La struttura per scadenza

La struttura per scadenza dei tassi di interesse

- La struttura a termine (o per scadenza) rappresenta in un momento determinato la relazione tra i prezzi degli ZCB unitari (VN=1) o i tassi di interesse a pronti (o tassi spot) e la loro scadenza (o vita residua) per un dato emittente o per un gruppo di emittenti con lo stesso rating cioè lo stesso livello di rischio di fallimento (default risk).
- In particolare, considereremo strutture a termine ottenute utilizzando le obbligazioni del Tesoro, ovvero titoli emessi da Stati sovrani
  - la funzione di sconto
  - la curva dei tassi spot.

La funzione di sconto

- Il prezzo all'istante t di uno ZCB con scadenza T_k ≥ t trattato sul mercato è

$$P_t^{T_k} = \frac{FV}{\left(1+i_t^{T_k}\right)^{T_k-t}} = \frac{1}{\left(1+i_t^{T_k}\right)^{T_k-t}} FV = B_t^{T_K} FV$$

- Questo prezzo riflette la funzione di sconto del mercato per pagamenti certi al tempo T_k, cioè

$$B_t^{T_K} = \frac{P_t^{T_k}}{FV} = \frac{1}{\left(1+i_t^{T_k}\right)^{T_k-t}}$$

La funzione di sconto

- Il fattore di sconto sul mercato per i pagamenti sicuri al tempo T_k può essere visto come
- il prezzo al momento t di $1 disponibile al tempo T_k con certezza;
- il prezzo al momento t di uno ZCB del Tesoro, con maturity T_k e valore nominale (o facciale) di $1;
- il fattore con cui moltiplicare gli importi sicuri al momento T_k per ottenere il loro valore al tempo t.
- Il fattore di sconto stabilito dal mercato per prezzare in t importi di denaro "certi" disponibili al tempo T_k dipende dal tasso di rendimento degli ZCB che scadono in T_k.
- Questo tasso viene chiamato tasso a pronti (o spot) prevalente sul mercato al tempo t e scadenza T_k.

La funzione di sconto

- Se fossero scambiati sul mercato ZCB per tutte le scadenze possibili si potrebbe facilmente ricavare la funzione di sconto di mercato prevalente al tempo t

$$B_t^{T_K} = f_t(T_K)$$

- La funzione di sconto del mercato è la struttura per scadenza che esprime i prezzi degli ZCB unitari in funzione della loro vita residua (T_k-t)
- Poiché verosimilmente tutti gli investitori preferiscono avere $1 al tempo T_k piuttosto che ad un'epoca successiva T_s, la funzione di sconto è una funzione decrescente rispetto alla maturity

$$0 < B_t^{T_s} < B_t^{T_k} \leq 1 \text{ per ogni } k < s$$

La curva dei tassi spot

- Dalla funzione di sconto possiamo ottenere la struttura a termine dei tassi spot, o dei tassi ZCB, o semplicemente curva dei rendimenti, ovvero la funzione che rappresenta i tassi a pronti in funzione della loro maturity

$$B_t^{T_K} = \frac{1}{\left(1+i_t^{T_k}\right)^{T_k-t}} \rightarrow i_t^{T_k} = \left(\frac{1}{B_t^{T_K}}\right)^{1/\left(T_k-t\right)} - 1$$

$$i_t^{T_k} = g_t\left(T_k\right)$$

La curva dei tassi spot

- Dalla relazione tra prezzi dei titoli senza cedola e tassi ZCB è possibile passare agevolmente dalla funzione di sconto alla struttura per scadenza dei tassi a pronti e viceversa.
- In altri termini, le due strutture a termine, quella dei prezzi degli ZCB unitari e quella dei tassi spot, contengono esattamente le stesse informazioni
- Vediamo ora alcuni esempi utili a comprendere come costruire le due strutture per scadenza a partire dal prezzo di mercato degli ZCB con diverse maturity.

