5\}$$

Quando sarà chiaro dal contesto il significato, potremo completare la notazione per tabulazione con dei puntini ...

Esempio 1.2. La notazione tabulare può essere incompleta, perché l'insieme è infinito. Invece la notazione tramite una proprietà è per definizione sempre completa.

$$\{0, 4, 8, 12, \dots\} = \{\text{multipli di } 4\}$$

Esempio 1.3. L'insieme dei numeri naturali è

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

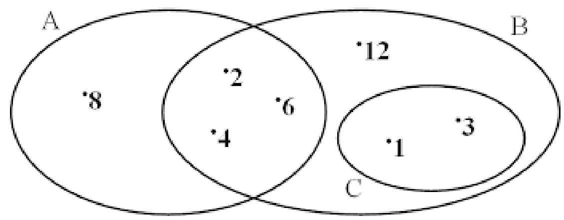


FIGURA 1. Rappresentazione con diagrammi di Venn di tre insiemi $A = \{2,4,6,8\},\ B = \{1,2,3,4,6,12\},\ C = \{1,3\}$.

La notazione con i **Diagrammi di Venn** permette invece di visualizzare graficamente il contenuto di un insieme

NOTA BENE. Quando si considera un insieme, in particolare la sua rappresentazione per tabulazione, l'ordine degli elementi non conta, e ogni elemento viene considerato esattamente una volta non di più.

Esempio 1.4. {Lettere della parola "barbara"} = {b,a,r} = {a,b,r}

1.3. **Inclusione.**

Definizione 1.3.1. Un insieme X si dice **incluso** in un altro insieme Y, e si scrive $X \subset Y$, se ogni elemento di X appartiene anche a Y. Equivalente, si può dire che

$$\boxed{\text{Per ogni } x \in X \text{ si ha che } x \in Y}.$$

L'insieme X è in questo caso un **sottoinsieme** di Y.

Definizione 1.3.2. L'inclusione tra due insiemi si dice **stretta**, e si indica con $X \subsetneq Y$, se sappiamo che esiste un elemento di Y che non appartiene a X. Equivalentemente, se $X \subset Y$ e in più

$$\boxed{\text{Esiste } y \in Y \text{ tale che } y \notin X}.$$

L'insieme X si dice in questo caso sottoinsieme stretto o **proprio** di Y.

NOTA BENE. Talvolta l'inclusione è indicata con la notazione $\subseteq$ per rimarcare la possibilità che i due insiemi siano uguali, cioè coincidenti. Noi continueremo a indicare l'inclusione (che prevede anche la possibilità che i due insiemi siano uguali) col simbolo $\subset$.

Esempio 1.5. Poiché "b", "a", "r" sono tutte lettere della parola "barbie", abbiamo un'inclusione

$$\{\text{lettere di “barbara”}\} \subset \{\text{lettere di “barbie”}\}.$$

In più, poiché esiste almeno una lettera di "barbie" che non è una lettera di "barbara" (ad esempio la "e"), allora l'inclusione è stretta

$$\{\text{lettere di “barbara”}\} \subsetneq \{\text{lettere di “barbie”}\}.$$

Teorema 1.3.3. *Due insiemi X, Y tali che $X \subset Y$ e $Y \subset X$, sono coincidenti, cioè sono lo stesso insieme, cioè hanno esattamente gli stessi elementi. Infatti ogni elemento che appartiene a X deve appartenere anche a Y e viceversa.*

Per concludere questa sezione vediamo due questioni di notazione. Innanzitutto un insieme costituito da un solo elemento, è detto *singleton*. Mentre l'insieme vuoto si indica con $\varnothing$. Per definizione, l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme, cioè per ogni insieme X, $\varnothing \subset X$.

1.4. **Quantificatori logici.** I **quantificatori logici** sono dei simboli che vengono utilizzati per dire sinteticamente qualcosa che viene detto spesso nelle proposizioni matematiche

(1) Il simbolo $\forall$ significa **"per ogni"** e significa che ogni elemento considerato deve avere la proprietà che segue il simbolo

    Esempio 1.6. La proprietà "per ogni numero pari n, il numero n^2 è pari" si può riscrivere come
    $$\forall n \text{ pari}, \ n^2 \text{ è pari}.$$

(2) Il simbolo $\exists$ significa **"esiste"** e significa che esiste (almeno) un elemento che soddisfa la proprietà che segue il simbolo

    Esempio 1.7. La definizione "un numero naturale n è pari se esiste un numero naturale k tale che $n = 2k$" si può riscrivere come
    $$n \text{ è pari se } \exists k \in \mathbb{N} : \ n = 2k.$$

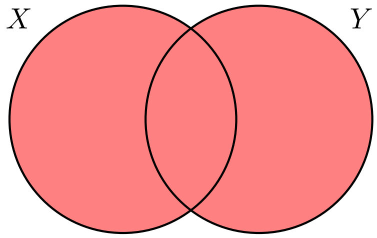
Quindi per provare la veridicità di una proprietà introdotta da $\forall$ è necessario verificare quella proprietà per ogni possibile elemento, come nel caso del primo esempio dove è necessario dimostrare che per ogni possibile numero pari n, n^2 è a sua volta un numero pari.

Invece per provare la veridicità di una proprietà introdotta da $\exists$ è sufficiente verificare quella proprietà in (almeno) un caso. Ad esempio per dimostrare che "$\exists n \in \mathbb{N}$ che è multiplo di 3 e non è multiplo di 2" è sufficiente portare un singolo esempio. Quindi se considero $n = 9$ ho già dimostrato che la frase appena enunciata è vera.

Esempio 1.8. Possiamo riscrivere con i quantificatori le Definizioni 1.3.1 e 1.3.2, nel seguente modo
$$X \subset Y, \text{ se } \forall x \in X, \ x \in Y$$
$$X \subsetneq Y, \text{ se } X \subset Y \ \& \ \exists y \in Y : \ y \notin X$$

1.5. **Operazioni tra insiemi.** Dati due insiemi X e Y abbiamo varie operazioni insiemistiche che danno come risultato un terzo insieme ottenuto a partire dai primi due.

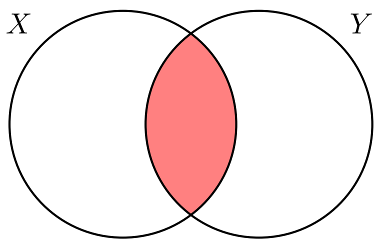
- L'**unione** di X e Y è l'insieme
  $$X \cup Y = \{x : \ x \in X \text{ oppure } x \in Y\}$$
  quindi tutti gli elementi che appartengono almeno a uno dei due insiemi. Tramite i diagrammi di Venn, l'unione è l'insieme costituito da tutta l'area evidenziata in rosso nella figura qui sotto.



- L'**intersezione** di X e Y è l'insieme

$$X \cap Y = \{x : \ x \in X \ \& \ x \in Y\}$$

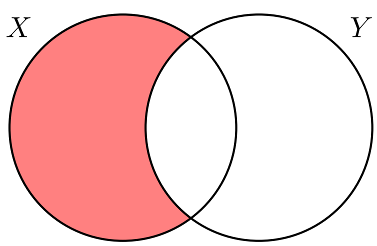
cioè l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia a X che a Y. Che si vede come in figura tramite i diagrammi di Venn



- Le operazioni che abbiamo visto finora sono simmetriche o commutative, cioè cambiando l'ordine dei due insiemi il risultato non cambia. Adesso introduciamo la **differenza** insiemistica che si può indicare con $X \backslash Y$ oppure $X - Y$. In questo caso l'operazione non è simmetrica,

$$X \backslash Y = \{x \in X : \ x \notin Y\}$$

cioè si tratta dell'insieme degli elementi di X che non appartengono a Y. Coi diagrammi di Venn si tratta dell'area evidenziata in rosso nella figura sotto



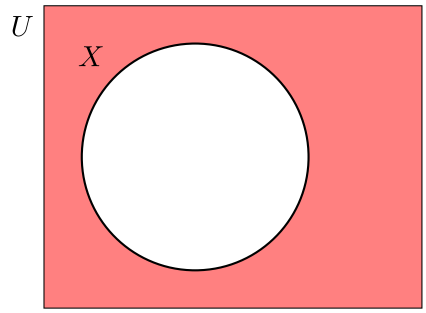
- Infine per parlare dell'ultima operazione insiemistica che introduciamo, osserviamo che ogni volta che lavoriamo con degli insiemi ci troviamo all'interno di un "insieme universo": l'insieme di tutti gli elementi plausibili nella nostra teoria. Ad esempio se consideriamo insiemi di persone come l'insieme degli studenti di Unibo, l'insieme universo potrebbe essere l'insieme di tutte le persone al mondo.

  Quando lavoriamo con insiemi numerici gli insiemi universo sono di solito i numeri naturali o quelli reali, e l'insieme universo utilizzato è quasi sempre chiaro dal contesto.

  Se indichiamo con U l'insieme universo in cui stiamo lavorando, l'insieme **complementare** di X è l'insieme

$$X^c = \{x \notin X\} = U \backslash X,$$

cioè l'insieme di tutti gli elementi (dell'insieme universo) che non appartengono a X. Coi diagrammi di Venn, l'insieme complementare è rappresentato dall'area rossa in figura



Esempio 1.9. Se consideriamo l'insieme M_2 dei numeri pari, l'insieme universo è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, allora il complementare di M_2 è l'insieme

$$M_2^c = \mathbb{N} \backslash M_2 = \{\text{numeri dispari}\}.$$

Esempio 1.10. L'insieme dei numeri reali negativi $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\}$ è un sottoinsieme dell'insieme universo $\mathbb{R}$, il suo complementare sono i numeri maggiori o uguali a 0,

$$(\mathbb{R}^-)^c = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\}^c = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Alcune proprietà che è importante ricordarsi:

- $\varnothing^c = U$, infatti l'insieme degli elementi che non stanno nell'insieme vuoto è semplicemente l'insieme di tutti gli elementi del nostro universo;
- $X \cap X^c = \varnothing$, perché l'intersezione tra l'insieme X e l'insieme degli elementi che non appartengono a X, è per definizione vuoto;
- $X \cup X^c = U$, perché l'unione tra X e l'insieme degli elementi che non appartengono a X è per definizione tutto (l'insieme universo).
- $(X^c)^c = X$, infatti questo significa considerare il complementare di X^c, cioè l'insieme degli elementi che non appartengono a X^c, che per definizione sono quindi gli elementi di X. Vedere anche la rappresentazione sopra coi diagrammi di Venn.

1.6. **Alcuni cenni di logica proposizionale.** Quando studiamo logica proposizionale, una proprietà o proposizione, è una frase di cui è possibile dire se è vera o falsa. Una proprietà può contenere delle variabili che determinano il suo statuto di verità.

Esempio 1.11. La frase "il numero n è pari" è vera o falsa per ogni valore di n appartenente ai numeri naturali, quindi è una proprietà il cui statuto di verità dipende dal preciso valore assunto da n. Ad esempio, se $n = 2$ è vera, se $n = 3$ è falsa.

D'abitudine indicheremo una proprietà con $f, f_1, f_2, \ldots$ oppure $p, q, p_1, p_2, \ldots$. Qui sotto elenchiamo alcune operazioni tra frasi e l'effetto che hanno sullo statuto di verità della proprietà ottenuta tramite l'operazione.

- La **congiunzione** di due proprietà f_1 e f_2 è indicata con

$$f_1 \ \& \ f_2$$

ma al posto di & si possono utilizzare anche la preposizione italiana "e", oppure altre notazioni sono AND o il simbolo logico $\wedge$. La proprietà ottenuta con la congiunzione è vera se e solo se sono vere entrambe le proprietà f_1 e f_2. Qui sotto vediamo la tabella di verità della congiunzione. Sulla prima colonna sono indicati i valori di verità di f_1, sulla seconda quelli di f_2 e sulla terza il valore di verità risultante della proprietà $f_1 \& f_2$.

NOTA BENE. A lezione abbiamo utilizzato una diversa organizzazione della tabella di verità, ma questa ri-organizzazione è più chiara e dunque è stata preferita per le note.

f_1	f_2	$f_1 \& f_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- La **disgiunzione (inclusiva)** di due proprietà f_1 e f_2 è indicata con

$$f_1 \text{ OR } f_2$$

al posto di OR si può utilizzare anche la parola italiana "oppure" o il simbolo logico $\vee$. La proprietà ottenuta con questa disgiunzione è vera quando è vera (almeno) una tra le due proprietà coinvolte. Qui sotto la corrispondente tabella di verità.

f_1	f_2	$f_1 \text{OR} f_2$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- La **negazione** di una proprietà f è indicata con

$$\text{NOT } f$$

al posto di NOT si può utilizzare anche la preposizione italiana "non" oppure il simbolo logico $\neg$. Questa operazione cambia il valore di verità della frase, che se è vera diventa falsa e se è falsa diventa vera, come si può vedere nella tabella di verità

f	$\text{NOT} f$
V	F
F	V

Esempio 1.12. Consideriamo le due frasi

$$f_1 = \text{P è una persona alta più di } 180cm$$
$$f_2 = \text{P è una persona di nazionalità italiana.}$$

Osserviamo che se P è il giocatore di calcio G. Donnarumma allora f_1, f_2 sono entrambe vere. Per il giocatore L. Insigne invece f_1 è falsa mentre f_2 è vera. Per il giocatore L. Messi le frasi sono entrambe false.

Consideriamo la congiunzione

$$f_1 \& f_2.$$

La frase così ottenuta è "P è una persona alta più di $180cm$ e di nazionalità italiana". G. Donnarumma rende questa frase vera, mentre L. Insigne e L. Messi la rendono falsa. Questo si verifica anche con le tabelle di verità indicate più in alto, perché è necessario che entrambe le frasi siano vere per avere che la loro congiunzione è vera.

Nel caso di

$$f_1 \textsc{or} f_2,$$

la frase ottenuta è "P è una persona alta più di $180cm$ oppure è di nazionalità italiana". Ancora una volta G. Donnarumma rende vera la frase, ma in questo caso anche L. Insigne la rende vera perché è sufficiente che (almeno) una delle due frasi sia vera affinché $f_1 \textsc{or} f_2$ sia vera. L. Messi rende la frase ancora falsa perché nel suo caso f_1 e f_2 sono entrambe false.

Infine guardiamo la negazione

$$\textsc{not} f_2,$$

cioè la frase "P non è una persona di nazionalità italiana". Nel caso di G. Donnarumma e L. Insigne la frase $\textsc{not} f_2$ è falsa, mentre nel caso di L. Messi la frase $\textsc{not} f_2$ è vera.

1.7. **Implicazione logica.** L'implicazione logica è una operazione logica che viene usato in modo diverso dalle precedenti, presenteremo la sua tabella di verità e poi discuteremo del suo utilizzo.

Date due proprietà f_1, f_2, l'implicazione si scrive

$$f_1 \Rightarrow f_2,$$

oppure anche "se f_1 allora f_2" e in linguaggio di programmazione "IF f_1 THEN f_2". La tabella di verità di una implicazione è indicata qui sotto

f_1	f_2	$f_1 \Rightarrow f_2$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

NOTA BENE. Osserviamo che se la prima frase f_1 è vera, allora la seconda frase f_2 deve essere vera affinché l'implicazione $f_1 \Rightarrow f_2$ sia anch'essa vera.
Se invece la prima frase (anche detta "ipotesi") è falsa, l'implicazione $f_1 \Rightarrow f_2$ è sempre vera. Cioè, da una premessa falsa si può dedurre qualsiasi cosa e l'implicazione resterà comunque vera. Per comprendere meglio questo fatto consideriamo le frasi $f_1 =$"sto usando l'ombrello" e $f_2 =$"resto asciutto quando piove", la loro implicazione sarà quindi

"se sto usando l'ombrello allora resto asciutto quando piove".

La verità di questa frase non dipende dal fatto che io stia effettivamente usando l'ombrello, anzi l'implicazione è verificata a prescindere, e in tal caso posso restare asciutto oppure no durante la pioggia (quindi f_2 può essere sia vera che falsa) lasciando invariato il valore di verità dell'implicazione.

Veniamo all'utilizzo delle implicazioni: in una implicazione la prima proprietà f_1 è detta **ipotesi** mentre la seconda proprietà f_2 è detta **tesi**.
Dimostrare una implicazione ci permette di dedurre la verità della tesi da quella dell'ipotesi. Infatti, se abbiamo dimostrato che $f_1 \Rightarrow f_2$ è vera, allora seguendo le tabelle di verità osserviamo che se l'ipotesi f_1 è vera allora anche la tesi f_2 è necessariamente vera.

Esempio 1.13. Consideriamo le due proprietà di prima, $f_1 =$"sto usando l'ombrello" e $f_2 =$"resto asciutto quando piove". Se ho dimostrato che f_1 implica f_2, allora è sufficiente verificare l'ipotesi (cioè che sto usando l'ombrello) per immediatamente dedurre la verità della tesi (cioè che rimango asciutto). Questa metodologia è diversa rispetto a come di solito usiamo la congiunzione, la disgiunzione o la negazione: nel caso di congiunzione, disgiunzione e negazione, per primi verifichiamo i valori di verità di f_1, f_2 e poi il valore della proprietà ottenuta tramite l'operazione; nel caso dell'implicazione invece, è più comune partire dal valore di verità dell'implicazione stessa e dell'ipotesi, per ottenere un'informazione sul valore di verità della tesi f_2.

Definizione 1.7.1. Quando abbiamo due proprietà f_1, f_2 e valgono le implicazioni $f_1 \Rightarrow f_2$ e $f_1 \Leftarrow f_2$, si dice che le due proprietà sono **equivalenti** e si scrive $f_1 \Leftrightarrow f_2$, o anche $f_1 \equiv f_2$, cioè "f_1 se e solo se f_2". Ciò significa che il valore di verità di f_1 e quello di f_2 sono sempre uguali

Esempio 1.14. Le proprietà f_1="n è un numero naturale pari" e f_2="n^2 è un numero naturale pari" sono equivalenti, la prima è vera se e solo se la seconda è vera.

La deduzione logica è utile in un altro caso, quello della cosiddetta contronominale.

Definizione 1.7.2. Data una implicazione $f_1 \Rightarrow f_2$, la sua proprietà **contronominale** è la deduzione

$$\text{NOT} f_2 \Rightarrow \text{NOT} f_1,$$

o con notazione logica

$$\neg f_2 \Rightarrow \neg f_1.$$

Osserviamo con lo sviluppo delle tabelle di verità che la tabella della contronominale assume gli stessi valori della proprietà originaria $f_1 \Rightarrow f_2$, infatti

f_1	NOTf_1	f_2	NOTf_2	NOTf_2 $\Rightarrow$NOTf_1
V	F	V	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	V	F	V	V

Dunque la contronominale è equivalente alla frase originaria, cioè le loro tabelle di verità sono identiche, un fatto che che possiamo vedere anche considerando l'esempio precedente. Infatti, la frase

"se oggi piove allora prendo l'ombrello"

ha lo stesso significato logico della frase

"se oggi non prendo l'ombrello allora non piove".

Questa seconda formulazione è un po' strana in italiano parlato, e va intesa nel senso di "se oggi decido di non prendere l'ombrello allora (questo avviene perché so che) non pioverà".

1.8. **Analogie tra insiemistica e logica.** Esiste un'analogia tra proprietà logiche e definizioni insiemistiche. E tra operazioni logiche e operazioni insiemistiche. Mostriamo brevemente questa analogia.

Una proprietà f è naturalmente associata all'insieme degli elementi che verificano quella proprietà

Esempio 1.15. Se siamo nell'universo dei numeri naturali $\mathbb{N}$, ogni proprietà f che riguarda i numeri naturali induce un insieme $I_f \subset \mathbb{N}$ composto dai numeri naturali che verificano f. Ad esempio se

$$f = \text{“}n \text{ è un numero naturale tale che } n^2 \text{ è pari”}$$

come abbiamo visto se

$$I_f = \{n \in \mathbb{N} \text{ tali che } f \text{ è vera}\}$$

allora I_f è costituito esattamente dai numeri pari, cioè $I_f = M_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n \text{ è pari}\}$.

Esempio 1.16. Nell'universo dei numeri reali consideriamo come proprietà una disuguaglianza

$$f = \text{“}x \text{ è maggiore di } 0\text{”} = (x > 0).$$

Questa proprietà induce un sottoinsieme di $\mathbb{R}$,

$$I_f = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\} = \mathbb{R}^+.$$

Operare sulla proprietà di definizione f significa quindi operare in qualche modo sull'insieme I_f. La congiunzione tra proprietà si traduce nell'intersezione degli insiemi associati; la disgiunzione inclusiva si traduce nell'unione degli insiemi associati; la negazione si traduce nel complementare dell'insieme associato; l'implicazione si traduce nell'inclusione tra gli insiemi associati. Elenchiamo tutto questo per avere una lista compatta di queste proprietà

- $\{x : f_1 \text{ è vera}\} \cap \{x : f_2 \text{ è vera}\} = \{x : f_1 \& f_2 \text{ è vera}\}$
- $\{x : f_1 \text{ è vera}\} \cup \{x : f_2 \text{ è vera}\} = \{x : f_1 \text{OR} f_2 \text{ è vera}\}$
- $\{x : f_1 \text{ è vera}\}^c = \{x : \text{NOT} f_1 \text{ è vera}\}$.
- $\{x : f_1 \text{ è vera}\} \subset \{x : f_2 \text{ è vera}\}$ è equivalente a affermare l'implicazione $f_1 \Rightarrow f_2$.

È molto importante avere in mente degli esempi rispetto al funzionamento di queste regole.

Esempio 1.17. Consideriamo le due proprietà numeriche $m_2 =$ "n è un numero pari", $m_3 =$ "n è un multiplo di 3". Allora otteniamo due insiemi associati

$$I_{m_2} = \{n : n \text{ è pari}\}$$
$$I_{m_3} = \{n : n \text{ è multiplo di } 3\}.$$

Questi due insiemi vengono anche identificati, con una notazione semplificata, con I_2 e I_3 (e talvolta con M_2 e M_3).

Esempio 1.18. L'intersezione tra I_2 e I_3 si ottiene facendo la congiunzione di m_2 e m_3, cioè

$$I_2 \cap I_3 = \{n : n \text{ numero naturale pari e multiplo di } 3\},$$

in questo caso la proprietà $m_2 \& m_3$ corrisponde alla proprietà di essere multiplo di 6, quindi $I_2 \cap I_3 = I_6 = \{n : n \text{ è multiplo di } 6\}$.

Esempio 1.19. L'unione tra I_2 e I_3 si ottiene facendo la disgiunzione (inclusiva) di m_2 e m_3, cioè

$$I_2 \cup I_3 = \{n : n \text{ è pari oppure è multiplo di } 3\}.$$

In questo caso quindi $I_2 \cup I_3$ è l'insieme dei numeri che verificano $m_2 \text{OR} m_3$,

$$I_2 \cup I_3 = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}.$$

Esempio 1.20. Il complementare di I_2 si ottiene negando m_2, cioè

$$I_2^c = \{n : n \text{ non è pari}\} = \{n : n \text{ è dispari}\}.$$

Quindi I_2^c è stato ottenuto verificando la proprietà $\text{NOT} m_2$.

Esempio 1.21. La proprietà $m_6 =$"n è multiplo di 6" implica la proprietà $m_2 =$ "n è pari", $m_6 \Rightarrow m_2$. Questo è equivalente alla proprietà di inclusione insiemistica

$$I_6 \subset I_2$$

o equivalentemente

$$\{n : n \text{ è multiplo di } 6\} \subset \{n : n \text{ è pari}\}.$$

In effetti ogni multiplo di 6 è necessariamente un numero pari.

1.9. **Principio di induzione.** In questa sezione approfondiremo il **principio di induzione**, cioè un enunciato che non dimostreremo formalmente perché non è un vero teorema, ma una ri-formulazione della definizione dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Mostreremo quindi una serie di utilizzi di questo enunciato.

Se una proprietà P_n, dove n è un numero naturale, verifica che

(1) è rispettata per $n = 0$, cioè P_0 è vera
(2) se P_n è vera per un certo numero naturale n, allora P_{n+1} è vera, che tradotto in simboli logici si scrive
$$P_n \Rightarrow P_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi ogni dimostrazione che utilizzi il principio di induzione si suddivide in due step:

(1) la **base induttiva** o **passo base**, in cui si dimostra che P_0 è vera
(2) il **passo induttivo** in cui si dimostra che $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, cioè se P_n è vera, allora deve essere vera anche P_{n+1}, e questo per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$

Esempio 1.22. Un numero primo è un numero naturale > 1 divisibile solo per 1 e per se stesso. L'esempio classico di utilizzo del principio di induzione è la dimostrazione che esistono infiniti numeri primi. In particolare vogliamo dimostrare la proprietà $P_n =$"esistono almeno $n + 1$ numeri primi" per ogni numero naturale n. È chiaro che se tale proprietà è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora i numeri primi devono essere infiniti.

(1) Il passo base P_0 è dato dalla proprietà "esiste almeno 1 numero primo", e questa affermazione è facilmente verificata dal fatto che esiste il numero primo 2.
(2) Il passo induttivo consiste nel dimostrare che se P_n, cioè "esistono almeno $n+1$ numeri primi", allora "esistono almeno $n+2$ numeri primi", cioè P_{n+1}. Se P_n è vera possiamo infatti considerare $n+1$ numeri primi e denominarli $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$. A questo punto consideriamo il numero naturale
$$m = p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1,$$
cioè il prodotto dei suddetti $n+1$ numeri primi, $+1$. Per costruzione m non è divisibile per nessuno dei p_i, questo significa, riducendo ai minimi termini il numero m, che m deve essere divisibile per un numero primo p_{n+1} che non appare nella lista di sopra (è possibile che m stesso sia un numero primo). Questo dimostra che P_{n+1} è vera.

Esempio 1.23. Un altro esempio di utilizzo del principio di induzione si ha con le sommatorie. Siano $m_0, m_1, m_2, \dots$ dei numeri naturali indicati in successione (vedremo meglio cosa questo significa nel capitolo sulle successioni, per il momento si tratta di una lista di numeri naturali), allora si usa la notazione
$$\sum_{i=0}^{n} m_i = m_0 + m_1 + m_2 + \cdots + m_n,$$
per indicare la somma dei primi $n + 1$ di questi numeri.

Grazie al principio di induzione possiamo dimostrare la proprietà P_n che "la somma dei primi n numeri dispari è uguale a $(n + 1)^2$", cioè
$$\sum_{i=0}^{n} (2i + 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

(1) Il passo base P_0 consiste nel dimostrare che $(2 \cdot 0 + 1) = (0 + 1)^2$, cioè $1 = 1$. Il passo base è spesso la parte facile della dimostrazione.
(2) Il passo induttivo consiste nel dimostrare che se $\sum_{i=0}^{n}(2i + 1) = (n + 1)^2$, allora $\sum_{i=0}^{n+1}(2i + 1) = (n + 2)^2$. Infatti,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &= \left(\sum_{i=0}^{n}(2i+1)\right) + (2(n+1)+1)\\ &= (n+1)^2 + 2n + 3\\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4\\ &= (n+2)^2.\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione, e quindi P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 1.24. Mostriamo lo stesso risultato per due altre sommatorie. Vogliamo dimostrare che la somma dei primi n numeri naturali è

$$\sum_{i=0}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(1) Il passo base è banale perché $0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$.
(2) Il passo induttivo consiste nel dimostrare che se $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ allora $1 + 2 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Infatti,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i &= \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Esempio 1.25. Adesso mostriamo il risultato che ci dà il valore di una serie geometrica, cioè se $c \in \mathbb{R}^+$ e $c \neq 1$, allora

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = 1 + c + c^2 + \cdots c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

(1) Il passo base è semplicemente $c^0 = 1 = \frac{1-c}{1-c}$, vera per definizione.
(2) Il passo induttivo consiste nel provare che se $\sum_{i=0}^{n} c_i = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}$ allora $\sum_{i=0}^{n+1} c^i = \frac{1-c^{n+2}}{1-c}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} c^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} c^i\right) + c^{n+1}\\ &= \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} + \frac{c^{n+1} - c^{n+2}}{1 - c}\\ &= \frac{1 - c^{n+2}}{1 - c}.\end{aligned}$$

2. Insiemi di numeri, intervalli, sup inf max min

2.1. **Naturali, interi, razionali.** I numeri **naturali** sono i numeri che nascono dal "naturale" bisogno umano di contare, sono quindi i numeri interi non negativi incluso lo 0,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Possiamo estendere questo insieme numerico considerando i numeri **interi** senza limitazioni di segno. I numeri interi possono avere segno + oppure −.

$$\mathbb{Z} = \{\pm n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Aggiungendo anche i numeri negativi, guadagniamo una proprietà che non era presente nei numeri naturali: per ogni numero intero n, esiste un numero intero m tale che $n + m = 0$, l'elemento neutro dell'addizione. Questo numero è ovviamente $m = -n$ infatti $n + (-n) = n - n = 0$.

Nei numeri naturali questa proprietà non era verificata, infatti se ad esempio $n = 2$, non esiste nessun numero naturale m tale che $2 + m = 0$ perché i numeri naturali sono tutti non negativi e quindi $2 + m \geq 2 > 0$ per ogni m numero naturale.

