PROVA SCRITTA D'ESAME DEL 29 GENNAIO 2024
TIPO A

Secondo appello modulo di Analisi Matematica, a.a. 23/24

Avete a disposizione 3 ore per lo svolgimento dell'esame.

Non sono concesse calcolatrici, cellulari, né alcun apparecchio elettronico. Sono permessi gli appunti.

Gli esercizi vanno risolti giustificando i passaggi con le proprietà e i teoremi appresi durante il corso.

Esercizio 1 (5 punti). Calcolare (se esiste) il limite della seguente funzione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{(x-2)\cdot x}$$

Esercizio 2 (6 punti). Calcolare (se esiste) il limite qui indicato

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cdot \sin(x) - x}{\ln(\cos(x))}$$

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor al quarto ordine per $x \to 0$ di alcune tra le funzioni più utilizzate

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

Per ogni funzione che non appare in questa lista è necessario giustificare come avete ottenuto il suo sviluppo di Taylor

Esercizio 3 (7 punti). Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3}.$$

È possibile aiutarsi con un disegno approssimativo del grafico della funzione. Indicare,

- il dominio massimale
- gli intervalli di crescenza e decrescenza
- i punti stazionari dicendo in più se si tratta di massimi o minimi locali
- l'esistenza o meno di asintoti verticali
- calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 x^5 \ln(x^2) \mathrm{d}x$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Determinare per quali valori di $r \in \mathbb{R}$, la funzione $\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)^r}$ è integrabile sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e per tali valori calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)^r} \mathrm{d}x$$