Esempio 1

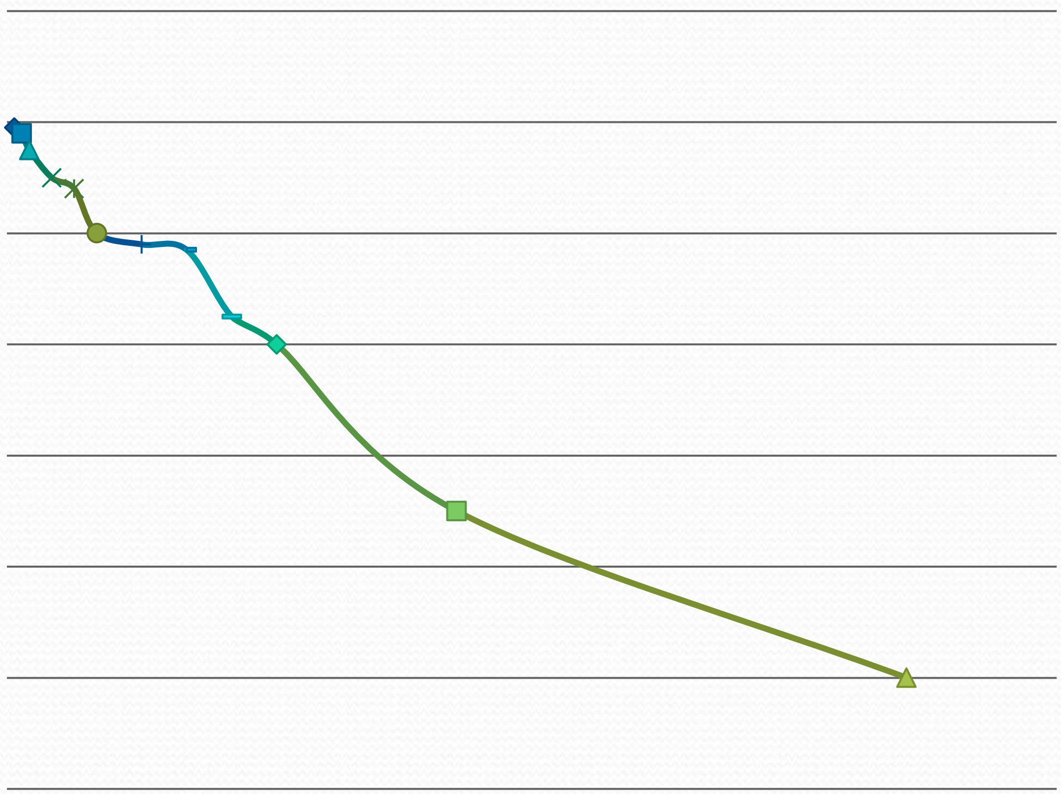
- Dati i prezzi degli ZCB seguenti, ricavare i fattori di sconto del mercato e i tassi a pronti

FV	1000
Maturity (months)	ZCB prices
1	999
2	998
3	995
6	990
9	988
12	980
18	978
24	977
30	965
36	960
60	930