I numeri **razionali** sono quei numeri che si possono esprimere come una frazione, cioè come un quoziente di numeri interi $\frac{m}{n}$. In questa notazione m è detto **numeratore** e n è detto **denominatore**. Non ha significato un quoziente con denominatore = 0.

$$\mathbb{Q} = \text{numeri razionali} = \left\{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$$

Osserviamo in più che il segno di un quoziente è determinato dal segno di numeratore e denominatore. Poiché $\frac{-m}{-n} = \frac{m}{n}$, in seguito supporremo che n sia un numero intero positivo.

Un numero intero è un numero razionale con denominatore = 1, infatti $m/1 = m$. In più, si dice che un numero razionale $\frac{m}{n}$ è **ridotto ai minimi termini** quando non esistono fattori moltiplicativi comuni a numeratore e denominatore diversi da 1, cioè non è possibile semplificare ulteriormente la frazione $\frac{m}{n}$.

Osserviamo che gli insiemi numerici introdotti rispettano la seguente catena di inclusioni,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

2.2. **Numeri reali.** I numeri razionali appena introdotti hanno una rappresentazione decimale finita oppure infinita periodica

Esempio 2.1. I numeri interi sono numeri razionali con rappresentazione decimale finita, così come

$$1,5 = \frac{3}{2}; \quad 3,25 = \frac{13}{4}; \quad 10,01 = \frac{1001}{100}.$$

Esempio 2.2. Alcuni numeri razionali hanno una rappresentazione decimale infinita ma con un gruppo di cifre che si ripete sempre identico. Questo tipo di rappresentazione è detta periodica, e si denota con una linea sopra al gruppo di cifre che si ripetono, ad esempio

$$\frac{1}{3} = 0,33333\cdots = 0,\overline{3}$$

oppure anche

$$\frac{27}{99} = 0,272727\cdots = 0,\overline{27}$$

Se consideriamo la rappresentazione decimale, i numeri reali comprendono tutte le rappresentazioni decimali possibili, quindi quelle finite e quelle infinite sia periodiche che aperiodiche. L'insieme dei numeri reali si indica con la notazione $\mathbb{R}$.

Esempio 2.3. Data la nostra prima definizione, è chiaro che tutti i numeri razionali sono numeri reali. In più esistono dei numeri reali non razionali anche detti irrazionali. Sono esempi di numeri irrazionali sia $\sqrt{2}$ che π: se consideriamo la rappresentazione decimale di questi numeri, si tratta di una rappresentazione infinita in cui si può dimostrare che nessun gruppo di cifre si ripete periodicamente.

La definizione che abbiamo appena fornito dei numeri reali non è formale, ne enunceremo adesso una più completa. Denominiamo **taglio di Dedekind** un tipo particolare di partizione dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Definizione 2.2.1. Una partizione di un insieme X è una suddivisione in sottoinsiemi $Y_1 \subset X$, $Y_2 \subset X$,... $Y_k \subset X$, tali che i sottoinsiemi sono tutti a due a due disgiunti

$$Y_i \cap Y_j = \varnothing \quad \forall i \neq j,$$

e la loro unione è tutto X,

$$Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k = X.$$

Definizione 2.2.2. Un taglio di Dedekind è una partizione dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in due sottoinsiemi $Y_1 \subset \mathbb{Q}$ e $Y_2 \subset Q$ tali che uno è totalmente "minore" dell'altro, cioè

$$\boxed{\text{per ogni } y_1 \in Y_1 \text{ e per ogni } y_2 \in Y_2, \quad y_1 < y_2.}$$

Definizione 2.2.3. Un numero reale è un taglio di Dedekind. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è l'insieme dei tagli di Dedekind.

NOTA BENE. Anche con questa definizione formale i numeri razionali vengono identificati a un sottoinsieme dei numeri reali. Infatti per ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$, è possibile considerare la partizione data da

$$Y_1 = \{y \in \mathbb{Q} : \ y < q\}$$
$$Y_2 = \{y \in \mathbb{Q} : \ y \geq q\}$$

Esempio 2.4. Il numero reale $\sqrt{2}$ è rappresentato dalla seguente partizione

$$Y_1 = \{x \in \mathbb{Q} : \ x < 0 \text{ OR } x^2 < 2\}$$
$$Y_2 = \{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0 \ \& \ x^2 > 2\}$$

Esempio 2.5. In generale consideriamo un numero reale $r \in \mathbb{R}$ che abbia rappresentazione decimale

$$r = c_0, c_1c_2c_3 \ldots$$

dove $c_1, c_2, c_3, \dots$ sono numeri naturali tra 0 e 9, le cifre della rappresentazione decimale di r. Allora il numero r è rappresentato dalla seguente partizione di $\mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{x \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x < c_0, c_1 c_2 \dots c_k\} \\ Y_2 &= Y_1^c. \end{aligned}$$

Quindi gli elementi di Y_1 sono ottenuti minorando un qualsiasi "troncamento" della rappresentazione decimale di r, mentre Y_2 è ottenuto prendendo tutti i numeri razionali che non appartengono a Y_1.

Questo ultimo esempio ci assicura che è possibile "immergere" i numeri razionali dentro i numeri reali. Cioè che i numeri razionali sono in effetti un sottoinsieme dei numeri reali. Si può quindi estendere la catena di inclusioni che avevamo enunciato alla fine della sezione precedente,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.3. **Intervalli.** In questa sezione introduciamo un particolare tipo di sottoinsiemi dei numeri reali, denominati **intervalli**. Esistono come vedremo diversi tipi di intervalli, ma sono tutti accomunati dalla proprietà che se due numeri reali $x_1 < x_2$ appartengono a uno stesso intervallo I allora anche ogni numero reale x compreso tra x_1 e x_2, $x_1 < x < x_2$, appartiene a I, $x \in I$.

Definizione 2.3.1. Consideriamo due numeri reali qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$. La seguente lista di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono detti intervalli.

$$\begin{aligned}
&(1) & (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\} \\
&(2) & (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} \\
&(3) & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\} \\
&(4) & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\} \\
&(5) & (a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\} \\
&(6) & [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\} \\
&(7) & (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\} \\
&(8) & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}
\end{aligned}$$

Talvolta si utilizza la parentesi quadra aperta al posto della parentesi tonda nella denotazione degli intervalli. Ad esempio l'intervallo del tipo (2) può essere indicato con $]a, b]$ e quello del tipo (1) può essere indicato con $]a, b[$.

L'intervallo del tipo (1) nella lista qui sopra è detto aperto e ha un ruolo importante in ciò che seguirà

Definizione 2.3.2. Un sottoinsieme X dei numeri reali $X \subset \mathbb{R}$ è detto **aperto** se per ogni elemento $x \in X$, esiste un intervallo aperto I (cioè del tipo (1) nella lista sopra) tale che $I \subset X$ e $x \in I$.

Un sottoinsieme X dei numeri reali $X \subset \mathbb{R}$ è detto **chiuso** se il suo complementare X^c è un sottoinsieme aperto.

Esempio 2.6. Consideriamo gli intervalli del tipo (5) e (7) nella lista. Si tratta di due insiemi aperti, infatti considerando $x \in I$, esiste sicuramente un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che l'intervallo aperto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ è totalmente incluso in I e contiene x.

Esempio 2.7. L'intervallo di tipo (4) nella lista è un intervallo chiuso. Infatti se $I = [a, b]$, allora $I^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ cioè è l'unione di due intervalli aperti e quindi è a sua volta aperto. Per definizione I è quindi chiuso.

Esempio 2.8. L'intervallo di tipo (2) non è né aperto né chiuso. Osserviamo infatti che non può esistere nessun intervallo aperto contenente b e incluso in $(a, b]$. Osserviamo inoltre che $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$, dunque come prima non esiste un intervallo aperto contenente a e incluso in $(a, b]^c$. Né $(a, b]$ né il suo complementare sono quindi aperti, pertanto $(a, b]$ non è né aperto né chiuso. Un ragionamento analogo è valido per gli intervalli di tipo (3).

Esempio 2.9. Nella lista sopra gli intervalli di tipo (6) e (8) sono insiemi chiusi poiché i loro complementari sono insiemi aperti di tipo (7) e (5) rispettivamente.

2.4. **Limitatezza.**

Definizione 2.4.1. Un sottoinsieme X dei numeri reali $X \subset \mathbb{R}$ si dice **superiormente limitato** se esiste un numero reale $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{x < M \quad \forall x \in X.}$$

Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}$ si dice **inferiormente limitato** se esiste un numero reale $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{m < x \quad \forall x \in X.}$$

L'insieme X è detto **limitato** se è superiormente e inferiormente limitato. L'insieme X è detto **illimitato** superiormente o inferiormente se non è limitato superiormente o inferiormente.

Esempio 2.10. Tra gli intervalli della Definizione 2.3.1, quelli di tipo (1), (2), (3) e (4) sono limitati. Quelli di tipo (5) e (6) sono limitati solo inferiormente. Quelli di tipo (7) e (8) sono limitati solo superiormente.

Esempio 2.11. L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ visto come sottoinsieme dei numeri reali è illimitato superiormente e inferiormente.

Chiamiamo **maggiorante** di un insieme X ogni numero reale $r \in \mathbb{R}$ tale che $r \geq x$ per ogni $x \in X$. Quindi i maggioranti sono quei numeri reali che "maggiorano" tutto l'insieme X.

Teorema 2.4.2. *Se chiamiamo Mag(X) l'insieme dei maggioranti di X, allora esiste (ed è unico) un elemento che è il più piccolo tra tutti quelli di Mag(X).*

Definizione 2.4.3. Il più piccolo tra i maggioranti di X è detto **estremo superiore** di X e denotato come

$$\sup(X).$$

Se l'insieme dei maggioranti è vuoto, cioè X è illimitato superiormente, si dice che

$$\sup(X) = +\infty.$$

Definizione 2.4.4. Analogamente, se chiamiamo **minorante** di un insieme X ogni $r \in \mathbb{R}$ tale che $r \leq x$ per ogni $x \in X$, allora esiste (ed è unico) un elemento che è il più grande tra tutti i minoranti di X. Questo elemento è detto **estremo inferiore** di X e denotato come

$$\inf(X).$$

Se l'insieme dei minoranti è vuoto, cioè X è illimitato inferiormente, si dice che $\inf(X) = -\infty$.

Esempio 2.12. Nel caso degli intervalli $(a,b),\ (a,b],\ [a,b]$ l'estremo superiore è sempre b poiché l'insieme dei maggioranti è sempre costituito dall'intervallo chiuso $[b,+\infty)$ il cui elemento più piccolo è b.

$$\sup(a,b) = \sup(a,b] = \sup[a,b] = b.$$

Analogamente l'estremo inferiore di questi intervalli è sempre a.

Esempio 2.13. L'insieme $(-\infty,a]$ è illimitato inferiormente quindi si ha $\inf(-\infty,a] = -\infty$.

Esempio 2.14. Consideriamo l'insieme $A = \left\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$. In questo insieme $1 = \frac{1}{1}$ è l'elemento più grande di tutti. Non esiste un elemento che sia il più piccolo di tutti, poiché per ogni n, se scelgo $m > n$ allora $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$. Allo stesso tempo abbiamo che le frazioni del tipo $\frac{1}{n}$ si possono avvicinare arbitrariamente a 0. Infatti, se consideriamo ε un numero reale qualsiasi > 0, per quanto sia piccolo esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Per questo è sufficiente scegliere $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Da queste considerazioni segue che

$$\sup A = 1, \quad \inf A = 0.$$

Esempio 2.15. Consideriamo l'insieme $B = \{2^n :\ n \in \mathbb{N}\}$. L'elemento più piccolo di questo insieme è $2^0 = 1$, in più l'insieme è illimitato superiormente. Quindi

$$\sup B = +\infty, \quad \inf B = 1.$$

2.5. **Massimi e minimi.** Una proprietà interessante degli insiemi che abbiamo considerato negli esempi qui sopra, è quando l'estremo superiore o inferiore appartengono all'insieme stesso.

Definizione 2.5.1. Sia $X \subset \mathbb{R}$ un insieme, quando l'estremo superiore di X è un numero reale e appartiene a X, si chiama **massimo** di X e si denota con

$$\max(X) = \sup(X).$$

Quando l'estremo inferiore di X è un numero reale e appartiene a X, si chiama **minimo** di X e si denota

$$\min(X) = \inf(X).$$

NOTA BENE. Segue direttamente dalla definizione che ogni insieme finito di numeri ha sia massimo che minimo, corrispondenti all'elemento più grande e quello più piccolo dell'insieme.

Teorema 2.5.2. *Segue direttamente dalla definizione che abbiamo dato che le tre seguenti proprietà sono equivalenti, cioè una di esse è vera se e solo se lo sono tutte e tre. Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$,*

(1) $\max(X)$ *esiste*
(2) $\max(X) = \sup(X)$
(3) $\sup(X) \in X$.

Si possono enunciare le tre analoghe proprietà equivalenti per $\min(X)$ *e* $\inf(X)$.

Esempio 2.16. Nel caso degli intervalli $(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]$, il primo non ha né minimo né massimo, il secondo non ha minimo ma ha massimo $\max(a,b] = b$, il terzo ha minimo $\min[a,b) = a$ e non ha massimo, mentre il quarto ha minimo $\min[a,b] = a$ e ha massimo $\max[a,b] = b$.

Esempio 2.17. L'insieme $(-\infty, a]$ è illimitato inferiormente ed ha massimo, quindi $\min(-\infty, a]$ non esiste mentre $\max(-\infty, a] = a$.

Esempio 2.18. Se consideriamo gli insiemi A e B degli esercizi 2.14 e 2.15 rispettivamente, osserviamo che il primo non ha minimo poiché $0 = \inf A \notin A$, mentre $\max A = 1$. Invece il secondo ha minimo $\min B = \inf B = 1$ ed è illimitato superiormente quindi non ha massimo.

Esempio 2.19. Possiamo sintetizzare un po' di esempi in una tabella

	sup	max	inf	min
$\mathbb{N}$	$+\infty$	$\nexists$	0	0
$\mathbb{Z}$	$+\infty$	$\nexists$	$-\infty$	$\nexists$
$\left\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$	1	1	0	$\nexists$
$\mathbb{R}$	$+\infty$	$\nexists$	$-\infty$	$\nexists$
$\{1, 2, 3\}$	3	3	1	1
$[3, 5)$	5	$\nexists$	3	3
$(-\infty, 8)$	8	$\nexists$	$-\infty$	$\nexists$
$[1, 2]$	2	2	1	1
$\mathbb{R}\backslash\{2, 5\}$	$+\infty$	$\nexists$	$-\infty$	$\nexists$
$\{2^n :\ n \in \mathbb{N}\}$	$+\infty$	$\nexists$	1	1
$\{2^n :\ n \in \mathbb{Z}\}$	$+\infty$	$\nexists$	0	$\nexists$

Teorema 2.5.3. *Sia $X \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente, dunque $M = \sup(X) \in \mathbb{R}$. Allora per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, per quanto piccolo, esiste un elemento $x \in X$ tale che $M - \varepsilon < x \leq M$.*

Analogamente se X è limitato inferiormente e $m = \inf(X) \in \mathbb{R}$, allora per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $x \in X$ tale che $m \leq x < m + \varepsilon$.

Dimostrazione. Dimostreremo questo teorema per assurdo, limitandoci al caso dell'estremo superiore (il caso dell'estremo inferiore si dimostra in modo analogo). Supponiamo che per un certo $\varepsilon > 0$ non esista $x \in X$ che soddisfi la disuguaglianza $M - \varepsilon < x \leq M$. Allora, questo significa che per ogni $x \in X$, $x \leq M - \varepsilon$. Quindi $M - \varepsilon$ è un maggiorante di X, cioè maggiora ogni elemento di X. Ma questo è impossibile perché $M - \varepsilon < M$ che è l'estremo superiore di X. $\square$

3. Prime funzioni in una variabile e successioni

3.1. **Introduzione.**

Definizione 3.1.1. Dati due insiemi X e Y, una funzione $f\colon X \to Y$ è un'associazione che ad ogni elemento $x \in X$ associa un elemento denotato $f(x)$ appartenente a Y. Si scrive $x \mapsto f(x)$ e $f(x)$ è detto **immagine** di x.

L'insieme X di partenza è detto **dominio** della funzione mentre l'insieme d'arrivo Y è detto **codominio**.

Esempio 3.1. La funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che associa a ogni numero naturale il suo doppio, $f(n) = 2n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo elencare alcune delle associazioni indotte da tale funzione

$$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \quad \ldots \quad , \quad 101 \mapsto 202, \quad \ldots$$

Una funzione analoga può essere costruita anche sul dominio dei numeri reali. Infatti $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 2x$ è una funzione ben definita.

Esempio 3.2. Data una classe, considerata come insieme di studenti e studentesse, denominiamola C. Allora esiste una funzione "età" : $C \to \mathbb{N}$ che a ogni studente o studentessa associa la sua età anagrafica

$$\text{Marco} \mapsto 18, \quad \text{Alice} \mapsto 19, \quad \text{Anna} \mapsto 18, \ \ldots$$

Esempio 3.3. Dato un qualsiasi insieme X, la funzione identità $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ è la funzione che assegna a ogni elemento se stesso, cioè $\mathrm{id}_X(x) = x$ per ogni $x \in X$.

Il **grafico** di una funzione si costruisce evidenziando quei punti che hanno la loro coordinata verticale y (anche detta *ordinata*) uguale al valore $f(x)$ associato alla loro coordinata verticale x (anche detta *ascissa*). Nella figura qui sotto l'esempio del grafico della funzione $f(x) = x^2 + 1$, cioè una figura in cui sono evidenziati tutti i punti di coordinate (x, y) tali che $y = f(x) = x^2 + 1$.

Per ogni sottoinsieme $Z \subset X$ del dominio, si chiama **immagine** di Z l'insieme degli elementi y appartenenti al codominio Y che sono immagini di elementi di Z. Cioè,

$$f(Z) = \{y \in Y : \text{ esiste } x \in X, f(x) = y\}.$$

Date due funzioni $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ si definisce **funzione composta** la funzione ottenuta concatenando le due funzioni, e si scrive

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Significa che per calcolare il valore di $g \circ f$ in x, la funzione g viene applicata prendendo come input il valore $f(x)$, cioè l'output di f in x. Per questo si parla di "concatenazione" delle due funzioni, e è quindi necessario che il codominio di f sia il dominio di g.

Esempio 3.4. Date le funzioni $f(x) = 2x$ e $g(x) = 3x$, entrambe $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la funzione $g \circ f$ corrisponde a

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 3 \cdot (2x) = 6x.$$

Esempio 3.5. Date le funzioni $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$, entrambe $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la funzione $g \circ f$ corrisponde a

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (2x)^2 = 4x^2.$$

Osserviamo che allo stesso tempo è possibile calcolare la funzione composta nell'altro ordine

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2 \cdot x^2 = 2x^2.$$

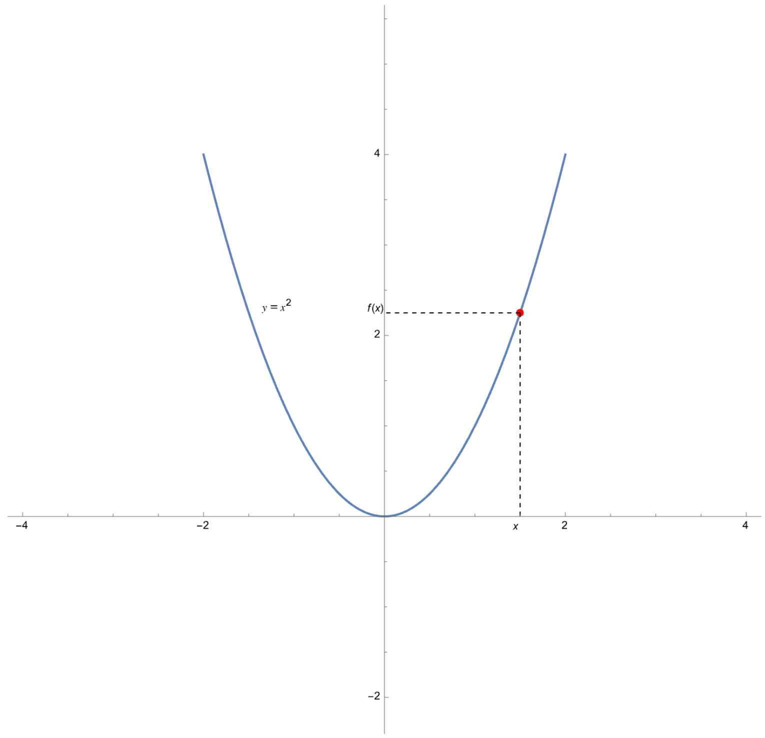


Figura 2. Grafico della funzione $f(x) = x^2$.

Queste due funzioni danno risultati differenti, quindi in generale la composizione tra funzione **non soddisfa la proprietà commutativa**.

Definizione 3.1.2. Una funzione $f\colon X \to Y$ è **iniettiva** se per ogni coppia di elementi $x_1, x_2 \in X$, abbiamo che

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Una funzione $f\colon X \to Y$ è **suriettiva** se

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : \; f(x) = y.$$

Equivalentemente la suriettività consiste nel fatto che l'immagine di X sia tutto Y, $f(X) = Y$.

Una funzione che è sia iniettiva che suriettiva si dice **biiettiva** (o anche "bigettiva").

Teorema 3.1.3. *Data una funzione $f\colon X \to Y$ biiettiva, esiste ed è unica una funzione $Y \to X$ denominata* ***funzione inversa*** *di f e denotata con f^{-1} tale che*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X,$$

cioè $f^{-1} \circ f(x) = x$ per ogni $x \in X$ e $f \circ f^{-1}(y) = y$ per ogni $y \in Y$.

Dimostrazione. Dato un qualsiasi elemento $y \in Y$, per suriettività esiste un elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$. In più, questo x è determinato unicamente, perché se esistono $x, x' \in X$ tali che $f(x) = f(x') = y$ allora per iniettività $x' = x$. Quindi possiamo per ogni y definire il valore $f^{-1}(y)$ come questo elemento $x \in X$ che è unicamente determinato. Verificare gli altri aspetti della tesi segue direttamente. □

Esempio 3.6. Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 2x$. Allora la funzione inversa di f è

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x.$$

Esempio 3.7. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^2$ non è invertibile, perché non è biiettiva. In particolare il fatto che non sia suriettiva implica che non esiste nessun valore di $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) < 0$. Possiamo restringere il codominio per recuperare la suriettività, considerando $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

La funzione così ri-definita continua a non essere biiettiva, perché manca la proprietà di iniettività. Questo implica che per ogni valore strettamente positivo $y > 0$, esistono due valori opposti che verificano l'uguaglianza $f(x) = y$. Ad esempio $f(x) = x^2 = 4$ è verificata sia da 2 che da -2. Quindi non è possibile definire univocamente la funzione f^{-1}. Possiamo restringere il dominio per recuperare l'iniettività, considerando $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

La funzione così ri-definita è adesso biiettiva. Dunque esiste una funzione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Denominiamo questa funzione **radice quadrata**, denotata con $\sqrt{\ }$, e quindi abbiamo

$$\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Osserviamo che quindi per ogni $y > 0$, $\sqrt{y}$ è solo uno dei due numeri reali che verificano l'uguaglianza $x^2 = y$, l'altro è il numero negativo $-\sqrt{y}$.

Definizione 3.1.4. Si chiama **successione** una funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cioè una funzione reale che ha come dominio i numeri naturali (o a volte un loro sottoinsieme)

Ricordiamo che nella nostra notazione, i numeri naturali hanno come elemento minimo il numero 0. In più, possiamo denotare le immagini di una successione con $f(0), f(1), f(2), \ldots$ ma anche con la più diffusa notazione

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots$$

Esempio 3.8. Qualsiasi funzione che è definibile sui numeri reali può anche essere definita come successioni sui numeri reali. Ad esempio la funzione $f(x) = 2x$ corrisponde alla successione

$$f_0 = 0,\ f_1 = 2,\ f_2 = 4,\ \ldots\ ,\ f_{1000} = 2000,\ \ldots$$

Esempio 3.9. La successione $f_k = (-1)^k$ è una funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che assume alternativamente i valori -1 e 1. In particolare, -1 quando k è dispari e 1 quando k è pari. Vedremo che una tale successione si dice anche periodica.

Esempio 3.10. Se consideriamo la funzione $\lfloor x \rfloor$ che indica la "parte intera" di x, cioè il più grande numero intero m che è $\leq x$, allora possiamo considerare la successione

$$f_k = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Per definizione abbiamo che $f_0 = f_1 = 0$, $f_2 = f_3 = 1$, $f_4 = f_5 = 2$, $\ldots$

Esempio 3.11. Ogni raccolta di dati parametrizzata con un elenco ordinato è di fatto rappresentabile come una successione. Se infatti denotiamo con $d_0, d_1, d_2, \ldots$ i vari dati ordinati, abbiamo una successione $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Questi dati potrebbero essere ad esempio la temperatura misurata ogni giorno a mezzogiorno in una determinata postazione.

3.2. **Monotonia.**

Definizione 3.2.1. Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, con dominio $X \subset \mathbb{R}$, si dice **monotona crescente** (o semplicemente crescente) se per ogni coppia di numeri $x, y \in X$ tali che $x > y$ si ha $f(x) \geq f(y)$. Si dice **monotona decrescente** (o decrescente) se per ogni coppia tali che $x > y$ si ha $f(x) \leq f(y)$.

La funzione si dice **monotona strettamente crescente** (o strettamente crescente) se per ogni coppia $x > y$ si ha $f(x) > f(y)$. Si dice **monotona strettamente decrescente** (o strettamente decrescente) se per ogni coppia $x > y$ si ha $f(x) < f(y)$.

Esempio 3.12. La funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente perché se $x > y$ allora $x^3 > y^3$ per ogni coppia di numeri reali x, y.

La funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente sui numeri positivi ma non è né crescente né decrescente se considerata su tutto $\mathbb{R}$. Infatti $-2 < 1$ ma $(-2)^2 = 4 > 1^2 = 1$. Questo fenomeno è dovuto al cambio di segno indotto dall'elevamento a potenza pari.

Esempio 3.13. La funzione $\frac{1}{x}$ è strettamente decrescente sui numeri positivi, infatti se $x > y > 0$ allora $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

Esempio 3.14. La funzione $\lfloor x \rfloor$ che associa a ogni numero reale il più piccolo numero intero minore di x, è una funzione crescente ma non strettamente crescente. Infatti se $x > y$ allora $\lfloor x \rfloor \geq \lfloor y \rfloor$, ma se consideriamo $\frac{3}{2} > 1$ osserviamo che hanno entrambi parte intera $= 1$.

Definizione 3.2.2. Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **periodica** quando esiste un numero reale $P \in \mathbb{R}$ tale che $f(x + P) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Questa definizione ci dice che a intervalli regolari la funzione si ripete identica a se stessa, infatti se $f(x + 2P) = f(x + P + P) = f(x + P) = f(x)$. Questo fatto resta vero per ogni multiplo di P e quindi

$$f(x + kP) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

NOTA BENE. Una funzione periodica non è crescente né decrescente tranne nel caso in cui si tratti di una funzione costante.

3.3. **Polinomi.**

Un **monomio** è una funzione che consiste in un multiplo reale di una potenza intera positiva della variabile. Cioè

$$f(x) = c \cdot x^n, \quad c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

In questo esempio n è detto grado del monomio

Definizione 3.3.1. Un **polinomio** è una somma finita di monomi. Il grado del polinomio è il grado del monomio di grado massimo che appare nella somma. Per questo un polinomio di grado $d \in \mathbb{N}$ si può scrivere come

$$\boxed{p(x) = c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0}$$

dove i coefficienti c_i con $i = 0, 1, \ldots d$ sono numeri reali e $c_d \neq 0$. La notazione per il grado del polinomio è $\deg(p) = d$. Una scrittura equivalente che permette di sintetizzare la somma è

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i.$$

Un polinomio $p(x)$ di grado d è detto **monico** se il coefficiente del monomio di grado massimo è $c_d = 1$.

Esempio 3.15. Un polinomio di grado 1 è una funzione del tipo $p(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ il cui grafico è una retta. Il coefficiente a è detto anche coefficiente angolare della retta, e parametrizza l'inclinazione. Il coefficiente b corrisponde alla coordinata del punto in cui il grafico interseca l'asse verticale. Vedi Figura 5.

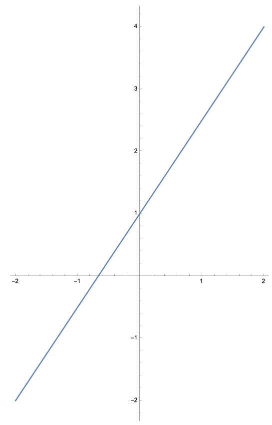


FIGURA 3. Grafico del polinomio $y = p(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

Esempio 3.16. Un polinomio di grado 2 è una funzione del tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ (quindi $a = c_2$, $b = c_1$, $c = c_0$ nella formula sopra). Il grafico di un polinomio di grado 2 è una **parabola**. Vedi Figura 4

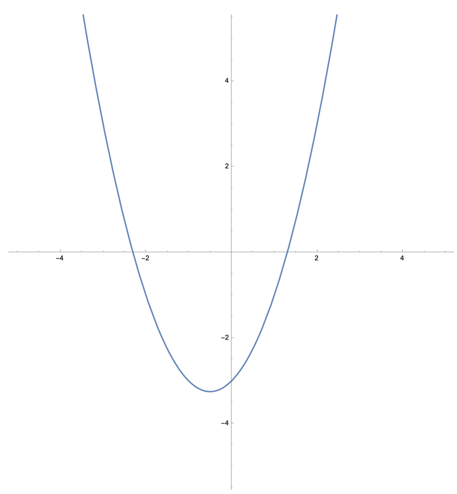


FIGURA 4. Grafico del polinomio $y = p(x) = x^2 + x - 3$.