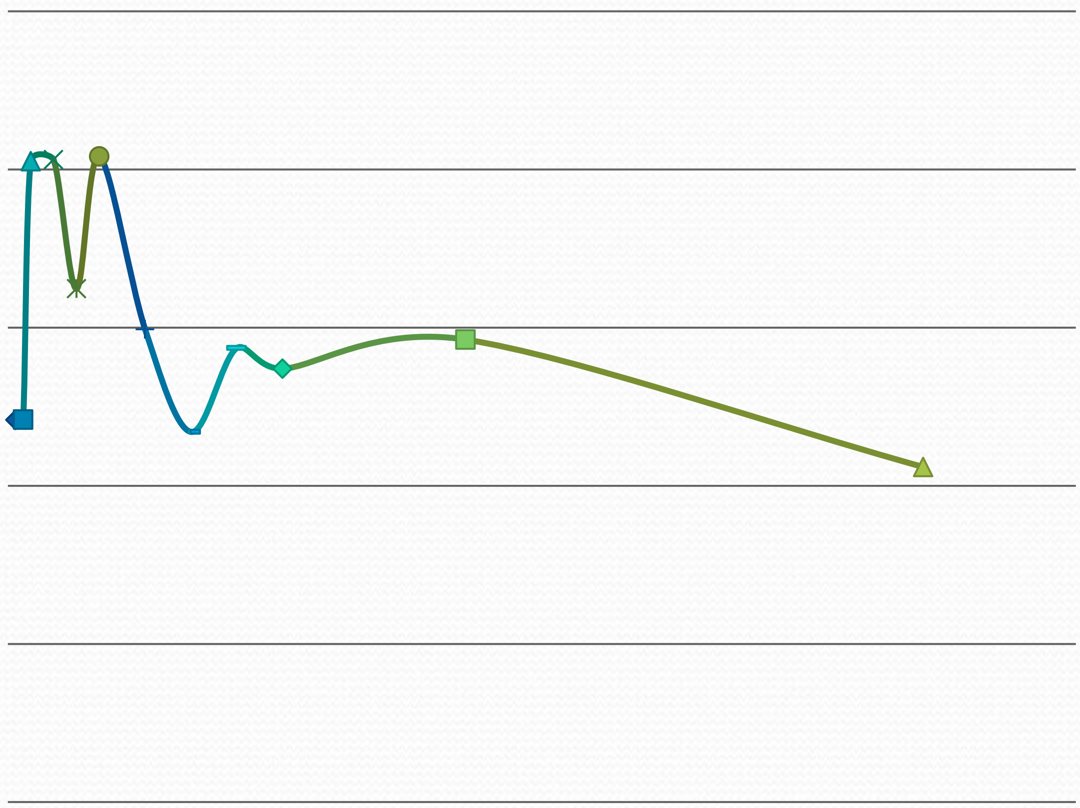
Esempio 1

FV		1000		
Maturity (months)	Maturity (years)	ZCB prices	Discount factors	Spot rates
1	0,08333	999	0,999	1,2078%
2	0,16667	998	0,998	1,2084%
3	0,25	995	0,995	2,0253%
6	0,5	990	0,99	2,0304%
9	0,75	988	0,988	1,6227%
12	1	980	0,98	2,0408%
18	1,5	978	0,978	1,4941%
24	2	977	0,977	1,1702%
30	2,5	965	0,965	1,4353%
36	3	960	0,96	1,3700%
60	5	930	0,93	1,4620%

Esempio 1- funzione di sconto



Esempio 1- curva tassi spot



Esempio 2

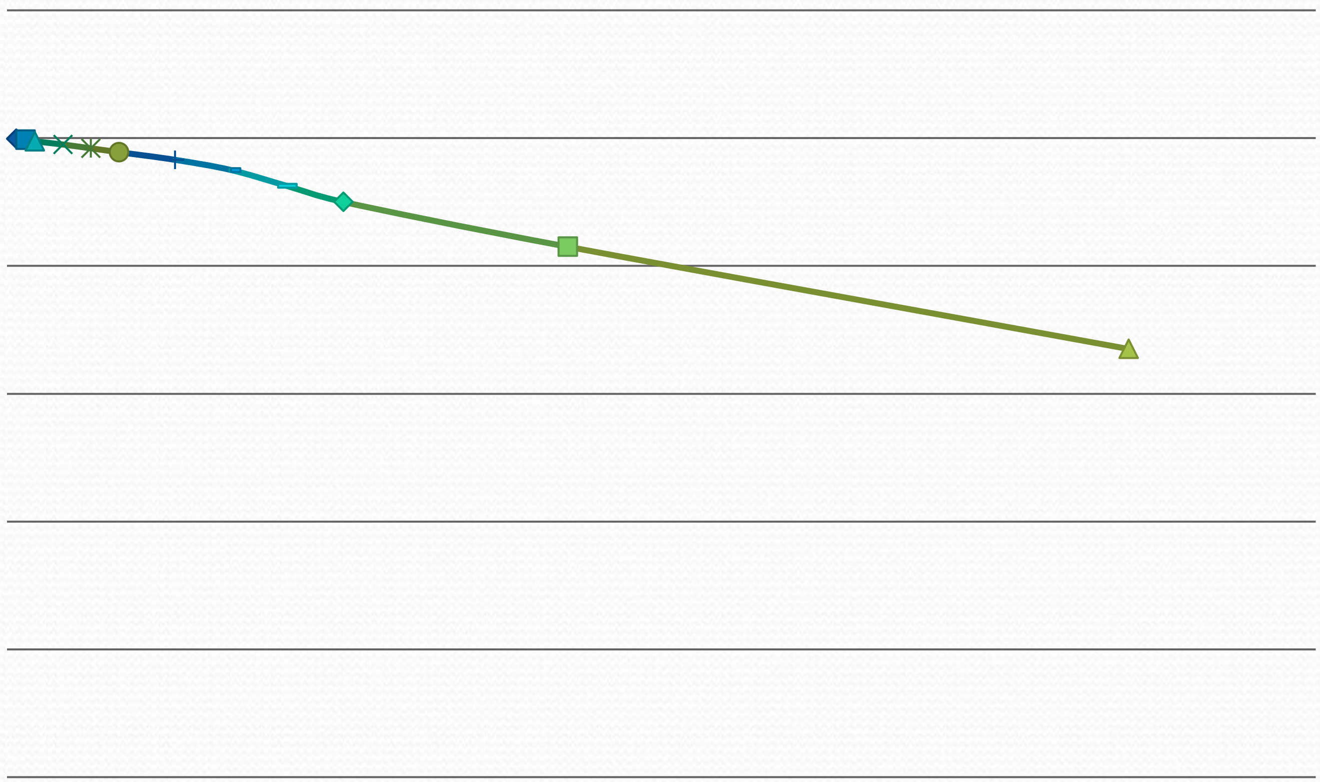
- Dati i prezzi degli ZCB seguenti, ricavare i fattori di sconto del mercato e i tassi a pronti

FV	1000
Maturity (months)	ZCB prices
1	999
2	997,5
3	995
6	990
9	984
12	978
18	966
24	950
30	925
36	900
60	830

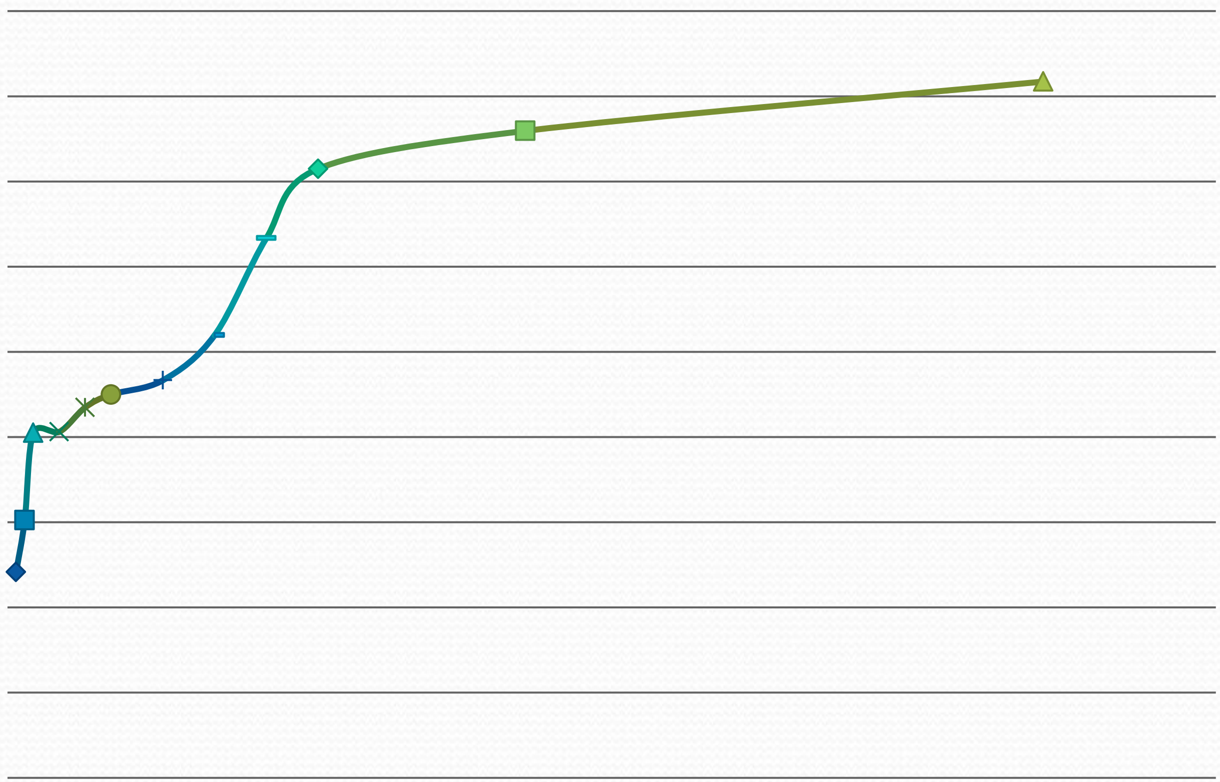
Esempio 2

FV		1000		
Maturity (months)	Maturity (years)	ZCB prices	Discount factors	Spot rates
1	0,08333	999	0,999	1,2078%
2	0,16667	997,5	0,9975	1,5132%
3	0,25	995	0,995	2,0253%
6	0,5	990	0,99	2,0304%
9	0,75	984	0,984	2,1739%
12	1	978	0,978	2,2495%
18	1,5	966	0,966	2,3329%