Esempio 3.17. Un polinomio di grado 3 è del tipo $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ con $c_i \in \mathbb{R}$ per ogni i e $c_3 \neq 0$. Vedi Figura 3.17

NOTA BENE. Ogni polinomio $p(x)$ di grado d ha al più d soluzioni, dove una **soluzione** è un $r \in \mathbb{R}$ tale che $p(r) = 0$. In più, se esistono due polinomi $q(x)$ e $s(x)$ tali che $p(x) = q(x) \cdot s(x)$, allora

$$\deg(p) = \deg(q) + \deg(s).$$

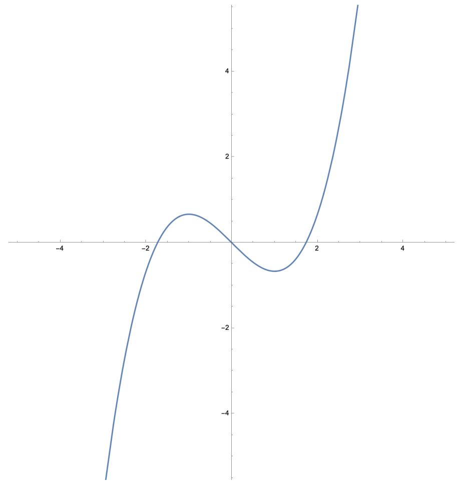


FIGURA 5. Grafico del polinomio $y = p(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

Se $r \in \mathbb{R}$ è una soluzione di $p(x)$, allora $(x - r)$ fattorizza $p(x)$, quindi esiste un polinomio $q(x)$ tale che
$$p(x) = (x - r) \cdot q(x),$$
con $\deg(q) = \deg(p) - 1$.

Esempio 3.18. Un polinomio di grado 1, $p(x) = ax + b$ (ricorda che quindi $a \neq 0$) si può riscrivere nella forma
$$p(x) = a \cdot (x - r'), \quad \text{con } r' = -\frac{b}{a}.$$
Il numero r' è dunque l'unica soluzione del polinomio.

Esempio 3.19. Dunque se $p(x)$ è un polinomio di grado 2 che ha una soluzione reale r, allora
$$p(x) = (x - r) \cdot q(x)$$
e $q(x)$ ha grado 1, quindi è nella forma $a \cdot (x - r')$ e r' è la seconda soluzione di $p(x)$ (non necessariamente distinta da r). Quindi i polinomio di grado 2 si distinguono in polinomi senza soluzioni reali, che sono detti **irriducibili**, e polinomi completamente fattorizzabili (che quindi hanno 2 soluzioni distinte o una soluzione che appare in entrambi i termini di grado 1 della fattorizzazione).

Esempio 3.20. Se $p(x)$ è un polinomio di grado 3 di cui conosciamo una radice r, allora
$$p(x) = (x - r) \cdot q(x)$$
e $q(x)$ è un polinomio di grado 2, situazione che ci riconduce al caso precedente. Vedremo in seguito che ogni polinomio di grado 3 ha almeno una soluzione reale, quindi un tale polinomio si fattorizza come un polinomio di grado 1 per uno di grado 2 irriducibile, oppure si fattorizza completamente come prodotto di 3 polinomi di grado 1.

3.4. **Funzioni razionali.**

Definizione 3.4.1. Una **funzione razionale** è una funzione che può essere espressa come quoziente di due polinomi,
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Osserviamo che una funzione razionale non può essere definita ovunque, perché se r è una soluzione di $q(x)$ allora $f(r)$ non è definibile

Definizione 3.4.2. Si dice **dominio massimale** di una funzione a valori reali, il più grande sottoinsieme dei numeri reali $X \subset \mathbb{R}$ tale che f è definibile sul dominio X.

Esempio 3.21. Consideriamo la funzione razionale $f(x) = \frac{1}{x}$, allora il suo dominio massimale si ottiene togliendo da $\mathbb{R}$ tutte le soluzioni reali del denominatore. In questo caso dunque il dominio massimale è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Nella Figura 6 il grafico della funzione $1/x$, che è detto **iperbole**.

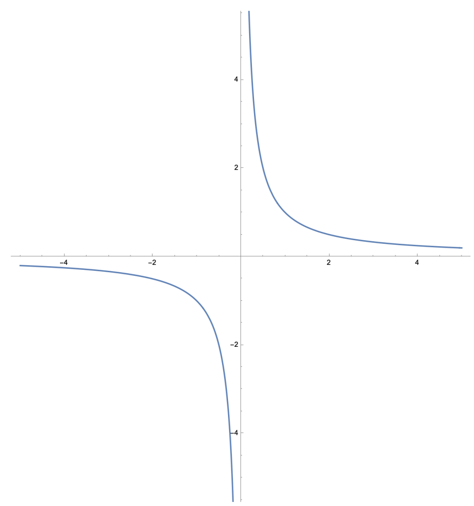


FIGURA 6. Grafico della funzione razionale $y = f(x) = \frac{1}{x}$.

Esempio 3.22. Nella Figura 7 il grafico della funzione razionale $f(x) = \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1}$. Osserviamo che in questo caso il denominatore ha due soluzioni $x = \pm 1$, e infatti il dominio massimale della funzione è dato da $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

Esempio 3.23. Nella Figura 8 il grafico della funzione razionale $f(x) = \frac{x+1}{x^2-\frac{2}{3}}$. Osserviamo che in questo caso il dominio massimale è $\mathbb{R}\backslash\left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$.

3.5. **Valore assoluto.** La funzione **valore assoluto** è una funzione definita sui numeri reali che assegna a ogni numero un valore reale non negativo, in particolare

$$\begin{aligned} |-| \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il grafico di questa funzione ha il tipico andamento "spezzato" che si può vedere nella Figura 9. In più, data una qualsiasi funzione $f(x)$, il grafico della funzione composta $|f(x)|$ è ottenuto riflettendo rispetto all'asse orizzontale, le parti del grafico che si trovano al di sotto dell'asse orizzontale, un esempio di questo si può vedere nella Figura 10.

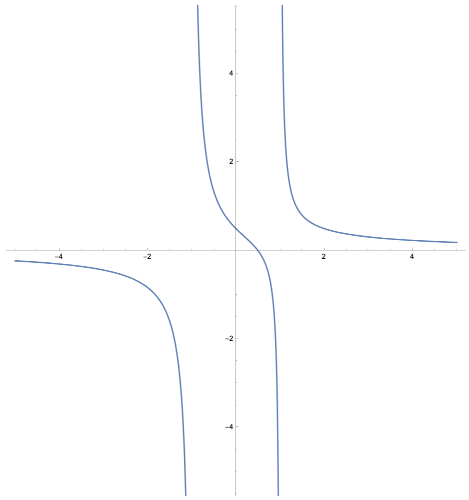


Figura 7. Grafico della funzione razionale $y = f(x) = \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-1}$.

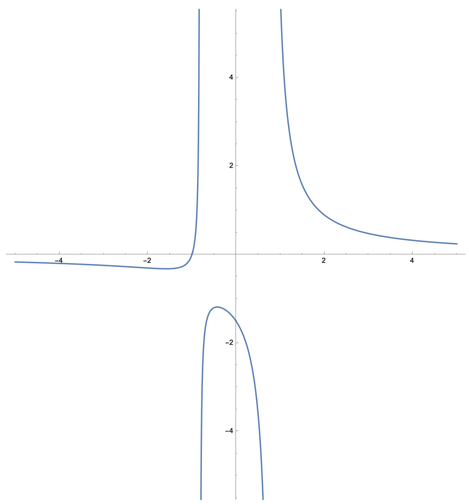


Figura 8. Grafico della funzione razionale $y = f(x) = \frac{x+1}{x^2-\frac{2}{3}}$.

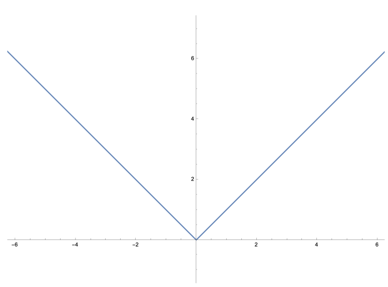


Figura 9. Grafico della funzione $y = |x|$.

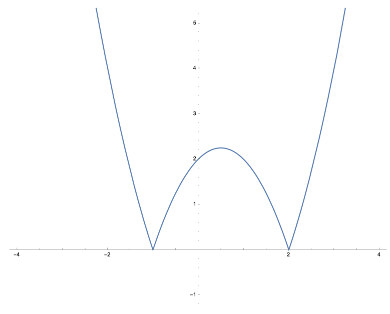


FIGURA 10. Grafico della funzione $y = |x^2 - x - 2|$.

3.6. **Elevamento a potenza.** Consideriamo per prima cosa un esponente naturale $n \in \mathbb{N}$, allora la funzione **elevamento a potenza** è la funzione

$$f(x) = x^n.$$

Il dominio massimale di questa funzione è tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che se $n = 0$ allora f è la funzione costante di valore 1 (si scrive anche $f \equiv 1$).

Se consideriamo invece m un esponente intero qualsiasi, $m \in \mathbb{Z}$, allora nei casi di m bisogna rivedere il dominio massimale, infatti se f è la funzione

$$f(x) = x^m \quad m \in \mathbb{Z} \ \& \ m < 0,$$

allora il dominio massimale è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Osserviamo che per ogni $m, n \in Z$, cioè per ogni coppia di esponenti interi, valgono le seguenti proprietà fondamentali

(1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad \forall x \ \forall n, m \in \mathbb{Z}$
(2) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \quad \forall x, y \ \forall n \in \mathbb{Z}$
(3) $(x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad \forall x \ \forall n, m \in \mathbb{Z}$
(4) $1^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
(5) $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
(6) $0^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

dove abbiamo considerato ogni possibile x (e y) appartenenti ai domini massimali delle rispettive funzioni.

Dimostrazione delle proprietà (1) e (3). L'elevamento a potenza x^n dove n è un numero naturale, corrisponde alla moltiplicazione di x con se stesso per n volte, dunque

$$x^n \cdot x^m = (x \cdot x \cdots x)(x \cdots x \cdot x) = x^{n+m}$$

dove nella prima parentesi x è ripetuto n volte e nella seconda è ripetuto m volte. Se $-m$ è negativo, allora

$$x^n \cdot x^{-m} = \frac{x \cdots x}{x \cdots x} = x^{n-m}$$

dove al numeratore x è ripetuto n volte mentre al denominatore è ripetuto m volte.

Allo stesso modo

$$(x^n)^m = x^n \cdot x^n \cdots x^n = x^{n+\cdots+n} = x^{n \cdot m},$$

dove x^n è ripetuto m volte. $\square$

In particolare ci interessa che la proprietà (3) resti valida per ogni numero razionale. Pertanto è necessario che

$$(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{1}{n}\cdot n} = x,$$

per ogni x nel dominio di $x^{\frac{1}{n}}$. Quindi è naturale definire $x^{\frac{1}{n}}$ come la radice n-esima, cioè l'inverso di x^n, con dominio massimale $\mathbb{R}_{\geq 0}$ per ogni n pari e positivo, e $\mathbb{R}$ per ogni n dispari, infatti per poter definire la funzione inversa è necessario che la funzione originaria sia biiettiva, e la funzione x^n

- è costante $= 1$ se $n = 0$
- è biiettiva come funzione $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se $n > 0$ è pari
- è biettiva come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se n è dispari.

Nella Figura 11 il grafico della funzione $x^{\frac{1}{3}}$.

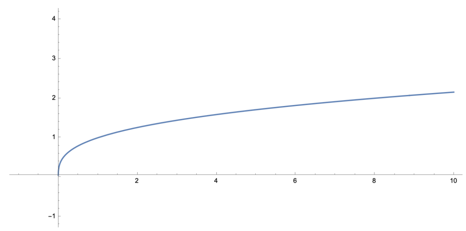


Figura 11. Grafico della funzione $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Osserviamo che la definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ per n numero naturale positivo permette di definire $x^{\frac{m}{n}}$ dove $\frac{m}{n}$ è un qualsiasi numero razionale. Semplicemente utilizzando il fatto che

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Senza scendere nei dettagli, precisiamo che l'elevamento a potenza

$$x^r$$

può essere definito per qualsiasi numero reale $r \in \mathbb{R}$, se $r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ allora il dominio è $\mathbb{R}$; se $r \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Z}$ allora $x \geq 0$, mentre se $r \in \mathbb{R}^-\backslash\mathbb{Z}$ allora $x > 0$. Infine, se $r = 0$ il dominio è $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e la funzione è costantemente uguale a 1.

3.7. **Esponenziale.** Nel caso della funzione esponenziale, la variabile si sposta all'esponente,

$$\exp_b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \text{ con } b \in \mathbb{R}^+,$$
$$\exp_b(x) = b^x.$$

Osserviamo che la base b è un numero intero positivo. Se $b = 1$ la funzione esponenziale è costante, $1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Osserviamo che le proprietà dell'elevamento a potenza permettono di ottenere delle analoghe proprietà per l'esponenziale,

(1) $b^x \cdot b^y = b^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(2) $(b^x)^y = b^{x \cdot y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(3) $b^{-x} = \frac{1}{b^x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ cioè $\exp_b(-x) = \exp_{\frac{1}{b}}(x)$.
(4) $b^0 = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}^+$

Osserviamo che in particolare la proprietà (3) permette ci dice che il comportamento del grafico di $\exp_b$ e $\exp_{\frac{1}{b}}$ è simmetrico rispetto all'asse verticale, come si vede nell'esempio della Figura 12

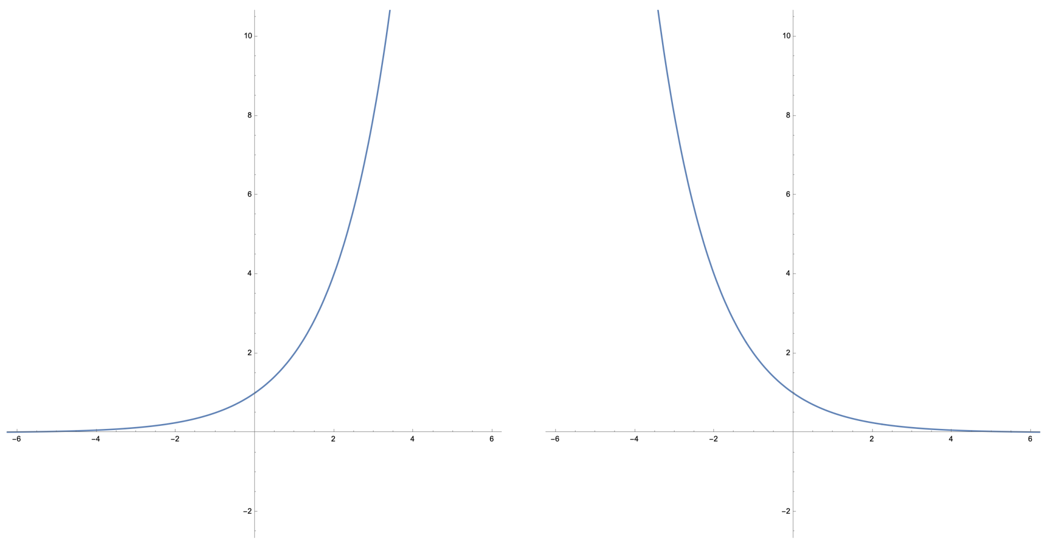


Figura 12. Grafici delle funzioni $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

3.8. **Logaritmo.** Osserviamo che la funzione esponenziale $\exp_b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è biiettiva per ogni $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, pertanto ammette una funzione inversa che denominiamo **logaritmo**.

$$\log_b(x) = \text{il solo numero reale } y \text{ t.c. } b^y = x.$$

NOTA BENE. La funzione $\exp_b(x)$ è definita anche per $b = 1$, ma non essendo biiettiva, non esiste una analoga funzione inversa $\log_1$.

Le proprietà dell'esponenziale si riflettono in alcune proprietà della funzione logaritmo che elenchiamo qui sotto,

(1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
(2) $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
(3) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = \log_b(x^{-1}) = -\log_b(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$
(4) $c \cdot \log_{b^c}(x) = \log_b(x) \quad \forall b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \in \mathbb{R}^+$.

Osserviamo che la proprietà (3) è una diretta conseguenza della (2).

Per la definizione di funzione inversa, il grafico del logaritmo si ottiene riflettendo il grafico dell'esponenziale rispetto all'asse orizzontale, come si capisce anche dagli esempi in Figura 13.

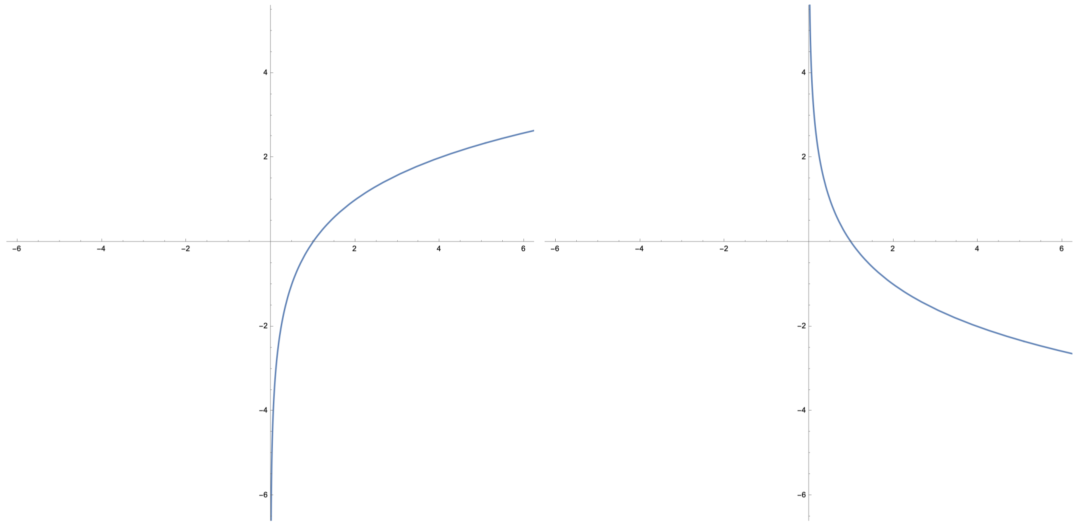


FIGURA 13. Grafici delle funzioni $y = \log_2(x)$ e $y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$.

Come vedremo nella Sezione 5.9, esiste un particolare numero reale indicato con e e denominato **Numero di Nepero** che soddisfa una serie di importanti proprietà legati alla derivazione, i limiti e l'integrazione. Il numero e come base per il logaritmo è considerato, per questo motivo, una scelta più "naturale" delle altre, e quindi il logaritmo in base e viene indicato anche con il nome di **logaritmo naturale** e la notazione $\ln(x)$,

$$\ln(x) = \log_e(x).$$

3.9. **Funzioni trigonometriche.** Le funzioni trigonometriche codificano il fatto che i rapporti tra le lunghezze dei lati di un triangolo dipendono solamente dagli angoli del triangolo stesso. Prima di introdurle dobbiamo preliminarmente approfondire la nozione di angolo.

Definizione 3.9.1. Un angolo è la porzione di piano compresa tra due semirette aventi un vertice comune. Possiamo quindi considerare che una delle due semirette sia la "semiretta di partenza", il vertice comune un "perno", e l'angolo sia la misura del movimento di rotazione necessario per raggiungere la seconda retta. Convenzionalmente, il senso di rotazione positivo è quello anti-orario.

Per misurare un angolo si considera una circonferenza di raggio $= 1$, allora la misura **in radianti** dell'angolo è la lunghezza dell'arco di cerchio che viene intercettato dall'angolo stesso sulla circonferenza, come indicato nella figura sottostante.

Rispetto alla misura "classica" in gradi degli angoli, dove un angolo giro corrisponde a $360°$, in radianti la misura di un angolo giro è uguale alla lunghezza dell'intera circonferenza di raggio $r = 1$, cioè $2\pi \cdot r = 2\pi$. Questo permette di costruire questa tabella di equivalenze

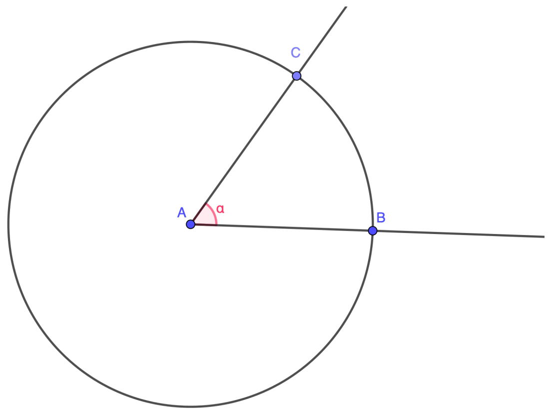


FIGURA 14. Nella figura l'angolo α è la porzione di piano evidenziata, la circonferenza ha raggio unitario, mentre la misura in radianti di α corrisponde alla lunghezza dell'arco di cerchio $\widehat{BC}$.

tra misure.

$360°$	2π
$180°$	π
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$

Per introdurre le funzioni seno e coseno, osserviamo che in un triangolo rettangolo, grazie ai teoremi sulle similitudini tra triangoli, i rapporti tra i lati restano invariati se gli angoli restano invariati, come indicato chiaramente nella Figura 15.

Fissiamo quindi la lunghezza di uno di questi lati imponendo di trovarci su una circonferenza di raggio $= 1$. Quindi l'ipotenusa del triangolo rettangolo considerato è di lunghezza $= 1$.

Definizione 3.9.2. Consideriamo la circonferenza unitaria con centro nell'origine (punto A) e sia la semiretta orizzontale positiva corrispondente a un angolo di misura 0. Allora dato un angolo θ, sia C il punto sulla circonferenza unitaria corrispondente a tale angolo. Il **seno** e **coseno** di θ sono le coordinate verticale e orizzontale rispettivamente del punto C, come indicato nella Figura 16.

Cominciamo a elencare alcune proprietà fondamentali. Innanzitutto dalla definizione risulta subito chiaro che

$$\sin(0) = 0, \ \cos(0) = 1$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

In più, si tratta chiaramente di due funzioni periodiche, che si ripetono identiche dopo un angolo giro cioè con periodo 2π,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

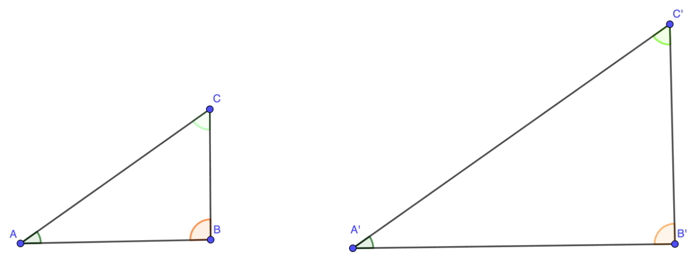


FIGURA 15. Abbiamo due triangoli rettangoli con gli stessi angoli, dunque anche triangoli simili. Proprio per questo abbiamo le uguaglianze $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ e $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$.

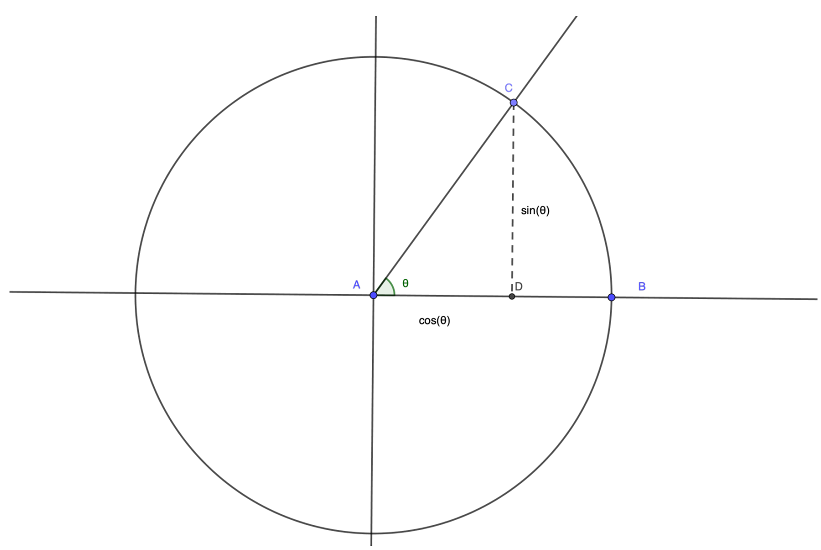


FIGURA 16. La circonferenza in figura è unitaria. Il triangolo ADC è rettangolo in D per costruzione. La definizione di seno e coseno è che $\sin(\theta) = CD$, $\cos(\theta) = AD$.

Questo implica che $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ e $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

In più, sono valide (lo si deduce guardando la definizione stessa) anche le seguenti identità

$$
\begin{aligned}
\sin(x+\pi) &= -\sin(x) \\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

In più abbiamo che

$$
\begin{aligned}
\sin(x) = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \\
\cos(x) = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Nella Figura 17 è possibile vedere il grafico delle funzioni seno e coseno.

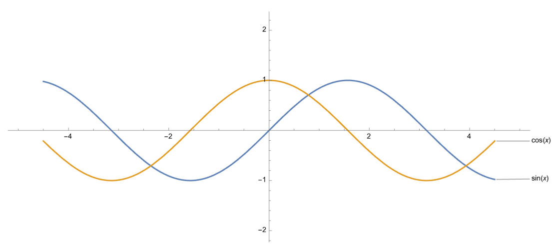


Figura 17.

Teorema 3.9.3. *Per calcolare il seno e coseno di una somma valgono le seguenti formule*

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}
$$

Invece che fare una vera e propria dimostrazione di questo teorema, utilizziamo una "dimostrazione con una figura" il cui completamento è lasciato per esercizio. Vedere Figura 18.

Infine, il rapporto tra seno e coseno definisce un altro rapporto fondamentale di un triangolo rettangolo, cioè quello tra i due cateti.

Definizione 3.9.4. Dato un angolo θ che non sia nella forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, è possibile definire la **tangente** di θ,

$$
\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + kz,\ \ k \in \mathbb{Z} \right\}.
$$

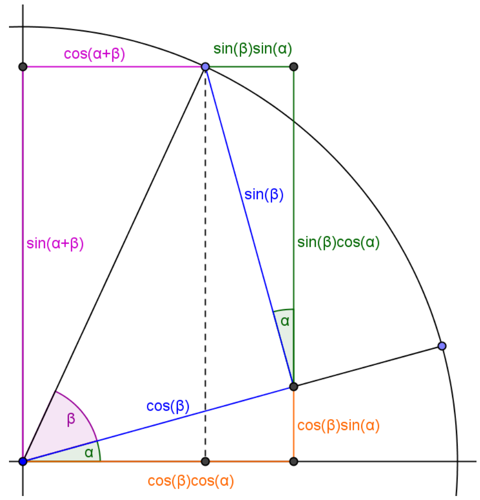


FIGURA 18. Accanto a ogni segmento è indicata la sua lunghezza. In questo caso si considerano due angoli α e β, e i segmenti fucsia corrispondono a seno e coseno dell'angolo $\alpha + \beta$.

4. DERIVATE

4.1. **Introduzione non-formale della nozione di funzione derivata.** La **derivazione** è un'operazione sulle funzioni: data una funzione di partenza $f : X \to \mathbb{R}$, dove $X \subset \mathbb{R}$, tramite la derivazione si ottiene un'altra funzione $f' : X' \to \mathbb{R}$ dove $X' \subset X$. Nella nostra trattazione X sarà quasi sempre un intervallo o un'unione di intervalli.

Parlando informalmente, la derivata f' di una funzione f calcolata nel punto x ci restituisce in output il valore $f(x)$ dell'inclinazione del grafico di f nel punto di coordinate $(x, f(x))$, in Figura 19 abbiamo cercato di restituire questo concetto informale. Introdurremo il concetto

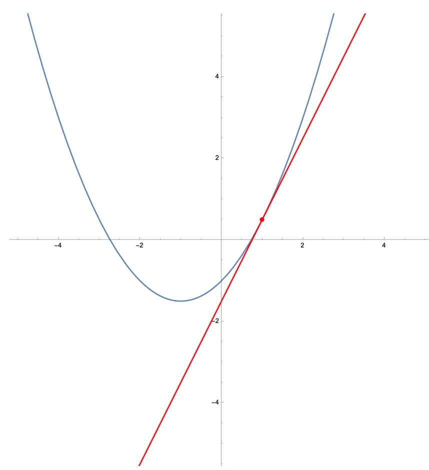


FIGURA 19. Grafico della funzione $y = f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1$. Nel punto di coordinate $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ è indicata la retta tangente al grafico della funzione in quel punto. L'equazione di questa retta è $y = 2x - \frac{3}{2}$, il coefficiente 2 come abbiamo già visto parametrizza l'inclinazione della retta e corrisponde in effetti alla derivata f' calcolata nel punto $x = 1$.

di derivata in modo non-formale, e per farlo dobbiamo prima introdurre (sempre in modo non-formale) il concetto di funzione continua. Entrambi questi concetti saranno ben formalizzati nella prossima sezione, ma quello che ci interessa è che anche utilizzando queste nozioni senza un quadro formale completo, è possibile approcciare le loro principali proprietà.