24	2	950	0,95	2,5978%
30	2,5	925	0,925	3,1676%
36	3	900	0,9	3,5744%
60	5	830	0,83	3,7969%

Esempio 2- funzione di sconto



Esempio 2- curva tassi spot



Esempio 3

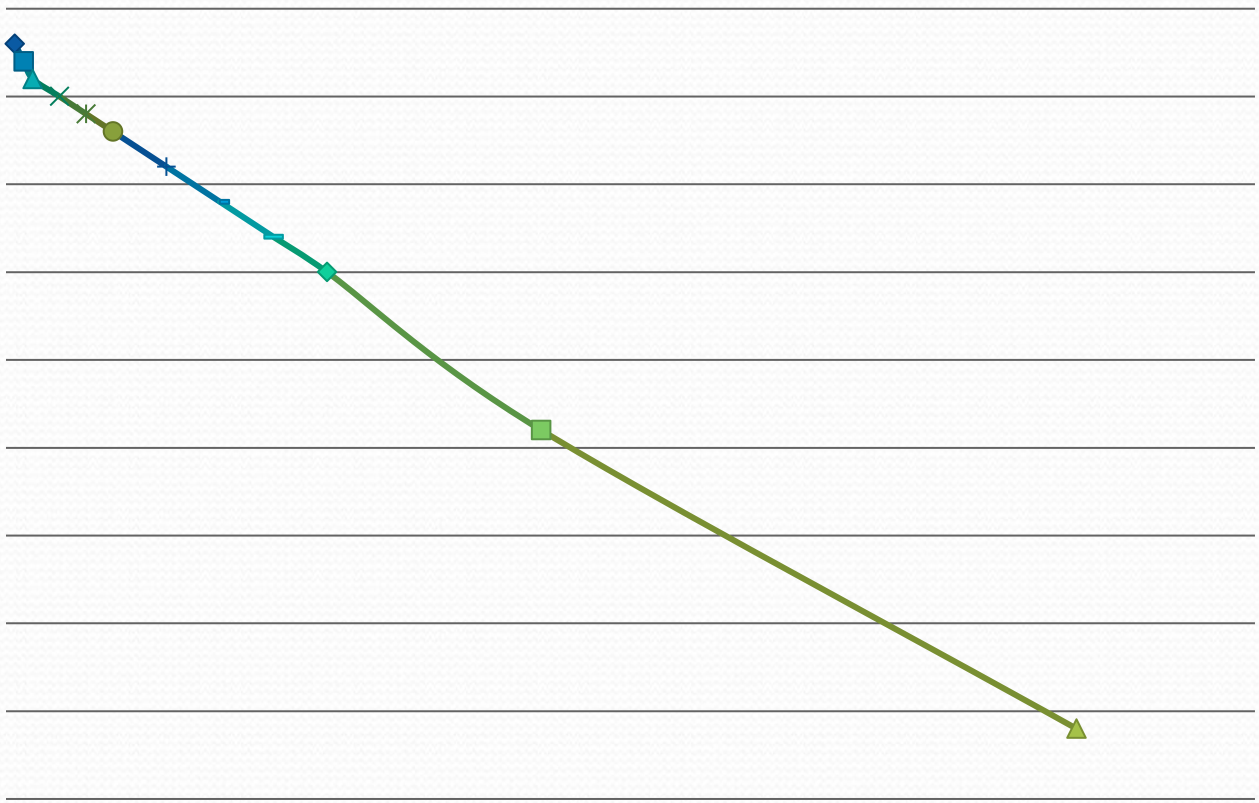
- Dati i prezzi degli ZCB seguenti, ricavare i fattori di sconto del mercato e i tassi a pronti

FV	1000
Maturity (months)	ZCB prices
1	998
2	997
3	996
6	995
9	994
12	993
18	991
24	989
30	987
36	985
60	976

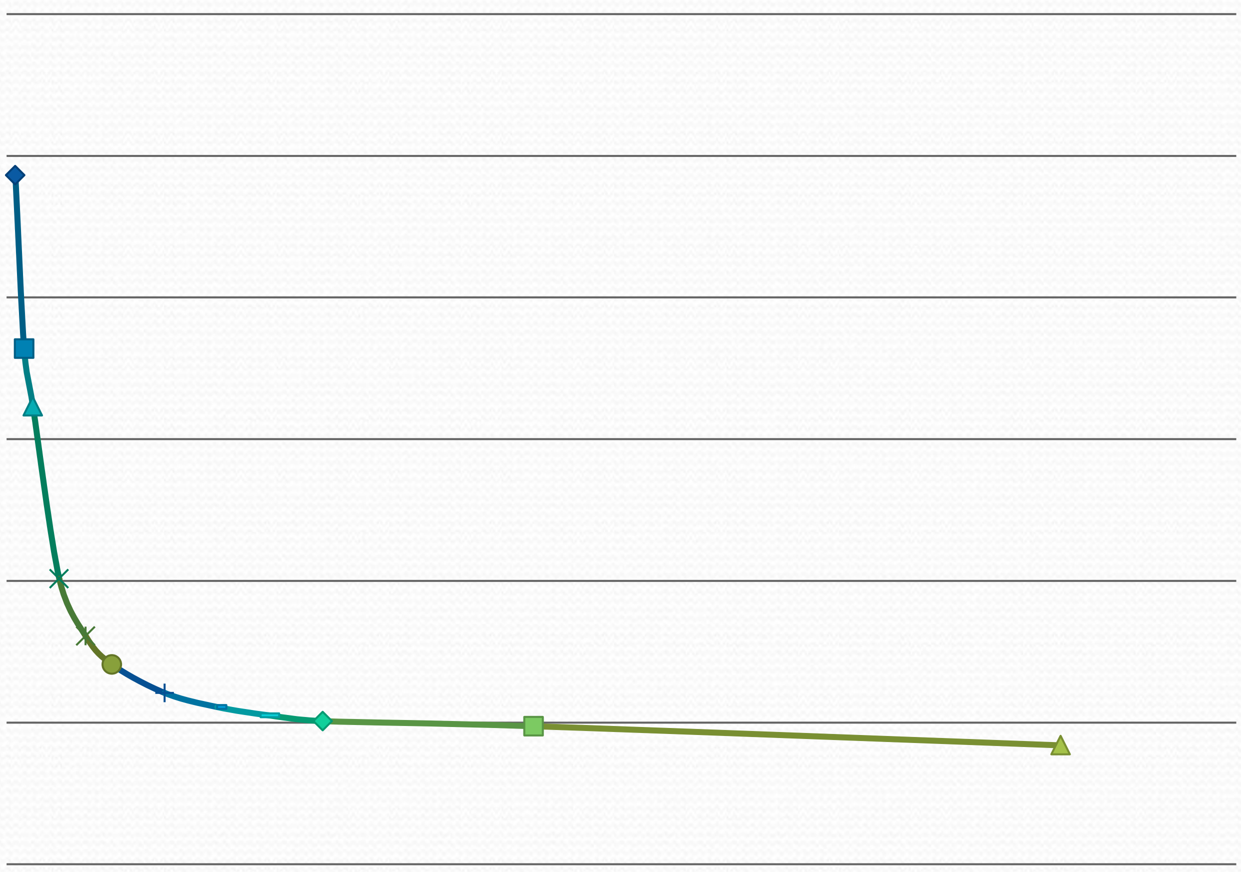
Esempio 3

FV		1000		
Maturity (months)	Maturity (years)	ZCB prices	Discount factors	Spot rates
1	0,08333	998	0,998	2,4315%
2	0,16667	997	0,997	1,8191%
3	0,25	996	0,996	1,6161%
6	0,5	995	0,995	1,0076%
9	0,75	994	0,994	0,8056%
12	1	993	0,993	0,7049%
18	1,5	991	0,991	0,6045%
24	2	989	0,989	0,5546%
30	2,5	987	0,987	0,5248%
36	3	985	0,985	0,5051%
60	5	976	0,976	0,4870%