Una funzione **continua** è una funzione il cui grafico può essere disegnato "senza staccare la penna dal foglio".
Equivalentemente, una funzione f è continua in un punto x_0 se avvicinandomi arbitrariamente a tale punto, il valore di $f(x)$ si avvicina sempre più e arbitrariamente al valore $f(x_0)$. Una funzione è continua se è continua in ogni punto del dominio.

Esempio 4.1. Ogni polinomio è una funzione continua

Esempio 4.2. La funzione $\lfloor x \rfloor$ definita per ogni numero reale non è continua. Infatti $\lfloor n \rfloor = n$ per ogni numero intero $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$. Ma se scelgo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, numero reale positivo sufficientemente piccolo, allora

$$\lfloor n - \varepsilon \rfloor = n - 1.$$

Ma se il valore di ε si avvicina a 0, allora $n - \varepsilon$ si avvicina arbitrariamente a n senza che il valore di $\lfloor n - \varepsilon \rfloor$ si avvicini arbitrariamente a n.

Definizione 4.1.1. Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto (o un'unione di intervalli aperti), e fissato $x \in I$, la funzione **rapporto incrementale** in x è la funzione r

$$r(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

NOTA BENE. Poiché $x \in I$ che è un intervallo aperto, è sicuramente possibile definire r su un piccolo intervallo aperto privato del punto 0, cioè esiste $\varepsilon > 0$, sufficientemente piccolo, tale che r è definita su $(-\varepsilon, \varepsilon) \backslash \{0\}$.

L'utilità di definire il rapporto incrementale è che possiamo scrivere ogni funzione in un modo formalmente simile a un polinomio di grado 1 nella variabile h,

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot r(h), \quad \forall h \in I \backslash \{0\}.$$

L'inclinazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ in un dato punto, si ottiene quando i due punti della Figurq 20 si avvicinano fino a coincidere, e questo avviene quando $h = 0$. La funzione $r(h)$ è però definita solo per $h \neq 0$. La prossima definizione è anch'essa non-formale e verrà precisata nella prossima sezione.

Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto (o un'unione di intervalli aperti) è **derivabile** in un punto $x \in I$ se la funzione r associata a f in x si può estendere per con continuità al valore $h = 0$. Cioè se esiste un valore $r(0)$ che rende la funzione continua e definita anche in 0. Tale valore se esiste è necessariamente unico.
In tal caso si dice **derivata prima** di f in x il numero reale

$$f'(x) = r(0).$$

Un funzione è derivabile se è derivabile in ogni punto del suo dominio massimale.

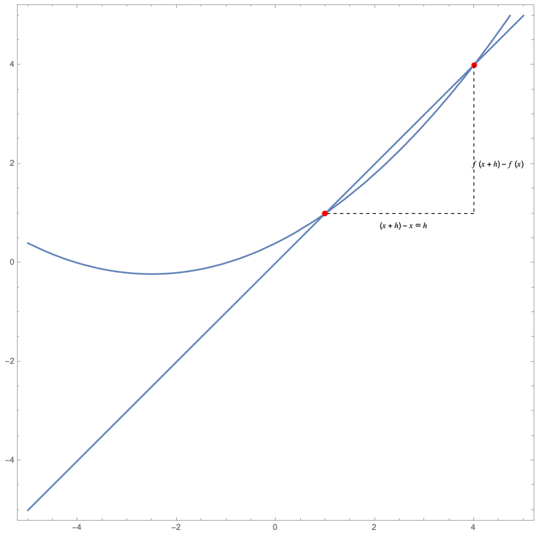


Figura 20. In questa figura vediamo il grafico di una funzione $y = f(x)$. Dei due punti rossi, il primo punto ha coordinate $(x, f(x))$ e il secondo ha coordinate $(x+h, f(x+h))$. Il rapporto incrementale $r(h)$ misura l'inclinazione della retta che passa per entrambi i punti.

Esempio 4.3. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$. Abbiamo,

$$\begin{aligned}(x+h)^2 &= x^2 + 2xh + h^2 \\ &= x^2 + h \cdot (2x + h),\end{aligned}$$

per ogni $h \neq 0$. Il rapporto incrementale in x è quindi $r(h) = 2x + h$, e questo può essere esteso per continuità a $h = 0$ semplicemente con $r(0) = 2x$. Abbiamo quindi $f'(x) = 2x$ e questo definisce la derivata prima $f' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Esempio 4.4. La funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x = 0$. Infatti, se consideriamo

$$|x + h| = |x| + h \cdot r(h),$$

per $x = 0$ abbiamo che necessariamente $r(h) = 1$ per ogni $h > 0$ e $r(h) = -1$ per ogni $h < 0$. Ma quindi non esiste un'estensione continua di r in $h = 0$.

4.2. **Derivabilità dell'elevamento a potenza e delle funzioni trigonometriche.** In generale qualsiasi funzione di elevamento a potenza $f(x) = c \cdot x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ numero naturale e $c \in \mathbb{R}$ costante reale, è derivabile.

Affrontiamo dapprima il caso $n = 0$. In tal caso $f(x) = c$ costante, allora $r(h) = 0$ identicamente in ogni punto poiché $f(x + h) = f(x) = c$ e quindi $c = c + h \cdot 0$. Quindi r si può estendere per continuità ottenendo $r(0) = 0$. La derivata prima è $f' \equiv 0$.

Se $n = 1$, allora

$$f(x + h) = c(x + h) = cx + ch = f(x) + c \cdot h.$$

Quindi $r(h) = c$ costantemente, e quindi è possibile estendere r ottenendo $r(0) = c$. La derivata prima è $f' \equiv c \in \mathbb{R}$.

Il caso $n = 2$ è stato affrontato nell'Esempio 4.3. Per ogni n superiore abbiamo

$$f(x) = (x+h)^n = x^n + n \cdot hx^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot h^2 x^{n-2} + \cdots$$

dove i termini sostituiti dai puntini sono tutti termini in cui la variabile h appare con grado almeno 3. Quindi

$$(x+h)^n = x^n + h \cdot \left(n \cdot x^{n-1} + h \cdot R(h)\right),$$

dove R(h) è una funzione continua definita per ogni h. A questo punto si osserva che

$$r(h) = n \cdot x^{n-1} + h \cdot R(h),$$

e quindi è possibile estendere $r(h)$ in modo continuo anche in $h = 0$, ottenendo

$$\boxed{f'(x) = n \cdot x^{n-1}.}$$

Osserviamo che in generale da questi risultati otteniamo che $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Per quanto riguarda le funzioni trigonometriche, dimostreremo nella Sezione REFERNZA la loro derivabilità, per il momento enunciamo soltanto il seguente risultato

$$\boxed{\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \end{aligned}}$$

4.3. **Proprietà delle derivate.**

Teorema 4.3.1 (Linearità della derivata)**.** *Se $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili e $a, b \in \mathbb{R}$ due numeri reali, allora $af + bg$ è una funzione derivabile e*

$$(a \cdot f + b \cdot g)' = a \cdot f' + b \cdot g'.$$

Dimostrazione. Scriviamo le funzioni f e g tramite le loro rispettive funzioni r_1, r_2 corrispondenti alla prolungazione continua dei rapporti incrementali. Allora,

$$\begin{aligned} af(x+h) + bg(x+h) &= a(f(x) + hr_1(h)) + b(g(x) + hr_2(h)) \\ &= af(x) + ahr_1(h) + bg(x) + bhr_2(h) \\ &= (af(x) + bg(x)) + h \cdot (ar_1(h) + br_2(h)). \end{aligned}$$

Quindi $ar_1(h) + br_2(h)$ è il rapporto incrementale di $af + bg$ per definizione, e per costruzione anche questa combinazione è prolungabile in $h = 0$, dunque

$$(af + bg)'(x) = ar_1(0) + br_2(0) = af'(x) + bg'(x) \quad \forall x \in I.$$

□

Esempio 4.5. Ogni polinomio è una combinazione lineare di funzioni del tipo x^n con $n \in \mathbb{N}$. Il teorema appena enunciato ci permette di calcolare agilmente la derivata di un polinomio combinando le derivate dei singoli termini

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + 7x^3 + x + 3 \\ p'(x) &= 4 \cdot x^3 + 7 \cdot 3 \cdot x^2 + 1 + 0 \\ &= 4x^3 + 21x^2 + 1. \end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni polinomio p di grado almeno 1, la derivata è un polinomio di grado $\deg p'(x) = \deg p(x) - 1$.

Teorema 4.3.2 (Derivata del prodotto)**.** *Siano $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Allora la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile e in particolare*

$$(f \cdot)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad \forall x \in I.$$

Dimostrazione. Come prima scriviamo f, g tramite il ricorso alle rispettive funzioni r_1, r_2.

$$\begin{aligned} f(x+h) \cdot g(x+h) &= (f(x) + hr_1(h)) \cdot (g(x) + hr_2(h)) \\ &= f(x)g(x) + hr_1(h)g(x) + f(x)hr_2(h) + h^2 r_1(h)r_2(h) \\ &= f(x)g(x) + h \cdot (g(x)r_1(h) + f(x)r_2(h) + hr_1(h)r_2(h)). \end{aligned}$$

Quindi $f(x)r_2(h) + g(x)r_1(h) + hr_1(h)r_2(h)$ è il rapporto incrementale di fg in x, che per costruzione può essere prolungato in $h = 0$ ottenendo

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)r_2(0) + g(x)r_1(0) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

□

Esempio 4.6. Consideriamo $f(x) = x^2$ come prodotto $x \cdot x$, abbiamo allora

$$f'(x) = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x,$$

ottenendo nuovamente il risultato già noto.

Esempio 4.7. Una qualsiasi funzione prodotto come $f(x) = x\cos(x)$ può essere derivata conoscendo le derivate dei suoi fattori,

$$f'(x) = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) = \cos(x) - x\sin(x).$$

Teorema 4.3.3 (Derivata del quoziente)**.** *Siano $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni, allora la funzione $\frac{f}{g}$ è definita e derivabile in ogni punto di I dove $g(x) \neq 0$ e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo fatto è sufficiente utilizzare la derivata del prodotto. Infatti

$$\frac{f}{g} \cdot g = f$$

quindi

$$\left(\frac{f}{g} \cdot g\right)' = f'.$$

Svolgendo il termine a sinistra si ottiene

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \cdot g(x) + \frac{f}{g}(x) \cdot g'(x).$$

Riordinando i termini si ottiene il risultato cercato. □

Esempio 4.8. Tramite questa regola è possibile calcolare la derivata di qualsiasi funzione razionale. Prendiamo ad esempio, $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$, allora

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x) \cdot (x+3) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+3)^2} \\ &= \frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}. \end{aligned}$$

NOTA BENE. La derivata della funzione $\frac{1}{f}$ per una certa funzione $f \colon I \to \mathbb{R}$ è un caso particolare del teorema precedente,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Esempio 4.9. Consideriamo la funzione tangente $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \cos(x)^2 + \sin(x)^2 \cos(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Esempio 4.10. Possiamo ora calcolare la derivata di x^{-n} dove n è un qualsiasi numero naturale positivo $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Infatti

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

Osserivamo che questo risultato ci permette di generalizzare la derivata di x^m per ogni $m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, ottenendo

$$(x^m)' = m \cdot x^{m-1}.$$

Teorema 4.3.4 (Derivata di una funzione composta)**.** *Siano $f \colon I \to J$ e $g \colon J \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile e in particolare*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Dimostrazione. Come nei casi precedenti, scriviamo le due funzioni tramite l'uso dei rapporti incrementali r_1, r_2.

$$\begin{aligned} f(g(x+h)) &= f\left(g(x) + hr_2(h)\right) \\ &= f(g(x)) + hr_2(h) r_1(hr_2(h)), \end{aligned}$$

dove in questo caso r_1 è il rapporto incrementale di f nel punto $g(x)$. Il rapporto incrementale di $f \circ g$ calcolato in x è quindi $r_2(h) \cdot r_1(hr_2)$, che si può prolungare a $h = 0$ ottenendo

$$r_2(0) \cdot r_1(0) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

□

Esempio 4.11. Consideriamo la funzione $\sin(2x)$ ottenuta componendo $2x$ e $\sin(x)$. Allora la derivata è

$$\sin(2x)' = \sin'(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x).$$

NOTA BENE. L'ultimo teorema permette di calcolare la derivata di una funzione inversa. Consideriamo $f: I \to J$ biiettiva, e sia $f^{-1}: J \to I$ la sua funzione inversa (vedere Teorema 3.1.3 per la definizione). Se f è derivabile, allora f^{-1} è derivabile e

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Infatti $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ e la derivata dell'identità è semplicemente la costante 1. Questo permette di dimostrare il risultato precedente (lasciato per esercizio).

Esempio 4.12. Consideriamo la funzione $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ definita per $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ su $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Questa è la funzione inversa di $f(x) = x^n$, dunque se $y = f(x) = x^n$ si ha

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{n} \cdot x^{n-1} \\ &= \frac{1}{n} \cdot y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

Conseguentemente è possibile dimostrare che per ogni numero razionale $q = \frac{m}{n} \neq 0$ vale la regola

$$(x^q)' = q \cdot x^{q-1}.$$

Infine per estensione questa stessa proprietà è vera per ogni reale $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1},$$

dove entrambe le funzioni sono considerate sui loro domini massimali.

4.4. **Massimi e minimi tramite le derivate.**

Definizione 4.4.1. Si dice punto di **massimo (o minimo) globale** di una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ il punto (o i punti) $x \in X$ dove $f(x)$ assume il valore massimo (o minimo) di tutta l'immagine $f(X)$.

Esempio 4.13. Consideriamo un polinomio di grado 1, $f(x) = ax + b$ definito su un intervallo $[x_0, x_1]$, allora questa funzione assume i suoi valori massimo e minimo globali agli estremi, in particolare se $a > 0$ allora

$$\max f(x) = f(x_1) \quad \min f(x) = f(x_0).$$

Se invece $a < 0$ allora

$$\max f(x) = f(x_0) \quad \min f(x) = f(x_1).$$

Esempio 4.14. Se considero la stessa funzione $f(x) = ax + b$ su tutto $\mathbb{R}$, allora la funzione non è limitata né superiormente, né inferiormente,

$$\sup f(X) = +\infty, \quad \inf f(X) = -\infty,$$

dunque non esistono massimi o minimi locali di $f(x)$.

Esempio 4.15. Se $f(x) = x^2$, il dominio massimale è $\mathbb{R}$ e $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ mentre $\inf f(\mathbb{R}) = 0$. Quindi per definizione x^2 non può avere un massimo globale, mentre $x = 0$ è l'unico punto in cui viene toccato l'estremo inferiore $f(x) = 0$, dunque 0 è un punto di minimi globale.

Come vedremo nei punti di massimo e minimo globale, una funzione derivabile si annulla. Abbiamo però dei casi in cui $f'(x)$ si annulla pur non trovandoci in un punto di massimo o minimo globale, è il caso per esempio della funzione $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ che ha derivata $f' = 0$ nei punti $x = \pm 1$, ma $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$ e $\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$.

Definizione 4.4.2. Sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione, un punto $x \in X$ è un punto **di massimo (o minimo) locale** se esiste un reale positivo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che x è un punto di massimo (o minimo) per f sull'insieme $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X$.

NOTA BENE. Osserviamo che un punto di massimo o minimo globale è anche un massimo o minimo globale, perché se x è il massimo su tutto il dominio, lo sarà necessariamente anche su un qualsiasi intervallo contenente x.

Definizione 4.4.3. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, si dice **punto stazionario** di f un punto x tale che $f'(x) = 0$.

Teorema 4.4.4 (di Fermat)**.** *Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che I è un intervallo aperto (o un'unione di intervalli aperti). Se x_0 è un punto di massimo o minimo locale per f allora x_0 è un punto stazionario per f.*

Dimostrazione. Dimostreremo il risultato per il caso di un massimo locale, il caso di un minimo locale è analogo. Poiché f è derivabile allora per h sufficientemente piccolo abbiamo

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot r(h),$$

dove $r(h)$ è il rapporto incrementale prolungato anche a $h = 0$. Per definizione di massimo locale esiste $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sufficientemente piccolo tale che $f(x + h) \leq f(x)$ per ogni $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, quindi

$$\text{se } h > 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x) + h \cdot r(h) \Rightarrow h \cdot r(h) \leq 0 \Rightarrow r(h) \leq 0$$
$$\text{se } h < 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x) + h \cdot r(h) \Rightarrow h \cdot r(h) \leq 0 \Rightarrow r(h) \geq 0.$$

Quindi poiché $r(0)$ è un valore ben definito e la funzione r è continua in 0, allora tale valore deve essere necessariamente $r(0) = 0$. □

NOTA BENE. Osserviamo che se definiamo una funzione su un intervallo chiuso, quindi viene meno una delle ipotesi del Teorema di Fermat, allora viene meno anche la tesi. Ad esempio se $f(x) = ax + b$ definita su un intervallo chiuso come nell'Esempio 4.13, allora f assume un massimo e un minimo locale negli estremi.

NOTA BENE. Se una funzione non è ovunque derivabile sul proprio dominio, allora le ipotesi del Teorema di Fermat non sono verificate. Prendiamo il caso della funzione $|x|$ che non è derivabile nel punto $x = 0$. In effetti in tale punto si trova un minimo locale che è anche un minimo globale.

NOTA BENE. Osserviamo che un punto di massimo o minimo locale deve essere un punto stazionario ma **non** è vero il viceversa. Infatti per la funzione $f(x) = x^3$, il punto $x = 0$ è un punto stazionario ma non è un massimo né un minimo locale.

4.5. **Monotonia tramite le derivate.** Come abbiamo appena visto, i punti di massimo e minimo locale sono necessariamente punti in cui la derivata si annulla. Questo ci suggerisce di guardare la derivata per comprendere il comportamento di crescenza o decrescenza di una funzione.

Teorema 4.5.1. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e I un intervallo. Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente.*

In più, $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$ se e solo se f è crescente.

Analogamente, $f' < 0 \Rightarrow f$ strettamente decrescente. E in più, $f' \leq 0$ se e solo se f è decrescente.

NOTA BENE. La seconda tesi del teorema riguarda un'equivalenza: una funzione è crescente se e solo se la sua derivata è ovunque non negativa.

Invece non è valido il viceversa della prima tesi: esistono funzioni strettamente crescenti per cui la derivata non è sempre strettamente positiva, un esempio è la già citata funzione $f(x) = x^3$ che è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ ma per cui $f'(0) = 0$.

Il teorema precedente ci permette anche di ottenere alcune informazioni aggiuntive quando valutiamo massimi e minimi locali

Teorema 4.5.2 (Aggiornamento del Teorema di Fermat)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, dove I è un intervallo. Se $I = [x_0, x_1]$ oppure $[x_0, x_1)$ oppure $(x_0, x_1]$, allora ogni estremo del segmento che appartiene al segmento stesso è un massimo o un minimo locale. Denominiamo qui con x_0 l'estremo sinistro e con x_1 quello destro*

- *se $x_0 \in I$ e $f'(x_0) > 0$ si tratta di un massimo locale*
- *se $x_0 \in I$ e $f'(x_0) < 0$ si tratta di un minimo locale*
- *se $x_1 \in I$ e $f'(x_1) > 0$ si tratta di un minimo locale*
- *se $x_1 \in I$ e $f'(x_1) < 0$ si tratta di un massimo locale*

Esempio 4.16. Come abbiamo già visto un polinomio di primo grado $f(x) = ax + b$ è strettamente crescente se $a > 0$ mentre è strettamente decrescente se $a < 0$. Questo è coerente con il Teorema 4.5.1 perché $f' \equiv a$ costante.

Esempio 4.17. Come abbiamo visto la derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. La funzione f' quindi è strettamente negativa su tutto il dominio massimale, e pertanto f è strettamente decrescente sugli intervalli su cui è definita.

Attenzione! Questo non significa che f sia strettamente decrescente, infatti il suo dominio massimale è $\mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ che non è un intervallo, ma l'unione di due intervalli. Su questi intervalli f è strettamente decrescente ma dal teorema non possiamo dire niente sulla sua decrescenza globale e in effetti si osserva che globalmente f non è decrescente, ad esempio notando che $f(1) > f(-1)$.

Esempio 4.18. Consideriamo il polinomio di secondo grado $p(x) = x^2 + x + 1$. La sua derivata è il polinomio di primo grado $p'(x) = 2x + 1$. Si osserva che

$$\begin{cases} p'(x) < 0 & \text{se } x < -1/2 \\ p'(x) = 0 & \text{se } x = -1/2 \\ p'(x) > 0 & \text{se } x > -1/2 \end{cases}$$

quindi $p(x)$ è crescente nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e decrescente nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Nel punto $x = -\frac{1}{2}$ ha un punto stazionario che è un minimo globale. Tutto questo è sintetizzato nella Figura 21.

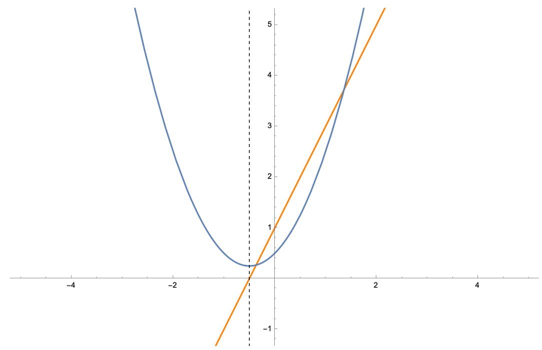


FIGURA 21. In blu la parabola che è grafico del polinomio $p(x) = x^2 + x + 1$. In arancione il grafico della derivata $p'(x) = 2x + 1$. La retta verticale indica il punto $x = -\frac{1}{2}$ in cui la derivata è nulla. A destra di questa retta $p'(x) > 0$ e quindi $p(x)$ è crescente. A sinistra $p'(x) < 0$ e quindi $p(x)$ è decrescente.

Esempio 4.19. Con lo stesso approccio dell'esempio precedente, osserviamo che se $f(x) = x^3$ allora $f'(x) = 3x^2$. La derivata quindi si annulla in $x = 0$ ma è strettamente positiva, $f'(x) > 0$, sia per $x > 0$ che per $x < 0$. Quindi la funzione è strettamente crescente sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, e pertanto il punto stazionario $x = 0$ non può essere né un punto di massimo locale né un punto di minimo locale.

Esempio 4.20. Nel caso del polinomio di grado 3, $q(x) = \frac{x^3}{3} - x$, abbiamo come derivata il polinomio di grado 2, $q'(x) = x^2 - 1$. Quindi i punti stazionari di $q(x)$ sono $x = \pm 1$, mentre il segno della derivata è

$$\begin{aligned} q'(x) &> 0 \text{ se } x > 1 \text{ OR } x < -1 \\ q'(x) &< 0 \text{ se } -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Pertanto la funzione cresce strettamente su $(-\infty, -1)$, poi decresce strettamente su $(-1, 1)$, e infine cresce strettamente su $(1, +\infty)$. Il punto $x = -1$ è un massimo locale e il punto $x = 1$ è un minimo locale. In entrambi i casi non si tratta di un massimo o minimo globale, poiché si possono individuare casi con valori maggiori/minori, ad esempio $x = \pm 100$.

Esempio 4.21. Un esempio molto importante è quello della funzione

$$f(x) = 1 + ax - (1 + x)^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

definita per $x > -1$. Osserviamo che se $a = 1$ allora la funzione è identicamente uguale a 0 Distinguiamo due casi da analizzare, il caso $0 < a < 1$ e il caso $a > 1$. In entrambi i casi ovviamente la funzione è ovunque derivabile e

$$f'(x) = a - a \cdot (1 + x)^{a-1} = a \cdot \left(1 - (1 + x)^{a-1}\right).$$

- se $0 < a < 1$, allora $a - 1 < 0$ e quindi abbiamo il seguente diagramma dei segni per la derivata
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ f'(x) = 0 & \text{se } x = 0 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
quindi $x = 0$ è un minimo globale su $(-1, +\infty)$
- se $a > 1$ allora $a - 1 > 0$ e il diagramma dei segni della derivata si ribalta,
$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ f'(x) = 0 & \text{se } x = 0 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
quindi $x = 0$ è un massimo global su $(-1, +\infty)$

Vedere la Figura 22 per il grafico della funzione per differenti valori di a.

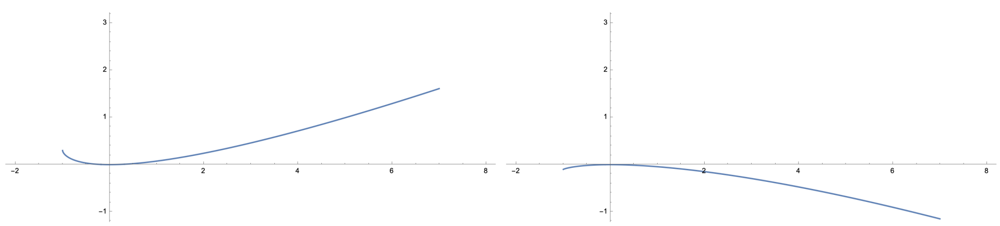


Figura 22. Grafico della funzione $f(x) = 1 + ax - (1 + x)^a$ nel caso $a = 0.7$ e $a = 1.1$.

4.6. **Derivata seconda.** La derivata prima f' di una funzione f è anch'essa una funzione, possiamo quindi chiederci se sia anch'essa derivabile. Se f' è derivabile, la sua derivata si chiama **derivata seconda** di f e viene indicata con la notazione f''. Ricorsivamente, possiamo ripetere questo ragionamento ottenendo la derivata terza, quarta, ecc.

Esempio 4.22. Un polinomio di grado d è derivabile infinite volte ma la derivata dopo la d-esima sono identicamente nulle. Consideriamo ad esempio $f(x) = x^3 - x + 4$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \\ f''''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Esempio 4.23. Le funzioni seno e coseno sono entrambe derivabili infinite volte e la loro derivata ha un comportamento "ciclico",

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \cos(x)\\ \sin''(x) &= \cos'(x) = -\sin(x)\\ \sin'''(x) &= -\cos(x)\\ \sin''''(x) &= \sin(x)\\ \cdots &\cdots\end{aligned}$$

Come abbiamo visto la derivata prima rappresenta la "variazione" di una funzione, quindi la derivata seconda rappresenta la variazione della derivata prima. Abbiamo visto precedentemente che sapere l'andamento della derivata prima ci permette di classificare i punti stazionari, in particolare

(1) se in un punto stazionario la derivata prima cambia di segno passando da negativa a positiva, allora si tratta di una zona in cui la funzione decresce e poi successivamente cresce, quindi il punto stazionario è un minimo locale;
(2) e in un punto stazionario la derivata prima cambia di segno passando da positiva a negativa, allora si tratta di una zona in cui la funzione cresce e poi successivamente decresce, quindi il punto stazionario è un massimo locale;
(3) se nel punto stazionario la derivata prima non cambia di segno, allora il punto considerato non può essere né un massimo locale né un minimo locale. Si parla in questo caso di **punto di sella**.

Questo elenco ci permette di dedurre il prossimo teorema.

Teorema 4.6.1. *Data una funzione derivabile due volte $f\colon I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo (o un'unione di intervalli), se x è un punto stazionario, allora*

(1) se $f''(x) > 0$, in x c'è un minimo locale
(2) se $f''(x) < 0$, in x c'è un massimo locale
(3) se $f''(x) = 0$, non possiamo dire se il punto considerato sia un massimo, un minimo o un punto di sella.

Esempio 4.24. Consideriamo un polinomio di grado due $f(x) = x^2 - x$. La derivata è $f'(x) = 2x - 1$ quindi l'unico punto stazionario è in $x = \frac{1}{2}$. La derivata seconda è $f''(x) = 2$ quindi si tratta di un minimo locale.

Esempio 4.25. Nel caso della funzione $f(x) = x^3$, il punto stazionario in $x = 0$ è un punto di sella. Infatti, $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$, dunque $f''(0) = 0$ e la derivata prima non cambia di segno tra $x < 0$ e $x > 0$.

Nel caso di $f(x) = x^4$, il punto stazionario in $x = 0$ è invece un minimo locale (e globale). Infatti, $f'(x) = 4x^3$ e $f''(x) = 12x^2$, dunque $f''(0) = 0$ e la derivata prima passa da negativa a positiva per x che passa da < 0 a > 0.

L'altra nozione importante collegata alla derivata seconda è quella di convessità.

Definizione 4.6.2. Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, si dice **convessa** se dati due punti qualsiasi del grafico di f, di coordinate $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, il segmento che li unisce si trova completamente al di sopra del grafico.

Una tale funzione si dice **concava** se il segmento che unisce tali due punti (qualsiasi) si trova completamente al di sotto del grafico.