Esempio 3- funzione di sconto



Esempio 3- curva dei tassi spot



Esempio 4

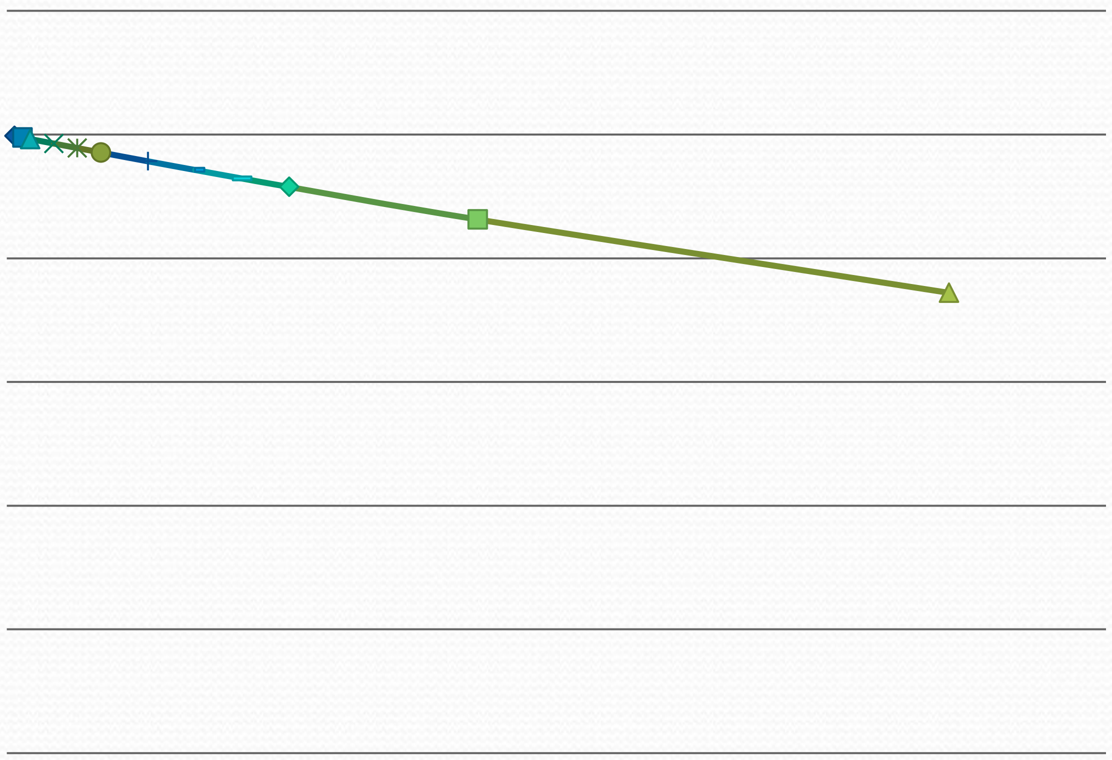
- Dati i prezzi degli ZCB seguenti, ricavare i fattori di sconto del mercato e i tassi a pronti

FV	1000
Maturity (months)	ZCB prices (years)
1	997,5398
2	995,0856
3	992,6375
6	985,3293
9	978,0748
12	970,8738
18	956,6304
24	942,5959
30	928,7673
36	915,1417
60	862,6088