NOTA BENE. Se $x_1 < x_2$ consideriamo l'intervallo $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$. Un punto di tale intervallo può essere scritto in funzione di un parametro $t \in [0, 1]$. Infatti se $x \in [x_1, x_2]$ allora $x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)$ con $0 \leq t \leq 1$. Se $t = 0$ allora $x = x_1$, se $t = 1$ allora $x = x_2$. Il punto corrispondente del segmento che unisce $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$ ha quindi le seguenti coordinate,

$$(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1),\ f(x_1) + t \cdot (f(x_2) - f(x_1)))\,.$$

La condizione di convessità si può quindi scrivere come

$$f(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t \cdot (f(x_2) - f(x_1)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Analogamente la condizione di concavità si può scrivere come

$$f(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t \cdot (f(x_2) - f(x_1)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Vedere anche Figura 23

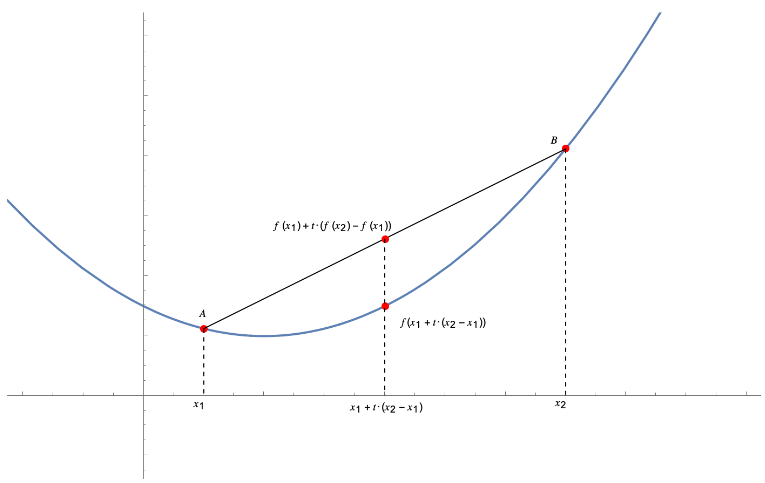


FIGURA 23. I punti A e B in figura hanno coordinate $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ rispettivamente. La funzione rappresentata è convessa, infatti tutti i punti del segmento AB si trovano sopra al grafico della funzione stessa.

Teorema 4.6.3. *Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte, dove I è un intervallo, tale funzione è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.*

Tale funzione è concava se e solo se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$.

Esempio 4.26. La convessità di ogni polinomio di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ è determinata dal primo coefficiente a. Infatti $f''(x) = 2a$ costante, quindi se $a > 0$ la funzione f è convessa, se $a < 0$ la funzione f è concava.

Esempio 4.27. Consideriamo il polinomio di terzo grado $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$, allora la derivata seconda del polinomio è $f''(x) = 6x$. Dal Teorema 4.6.3 ricaviamo che la funzione f è convessa sull'intervallo $[0, +\infty)$, è concava sull'intervallo $(-\infty, 0]$, mentre non è né concava né convessa se guardiamo tutto il dominio $\mathbb{R}$.

5. Limiti

5.1. **Proprietà definitive.** La nozione di **definitività** è fondamentale per introdurre i limiti. Questa nozione è associata al comportamento di una variabile x, per il quale distinguiamo tre casi,

- la variabile x cresce indefinitamente, cioè x tende all'infinito (si scrive $x \to +\infty$),
- oppure la variabile x decresce indefinitamente, cioè x tende a meno infinito (si scrive $x \to -\infty$),
- oppure x si avvicina a un numero reale finito x_0, cioè x tende a x_0 (si scrive $x \to x_0$).

Per ognuno di questi comportamenti, che descriveremo più precisamente nelle prossime definizioni, si dice che una certa funzione $f(x)$ può rispettare in maniera definitiva una proprietà.

Definizione 5.1.1. Sia $X \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo del tipo $(b, +\infty)$.

Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ verifica una certa proprietà P **definitivamente per** $x \to +\infty$ se esiste un numero reale $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x) \text{ rispetta } P \text{ per ogni } x \geq M.}$$

Esempio 5.1. Se P è la proprietà

$$P(y) = \text{“}y \geq 4\text{”}$$

allora la funzione $f(x) = x^2$ rispetta definitivamente la proprietà P per $x \to +\infty$, poiché per ogni $x \geq 2$ la proprietà è rispettata.

Esempio 5.2. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ rispetta definitivamente (per $x \to +\infty$) la proprietà di essere $< \frac{1}{2}$ poiché per ogni $x \geq M = 3$ si ha $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{M} < \frac{1}{2}$.

Definizione 5.1.2. Sia $X \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo del tipo $(-\infty, b)$.

Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ verifica una certa proprietà P **definitivamente per** $x \to -\infty$ se esiste un numero reale $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x) \text{ rispetta } P \text{ per ogni } x \leq m.}$$

Esempio 5.3. Se P è la proprietà

$$P(y) = \text{“}y \geq 4\text{”}$$

allora la funzione $f(x) = x^2$ rispetta definitivamente la proprietà P per $x \to -\infty$, poiché per ogni $x \leq -2$ la proprietà è rispettata.

Definizione 5.1.3. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo del tipo $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ con $\Delta \in \mathbb{R}^+$ reale positivo.

Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ verifica una certa proprietà P **definitivamente per** $x \to x_0$ se esiste un numero reale positivo $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\boxed{f(x) \text{ rispetta } P \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).}$$

Esempio 5.4. Se P è la proprietà

$$P(y) = \text{“}y \leq \frac{5}{4}\text{”}$$

allora la funzione $f(x) = x^2$ rispetta definitivamente la proprietà P per $x \to x_0 = 1$, poiché se $\delta = \frac{1}{2}$, per ogni $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ la proprietà è rispettata.

5.2. **Definizioni di limite.**

Definizione 5.2.1. Sia $X \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo del tipo $(b, +\infty)$.

Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, si dice che tende al **limite** $+\infty$ per $x \to +\infty$ e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

se per ogni $N \in \mathbb{R}$, f è definitivamente $\geq N$ per $x \to +\infty$. Quindi per ogni possibile scelta di N numero reale (cioè non importa quanto N sia grande), resta vero che f supera N e resta maggiore di N definitivamente.

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{R}\ \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall x \geq M,\ f(x) \geq N.}$$

Definizione 5.2.2. Sia $X \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo del tipo $(-\infty, b)$.

Una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, si dice che tende al **limite** $+\infty$ per $x \to -\infty$ e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

se per ogni $N \in \mathbb{R}$, f è definitivamente $\geq N$ per $x \to -\infty$.

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall x \leq m,\ f(x) \geq N.}$$

NOTA BENE. Queste due definizioni di limite possono essere facilmente generalizzate al caso di limite $-\infty$, semplicemente sostituendo la proprietà di essere $\leq N$ per ogni $N \in \mathbb{R}$. In tal caso si scriverà,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Esempio 5.5. Sia $f(x) = x^3$ allora mostriamo che

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

Per il primo caso osserviamo che dato $N \in \mathbb{R}$, se scegliamo $M = N^{\frac{1}{3}}$ allora per ogni $x \geq N$, $x^3 \geq N^3 = M$, rispettando la definizione di limite $+\infty$.

Nel secondo caso, dato $N \in \mathbb{R}$, scegliamo $m = N^{\frac{1}{3}}$ e ancora osserviamo che per ogni $x \leq N$, $x^3 \leq N^3 = m$, rispettando la definizione di limite $-\infty$. Nella Figura 24 il grafico di questa funzione

Definizione 5.2.3. Sia $X \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo del tipo $(b, +\infty)$.

Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

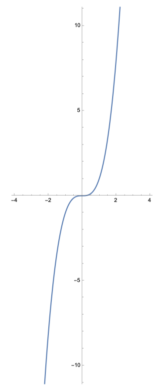


Figura 24. Grafico della funzione $f(x) = x^3$ dove si intuisce che i limiti per $x \to \pm\infty$ sono rispettivamente $\pm\infty$.

se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, vale definitivamente (per $x \to +\infty$) la disuguaglianza

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Quindi per ogni possibile scelta di $\varepsilon > 0$ (non importa quanto piccolo), la differenza $|f(x) - \ell|$ è definitivamente più piccola di ε per $x \to +\infty$.

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall x \geq M, \ |f(x) - \ell| < \varepsilon.}$$

Esempio 5.6. Mostriamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Infatti, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, prendiamo $M \in \mathbb{R}$ numero reale tale che $M > \frac{1}{\varepsilon}$. Allora, se $x \geq M$, per le proprietà delle disuguaglianze $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{M} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$, che è esattamente la definizione di limite cercata.

NOTA BENE. Anche in questo si generalizza con facilità la definizione al caso $x \to -\infty$.

Definizione 5.2.4. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo del tipo $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ con $\Delta \in \mathbb{R}^+$.

Data una funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, vale definitivamente (per $x \to +x_0$) la disuguaglianza

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ |f(x) - \ell| < \varepsilon.}$$

NOTA BENE. Osserviamo che la condizione $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è equivalente a richiedere che $|x - x_0| < \delta$.

5.3. **Continuità.** Tramite la nozione di limite siamo pronti per definire formalmente la nozione di continuità che avevamo introdotto solo in modo informale nella Sezione 4.1.

Definizione 5.3.1. x Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I (o un'unione di intervalli). Sia $x_0 \in I$, f si dice **continua in** x_0 se esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definizione equivalente,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I, \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$

Una funzione si dice **continua** se è continua in x_0 per ogni punto x_0 del dominio I.

Esempio 5.7. La maggior parte delle funzioni con cui abbiamo lavorato fino ad adesso sono continue, come i polinomi, le funzioni trigonometriche $\sin(x)$ e $\cos(x)$ o la funzione esponenziale e^x.

Esempio 5.8. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Allora tale funzione non è continua perché non è continua in 0. Infatti $f(x) = 1$ per ogni $x \in (0, \delta)$, $f(x) = -1$ per ogni $x \in (-\delta, 0)$ e $f(0) = 0$, quindi $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

NOTA BENE. Somma, differenza, prodotto e quoziente (quando il numeratore è $\neq 0$) di funzioni continue, sono ancora una funzione continua.

5.4. **Primi teoremi coi limiti.** Il primo teorema che enunciamo è necessario per poter affermare che la definizione di limite è "ben posta", cioè che nomina univocamente un numero.

Teorema 5.4.1 (Unicità del limite)**.** *Data una funzione $f(x)$ se un numero ℓ che soddisfa la definizione di limite esiste (per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$), allora tale numero è unicamente definito.*

NOTA BENE. Analogamente se $\lim f(x) = \pm\infty$, allora questi limiti sono univocamente identificati.

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, gli altri sono analoghi.

Supponiamo che esistano ℓ_1, ℓ_2 numeri reali distinti che soddisfano la definizione di limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$, e mostriamo che questo produce una contraddizione. Tramite la disuguaglianza triangolare abbiamo la seguente,

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x)\ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - f(x)| + |\ell_2 - f(x)|. \end{aligned}$$

Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$, vale la disuguaglianza $|f(x) - \ell_i| < \varepsilon$, per $i = 1, 2$ poiché per ipotesi la definizione di limite vale per entrambi.

Osserviamo che se $\ell_1 \neq \ell_2$, allora è possibile scegliere ε sufficientemente piccolo perché la disuguaglianza di sopra produca una contraddizione. Se infatti scegliamo $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$ allora

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|.$$

Quindi necessariamente $\ell_1 = \ell_2$. □

I prossimi teoremi riguardano il comportamento di funzioni di cui è possibile valutare il limite, oppure funzioni continue.

Teorema 5.4.2 (di permanenza del segno)**.** *Sia f una funzione e supponiamo che* $\lim f$ *esista e sia diverso da* 0*, per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$. Allora il segno di f è definitivamente lo stesso segno di* $\lim f$*.*

Quindi se stiamo considerando $\lim_{x \to x_0} f$*, allora esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in cui il segno di f è lo stesso del limite. Se invece stiamo considerando* $\lim_{x \to +\infty} f$*, allora esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che il segno di $f(x)$ è lo stesso di* $\lim f$ *per ogni $x \geq M$, e analogamente se $x \to -\infty$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il caso $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gli altri sono analoghi. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $\ell > 0$.

Data la definizione di limite, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se scegliamo ε sufficientemente piccolo, possiamo dimostrare che $f(x)$ deve essere positivo per ogni x che soddisfa la condizione di sopra. Supponiamo infatti di prendere $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ significa

$$f(x) \in \left(\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right),$$

che è un intervallo interamente incluso in $\mathbb{R}^+$, quindi $f(x) > 0$. □

Teorema 5.4.3. *Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione con dominio X illimitato dall'alto. Supponiamo che f sia crescente e limitata dall'alto oppure decrescente e limitata dal basso, allora*

(1) nel primo caso esiste il limite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup(f(X))$
(2) nel secondo caso esiste il limite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf(f(X))$*.*

NOTA BENE. Il teorema è analogamente vero se X è illimitato dal basso e in tal caso se $f(x)$ è crescente e limitata dal basso allora $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf(f(X))$ mentre se $f(x)$ è decrescente e limitata dall'alto allora $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup(f(X))$.

Dimostrazione. Dimostreremo il caso con $f(x)$ crescente e limitata dall'alto. Consideriamo $M = \sup(f(X))$, allora grazie al Teorema 2.5.3 sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_0 \in X$ con la proprietà che $M - \varepsilon < f(x_0) \leq M$. Poiché $f(x)$ è crescente, questo implica che $f(x) \geq f(x_0) > M - \varepsilon$ per ogni $x \geq x_0$. In più, $f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$ per definizione di M. Quindi per la definizione di limite abbiamo appena dimostrato che

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = M.$$

□

Esempio 5.9. Questo teorema viene utilizzato particolarmente per dimostrare l'esistenza di limiti di successioni. Osserviamo per esempio la successione $a_n = \frac{1}{n}$. In questo caso la successione è decrescente perché per ogni $n \geq 1$ si ha $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. In più, la successione (a_n) è limitata dal basso da 0 poiché tutti i termini sono strettamente positivi.

Questo è sufficiente per concludere l'esistenza del limite $\lim a_n$, che coinciderà con l'estremo inferiore dell'insieme $\{a_n : \ n \geq 1\}$.

Teorema 5.4.4 (di Bolzano, o degli Zeri)**.** *Consideriamo una funzione continua $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che f è non nulla e di segno opposto nei punti a e b, cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste $z \in (a,b)$ tale che $f(z) = 0$.*

Sketch della dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che $f(a) < 0 < f(b)$. Nel caso in cui si avesse invece $f(b)$ negativa e $f(a)$ positiva, il ragionamento sarebbe del tutto analogo.

Costruiamo due successioni $x_0, x_1, x_2, \dots$ e $y_0, y_1, y_2, \dots$ come segue. Sia $x_0 = a$ e $y_0 = b$, allora vogliamo costruire x_i, y_i in modo che sia vero che

$$f(x_i) < 0, \quad f(y_i) > 0 \ \ \forall i = 1, 2, \dots$$

Supponiamo di aver costruito le due successioni fino agli indici i_1 e i_2 rispettivamente, sempre verificano l'ipotesi sopra. Consideriamo adesso il punto medio $m = \frac{x_{i_1}+y_{i_2}}{2}$. Se $f(m) < 0$ allora scriviamo $x_{i_1+1} = m$, se $f(m) = 0$ allora abbiamo individuato il punto $z = m$ cercato. Infine, se $f(m) > 0$ fissiamo $y_{i_2+1} = m$. Sfruttando il teorema di permanenza del segno possiamo dimostrare che questa costruzione continua indefinitamente se non incappiamo nel caso $f(m) = 0$, e entrambe le successioni vengono costruire per $i_1, i_2 \to +\infty$.

Osserviamo che x_i è una successione crescente e limitata dall'alto da b, mentre y_i è decrescente e limitata dal basso da a, quindi entrambe hanno limite finito, denominati ℓ_x e ℓ_y rispettivamente. In più per costruzione $f(\ell_x) \leq 0$ mentre $f(\ell_y) \geq 0$. Osserviamo inoltre che $0 < (y_i - x_i) \leq \frac{b-a}{2^i}$, quindi $\lim(y_i - x_i) = 0$ e dunque $\ell_x = \ell_y = z$. Unendo tutte queste informazioni otteniamo la tesi cercata, $f(z) = 0$. □

Consideriamo una funzione come $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$. In questo caso il limite non esiste, perché $\frac{1}{|x|} \to +\infty$, ma per quanto si scelga $\delta > 0$ piccolo, in ogni intervallo $(-\delta, \delta)$, $\frac{1}{x}$ assume sia valori positivi che negativi. Osserviamo però che se ci limitiamo a osservare il comportamento negli intervalli $[0, \delta)$ o $(-\delta, 0]$, in effetti la successione ha di nuovo un comportamento analogo all'esistenza di un limite. Definiamo un nuovo tipo di limiti.

Definizione 5.4.5. Consideriamo $f \colon [x_0, M) \to \mathbb{R}$, si dice che esiste il limite di per f per x che converge a x_0 **da destra**, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta)$, vale la disuguaglianza

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Tale definizione si generalizza facilmente a $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

Consideriamo $f \colon (M, x_0] \to \mathbb{R}$, si dice che esiste il limite di per f per x che converge a x_0 **da sinistra**, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0]$, vale la disuguaglianza
$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
Tale definizione si generalizza facilmente a $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Esempio 5.10. Consideriamo la funzione $\frac{1}{3-x}$. Per ogni $M > 0$ considero $\delta = \frac{1}{M}$. Allora, se $x \in [3, 3 + \delta)$, si ha
$$\frac{1}{3-x} < \frac{1}{3 - \left(3 + \frac{1}{M}\right)} = -M,$$
mentre se $x \in (3 - \delta, 3]$, si ha
$$\frac{1}{3-x} > \frac{1}{3 - \left(3 - \frac{1}{M}\right)} = M.$$
Quindi,
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{3-x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{3-x} = +\infty.$$

NOTA BENE. Se i limiti di $f(x)$ per x che tende a x_0 da destra e da sinistra esistono e coincidono, allora esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste e coincide con essi.

Definizione 5.4.6. Supponiamo che una funzione f sia definita su un intervallo privato di un punto $I \backslash \{x_0\}$, cioè questo insieme è incluso nel dominio massimale di f. Allora si dice che f ha un **asintoto verticale** in x_0 se
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty,$$
questo quindi include anche il caso in cui il limite di f per $x \to x_0$ esista e sia $\pm\infty$.

5.5. **La derivata come limite.** Nella Sezione 4.1 abbiamo introdotto la derivata tramite un ragionamento non completamente formalizzato. Tramite la nozione di limite possiamo invece passare a una definizione precisa e formale. Abbiamo scritto la funzione f come
$$f(x + h) = f(x) + h \cdot r(h), \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \backslash \{0\}$$
per un certo $\delta > 0$, dove r è il rapporto incrementale
$$r(h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Definizione 5.5.1. La funzione f, definita su un intorno $(x - \delta, x + \delta)$, è derivabile in x se la funzione rapporto incrementale $r(h)$ associata a $f(x)$ può essere estesa per continuità in $h = 0$, cioè se esiste ed è finito il seguente limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$
Una funzione è derivabile se è derivabile in x per ogni punto x del suo dominio.

NOTA BENE. Se una funzione è definita su un intervallo chiuso $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, allora si definisce la derivata anche agli estremi prendendo il limite da destra o da sinistra,
$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad f'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Teorema 5.5.2. *Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo o un'unione di intervalli, se è derivabile allora è continua.*

Dimostrazione. Fissiamo $x \in I$, allora

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot r(h),$$

dove r è una funzione continua in $h = 0$, quindi esiste il limite di $f(x+h)$ per $h \to 0$, ed è necessariamente

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x),$$

che è la definizione di funzione continua in x. Visto che l'argomentazione può essere ripetuta per ogni $x \in I$, la dimostrazione è conclusa. □

Esempio 5.11. La funzione valore assoluto $|x|$ è l'esempio di una funzione continua ma non derivabile. Infatti, $|x|$ è continua ma per $x = 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

5.6. **Operazioni coi limiti.** Consideriamo due funzione $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ dove X è un opportuno insieme di numeri reali. In questa sezione enunceremo una serie di risultati che permettono di sapere il limite di $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oppure f/g a partire dai limiti di f e g. Come vedremo questi risultati sono validi per $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ oppure $x \to \pm\infty$, ma non tutte le combinazioni permettono di avere una risposta univoca, per cui in certi casi avremo bisogno di risultati più fini che saranno enunciati nelle prossime sezioni.

Teorema 5.6.1. *Date due funzioni f e g come sopra, se esistono* $\lim f$ *e* $\lim g$ *allora è possibile dire qual è il limite della funzione $f+g$ seguendo la seguente tabella, dove sulla prima riga è indicato* $\lim f$ *e sulla prima colonna è indicato* $\lim g$.

$f+g$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Dove abbiamo lasciato un "?" si tratta di casi con una forma indefinita per cui non può essere enunciato un risultato univoco.

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso in cui $\lim f = \ell_1$ e $\lim g = \ell_2$ per $x \to +\infty$, gli altri si fanno analogamente. Dato un certo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vogliamo mostrare che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$ nel dominio, vale $|f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$. Scegliamo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, allora per definizione esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$,

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon' \ \text{ e } \ |g(x) - \ell_2| < \varepsilon',$$

quindi

$$|f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < 2\varepsilon' = \varepsilon,$$

dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare e la definizione di ε'. Questo conclude la dimostrazione. □

Facciamo ora alcuni esempi che riguardano i casi indefiniti.

Esempio 5.12. Consideriamo $f(x) = x$ e $g(x) = -\frac{x}{2}$, che hanno limite $+\infty$ e $-\infty$ rispettivamente per $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

Se invece consideriamo $f(x) = x$ e $g(x) = -2x$, le due funzioni hanno gli stessi limiti per $x \to +\infty$, ma per il limite della somma si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty.$$

Quindi nei casi indefiniti marcati da "?", non è effettivamente possibile dare una risposta univoca.

Teorema 5.6.2. *Date due funzioni f e g come sopra, se esistono* $\lim f$ *e* $\lim g$ *allora è possibile dire qual è il limite della funzione $f \cdot g$ seguendo la seguente tabella, dove sulla prima riga è indicato* $\lim f$ *e sulla prima colonna è indicato* $\lim g$*.*

$f \cdot g$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Dove abbiamo lasciato un "?" si tratta di casi con una forma indefinita per cui non può essere enunciato un risultato univoco.

Per questi e i successivi casi non faremo una dimostrazione ma ci limiteremo. Enunciamo però un esempio relativo a un caso indefinito.

Esempio 5.13. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ e la succession $g(x) = \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$. Allora $\lim_{x\to+\infty} f \cdot g = +\infty$. Se invece $g(x) = \frac{1}{2x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f \cdot g = \frac{1}{2}$.

Il caso della differenza si ottiene a partire da quello della somma semplicemente osservando che $-g$ è la funzione $g(x)$ moltiplicata per la funzione costante -1, e quindi utilizzando i risultati legati al prodotto di limiti si ottiene facilmente la generalizzazione cercata.

Teorema 5.6.3. *Date due funzioni f e g come sopra, se esistono* $\lim f$ *e* $\lim g$ *allora è possibile dire qual è il limite della funzione $f - g$ seguendo la seguente tabella, dove sulla prima riga è indicato* $\lim f$ *e sulla prima colonna è indicato* $\lim g$*.*

$f - g$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 - \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Dove abbiamo lasciato un "?" si tratta di casi con una forma indefinita per cui non può essere enunciato un risultato univoco.

Teorema 5.6.4. *Date due funzioni* f *e* g *come sopra, se esistono* $\lim f$ *e* $\lim g \neq 0$ *allora è possibile dire qual è il limite della funzione* $\frac{f}{g}$ *seguendo la seguente tabella, dove sulla prima riga è indicato* $\lim f$ *e sulla prima colonna è indicato* $\lim g$.

$\frac{f}{g}$	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	?	?
$-\infty$	0	?	?

Dove abbiamo lasciato un "?" si tratta di casi con una forma indefinita per cui non può essere enunciato un risultato univoco.

Se in più sappiamo che $\lim g = 0$ *e* g *è definitivamente positiva o negativa, allora possiamo scrivere* $\lim g = 0^+$ *oppure* $\lim g = 0^-$ *e abbiamo degli ultreriori risultati*

$\frac{f}{g}$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Una variante di questi teoremi ci permette di dire cosa accade quando la seconda funzione non ha limite ma è limitata

Teorema 5.6.5. *Se* $\lim f = \pm\infty$ *e* g *è una funzione limitata, allora*

$$\exists \lim f + g = \lim f = \pm\infty.$$

Se $\lim f = 0$ *e* g *è una funzione limitata, allora*

$$\exists \lim f \cdot g = 0.$$

Se $\lim f = \pm\infty$ *e* $M_1 < g < M_2$ *dove* $M_1, M_2 > 0$ *entrambi, allora*

$$\exists \lim f \cdot g = \lim f = \pm\infty.$$

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso $\lim x \to +\infty f(x) = 0$ e g limitata. In tal caso, esiste $K \in \mathbb{R}^+$ tale che $|g(x)| < K$ per ogni x nel dominio. Per definizione di limite per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $M \in \ R$ tale che per ogni $x \geq M$, $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$. Quindi

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon \quad \forall x \geq M.$$

Per la definizione di limite questo prova il nostro risultato. □

5.7. **Altri teoremi sui limiti.** I seguenti teoremi sono strumenti fondamentali per poter lavorare coi limiti di funzioni non elementari.

Teorema 5.7.1. *Siano $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ due funzioni, supponiamo che esista un numero reale che è il limite per $x \to x_0$ di entrambe le funzioni, oppure il limite per $x \to \pm\infty$ di entrambe le funzioni.*

In più, supponiamo che $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in X \backslash \{x_0\}$ se stiamo considerando il caso di $x \to x_0$. Oppure $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in X$ se stiamo considerando i casi $x \to \pm\infty$.

Allora,

$$\lim f(x) \geq \lim g(x)$$

Dimostrazione. Questo teorema ci dice che la disuguaglianza $\geq$ "passa al limite". Affrontiamo il caso $x \to +\infty$, gli altri si svolgono analogamente. Sia

$$\ell_f = \lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ e } \ell_g = \lim_{x \to +\infty} g(x).$$

Supponiamo per assurdo che $\ell_f < \ell_g$ e consideriamo

$$\varepsilon = \frac{\ell_g - \ell_f}{3}.$$

Allora per definizione di limite esiste M tale che per ogni $x \geq M$ si ha

$$|f(x) - \ell_f| < \varepsilon \text{ e } |g(x) - \ell_g| < \varepsilon.$$

Allora, $f(x) \leq \ell_f + \varepsilon < \ell_g - \varepsilon$ che è in contraddizione con $f(x) \geq g(x)$. □

NOTA BENE. Osserviamo che per l'ultimo teorema, se $f(x) \geq c$ per ogni x, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante, allora $\lim f(x) \geq c$. Questo risultato si ottiene semplicemente considerando $g(x) = c$ la funzione costante nelle ipotesi del teorema.

Teorema 5.7.2 (di sostituzione)**.** *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli di cui J aperto, e $f\colon I \to J$ $g\colon J \to \mathbb{R}$ due funzioni, con g continua. Se $x_0 \in I$ e $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in J$, allora*

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(\ell).$$

Lo stesso risultato è valido se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ oppure $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

Se I è illimitato a destra o sinistra (quindi contiene un intervallo del tipo $(b, +\infty)$ o $(-\infty, b)$), e $\exists \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in J$, allora

$$\exists \lim_{x \to \pm\infty} g(f(x)) = g(\lim_{x \to \pm\infty} f(x)) = g(\ell).$$

Se in uno dei casi precedenti si ha $\lim f(x) = \pm\infty$, J è illimitato a destra o sinistra e $\exists \lim_{y \to \pm\infty} g(y)$, allora

$$\exists \lim g(f(x)) = \lim_{y \to \pm\infty} g(y).$$

Se $f\colon I \to J$ e $g\colon J \backslash \{\ell\} \to \mathbb{R}$, consideriamo un caso in cui $\lim f(x) = \ell$ ma la funzione f non assume il valore ℓ (definitivamente), ed esiste il limite $\lim_{y \to \ell} g(y)$, allora

$$\exists \ \lim g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y).$$

Dimostrazione. Ci limitiamo a dimostrare il primo caso. In questo caso per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, vale la disuguaglianza

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ora osserviamo che per la definizione di funzione continua, per ogni $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$, esiste $\delta' \in \mathbb{R}^+$ tale che se $y \in (\ell - \delta', \ell + \delta')$, allora

$$|g(y) - g(\ell)| < \varepsilon'.$$

Visto che il primo ε era scelto in modo arbitrario, osserviamo che imponendo $\varepsilon = \delta'$, si ottiene che per definizione

$$|g(f(x)) - g(\ell)| < \varepsilon' \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

che è esattamente la tesi che stavamo cercando di dimostrare. □

Esempio 5.14. Consideriamo la funzione composta $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, in questo caso la funzione interna $\frac{1}{x}$ è definita su $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$, mentre $\sin(x)$ è definita $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ed è continua. Per il teorema sopra, poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\sin(0) = 0$, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \sin(y) = 0.$$

Esempio 5.15. Un esempio più complesso. Consideriamo il limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{b^x} = 0 \quad \forall b > 1,$$

che enunciamo senza dimostrazione. A partire da questo limite è è possibile ottenere il limite della funzione $\frac{\log_b(x)}{x}$. Consideriamo infatti $g(x) = \frac{x}{b^x}$ e $f(x) = \log_b(x)$. Abbiamo allora che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, e per la continuità di g, allora

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{b^x} &= \lim_{x\to+\infty} g(x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b(x)}{x}. \end{aligned}$$

Teorema 5.7.3 (del confronto o "dei carabinieri")**.** *Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ e supponiamo che esistano $g, h\colon X \to \mathbb{R}$ tali che $g(x) \le f(x) \le h(x)$ per ogni x nel dominio. Supponiamo in più che i seguenti limiti siano definiti per $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ oppure $x \to \pm\infty$,*

$$\exists \lim g(x) = \lim h(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

allora esiste anche l'analogo limite per $f(x)$ e

$$\exists \lim f(x) = \ell.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $\lim h(x) - g(x) = 0$. Inoltre consideriamo adesso la differenza $|f(x) - \ell|$ e tramite l'uso della disuguaglianza triangolare otteniamo la seguente disuguaglianza,

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &= |f(x) - g(x) + g(x) - \ell| \\ &\le |f(x) - g(x)| + |g(x) - \ell| \\ &\le (h(x) - g(x)) + |g(x) - \ell|, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $g \leq f \leq h$ in ogni punto del dominio. Poiché $g(x) \to \ell$ e $(g-h) \to 0$, allora esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \geq M$,

$$h(x) - g(x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |g(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, per la disuguaglianza sopra questo implica

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \geq M,$$

e questo conclude la dimostrazione. $\square$

NOTA BENE. Una variante del teorema dei carabinieri per funzioni divergenti afferma che se $g \leq f$ e $\lim g(x) = +\infty$, allora esiste $\lim f(x) = +\infty$.

Se $f \leq g$ e $\lim g(x) = -\infty$, allora esiste $\lim f(x) = -\infty$.

Esempio 5.16. Il teorema del confronto permette di dimostrare un limite notevole molto importante, cioè il limite della frazione $\frac{\sin(x)}{x}$ per $x \to 0$. È un fatto geometrico noto che vale la seguente catena di disuguaglianze,

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) \quad \forall x \geq 0.$$

Se dividiamo per $\sin(x)$ per ogni $x > 0$, otteniamo

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}.$$

Se $g(x) = 1$ e $h(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ allora sono rispettate le ipotesi del teorema del confronto per $x \to 0^+$, quindi

$$\exists \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Con semplici considerazioni di parità della funzione si osserva che il limite esiste e ha lo stesso valore anche per $x \to 0^-$, quindi tale limite esiste per $x \to 0$.

5.8. **Limiti di successioni.** Una successione è una funzione il cui dominio sono i numeri naturali $\mathbb{N}$. Come abbiamo già visto per una successione si usa la notazione $f(n)$ o anche f_n, dove $n \in \mathbb{N}$ è l'argomento. Per indicare una successione nella sua interezza (e non i singoli termini) si usa la notazione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o semplicemente (f_n) quando la variabile è chiara dal contesto.

Rispetto alle definizioni che abbiamo dato, l'unico limite che ha senso nel caso di una successione (f_n) è il limite per $n \to +\infty$. Infatti, se si sceglie $n_0 \in \mathbb{N}$, per un intorno sufficientemente piccolo I di n_0, I contiene il solo elemento n_0, e quindi il limite per $n \to n_0$ è sempre e solo il valore della successione $f(n_0)$ se definito, cioè non porta informazioni aggiuntive. Per questo a volte quando si indica il limite di una successione si omette l'indicazione degli indici scrivendo semplicemente $\lim f_n$.

In generale il calcolo dei limiti di successioni si svolge in maniera analoga a qualsiasi altra funzione, ma a volte la particolare struttura dei numeri naturali permette procedimenti specifici a questi casi.

Esempio 5.17. Nel caso della successione $f_n = \frac{1}{n}$ il limite vale

$$\lim f_n = 0,$$

e questa dimostrazione può essere svolta come nel caso di $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$ per una funzione definita su $\mathbb{R}^+$.

Esempio 5.18. Consideriamo la successione $f_n = b^{\frac{1}{n}}$, con $b \in \mathbb{R}$ e $b > 1$. Allora, $\lim f_n = 1$. Infatti per ogni $n \geq 2$ consideriamo $(1+\varepsilon)^n$, come già visto vale la disuguaglianza

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Scegliamo quindi $M = \frac{b-1}{\varepsilon}$, allora per ogni $n \geq M$ si ottiene

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon \geq b > 1.$$

Poiché l'elevamento a potenza $\frac{1}{n}$ è una funzione crescente per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, allora se si applica a questa disuguaglianza si ottiene

$$1 + \varepsilon > b^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \forall n \geq M,$$

che per definizione di limite ci fornisce il risultato desiderato.

Si dice che una successione è definita **per ricorrenza** quando il termine f_n è determinato dal termine precedente f_{n-1} o da al più k tra i termini precedenti con k finito.

Esempio 5.19. Nel caso di una successione **geometrica**,

$$f_{n+1} = c \cdot f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si dimostra per induzione che $f_n = c^n \cdot f_0$. Infatti, per $n = 0$ la formula è automaticamente verificata, e se è verificata per un certo $n \in \mathbb{N}$, allora $f_{n+1} = c \cdot (c^n f_0) = c^{n+1} f_0$.

Esempio 5.20. La successione di Fibonacci è determinata fissati i valori $f_0 = f_1 = 1$, e successivamente definendo

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

Un rapido calcolo ci permette di valutare i primi termini della successione, $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$.

Teorema 5.8.1. *Date due successioni $(a_n), (b_n)$, se esse convergono allo stesso limite finito $\ell \in \mathbb{R}$, allora*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, allora per definizione di limite esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \geq M$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$ e $|b_n - \ell| < \varepsilon$. Quindi

$$|a_n - b_n| = |a_n - \ell + \ell - b_n| \leq |a_n - \ell| + |b_n - \ell| < 2\varepsilon \quad \forall n \geq M,$$

dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare. Quindi per definizione di limite, $\lim a_n - b_n = 0$. □

Teorema 5.8.2. *Consideriamo le successioni $(a_n), (b_n)$. Se esiste il limite della successione (a_n) e esiste il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0,$$

allora esiste il limite della successione (b_n) e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$b_n = a_n + (b_n - a_n),$$

quindi b_n è ottenuta sommando due successioni di cui per ipotesi conosciamo i limiti. Quindi grazie ai risultati sulle operazioni coi limiti, la tesi segue. □

Teorema 5.8.3. *Se (f_n) è una successione per la quale esiste limite finito, allora*

$$\exists \lim_{n\to+\infty}(f_{n+1} - f_n) = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo le due successioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, di cui la seconda è uguale alla prima ma traslata di una posizione, cioè nella posizione n-esima si ha il termine f_{n+1} per ogni n. Allora grazie al Teorema 5.8.2, il risultato segue. □

Una **serie** è una particolare successione che è definita a partire da un'altra successione. Consideriamo ad esempio la successione f_n, $n \in \mathbb{N}$, la serie s_n si definisce come

$$s_n = f_1 + \cdots f_n = \sum_{i=0}^{n} f_i,$$

quindi è la somma dei primi n termini di f_n. L'esistenza del limite di una serie si indica con la notazione seguente,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} f_i = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i.$$

Esempio 5.21. Supponiamo che $f_n = (-1)^n$, la successione alternante tra 1 e -1. Allora $s_n = 1$ se n è pari, mentre $s_n = -1$ se n è dispari. Quindi la successione s_n non ha limite.

Esempio 5.22. Consideriamo la successione aritmetica $f_n = a + c \cdot n$ con $a, c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. Allora la serie aritmetica è

$$s_n = \sum_{i=0}^{n}(a + ci) = a + c \cdot \sum_{i=0}^{n} i = a + c \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

grazie al risultato dell'Esempio 1.24. Dunque

$$\lim s_n = \sum_{i=0}^{+\infty} f_n = \pm\infty,$$

con il segno che dipende dal segno di c.

Esempio 5.23. Consideriamo la successione geometrica $f_n = c^n \cdot f_0$ con $c \in \mathbb{R}^+$, allora come visto nell'Esempio 1.25, se $c \neq 1$ allora

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} f_i = f_0 \cdot \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

Questa successione ha limite finito se e solo se $0 < c < 1$. Infatti se $0 < c < 1$ allora $c^{n+1} \to 0$, e quindi

$$\exists \sum_{i=0}^{+\infty} c^i = \frac{1}{1 - c}.$$

Se invece $c \geq 1$, abbiamo due casi: se $c = 1$ allora $s_n = n$, mentre se $c > 1$ allora $c^{n+1} \to +\infty$ e $\frac{1-c^{n+1}}{1-c}$ diverge a $+\infty$ perché il denominatore è negativo. In entrambi i casi

$$\exists \lim s_n = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i = +\infty.$$

5.9. **Alcuni limiti notevoli.**

- Abbiamo dimostrato nell'Esempio 5.16 che

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.}$$

Questo risultato ci permette di ottenerne un altro, consideriamo infatti il rapporto $g(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ per $x \to 0$: se applichiamo il cambio di variabile $y = f(x) = \frac{x}{2}$, abbiamo che il numeratore diviene $1 - \cos(2x) = 1 - \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 2\sin(x)^2$. Dunque, per le proprietà dei limiti con sostituzione, poiché $f(x) \to 0$ quando $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y)}{y^2} &= \lim_{y\to 0} g(y) \\
&= \lim_{x\to 0} g(f(x)) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)^2}{4x^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

usando le proprietà delle operazioni coi limiti.

Esempio 5.24. Il limite sopra indicato ci permette di calcolare la derivata della funzione $\sin(x)$ che avevamo solo enunciato nella Sezione 4.2. Consideriamo infatti il rapporto incrementale

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}.$$

Per le proprietà della funzione seno, $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$. Osserviamo che $\cos(h) \to 1$ quando $h \to 0$, quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h)-1) + \sin(h)\cos(x)}{h} \\
&= \sin(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\frac{\sin(h)}{h} \to 1$ e anche il fatto che $\frac{1-\cos(h)}{h^2} \to \frac{1}{2}$, dunque

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h^2} \cdot h = 0.$$

- Consideriamo la successione $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, allora il limite di questa successione esiste ed è un numero reale irrazionale compreso tra 2 e 3, denotato con la lettera e e chiamato "numero di Nepero". Nella Appendice B mostriamo nel dettaglio la convergenza di questa successione,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

Il numero di Nepero è molto importante e come vedremo accumula molte proprietà.

- Per ogni base $b \in \mathbb{R}^+$, la funzione $\frac{b^x-1}{x}$ ammette un limite per $x \to 0$. L'unico numero per cui tale limite vale esattamente 1 è ancora il numero di Nepero e,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.}$$

Esempio 5.25. Questo risultato permette di calcolare la derivata della funzione esponenziale e^x, infatti

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h-1}{h},$$

e quindi il limite del rapporto incrementale esiste in ogni punto e vale esattamente

$$f'(x) = e^x.$$

Denominiamo **logaritmo naturale** il logaritmo in base e,

$$\ln(x) = \log_e(x).$$

Osserviamo che tramite i risultati precedenti è possibile calcolare la derivata di b^x per ogni base reale $b \in \mathbb{R}^+$. Infatti $b^x = e^{\ln(b)\cdot x}$ e quindi per le proprietà di derivazione delle funzioni composte,

$$\exp_b'(x) = \ln(b)\cdot e^{\ln(b)x} = \ln(b)\cdot b^x.$$

Esempio 5.26. Questo ci permette anche di valutare la derivata del logaritmo naturale. Infatti per la proprietà di derivazione della funzione inversa (vedere Sezione 4.3) si ha che se $y = f(x) = e^x$, allora

$$\ln'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

- Consideriamo la sostituzione $y = f(x) = \ln(1+x)$. Chiaramente se $x \to 0$ allora $y \to \ln(1) = 0$. Consideriamo quindi la funzione $g(x) = \frac{e^x-1}{x}$, di cui conosciamo il limite dal punto precedente. Allora per la proprietà dei limiti con sostituzione, otteniamo

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} g(y) = 1.}$$

5.10. **Classificazione dei punti di non-derivabilità di una funzione.** La nozione di limite ci permette anche di classificare in 3 categorie i punti in cui una funzione non è derivabile.

NOTA BENE. Non tutti i punti dove una funzione non è derivabile (dove cioè non esiste un limite del rapporto incrementale per $h \to 0$) rientrano in queste tre casistiche. Si tratta comunque dei tre casi principali e vogliamo dar loro una denominazione specifica.

(1) I **punti angolosi** sono quei punti in cui i limiti al rapporto incrementale da destra e da sinistra esistono e sono finiti, ma non coincidono

$$\exists \ell = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \ell'.$$

Un esempio classico di un punto angoloso è il punto $x = 0$ nella funzione valore assoluto $|x|$.

(2) I **flessi a tangente verticale** (o punti di flesso a tangente verticale), sono quei punti in cui il limite del rapporto incrementale esiste ma è uguale a $\pm\infty$, e pertanto definire il valore $f'(x)$ è impossibile.

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \pm\infty.$$

Un esempio di flesso a tangente verticale si ha nel caso della funzione $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ nel punto $x = 0$.

(3) Una **cuspide** è un punto in cui esistono i limiti dei rapporti incrementali da destra e da sinistra, essi sono infiniti e l'uno l'opposto dell'altro,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \mp\infty.$$

Un esempio di cuspide si ha nel caso della funzione $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$ nel punto $x = 0$.

6. Sviluppo di Taylor

6.1. **Gerarchia di infiniti e infinitesimi.** Si chiamano "infiniti" o "infinitesimi" quelle funzioni che hanno come limite rispettivamente $\pm\infty$ o 0 (per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$). In questo senso si può parlare di "ordine di infinito" o "ordine di infinitesimo" per parlare della velocità con cui una certa funzione si avvicina al proprio limite $\pm\infty$ oppure 0.

Quello di **ordine di crescita** (o di convergenza a 0) è un concetto relativo, nel senso che ci dice se una funzione ha ordine maggiore di un'altra. Consideriamo ad esempio due funzioni che divergono a $+\infty$ come x e x^2, si dice che

> x ha un ordine di infinito, o di divergenza, maggiore di x^2 per $x \to +\infty$, perché $x \to +\infty$ e $x^2 \to +\infty$ e in più $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$.

> Analogamente si dice che x^2 ha un ordine di infinitesimo maggiore di x per $x \to 0$ perché $x \to 0$ e $x^2 \to 0$ e in più $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

Definizione 6.1.1. Supponiamo di avere due funzioni $f(x) \to \pm\infty$ e $g(x) \to \pm\infty$, allora si dice che $f(x)$ ha un ordine di infinito minore di $g(x)$ oppure che $f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$ (per $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ oppure $x \to \pm\infty$) se

$$\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

In questo caso si scrive $f = o(g)$ lasciando implicito il comportamento di x, cioè $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$.

Definizione 6.1.2. Supponiamo di avere due funzioni $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$, allora si dice che $f(x)$ ha un ordine di infinitesimo maggiore di $g(x)$ oppure che $f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$ (per $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ oppure $x \to \pm\infty$) se

$$\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Come prima si scrive $f = o(g)$.

Esempio 6.1. Consideriamo una funzione derivabile $f(x)$, allora per definizione di derivata in x_0,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o(h).$$

Infatti

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0)}{h} = 0,$$

e quindi per definizione $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + R(h)$ dove $R(h) = o(h)$, cioè $\frac{R(h)}{h} \to 0$ per $h \to 0$. Questa espressione è il primo step per lo sviluppo di Taylor di f in x_0.

Questa uguaglianza talvolta viene riscritta prendendo $x = x_0 + h$ e considerando il comportamento della funzione per $x \to x_0$. Allora,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0).$$

NOTA BENE. Chiaramente se $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ e $g(x) \to \pm\infty$ allora $f = o(g)$.

Possiamo adesso elencare una serie di "infiniti" e "infinitesimi" ordinandoli secondo maggiore o minore ordine.

- Per ogni coppia di numeri reali $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, se $x \to +\infty$ allora tra gli elevamenti x^{r_1} e x^{r_2}, ha ordine di infinito maggiore la funzione con esponente maggiore, cioè se $r_1 > r_2$ allora
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{r_1}}{x^{r_2}} = \lim_{x\to+\infty} x^{r_1-r_2} = +\infty,$$
perché in tal caso $r_1 - r_2 > 0$. Quindi se $x \to +\infty$ e $r_1 > r_2$, allora $x^{r_2} = o(x^{r_1})$.

- Analogamente, se $x \to 0$, è ancora l'elemento con esponente maggiore a avere ordine di infinitesimo maggiore, poiché
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{r_1}}{x^{r_2}} = \lim_{x\to 0} x^{r_1-r_2} = 0.$$
Quindi se $x \to 0$ e $r_1 > r_2$ allora $x^{r_1} = o(x^{r_2})$.

- L'esponenziale e^x "vince" su tutti gli elevamenti x^r per $x \to +\infty$, nel senso che per ogni numero reale $r \in \mathbb{R}$, $x^r = o(e^x)$. Dimostreremo questo risultato formalmente più avanti grazie al Teorema di de l'Hôpital 6.2.2, in particolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

- Se $x \to -\infty$ allora $e^x \to 0$, cioè lo stosso comportamento di $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ dove n è un naturale positivo. Allora,
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^{-n}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^{-n}} = \lim_{x\to+\infty} \pm\frac{x^n}{e^x} = 0.$$
Quindi $e^x = o(x^{-n})$ per $x \to -\infty$ e n naturale positivo.

- Dal fatto che $x = o(e^x)$ per $x \to +\infty$ si può ricavare che $\ln(x) = o(x)$. Entrambe le funzioni tendono a $\to +\infty$, in più con la sostituzione $y = \ln(x)$, si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

- Vogliamo infine paragonare il comportamento di x e $\ln(x)$ per $x \to 0^+$. La prima tende a $\to +\infty$ mentre la seconda a $\to -\infty$. Vogliamo ora cercare il termine che ha ordine di infinito maggiore. Con il cambio di variabile $y = -\ln(x)$, cioè $x = e^{-y}$, si ha che $y \to +\infty$ quando $x \to 0^+$, allora per la regola dei limiti con le sostituzioni si ottiene
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) &= \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cdot y \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0.\end{aligned}$$
Quindi $\ln(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

6.2. **Teoremi di Lagrange e de l'Hôpital.** I prossimi due teoremi forniscono due strumenti tecnici essenziali per le tecniche che apprenderemo in seguito.

Teorema 6.2.1 (di Lagrange)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e I un intervallo, consideriamo $a, b \in I$, allora esiste $x \in [a, b]$ tale che il valore della derivata $f'(x)$ coincide con il rapporto incrementale tra gli estremi a e b, cioè,*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

NOTA BENE. Come si può vedere nella Figura 25, il significato geometrico di questo teorema è che esiste un punto $x \in [a, b]$ (denominato c nella figura) tale che la tangente al grafico in quel punto è parallela alla retta che congiunge i punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Il significato del rapporto incrementale $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è infatti l'inclinazione di tale retta.

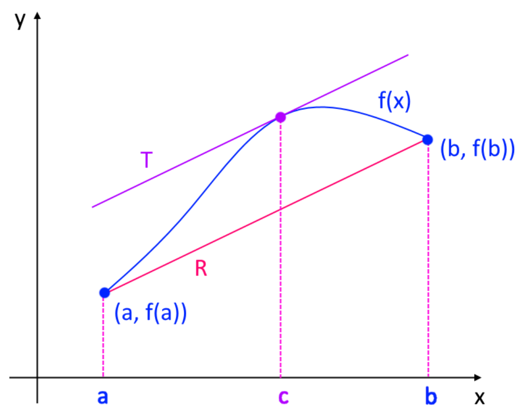


FIGURA 25. Nella figura, R è la retta che congiunge $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, mentre T è la tangente in $(c, f(c))$.

Sketch di dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ definita $[a, b] \to \mathbb{R}$. Osserviamo che $g(a) = g(b) = 0$. Se $g(x)$ è costante, allora

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

e la derivata $f'(x)$ è uguale in ogni punto proprio a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Se invece $f(x)$ non è costante, allora $f(x)$ ha necessariamente un massimo o un minimo globale in un punto $x = x_0 \in (a, b)$. In tale punto per il teorema di Fermat 4.4.4 deve valere $g'(x_0) = 0$, e poiché

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

possiamo concludere. □

Teorema 6.2.2 (di de l'Hôpital)**.** *Siano f, g funzioni derivabili tali che per $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ oppure $x \to \pm\infty$, siano entrambe infinite o infinitesime, cioè $\exists \lim f = \lim g = \pm\infty$*

oppure $\exists \lim f = \lim g = 0$. *Allora*

$$\left(\exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \Rightarrow \exists \lim \frac{f(x)}{g(x)},$$

cioè l'esistenza del limite del rapporto tra le derivate implica l'esistenza del limite del rapporto tra le due funzioni nei casi indeterminati che erano rimasti marcati con "?" nelle tabelle della Sezione 5.6.

In più se tale limite esiste, allora

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esempio 6.2. Consideriamo uno dei limiti notevoli che abbiamo visto in precedenza, cioè il rapporto $\frac{\sin(x)}{x}$ per $x \to 0$. In questo caso ci troviamo nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, cioè sia il numeratore che il denominatore convergono a 0. Il limite del rapporto tra le due derivate è più facile da calcolare, infatti

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Abbiamo dimostrato nuovamente lo stesso risultato.

Esempio 6.3. Consideriamo le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = e^x$ per $x \to +\infty$. In questo caso ci troviamo di fronte a due infiniti, quindi nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite del rapporto tra le due derivate esiste,

$$\exists \lim_{x\to+\infty} 1e^x = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = o.$$

Esempio 6.4. L'uso del Teorema di de l'Hôpital ci permette di dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi di conseguenza lo stesso risultato è vero per ogni esponente reale r. Prendiamo $f(x) = x^n$ e $g(x) = e^x$. Il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è in una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ per $x \to +\infty$. Prendendo le derivate di numeratore e denominatore otteniamo $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{nx^{n-1}}{e^x}$, e se $n > 1$ si tratta ancora di una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Continuiamo a derivare, e dopo n passaggi otteniamo

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{e^x},$$

che non è più una forma indeterminata. Abbiamo indicato con $f^{(n)}(x)$ la derivata n-esima di f. Il numero al numeratore è detto **fattoriale di** n e indica il prodotto dei primi n numeri naturali.

A questo punto osserviamo che

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = 0,$$

e quindi applicando "come in un effetto domino" n volte il Teorema di de l'Hôpital, si ottiene

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

6.3. **Il polinomio di Taylor.** Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile, dove I è un intervallo o un'unione di intervalli, consideriamo un punto $x \in I$, allora possiamo definire il **primo polinomio di Taylor** di f in x, anche detto polinomio di Taylor di ordine 1,

$$P_{1,f}(h) = f(x) + h \cdot f'(x).$$

In questo caso quindi $f(x)$ e $f'(x)$ sono due coefficienti costanti.

Come abbiamo visto nell'Esempio 6.1, possiamo considerare $h \to 0$ e scrivere

$$f(x+h) = P_{1,f}(h) + o(h),$$

formalizzando l'idea secondo cui $P_{1,f}$ si comporta come una approssimazione di $f(x+h)$ per h vicino a 0.

Un'altra maniera di scrivere il comportamento del polinomio di Taylor è fissare $x_0 \in I$ e lasciare x come nome per la variabile, allora $P_{1,f}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ e

$$f(x) = P_{1,f}(x) + o(x - x_0).$$

Alcuni testi indicano $T_{1,f}$ come notazione per il polinomio di Taylor.

Per ogni grado n cerchiamo un polinomio di grado n che approssimi una funzione derivabile n volte. Prima di raggiungere questo risultato, osserviamo che relazione c'è tra un polinomio e le sue derivate.

Lemma 6.3.1. *Sia $p(x)$ è un polinomio di grado d tale che*

$$p(x) = c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

allora per ogni $k = 1, 2, \ldots, d$, la derivata k-esima di p valutata in 0 è

$$p^{(k)}(0) = k! \cdot c_k.$$

Sketch della dimostrazione. Si osserva che la derivata k-esima di un elevamento a potenza vale

$$(x^n)^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1) \cdot x^{n-k},$$

dove nel prodotto appaiono i più grandi k numeri naturali $\leq n$. Se $k > n$ allora la derivata qui sopra fa costantemente 0.

Allora se deriviamo k volte il polinomio $p(x)$, otteniamo

$$p^{(k)}(x) = (\text{vari termini di grado } \geq 1) + k! \cdot c_k = (\text{vari termini}) \cdot x + k! \cdot c_k.$$

Quindi valutando tale espressione in $x = 0$ si raggiunge il risultato. □

Un modo equivalente per scrivere il risultato del lemma precedente, è la riscrittura del polinomio $p(x)$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) \cdot x^k.$$

oppure anche centrando lo sviluppo polinomiale attorno a $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k!} p^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k.$$

Definizione 6.3.2. Data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile d volte in x_0, si chiama **polinomio di Taylor di grado** d sviluppato intorno a x_0, il polinomio

$$P_{d,f}(h) = \frac{1}{d!} f^{(d)}(x_0) \cdot h^d + \frac{1}{(d-1)!} f^{(d-1)}(x_0) \cdot h^{d-1} + \cdots + f'(x_0) \cdot h + f(x_0).$$

Teorema 6.3.3. *Se f è una funzione derivabile d volte in x_0, allora per $x \to x_0$,*

$$f(x) = P_{f,d}(x - x_0) + o((x - x_0)^d),$$

in più $P_{f,d}$ è l'unico polinomio di grado $\leq d$ che rispetta questa proprietà.

Dimostrazione. Per dimostrare questo risultato utilizzeremo un lemma tecnico, che dimostreremo alla conclusione di tutto il procedimento.

Supponiamo che $g\colon I \to \mathbb{R}$ sia una funzione derivabile k volte.

Lemma 6.3.4. *La funzione $g(x+h)$ è un o-piccolo di h^k per $h \to 0$, cioè $g(x+h) = o(h^k)$, se e solo se*

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \cdots = g^{(k)}(0).$$

A questo cerchiamo un polinomio $Q(x)$ di grado $\leq d$ tale che

$$f(x_0 + h) - Q(h) = o(h^d) \quad h \to 0. \tag{9}$$

Denotiamo i coefficienti del polinomio Q come

$$Q(h) = c_d h^d + c_{d-1} h^{d-1} + \cdots + c_1 d + c_0,$$

e denominiamo $g(h) = f(x_0 + h) - Q(h)$. Allora grazie al Lemma 6.3.4 sappiamo che $g(h) = o(h^d)$ se e solo se $g(h)$ e le sue prime d derivate sono uguali a 0. Ma per quanto visto precedentemente, per ogni $k = 1, \ldots, d$

$$g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0) - \frac{1}{k!} c_k.$$

Esiste quindi unico un polinomio $Q(h)$ di grado $\leq d$ che soddisfi l'Equazione (9), e calcolando coefficiente per coefficiente osserviamo che

$$Q(h) = P_{1,f}(h).$$

Resta da dimostrare il Lemma. Supponiamo $g(0) = 0$, allora il quoziente $\frac{g(h)}{h^k}$ è in forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per $h \to 0$. Calcolando le derivate di numeratore e denominatore otteniamo $\frac{g'(h)}{kh^{k-1}}$, che è ancora in forma indeterminata se $g'(0) = 0$. Se $\lim h \to 0 \frac{g'(h)}{h^{k-1}}$ esiste, grazie a de l'Hôpital possiamo calcolare anche $\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h^k}$.

In generale il numero di derivate successive di $g(h)$ che si annullano in 0 determina il massimo esponente k tale che $g(h) = o(h^k)$. □

Esempio 6.5. Lo sviluppo di Taylor del seno per $x \to 0$ si esprime come

$$P_{2k+1,\sin(x)}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Quindi per esempio lo sviluppo di Taylor di $\sin(x)$ al grado 5 è

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Nella Figura 26, si vede la funzione $\sin(x)$ e il suo sviluppo di Taylor al grado 5 messi a confronto intorno a $x = 0$.

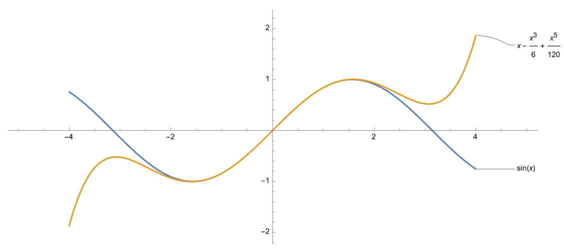


FIGURA 26. Il comportamento approssimante dello sviluppo di Taylor è perfettamente visibile.

Esempio 6.6. Lo sviluppo di Taylor di $\cos(x)$ per $x \to 0$ si calcola analogamente,

$$P_{2k,\cos(x)} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Quindi per esempio lo sviluppo di Taylor al grado 5 è

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Lo sviluppo di Taylor permette di calcolare agilmente i limiti. Consideriamo per esempio lo sviluppo al grado 2 di $\cos(x)$ per $x \to 0$, e calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2},$$

che è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Sostituendo a $\cos(x)$ il suo sviluppo di Taylor al grado 2 il numeratore diventa $(1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

per definizione di o-piccolo.

Esempio 6.7. Lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale e^x al grado d è,

$$P_{d,e^x}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^d}{d!}.$$

Quindi per esempio lo sviluppo di Taylor al grado 5 è

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Esempio 6.8. Il calcolo della derivata k-esima della funzione $\ln(1+x)$ è il seguente,

$$\ln^{(k)}(1+x) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k-1)!}{k \cdot (1+x)^k}.$$

Questo fatto può essere dimostrato per induzione,

(1) il passo base per $k = 1$ è ovvio poiché $\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$ è un risultato già visto
(2) il passo induttivo richiede di supporre che la tesi sia vera per un certo k, allora

$$\begin{aligned} \ln^{(k+1)}(1+x) &= (-1)^{k+1}(k-1)! \cdot \frac{-k}{(1+x)^{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{k+2} \cdot k!}{(1+x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Che era il risultato cercato per $k + 1$

Quindi a partire dalle derivate valutate in $x = 0$ è possibile calcolare lo sviluppo di Taylor di $\ln(1+x)$ per $x \to 0$, in particolare

$$P_{k,\ln(x)}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{d+1} x^d}{d}.$$

7. Integrali

7.1. Definizione dell'integrale di Riemann. Prima di approfondire la definizione di integrale (secondo Riemann), guardiamo da vicino una questione di notazione.

Data una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ derivabile, abbiamo finora indicato con $f'(x)$ la sua funzione derivata, un'altra notazione utilizzata per la derivata è quella con i cosiddetti **differenziali**, cioè $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$. Questa notazione si spiega meglio se definiamo una variabile Δx e definiamo $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. In questo modo il rapporto incrementale in x può essere riscritto come

$$r(\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

e la derivata diviene

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Il differenziale $\mathrm{d}x$ è quindi una notazione per indicare il passaggio al limite $\Delta x \to 0$, e il differenziale $\mathrm{d}f$ indica Δf sempre quando $\Delta x \to 0$.

L'obiettivo di questa sezione è definire l'**integrale di Riemann**, cioè una funzione che dato un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ permette di calcolare l'area della superficie del piano cartesiano che sta sotto al grafico della funzione f ed è compresa tra le coordinate $x = a$ e $x = b$, come nell'esempio della Figura 27. Se si considera l'estremo a dell'intervallo come un numero fissato e facciamo variare b, possiamo allora indicare questo valore come una funzione di b,

$$F(b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

è la notazione per l'integrale di f definito tra a e b.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale 7.4.2, risultato centrale della seconda parte del nostro corso, afferma che F è una funzione derivabile e in particolare

$$F'(b) = f(b).$$

In questa sezione definiremo formalmente con esattezza questi concetti e le ipotesi necessarie a enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

Data una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, per definire il suo integrale sull'intervallo $[a, b]$ (se esiste), consideriamo la suddivisione di $[a, b]$ in n intervalli di uguale lunghezza, dove n è un qualsiasi numero naturale ≥ 1. Prendiamo quindi $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ tali che $x_0 = a$, $x_n = b$ e per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ valga

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}.$$

A questo punto abbiamo

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

Su ognuno di questi intervalli costruiamo una colonna in modo che l'unione delle colonne sia un'approssimazione della superficie sotto al grafico di $f(x)$ tra gli estremi $x = a$ e $x = b$. In particolare per ogni $i = 1, \ldots, n$ scegliamo un punto $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e consideriamo la colonna che ha come base l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e di altezza $f(z_i)$. Nella Figura 28 osserviamo una schematizzazione approssimativa di questa procedura.

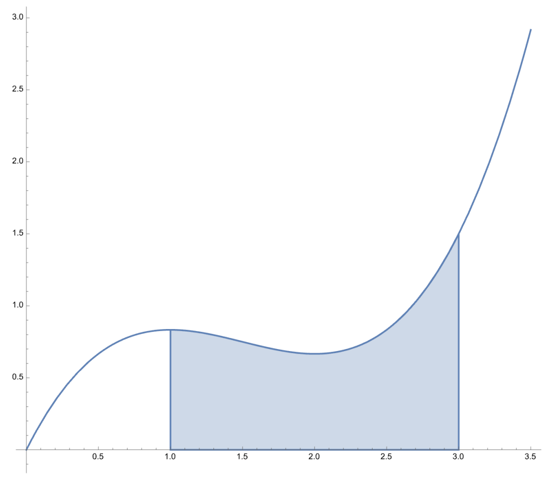


Figura 27. Il grafico di una funzione $f(x)$ con evidenziata la superficie sotto al grafico e compresa tra gli estremi $x = 1$ e $x = 3$. L'area di questa superficie è il valore dell'integrale $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

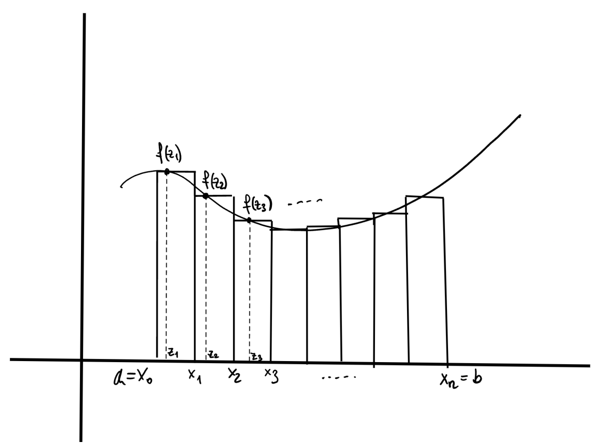


Figura 28. Disegno dell'autore per schematizzare la suddivisione in intervalli della stessa lunghezza di $[a, b]$ e la costruzione di una sequenza di colonne che approssimano la superficie sottesa dal grafico.

Passiamo adesso al calcolo dell'area della sequenza di colonne ottenuta in questo modo. Ogni colonna avrà area,

$$(x_i - x_{i-1}) \cdot f(z_i) = \frac{b-a}{n} \cdot f(z_i),$$

quindi l'area complessiva sarà

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f(z_i) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i).$$

La misura dell'area sottesa dall'integrale si ottiene come limite (se esiste) per $n \to +\infty$, cioè costruendo intervalli sempre più piccoli e quindi sistemi di colonne che approssimano il grafico sempre meglio. Osserviamo che per costruire la sequenza di colonne abbiamo dovuto scegliere una sequenza di z_i per ogni n, questi z_i però non appaiono in nessun modo nella Figura 27, quindi la definizione dell'integrale deve in qualche modo renderli "ridondanti".

Definizione 7.1.1. Una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile sull'intervallo $[a,b]$ se

$$\exists \left(\lim_{n\to+\infty} S_n \right) \in \mathbb{R}$$

e in più tale limite non dipende dalla scelta degli z_i che abbiamo fatto nella costruzione delle varie sequenze di colonne.

Se questo limite esiste, viene detto **integrale definito tra a e b della funzione** $f(x)$ e si usa la notazione

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{b^2}{2}.$$

Esempio 7.1. Consideriamo la funzione integrabile $f(x) = x$ (non dimostreremo qui che questa funzione è integrabile). Prendiamo l'intervallo $[0,b]$ in n intervalli identici $[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{(i-1)b}{n}, \frac{ib}{n}\right]$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Per ogni intervallo scegliamo $z_i = x_i = \frac{ib}{n}$, otteniamo pertanto

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \cdot f(z_i) &= \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \cdot \frac{ib}{n} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n i \right) \cdot \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$, e quindi

$$\int_0^b x\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{b^2}{2}.$$

Esempio 7.2. Svolgiamo adesso il caso di una funzione non-integrabile. In generale, le funzioni con comportamenti "buoni" (come la continuità o la monotonia) sono quasi sempre integrabili, come vedremo in seguito. La funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ che andiamo a presentare ha un comportamento altamente discontinuo,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

In questo caso abbiamo quindi $b = 1$ e $a = 0$, suddiviamo $[0,1]$ in n intervalli di lunghezza $\frac{1}{n}$ e per ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ è sempre possibile scegliere

$$z_i \in \mathbb{Q} \cap [x_{i-1}, x_i]$$

oppure

$$z_i' \in [x_{i-1}, x_i] \backslash \mathbb{Q}$$

perché per definizione dei numeri razionali entrambi gli insiemi sopra sono sempre non vuoti. Pertanto possiamo fare le due scelte ottenendo

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i) = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

$$S_n' = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i') = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0.$$

Quindi in un caso abbiamo $\lim S_n = 1$ e nell'altro $\lim S_n' = 0$. Il limite delle sommatorie costruite tramite la suddivisione in colonne esiste in ogni caso, ma dipende dalla particolare scelta degli z_i che facciamo nella nostra costruzione. Questo non rispetta la definizione di funzione integrabile, quindi f non è integrabile.

7.2. **Funzioni integrabili.**

Teorema 7.2.1. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora è integrabile.*

Questo teorema ci assicura che possiamo integrare la maggior parte delle funzioni che abbiamo utilizzato fino a questo punto, cioè funzioni continue definite su intervalli chiusi.

Non svolgeremo in queste note la dimostrazione del teorema suddetto.

Teorema 7.2.2. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona (crescente o decrescente) allora è integrabile.*

NOTA BENE. Osserviamo che questo teorema allarga l'insieme delle funzioni integrabili, infatti esistono funzioni monotone che *non* sono continue, come la funzione parte intera $\lfloor x \rfloor$.

Teorema 7.2.3. *Siano $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $h\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ integrabili, con $a < b < c$ numeri reali. Consideriamo $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ la funzione definita a tratti*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [a,b) \\ h(x) & \text{se } x \in (b,c]. \end{cases}$$

Allora $f(x)$ è integrabile su $[a,c]$ indipendentemente dal valore di $f(b)$.

7.3. **Proprietà degli intergrali.**

Teorema 7.3.1 (Linearità dell'integrale)**.** *Se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni integrabili, e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ numeri reali, allora la funzione $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ è integrabile su $[a,b]$ e*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \cdot \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right) + \mu \cdot \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \right).$$

Dimostrazione. Consideriamo la divisione di $[a,b]$ in n segmenti di uguale lunghezza chiamando $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ gli estremi. Allora se scegliamo $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, otteniamo

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i)$$

$$S_n(g) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} g(z_i).$$

L'esistenza degli integrali in ipotesi, significa che esistono $\lim S_n(f)$ e $\lim S_n(g)$. Consideriamo adesso la stessa operazione di "approssimazione tramite colonne" nel caso della funzione $\lambda f(x) + \mu g(x)$. In questo caso,

$$S_n(\lambda f + \mu g) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda f(z_i) + \mu g(z_i)).$$

Quindi $S_n(\lambda f + \mu g) = \lambda S_n(f) + \mu S_n(g)$ per linearità di queste somme finite, e allora otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n(\lambda f + \mu g) &= \lim_{n\to+\infty} (\lambda S_n(f) + \mu S_n(g)) \\ &= \lambda \cdot \lim_{n\to+\infty} S_n(f) + \mu \cdot \lim_{n\to+\infty} S_n(g) \\ &= \lambda \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà di linearità dei limiti. □

Il prossimo teorema riguarda un risultato di positività. Osserviamo che per la definizione che abbiamo dato della superficie sottesa dal grafico di una funzione integrabile, quando il valore assunto da una funzione è negativo, si calcola l'area compresa tra la curva e l'asse orizzontale, e quest'area viene considerata di segno negativo.

Teorema 7.3.2 (di positività dell'integrale)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile e* $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$*, allora*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

Dimostrazione. Costruiamo come sempre la somma

$$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i).$$

Poiché $f(z_i) \geq 0$ sempre, allora $S_n \geq 0$ per ogni n e quindi per il Teorema 5.7.1, $\lim S_n \geq 0$. □

NOTA BENE. Come conseguenza diretta, se $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sono integrabili e $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a.b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Infatti, per ipotesi $(f(x) - g(x)) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, quindi

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \geq 0,$$

e per lineraità dell'integrale quest'ultimo integrale è uguale a $\int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$.

NOTA BENE. Per convenzione e per mantenere una notazione coerente, se si invertono gli estremi di un integrale si considera che il suo valore cambia di segno, quindi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Teorema 7.3.3 (di additività del dominio)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile e sia* $c \in (a,b)$ *un punto qualsiasi compreso tra gli estremi di integrazione. Allora* $f(x)$ *è integrabile su* $[a,c]$ *e su* $[b,c]$ *e in più*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_b^x f(x)\mathrm{d}x.$$

7.4. **Primitive e Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.** Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, in questa sezione e nel prosieguo, assume centralità il concetto di una funzione F tale che se derivata si ottiene la funzione f di partenza.

Definizione 7.4.1. Si dice che $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è **una primitiva** di f se F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

NOTA BENE. Si parla di una primitiva e non de "la" primitiva perché per ogni funzione f che ha almeno una primitiva F, esistono infinite primitive, ad esempio tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$ dove c è una costante. Vedremo che si tratta esattamente di tutte le primitive.

NOTA BENE. Negli estremi a e b la derivata $F'(x)$ è definita come limite da destra e da sinistra del rapporto incrementale,

$$F'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}, \quad F'(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

Esempio 7.3. Quando si parla di primitiva si sta quindi facendo una sorta di operazione inversa della derivazione. Ad esempio se $f(x) = x$, una sua primitiva è $F(x) = \frac{x^2}{2}$ e in generale per l'elevamento a potenza x^n con $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, una primitiva è $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Esempio 7.4. Sia $f(x) = 0$ la funzione costantemente nulla sull'intervallo $[a,b]$, allora tutte le primitive $F(x)$ di f sono del tipo $F \equiv c$ dove c è una costante reale. Infatti se esiste $c \in (a,b)$ dove $F(c) \neq F(a)$ allora per il Teorema di Lagrange 6.2.1, esiste x_0 tale che

$$F'(x_0) = \frac{F(c) - F(a)}{c - a} \neq 0.$$

Quindi data una qualsiasi funzione f, se F è una sua primitiva, sia $G(x)$ un'altra primitiva di f, allora $(G - F)' = G' - F' = 0$, quindi $G - F$ è una costante, quindi tutte le primitive di f sono del tipo $F(x) + c$.

Esempio 7.5. Rispetto alle funzioni trigonometriche, $\sin(x)$ è una primitiva di $\cos(x)$ mentre $-\cos(x)$ è una primitiva di $\sin(x)$. Per quello che abbiamo appena visto, tutte le primitive di $\cos(x)$ sono del tipo $\sin(x) + c$.

Esempio 7.6. La funzione esponenziale e^x è una primitiva di e^x.

Teorema 7.4.2 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrabile, allora la funzione* $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$G(y) = \int_a^y f(x)\mathrm{d}x$$

è una primitiva di f. In più, se $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$, allora f è integrabile e

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).}$$

NOTA BENE. La differenza tra i valori di F nei due estremi a volte si indica anche con le seguenti notazioni

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b .$$

NOTA BENE. Non dimostreremo qui l'enunciato completo del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, ma soltanto la seconda parte.

Consideriamo la solita suddivisione di $[a,b]$ in n intervalli della stessa lunghezza, con estremi $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, allora per il Teorema di Lagrange 6.2.1 è possibile individuare per ogni $i = 1, \dots, n$ un elemento $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tale che

$$F'(z_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{n}{b-a} \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Poiché F è una primitiva di f, allora $F'(z_i) = f(z_i)$, quindi quando andiamo a valutare il valore di S_n otteniamo

$$\begin{aligned} S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(z_i) &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{n}{b-a} \cdot (F(x_i) - F(x_{i-1})) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (F(x_{i-1}) - F(x_i)) \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \dots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

□

Esempio 7.7. Come diretta conseguenza del teorema appena enunciato, abbiamo che per ogni n numero naturale $\neq 0$,

$$\int_a^b x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Esempio 7.8. Un altro esempio, questa volta con le funzioni trigonometriche,

$$\int_0^\pi \cos(x)\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

7.5. **Integrazione per sostituzione.**

Teorema 7.5.1 (Integrazione per sostituzione)**.** *Sia $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione e F una sua primitiva (dunque f è integrabile), e sia $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ una funzione derivabile la cui derivata è una funzione continua. Allora $F \circ \varphi$ è la primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ e*

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = [F(\varphi(x))]_a^b = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\mathrm{d}y.}$$

Dimostrazione. Per la regola di derivazione di funzioni composte (Teorema 4.3.4) si ha

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che F è una primitiva di f. Quindi per il Teorema Fondamentale del Calcolo,

$$\int_a^b F(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Allo stesso tempo, quest'ultima differenza può essere riscritta come

$$[F(y)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) \mathrm{d}y.$$

□

Esempio 7.9. Per ricordare al meglio il teorema precedente, e utilizzarlo in modo efficace negli esercizi, si utilizza la seguente manipolazione simbolica, anche se questa **non è rigorosamente coerente, quindi non può essere utilizzata all'interno di dimostrazioni rigorose**.

Consideriamo un cambio di variabili $y = \varphi(x)$ con $\varphi \colon [a, b] \to [c, d]$ come sopra. Allora

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\varphi(x)) = \frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \varphi'(x) \mathrm{d}x.$$

Quindi quando svolgiamo un integrale con la regola della sostituzione, immaginiamo di rimpiazzare

- $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ nel termine di sinistra, con $\mathrm{d}y$ nel termine di destra
- $f(\varphi(x))$ con $f(y)$
- gli estremi di integrazione, da quelli valutati in x (cioè a e b) a quelli valutati in $y = \varphi(x)$ per $x = a$ e $x = b$.

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) \mathrm{d}y.$$

Esempio 7.10. Consideriamo l'integrale

$$\int_3^5 (2x - 3)^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}x.$$

Utilizziamo il cambio di variabile $y = 2x - 3$, allora $\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$ e

$$\int_3^5 (2x - 3)^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}x = \int_3^7 y^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{5} y^{\frac{5}{4}} \right]_3^7 = \frac{2}{5}(7^{\frac{5}{4}} - 3^{\frac{5}{4}}).$$

Esempio 7.11. Consideriamo l'integrale

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

Utilizziamo il cambio di variabile $y = \sqrt{x}$, allora $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x$ dunque

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(y) \mathrm{d}y = [\sin(y)]_{\pi}^{2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

Esempio 7.12. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x.$$

Osserviamo che $\cos'(x) = -\sin(x)$ e effettuiamo il cambio di variabile $y = \cos(x)$. Allora $\mathrm{d}y = -\sin(x)\mathrm{d}x$ e quindi possiamo concludere

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{y}(-\mathrm{d}y) = [-\ln(y)]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

7.6. **Integrazione per parti.**

Teorema 7.6.1. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ha F come una funzione primitiva, e $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, allora*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot G(x)\mathrm{d}x = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)G'(x)\mathrm{d}x}$$

Dimostrazione. Consideriamo la formula di derivazione di un prodotto,

$$(F\cdot G)' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x).$$

Se integriamo entrambi i termini di questa uguaglianza tra a e b, per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e per la linearità dell'integrale otteniamo

$$[F\cdot G]_a^b = \int_a^b F'(x)G(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)G'(x)\mathrm{d}x.$$

Possiamo concludere perché $F'(x) = f(x)$. □

Quindi la formula dell'integrazione per parti si ottiene tramite l'integrazione della formula per la derivazione di un prodotto, così come la formula dell'integrazione per sostituzione si ottiene tramite l'integrazione della formula per la derivazione di una funzione composta. Negli esempi che seguono mostreremo alcuni possibili casi di utilizzo della integrazione per parti.

Esempio 7.13. Consideriamo l'integrale

$$\int_a^b xe^x\mathrm{d}x.$$

Supponiamo in questo caso che $F(x) = e^x$ (quindi $f(x) = F'(x) = e^x$) e $G(x) = x$. Allora applicando l'integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int_a^b xe^x\mathrm{d}x &= [xe^x]_a^b - \int_a^b 1\cdot e^x\mathrm{d}x \\ &= [xe^x] - [e^x] = [(x-1)e^x]_a^b \\ &= (b-1)e^b - (a-1)e^a.\end{aligned}$$

Esempio 7.14. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1)\sin(x)\mathrm{d}x.$$

In questo caso poniamo $F(x) = -\cos(x)$ (e quindi $f(x) = F'(x) = \sin(x)$) e $G(x) = (4x - 1)$. Allora, applicando l'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1)\sin(x)\mathrm{d}x &= [-(4x-1)\cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= [-(4x-1)\cos(x)] + [4\sin(x)] \\ &= [-(4\frac{\pi}{2} - 1)\cdot 0 + (-1)\cdot 1] + [4\cdot 1 - 4\cdot 0] = 3.\end{aligned}$$

Esempio 7.15. Consideriamo l'integrale

$$\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x.$$

In questo caso $F(x) = \frac{x^2}{2}$ (e quindi $f(x) = F'(x) = \frac{x^2}{2}$) e $G(x) = \ln(x)$. Applicando l'integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1) - \left(2 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Esempio 7.16. Infine consideriamo l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Poniamo $F(x) = -e^{-x}$ (quindi $f(x) = F'(x) = e^{-x}$) e $G(x) = \sin(2x)$. Allora, applicando l'integrazione per parti due volte,

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)e^{-x}\mathrm{d}x &= [-\sin(2x)e^{-x}] + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2x)e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= [-\sin(2x)e^{-x}] + [-2\cos(2x)e^{-x}] - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin(2x)e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\sin(2x)e^{-x} - 2\cos(2x)e^{-x}\right]_0^{\pi/4} - 4I.\end{aligned}$$

Osserviamo che la parte tra parentesi vale

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{4}} + 2\cos(0)e^0 = 2 - e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Quindi, spostando il termine $4I$ si ottiene

$$\begin{aligned}5I &= 2 - e^{-\frac{\pi}{4}} \\ \Rightarrow\ I &= \frac{2 - e^{-\frac{\pi}{4}}}{5}.\end{aligned}$$

8. Integrazione di funzioni razionali

Ricordiamo che le funzioni razionali (vedi Definzione 3.4.1) sono funzioni del tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dove p e q sono polinomi, e il dominio massimale di f è $\mathbb{R}$ meno l'insieme delle soluzioni di q.

In questa sezione analizzeremo dei metodi per determinare gli integrali definiti di queste funzioni (quando esistono) suddividendole in base al grado del polinomio al denominatore, e poi considerando tre sottocasi se il denominatore $q(x)$ ha grado 2.

8.1. **Caso con denominatore di grado 0, integrazione di polinomi.** Il caso $\deg(q) = 0$ è il più facile perché la funzione integranda $f(x)$ è un polinomio e quindi una sua primitiva si ottiene semplicemente come composizione lineare di primitive dei suoi monomi.

Un polinomio ha come dominio massimale tutto $\mathbb{R}$, quindi $f(x)$ è integrabile su ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Consideriamo
$$f(x) = p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$
allora
$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{c_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{c_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{c_1}{2}x^2 + c_0 x\right]_a^b \\ &= \frac{c_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) + \cdots + \frac{c_1}{2}(b^2 - a^2) + c_0(b-a).\end{aligned}$$

Esempio 8.1. Una semplice applicazione di quanto appena detto è la seguente,
$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^3 + 2x + 5)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4} + x^2 + 5x\right]_1^2 \\ &= \frac{16}{4} + 4 + 10 - \frac{1}{4} - 1 - 5 = \frac{47}{4}.\end{aligned}$$

8.2. **Caso con denominatore di grado 1.** Partiamo da un esempio, che sarà il nostro "caso di riferimento" in tutta la trattazione di questa sezione.

Esempio 8.2. La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è integrabile su ogni intervallo $[a, b]$ tale che $0 \notin [a, b]$ cioè a, b sono entrambi positivi o entrambi negativi. In tal caso,
$$\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(|x|)]_a^b = \ln(|b|) - \ln(|a|) = \ln\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right).$$

NOTA BENE. Se b ed a sono entrambi positivi, è comune non inserire la notazione del valore assoluto $|x|$ nell'argomento del logaritmo. Questo perché $x = |x|$ se x si muove su un intervallo $\subset \mathbb{R}^+$.

Osserviamo adesso che un qualsiasi polinomio di grado 1 è nella forma $q(x) = cx + d$ con $c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. Osserviamo inoltre che la funzione $\frac{1}{cx+d}$ ha come primitiva la funzione $\frac{1}{c}\ln(cx + d)$. Possiamo passare a integrare una funzione $f(x) = p(x)/q(x)$, con $\deg(q) = 1$. Cominciamo considerando un numeratore $p(x)$ di grado $\deg(p) = 0$. Allora $p(x) \equiv r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ una constante, e si ha
$$\int_a^b \frac{r}{cx+d}\mathrm{d}x = r \cdot \left[\frac{1}{c}\ln(cx+d)\right]_a^b = \frac{r}{c} \cdot \ln\left(\left|\frac{cb+d}{ca+d}\right|\right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 0 \notin [ca+d, cb+d].$$

Se invece il grado del numeratore è maggiore di 0, dobbiamo passare per una divisione tra polinomi.

NOTA BENE. Consideriamo due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ tali che $\deg(p) \geq \deg(q) > 0$, allora esistono e sono unici due polinomi $h(x)$ e $r(x)$ tali che $\deg(r) < \deg(q)$ e

$$p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Quindi $h(x)$ è il quoziente tra i due polinomi e $r(x)$ è il resto della divisione.

Se utilizziamo il fatto qui sopra con una funzione razionale $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\deg(q) = 1$, allora il resto della divisione è una costante $r(x) \equiv r$, ed è sempre possibile ricondurre l'integrale a uno dei casi precedenti. Infatti,

$$\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)} \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{h(x)q(x) + r}{q(x)} \mathrm{d}x = \int_a^b h(x) \mathrm{d}x + \int_a^b \frac{r}{cx + d} \mathrm{d}x.$$

Esempio 8.3. Consideriamo la funzione razionale $\frac{x}{x+1}$, allora $h(x) = 1$ e $r(x) = -1$, cioè

$$x = 1 \cdot (x + 1) - 1 \ \Rightarrow \ \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere sommando e sottraendo 1 al numeratore

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x + 1 - 1}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = [x - \ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln(2).$$

Esempio 8.4. Consideriamo invece un caso in cui $\deg(p) > \deg(q)$, come

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}.$$

In questo caso $x^3 = (x^2 - x + 1)(x + 1) - 1$, quindi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{5}{6} - \ln(2).$$

8.3. **Caso con denominatore di grado 2, $q(x) = c(x - x_0)^2$.** Tra tutti i casi con denominatore di grado 2, distinguiamo tre sottocasi, il primo è quello in cui $q(x) = c(x - x_0)^2$ ha una soluzione "doppia"; il secondo $q(x) = c(x - x_1)(x - x_2)$ ha due soluzioni reali distinte; nel terzo caso $q(x)$ non ha soluzioni reali.

In questa sezione trattiamo il primo caso, partendo dal sotto-caso in cui $\deg(p) = 0$. Osserviamo che $(x - x_0)^{-2}$ ha come primitiva $-(x - x_0)^{-1}$. Allora,

$$\int_a^b \frac{r}{c}(x - x_0)^{-2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{r}{c}(x - x_0)^{-1}\right]_a^b = \frac{r}{c} \cdot \left(\frac{1}{a - x_0} - \frac{1}{b - x_0}\right) \quad \forall r, a, b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x_0 \notin [a, b].$$

Se $\deg(p) > 0$, allora possiamo come prima scrivere

$$p(x) = h(x)(x - x_0) + r, \quad r \in \mathbb{R},$$

e ricondurre il nostro integrale a un caso precedente. Infatti,

$$\int_a^b \frac{p(x)}{c(x-x_0)^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{h(x)}{c(x-x_0)}\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{r}{c(x-x_0)^2}\mathrm{d}x,$$

che sappiamo risolvere grazie alle conclusioni precedenti.

Esempio 8.5. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$. Allora,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x-2}{(x-2)^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{2}{(x-2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x + \left[-(x-2)^{-1}\right]_0^1 \\ &= \left[\ln(|x-2|) - (x-2)^{-1}\right]_0^1 \\ &= -1 - \ln(2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \ln(2).\end{aligned}$$

8.4. **Caso con denominatore di grado 2, $q(x) = c(x - x_1)(x - x_2)$.** In questa sezione supponiamo che $q(x)$ sia un polinomio di grado 2 con due soluzioni reali distinte denominate x_1 e x_2. Abbiamo visto che la tecnica più efficace per risolvere questo genere di integrali, è ricondursi a dei casi trattati precedentemente. Quindi la strategia sarà quella di individuare due coefficiente reali $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

Sviluppando i calcoli sopra si osserva che

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} &= \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \\ &= \frac{A(x-x_2) + B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} \\ &= \frac{x(A+B) - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)}.\end{aligned}$$

Perché questa uguaglianza sia verificata, è necessario che il seguente sistema di uguaglianze sia rispettato,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ax_2 + Bx_1 = -1. \end{cases}$$

Si conclude facilmente che $B = -A$, dunque $Ax_2 - Ax_1 = -1$ e quindi

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x_1 - x_2} \\ B &= -\frac{1}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

Questo permette di sviluppare l'integrale cercato,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{c(x-x_1)(x-x_2)}\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{c(x_1-x_2)}\cdot[\ln(|x-x_1|)-\ln(|x-x_2|)]_a^b \\ &= \frac{1}{c(x_1-x_2)}\cdot\left[\ln\left(\frac{x-x_1}{x-x_2}\right)\right]_a^b \\ &= \frac{1}{c(x_1-x_2)}\cdot\ln\left(\frac{(b-x_1)(a-x_2)}{(a-x_1)(b-x_2)}\right). \quad \forall x_1,x_2\notin[a,b]\end{aligned}$$

NOTA BENE. Poiché $x_1, x_2 \notin [a,b]$, allora per ogni $x\in[a,b]$ il rapporto $\frac{x-x_1}{x-x_2}$ è sempre positivo, e per questo possiamo omettere il valore assoluto dall'argomento del logaritmo quando appare questo rapporto.

Esempio 8.6. Consideriamo $f(x) = 12x^2-8$, allora $2x^2-8 = 2(x-2)(x+2)$, ed abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2x^2-8}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\cdot[\ln(|x-2|)-\ln(|x+2|)]_0^1 \\ &= \frac{\ln(1)-\ln(3)-\ln(2)+\ln(2)}{8} = \frac{-\ln(3)}{8}.\end{aligned}$$

Se al numeratore abbiamo un polinomio $p(x)$ di grado ≥ 1, allora possiamo applicare come nei casi precedenti la divisione tra polinomi. Infatti esistono unici $h(x)$ e r tali che

$$p(x) = h(x)(x-x_1)+r.$$

Dunque,

$$\int_a^b \frac{p(x)}{c(x-x_1)(x-x_2)}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{h(x)}{c(x-x_2)}\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{r}{c(x-x_1)(x-x_2)}\mathrm{d}x.$$

Esempio 8.7. Ricollegandoci all'esempio precedente, consideriamo $f(x) = \frac{x}{2x^2-8}$. Allora, $x = 1\cdot(x-2)+2$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{2x^2-8}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{2(x+2)} + \int_0^1 \frac{2}{2x^2-8}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(|x+2|)\right]_0^1 + \frac{1}{4}[\ln(|x-2|)-\ln(|x+2|)]_0^1 \\ &= \frac{\ln(3)-\ln(2)}{2} + \frac{-\ln(3)}{4} = \frac{-\ln(4/3)}{4}.\end{aligned}$$

8.5. **Caso con denominatore di grado 2 senza soluzioni reali.** Nell'ultimo caso che affrontiamo, l'esempio che utilizziamo come riferimento è il seguente

Esempio 8.8. La funzione $\frac{1}{1+x^2}$ ha come primitiva $\arctan(x)$, infatti $\arctan(x)$ è la funzione inversa di $\tan(x)$, quindi

$$\arctan'(\tan(x)) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos(x)^2}\right)}.$$

Osserviamo che se $y = \tan(x)$, allora $\frac{1}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2+\cos(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$. Quindi

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Possiamo pertanto risolvere il seguente integrale,

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_a^b = \arctan(b) - \arctan(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

In generale, se $q(x)$ è un polinomio di grado 2 senza soluzioni reali, allora è possibile riscrivere il polinomio come

$$q(x) = \alpha \cdot (x+d)^2 + \frac{\widetilde{\Delta}}{4\alpha},$$

dove $\alpha, d \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ e $\widetilde{\Delta}$ è l'opposto del classico discriminante utilizzato nel calcolo delle soluzioni di $q(x)$. Quindi, poiché $q(x)$ non ha soluzioni reali, $\widetilde{\Delta} > 0$. Per semplicità nel prossimo calcolo imponiamo $\alpha = 1$, poi faremo degli esempi con $\alpha \neq 1$.

Calcoliamo l'integrale di $\frac{1}{q(x)}$, utilizzando la notazione $\beta = \frac{\widetilde{\Delta}}{4}$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{(x+d)^2+\beta}\mathrm{d}x &= \frac{1}{\beta} \cdot \int_a^b \frac{1}{\left(\frac{x+d}{\sqrt{\beta}}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta} \cdot \left[\sqrt{\beta}\arctan\left(\frac{x+d}{\sqrt{\beta}}\right)\right]_a^b \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\arctan\left(\frac{b+d}{\sqrt{\beta}}\right) - \arctan\left(\frac{a+d}{\sqrt{\beta}}\right)\right).\end{aligned}$$

Esempio 8.9. Consideriamo $q(x) = x^2 + 2x + 3$, e notiamo che questo polinomio non ha soluzioni reali. Allora, soffermandoci sui primi due termini x^2+2x "completiamo" il quadrato aggiungendo il termine $+1$. Si nota che

$$x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x+1)^2 + 2,$$

cioè un polinomio quadrato più un termine reale positivo, come ci aspettavamo. Sostituendolo nell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{(x+1)^2+2}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Esempio 8.10. Consideriamo un caso analogo al precedente ma con coefficiente massimale diverso da 1. Sia $q(x) = 2x^2+2x+3$. Allora, $q(x) = 2(x^2+x)+3$. In questo caso il quadrato si completa aggiungendo $2\cdot\frac{1}{4}$, infatti

$$2x^2+2x+3 = 2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2} = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{5}-1} \frac{1}{2x^2+2x+3}\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{\sqrt{5}-1} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Nel caso in cui il denominatore abbia grado > 0, il problema si tratta analogamente ai casi precedenti. Osserviamo soltanto che $\frac{2x}{x^2+1}$ è una primitiva di $\ln(x^2+1)$. Pertanto, i termini in cui al numeratore abbiamo un monomio di grado 1, possono essere risolti.

Esempio 8.11. Consideriamo $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. Applicando la divisione tra polinomi, si osserva che

$$x^3+1 = x\cdot(x^2+1)-x+1.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan(x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}-\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{2+\pi-2\ln(2)}{4}.\end{aligned}$$

9. Integrali generalizzati

9.1. **Integrali impropri di prima specie.** Supponiamo di voler calcolare l'area sotto al grafico di una funzione $f(x)$ e limitata a sinistra dal punto $a \in \mathbb{R}$, cioè l'area compresa tra la funzione e la semiretta $[a, +\infty)$. Dobbiamo prima di tutto definire una buona nozione di area per il caso di una superficie illimitata (in questo caso, a destra) e per fare questo ci vengono in soccorso ancora una volta i limiti.

Definizione 9.1.1. Consideriamo una funzione $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni intervallo del tipo $[a, b]$ con $b > a$. Si dice che f **è integrabile sull'intervallo illimitato** $[a, +\infty)$ se esiste ed è finito il seguente limite,

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

In più, se tale limite esiste, definiamo l'**integrale improprio di prima specie di** $f(x)$ **sull'intervallo** $[a, +\infty)$ come

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.}$$

Definizione 9.1.2. In modo analogo se $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su tutti gli intervalli del tipo $[a, b]$ con $a < b$, si dice che f **è integrabile su** $(-\infty, b]$ se

$$\exists \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{ed è finito.}$$

In tal caso definiamo l'**integrale improprio di prima specie di** $f(x)$ **su** $(-\infty, b]$ come

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.}$$

Esempio 9.1. Consideriamo la funzione $\frac{1}{x^r}$ sull'intervallo $[1, +\infty)$ con $r > 0$ numero reale positivo. Poiché la funzione è integrabile su ogni intervallo del tipo $[1, b]$, dobbiamo verificare se esiste

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^r}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^b \quad \text{se } r \neq 1.$$

Possiamo subito distinguere due casi

(1) se $r > 1$ allora $1 - r < 0$ e quindi

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-r} - 1}{1-r} = \frac{1}{r-1},$$

perché $b^{1-r} \to 0$. Dunque in questo caso x^{-r} è integrabile su $[1, +\infty)$ e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\mathrm{d}x = \frac{1}{r-1}.$$

(2) se $0 < r < 1$ allora $1 - r > 0$ e quindi b^{1-r} diverge per $b \to +\infty$, quindi il limite sopra vale $+\infty$, x^{-r} non è integrabile su $[1, +\infty)$ ma si può scrivere ugualmente

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\mathrm{d}x = +\infty.$$

Resta da affrontare il caso $r = 1$, in tal caso

$$\int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(b),$$

e com'è note $\ln(b)$ diverge a $+\infty$ per $b \to +\infty$. Quindi x^{-1} non è integrabile su $[1, +\infty)$ e il suo integrale diverge a $+\infty$.

Esempio 9.2. Consideriamo la funzione $\sin(x)$ sull'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$. $\sin(x)$ è integrabile su tutti gli intervalli del tipo $\left[\frac{\pi}{2}, b\right)$ ed ha come primitiva $-\cos(x)$, quindi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^b = [-\cos(x)]_{\pi/2}^b = -\cos(b) + 1.$$

Si osserva che questa funzione (in b) non ha limite, quindi $\sin(x)$ non è integrabile su $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

Teorema 9.1.3. *Siano $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Allora, se $g(x)$ è integrabile su $[a, +\infty)$ anche $f(x)$ lo è e in più*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

Teorema 9.1.4. *Sia $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Se $|f(x)|$ è integrabile su $[a, +\infty)$ allora anche f lo è, e in più*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Definizione 9.1.5. Si dice che è una funzione $f(x)$ è **assolutamente integrabile** su $[a, +\infty)$ se $|f(x)|$ è integrabile su $[a, +\infty)$. Il teorema precedente ci dice che (come si poteva intuire dalla scelta nominalistica) se una funzione è assolutamente integrabile su $[a, +\infty)$, allora è integrabile su $[a, +\infty)$.

Esempio 9.3. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$, vogliamo dimostrarne l'integrabilità su $[1, +\infty)$. Osserviamo che

$$0 \le \left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

su tale intervallo. Come abbiamo già visto (Esempio 9.1), $\frac{1}{x^2}$ è integrabile su tale intervallo, quindi per il Teorema 9.1.3 anche $\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right|$ è integrabile su $[1, +\infty)$, cioè $f(x)$ è assolutamente integrabile, e quindi per il Teorema 9.1.4 è integrabile su $[1, +\infty)$. Osserviamo che non è necessario avere una formula esplicita dell'integrale per poter affermare l'integrabilità di $f(x)$.

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $(-\infty, a]$ e anche su $[a, +\infty)$ per un certo $a \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.} \tag{10}$$

Teorema 9.1.6. *La definizione precedente non dipende dal punto $a \in \mathbb{R}$ scelto, quindi è una buona definizione per l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di $f(x)$. In tal caso si dice che $f(x)$* ***è integrabile su*** $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Consideriamo $a' \neq a$, in particolare supponiamo senza perdita di generalità che $a' > a$. Allora, per ogni $b > a'$ e per ogni $c < a$ si ha

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a'}^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_c^{a'} f(x)\mathrm{d}x = \int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{a'} f(x)\mathrm{d}x$$

come conseguenza del Teorema di additività del dominio 7.3.3. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\left(\int_a^{a'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a'}^b f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{c\to-\infty}\left(\int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{a'} f(x)\mathrm{d}x\right) + \lim_{b\to+\infty}\int_{a'}^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{c\to-\infty}\int_c^{a'} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{a'}^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{a'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

come volevamo dimostrare. □

Esempio 9.4. La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è detta distribuzione Gaussiana. Osserviamo che se $|x| \geq 1$ allora $e^{-x^2} \leq e^{-|x|}$ e poiché $e^{-|x|}$ è integrabile su $[1,+\infty)$ e $(-\infty,-1]$ allora anche e^{-x^2} lo è. Quindi poiché chiaramente e^{-x^2} è integrabile su $[-1,1]$, allora e^{-x^2} è integrabile su $(-\infty,+\infty)$.

9.2. **Integrali impropri di seconda specie.** Consideriamo adesso una funzione $f(x)$ definita su un intervallo del tipo $(a,b]$ tale che $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ per cui non si può estendere f per continuità all'estremo a.

Definizione 9.2.1. Se $f(x)$ è integrabile su tutti gli intervalli $[c,b]$ con $a < c < b$, allora si dice che $f(x)$ **è integrabile su** $[a,b]$ (oppure su $(a,b]$, la notazione in questo caso non è importante) se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

In tal caso si definisce come segue l'**integrale improprio di seconda specie di** $f(x)$ **su** $[a,b]$,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.}$$

NOTA BENE. Se $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ ed è integrabile sugli intervalli del tipo $[a,c]$ con $a < c < b$ si definisce in maniera del tutto analoga l'integrabilità di $f(x)$ su $[a,b]$ tramite il limite

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.}$$

Esempio 9.5. Consideriamo $\frac{1}{x^r}$ sull'intervallo $(0,1]$ con $r > 0$ reale positivo. Dato $0 < \varepsilon < 1$ possiamo calcolare una primitiva della funzione qui sopra,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^r}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_\varepsilon^1 \quad \text{se } r \neq 1.$$

Come prima abbiamo due casi,

(1) se $r > 1$ allora $1 - r < 0$ e abbiamo che $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{1-r} = +\infty$, quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_\varepsilon^1 = +\infty.$$

Quindi x^{-r} non è integrabile su $[0,1]$

(2) se $r < 1$ allora $1 - r > 0$ e quindi la differenza di cui sopra converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-r},$$

quindi x^{-r} è integrabile su $[0,1]$.

Resta il caso $r = 1$, in cui la primitiva è $\ln(x)$, e anche in questo caso x^{-1} non è integrabile poiché $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(\varepsilon) = -\infty$.

9.3. **Sostituzione negli integrali impropri.** Vogliamo poter lavorare con il Teorema di integrazione per sostizuone 7.5.1 anche nel caso di integrali impropri, ma questo ci crea problemi perché gli estremi potrebbero non essere ben definiti, per questo abbiamo bisogno del seguente nuovo teorema

Teorema 9.3.1. *Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a,+\infty)$ e F una sua primitiva e sia $\varphi\colon I \to [a,+\infty)$ (I è un intervallo) una funzione derivabile con derivata continua. Allora $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ è una funzione integrabile su I e*

(1) se $I = [b,c]$ e $\varphi(b) \in \mathbb{R}$ allora

$$\int_b^c f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(b)}^{\lim \varphi(c)} f(y)\mathrm{d}y,$$

dove come estremo superiore si intende $\lim_{d\to c^-} \varphi(d)$

(2) se $I = [b,+\infty)$ e $\varphi(b) \in \mathbb{R}$ allora

$$\int_b^{+\infty} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(+\infty)} f(y)\mathrm{d}y,$$

dove come estremo superiore si intende $\lim_{d\to+\infty} \varphi(d)$.

Dimostrazione. Dimostriamo solo il caso 2, l'altro è del tutto analogo. Utilizzando il classico teorema di integrazione per sostituzione, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_b^{+\infty} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x &= \lim_{d\to+\infty} \int_b^d f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{d\to+\infty} \int_{\varphi(b)}^{\varphi(d)} f(y)\mathrm{d}y \\ &= \lim_{d\to+\infty} (F(\varphi(d)) - F(\varphi(b))).\end{aligned}$$

Osserviamo che F è continua, quindi per il Teorema di sostituzione 5.7.2 si ha che

$$\lim_{d\to+\infty} F(\varphi(d)) = F(\lim_{d\to+\infty} \varphi(d))$$

se il limite interno è finito, mentre

$$\lim_{d\to+\infty} F(\varphi(d)) = \lim_{d\to+\infty} F(d)$$

se $\lim_{d\to+\infty} \varphi(d) = +\infty$. $\square$

Esempio 9.6. Consideriamo la funzione $\frac{1}{x\cdot\ln(x)^r}$ sull'intervallo $[e, +\infty)$. Tale funzione è integrabile su ogni intervallo del tipo $[e, b]$, e con il cambio di variabile $y = \ln(x)$, si ha $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ e si può applicare la regola della sostituzione,

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(x)^r}\mathrm{d}x = \int_1^{\ln(b)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^r}\mathrm{d}y$$

e tale integrale converge se $r > 1$, e in tal caso vale $\frac{1}{r-1}$, mentre diverge in ogni altro caso.

Esempio 9.7. Consideriamo la funzione $\frac{1}{x\cdot|\ln(x)|^r}$ sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Applichiamo ancora il cambio di variabile $y = \ln(x)$, allora

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \cdot |\ln(x)|^r} &= \int_{-\infty}^{\ln(1/2)} \frac{1}{|y|^r}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\ln(1/2)}^{+\infty} \frac{1}{z^r}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \ln(\varepsilon) = -\infty$$

e nell'ultimo passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $z = -y$. Sappiamo che l'ultimo integrale converge se e solo se $r > 1$, e allora

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \cdot |\ln(x)|^r} = -\frac{\ln(1/2)}{r-1} = \frac{\ln(2)}{r-1}.$$

Esempio 9.8. Calcoliamo infine l'integrale su $[1, +\infty)$ si $\frac{1}{1+x^2}$ osservando che $\arctan(x)$ è una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$ e che $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} [\arctan(x)]_1^b = \frac{\pi}{4}.$$

Appendice A. Alcune proprietà delle disuguaglianze

Questa appendice serve come riassunto delle principali proprietà necessarie a manipolare le disuguaglianze. Cominciamo ricordando le più fondamentali e quindi forse le più utili

$$\boxed{\begin{aligned} x > 0 \ \&\ y > 0 \ &\Rightarrow\ xy > 0 \\ x < 0 \ \&\ y < 0 \ &\Rightarrow\ xy > 0 \\ xy = 0 \ &\Rightarrow x = 0 \text{ OR } y = 0. \end{aligned}}$$

Vediamo adesso in che modo la somma o la moltiplicazione influiscono sulle disuguaglianze. Per definizione, abbiamo

$$a \geq b \ \Rightarrow a + c \geq b + c \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Quindi se abbiamo una disuguaglianza, è sempre possibile "spostare" i termini da una parte all'altra del simbolo di disuguaglianza, cambiando il segno,

$$x + c \geq y \ \Rightarrow\ x \geq y - c \ \ \forall x, y, c \in \mathbb{R},$$

abbiamo ottenuto questo risultato aggiungendo $(-c)$ a entrambi i lati della disuguaglianza.

Nel caso della moltiplicazione, dobbiamo ricordare il box iniziale di questa appendice, perché cambiando il segno possono invertirsi i comportamenti. Infatti

$$\boxed{x \geq y \ \&\ a > 0 \ \Rightarrow\ xa \geq ya \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

mentre moltiplicando per un numero negativo, si ha un'inversione della disuguaglianza,

$$\boxed{x \geq y \ \&\ a < 0 \ \Rightarrow\ xa \leq ya \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.}$$

Esempio A.1. Per ricordare questo comportamento appena descritto, consideriamo un esempio con dei numeri naturali. Abbiamo $1 < 2$, e quindi $n < 2n$ per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Allo stesso tempo però, se moltiplichiamo per -1 otteniamo $-1 > -2$, perché il segno inverte il comportamento della disuguaglianza sui valori assoluti dei numeri in questione.

Osserviamo quindi che lo "spostamento" dei termini da una parte all'altra della disuguaglianza, dipende quindi anche dal segno. Cioè, è necessario aggiungere un'ipotesi sul comportamento del termini in questione,

$$\boxed{xa \geq y \ \&\ a > 0 \ \Rightarrow\ x \geq \frac{y}{a} \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{xa \geq y \ \&\ a < 0 \ \Rightarrow\ x \leq \frac{y}{a} \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

Consideriamo adesso la successione b^n con $b \in \mathbb{R}^+$ e n numero naturale. Osserviamo che tale successione è crescente, infatti

$$b^{n+1} = b \cdot b^n > 1 \cdot b^n = b^n.$$

Adesso vogliamo mostrare che $\lim b^n = +\infty$. Preliminarmente, ri-consideriamo la disuguaglianza seguente,

$$(1 + x)^n > 1 + nx \ \ \forall n \geq 2,\ x \in \mathbb{R}^+.$$

Poiché n è un numero naturale ≥ 2 e x un reale positivo, è sufficiente osservare che

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots > 1 + nx.$$

Osserviamo che per ogni numero reale M, e per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 x \geq M - 1$, e quindi

$$(1+x)^n > 1 + nx \geq M$$

per ogni $n \geq n_0$. Questo ci permette di concludere che se $b > 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty,$$

poiché è possibile scrivere $b = 1 + x$ con $x > 0$ e concludere grazie alle proprietà precedenti.

Nel caso in cui $b = 1$ o $b = 0$ la successione b^n è banalmente costante, concentriamoci quindi adesso sul caso $0 < b < 1$, e mostriamo che $\lim b^n = 0$ in due modi distinti.

Primo metodo: osserviamo che per costruzione se $0 < b < 1$ allora $\frac{1}{b} > 1$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n} = 0,$$

poiché il termine al denominatore tende a $+\infty$ per quanto abbiamo dimostrato sopra.

Secondo metodo: se $0 < b < 1$ allora (b^n) è una successione decrescente, infatti $b^{n+1} = b \cdot b^n < 1 \cdot b^n = b^n$. Inoltre è limitata in basso 0, poiché ogni termine è positivo. Quindi tale successione deve avere limite reale $\lim b^n = \ell$. Adesso consideriamo la successione (b^{n+1}) che è ottenuta "slittando" la successione precedente di una posizione, stiamo cioè cominciando da b^1 invece che da $b^0 = 1$. Quindi è possibile vedere ogni termine della nuova successione come $b^{n+1} = b \cdot b^n$. Per le proprietà dei limiti, questa è il prodotto di due successioni di cui una costante $\equiv b$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} b^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} b \cdot b^n = b \cdot \lim_{n\to+\infty} b^n = b \cdot \ell.$$

Ma osserviamo che la successione (b^{n+1}) ha necessariamente lo stesso limite di (b^n), perché si trata della stessa successione "shiftata". Quindi

$$\ell = b\ell \Rightarrow \ell = 0.$$

Osserviamo che per ogni numero naturale n, se consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ corrispondente all'elevamento a potenza $f(x) = x^n$, allora

$$x^n \text{ è una funzione strettamente crescente } \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$

questo fatto si dimostra induttivamente (vedi Sezione 1.9)a cominciare dal caso $n = 1$ che corrisponde alla funzione identità. Se la crescenza stretta è verificata per n, e $x > y \geq 0$, allora $x^{n+1} = x \cdot x^n > y \cdot y^n = y^{n+1}$ e quindi la crescenza stretta è verificata anche per $n + 1$.

Sui numeri negativi $\mathbb{R}^-$, se l'esponente è pari allora la funzione è strettamente decrescente, mentre se l'esponente è dispari la funzione è ancora strettamente crescente.

Consideriamo adesso la funzione "radice", $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ dove $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Anche in questo caso la funzione è strettamente crescente, infatti se $x > y$, possiamo scrivere

$$x = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n > \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = y,$$

e per la crescenza stretta di x^n questo implica che $x^{\frac{1}{n}} > y^{\frac{1}{n}}$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$x^{\frac{m}{n}} \text{ è una funzione strettamente crescente } \ \forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+.$$

Questo ci permette di concludere che x^r è strettamente crescente per ogni r numero reale positivo, mentre se cabbiamo un esponente reale negativo x^{-r}, osserviamo che se $x > y > 0$, allora $x^r > y^r$ e quindi $\frac{1}{y^r} > \frac{1}{x^r}$, quindi x^{-r} è strettamente decrescente. Questo ci permette di concludere

$$\boxed{x^r \text{ è una funzione } \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ strettamente crescente } \ \forall r \in \mathbb{R}^+}$$

$$\boxed{x^r \text{ è una funzione } \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \text{ strettamente decrescente } \ \forall r \in \mathbb{R}^-}$$

Appendice B. Definizione del numero di Nepero e

Ricordiamo per cominciare che per ogni $x \geq -1$, se $0 < r < 1$ è un numero reale, allora

$$(1+x)^r \leq 1 + rx, \tag{11}$$

vale l'uguaglianza solo se $x = 0$.

Consideriamo la successione definita come

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Allora vogliamo dimostrare che esiste il limite di a_n per $n \to +\infty$.

Cominciamo mostrando che per ogni $n \geq 1$, $a_{n+1} > a_n$, che è equivalente a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Facendo la radice $(n+1)$-esima di entrambi i lati della disuguaglianza (possiamo farlo perché la radice $(n+1)$-esima è una funzione monotona crescente su $\mathbb{R}^+$) otteniamo che la formula qui sopra è equivalente a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Quest'ultimo risultato si ottiene applicando la Disuguaglianza (11) con $x = \frac{1}{n}$ e $r = \frac{n}{n+1}$. Infatti

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Adesso consideriamo la successione definita da

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

e mostriamo che per ogni $n \geq 1$, $b_{n+1} < b_n$, che è equivalente a dimostrare che $\frac{1}{b_n} < \frac{1}{b_{n+1}}$, cioè

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+2}.$$

Riscrivendo questa disuguaglianza si ottiene

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Come prima questa disuguaglianza si ottiene applicando la Disuguaglianza (11), stavolta con $x = -\frac{1}{n+1}$ e $r = \frac{n+1}{n+2}$. Infatti,

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+2}} < 1 - \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

In più $b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ quindi $b_n > a_n$ per ogni $n \geq 1$. Quindi a_n è crescente e limitata dall'alto da b_1, mentre b_n è decrescente e limitata dal basso da a_1.

Quindi grazie al Teorema 5.4.3 sappiamo che per entrambe esiste un limite finito, e poiché $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$, allora il limite è lo stesso,

$$\exists \lim a_n = \lim b_n = e.$$

Quella qui sopra è la definizione del numero di Nepero e.

Appendice C. Un po' di aritmetica degli o-piccoli

Ricordiamo che la nozione di $o(f)$ (oppure o-piccolo di f) è definita come nozione relativa quando $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ oppure $x \to \pm\infty$. La convergenza (o divergenza) di x deve essere chiarita dal contesto, altrimenti la nozione di o-piccolo perde di significato.

Si dice che una certa funzione $g(x)$ è un o-piccolo di una funzione $f(x)$, e si scrive

$$g = o(f)$$

quando (per x che converge o diverge opportunamente)

$$\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Le seguenti proprietà sono conseguenza diretta della definizione

$$\lambda \cdot o(f) + \mu \cdot o(f) = o(f) \tag{12}$$

$$\lambda \cdot o(f) = o(\lambda \cdot f) = o(f) \tag{13}$$

$$\text{se } g = o(f) \text{ allora } o(f+g) = o(f) \tag{14}$$

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Le tre proprietà si verificano come segue

- $\lim \frac{\lambda o(f)+\mu o(f)}{f} = \lambda \lim \frac{o(f)}{f} + \mu \lim \frac{o(f)}{f} = 0$
- $\lim \frac{\lambda o(f)}{f} = \frac{1}{\lambda} \cdot \lim \frac{o(\lambda f)}{f} = 0$
- $\lim \frac{o(f+g)}{f+g} = \lim \frac{o(f+g)}{f(1+g/f)} = \lim \frac{o(f+g)}{f} \cdot 1 = 0$. Quindi $o(f+g) = o(f)$.

Inoltre, possiamo enunciare un'altra proprietà che utilizziamo molto di frequente nella risoluzione di esercizi in particolare quando si tratta di limiti da risolvere con gli sviluppi di Taylor,

$$\boxed{\lim \frac{f+o(f)}{g+o(g)} = \lim \frac{f}{g}.} \tag{15}$$

Questo fatto si verifica osservando che

$$\lim \frac{f+o(f)}{g+o(g)} = \lim \frac{f \cdot (1+\frac{o(f)}{f})}{g \cdot (1+\frac{o(g)}{g})} = \lim \frac{f}{g} \cdot 1.$$

In ciò che segue ci concentriamo sui casi $x \to 0$ che sono quelli con cui risolviamo i limiti attraverso lo svolgimento degli sviluppi di Taylor. Osserviamo che dati $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{x^m = o(x^n) \text{ se e solo se } m > n.}$$

Quindi se dobbiamo calcolare il limite in un caso come il seguente

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha x^m + o(x^m)}{\beta x^n + o(x^n)},$$

per la proprietà (15), è sufficiente guardare al rapporto $\frac{\alpha x^m}{\beta x^n}$. Quindi

$$
\begin{aligned}
&\text{se } m > n \;\Rightarrow\; \lim = 0\\
&\text{se } m = n \;\Rightarrow\; \lim = \frac{\alpha}{\beta}\\
&\text{se } m < n \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lim = +\infty & \text{se } \frac{\alpha}{\beta} > 0 \;\&\; x \to 0^+\\ \lim = -\infty & \text{se } \frac{\alpha}{\beta} > 0 \;\&\; x \to 0^-\\ \lim = -\infty & \text{se } \frac{\alpha}{\beta} < 0 \;\&\; x \to 0^+\\ \lim = +\infty & \text{se } \frac{\alpha}{\beta} > 0 \;\&\; x \to 0^-. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Se invece siamo interessati a un limite di una funzione razionale (o quasi-razionale, nel senso che potrebbero esserci dei termini non polinomiali) per $x \to +\infty$, ricordiamo che le condizioni precedenti si invertono.

Dati due numeri naturali $m, n \in \mathbb{N}$, per $x \to \pm\infty$, $x^m = o(x^n)$ se e solo se $m < n$.

Esempio C.1. Consideriamo il limite,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x}{2x^2 + \sin(x)}.$$

Osserviamo che $x = o(x^2)$ perché $1 < 2$, mentre $\sin(x) = o(x^2)$ perché si tratta di una funzione limitata. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2},$$

grazie a quanto concluso nella formula (15).

Infine, guardiamo da vicino come si svolge lo sviluppo di uno sviluppo di Taylor senza calcolare direttamente le derivate, ma guardando allo sviluppo stesso come una funzione composta.

Supponiamo di conoscere lo sviluppo di $f(x)$ al grado n, e quello di $g(x)$ al grado n

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)\\
g(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).
\end{aligned}
$$

Guardando a $f(g(x))$ dobbiamo applicare una sostituzione

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= a_0 + a_1 g(x) + a_2 g(x)^2 + \cdots + o(g(x)^n)\\
&= a_0 + a_1((b_0 + b_1 x + \cdots + o(x^n)) + a_2\,(b_0 + b_1 x + \cdots + o(x^n))^2 + \cdots + o(g(x)^n)
\end{aligned}
$$

Osserviamo a questo punto che nello sviluppo dei calcoli, qualsiasi termine di grado $> n$ è un $o(x^n)$ e può quindi essere incluso in un unico termine $o(x^n)$. Se ci concentriamo sul termine $o(g(x)^n)$, osserviamo che:

- se $b_0 \neq 0$, allora questo termine non dà informazioni rilevanti sul comportamento di $o(g(x)^n)$;
- se invece $b_0 = 0$ (il caso che a noi interessa), grazie alla proprietà (14), $o(g(x)^n) = o((x + \cdots)^n) = o(x^n)$.

Esempio C.2. Consideriamo lo sviluppo al grado 3 (per $x \to 0$) di $e^{\sin(x)}$. Lo sviluppo di $\sin(x)$ è $x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, dunque

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)} &= 1 + (\sin(x)) + \frac{1}{2}(\sin(x))^2 + \frac{1}{6}(\sin(x))^3 + o((\sin(x))^3) \\
&= 1 + (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3 + o((x + \cdots)^3) \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}(x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + \cdots + o(x^3)) + \frac{1}{6}(x^3 - \frac{x^9}{216} + \cdots + o(x^3)) + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).
\end{aligned}$$