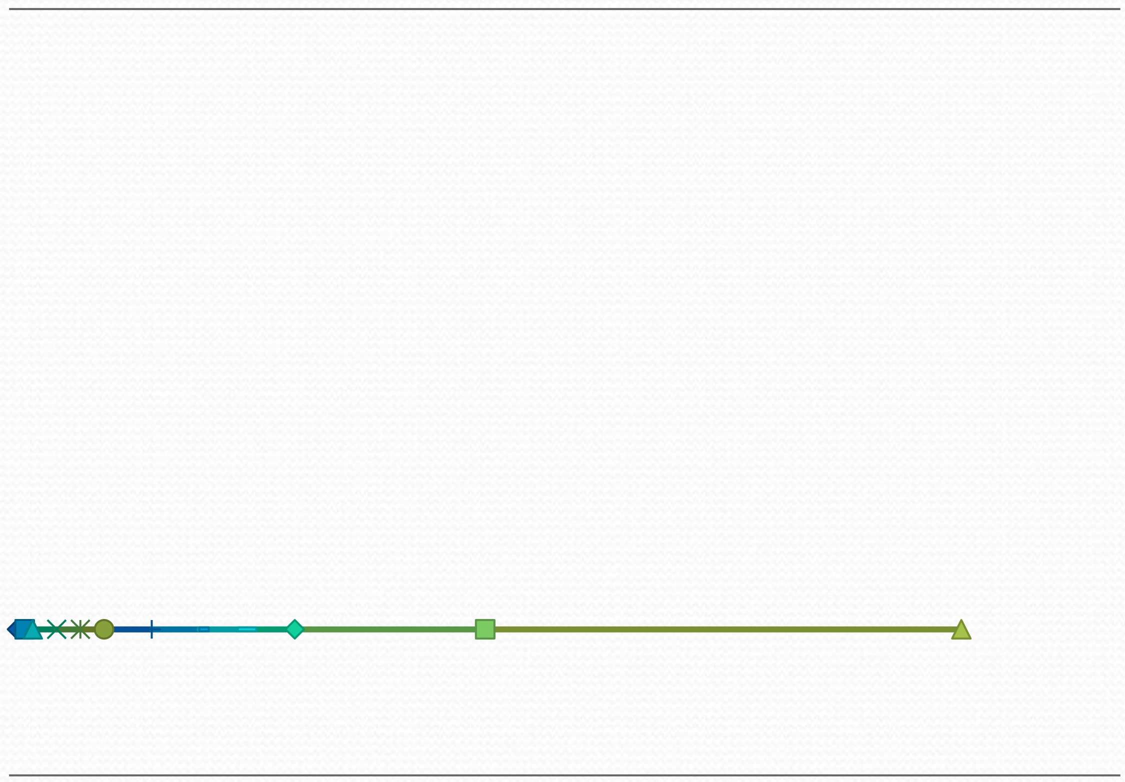
Esempio 4

FV		1000		
Maturity (months)	Maturity (years)	ZCB prices	Discount factors	Spot rates
1	0,083333	997,5398	0,9975	3,0000%
2	0,166667	995,0856	0,9951	3,0000%
3	0,25	992,6375	0,9926	3,0000%
6	0,5	985,3293	0,9853	3,0000%
9	0,75	978,0748	0,9781	3,0000%
12	1	970,8738	0,9709	3,0000%
18	1,5	956,6304	0,9566	3,0000%
24	2	942,5959	0,9426	3,0000%
30	2,5	928,7673	0,9288	3,0000%
36	3	915,1417	0,9151	3,0000%
60	5	862,6088	0,8626	3,0000%

Esempio 4- funzione di sconto



Esempio 4-curva tassi spot



Osservazioni

- Gli esempi precedenti dimostrano che, mentre la funzione di sconto è sempre decrescente rispetto alla scadenza, la struttura a termine dei tassi spot può essere crescente, descrescente, piatta o presentare diversi andamenti.
- Il prezzo di mercato di tutti i titoli di Stato riflette la funzione di sconto del mercato. Perciò, poichè il numero di ZCB scambiati sul mercato è limitato, è possibile ricavare informazioni sulla funzione di sconto utilizzando anche il prezzo di mercato degli altri titoli di Stato, in primis i titoli con cedola.
- La procedura di “inferenza” della struttura a termine dal prezzo di tutti i titoli di Stato è detta “bootstrap”.
- Descriviamo il bootstrap con un esempio.

Esempio 5

- Determinare il tasso a pronti a 2 anni e il prezzo di uno ZCB con scadenza 2 anni e valore facciale \$10.000, sapendo che uno ZCB, maturity un anno, valore nominale \$1.000, ha un prezzo di mercato di \$985 e che un titolo con cedola annua dell'8%, maturity 2 anni, valore facciale \$1.000 ha un prezzo di mercato di \$995.

Esempio 5

$$i_0^1 = \left(\frac{FV}{P^T}\right)^{1/T} - 1 = \left(\frac{1.000}{985}\right)^{1/1} - 1 = 1{,}5228\%$$

$$P_{BB} = \frac{C}{1+i_0^1} + \frac{C+FV}{\left(1+i_0^2\right)^2} \rightarrow 995 = \frac{80}{1{,}015528} + \frac{1.080}{\left(1+i_0^2\right)^2}$$

$$\frac{1.080}{\left(1+i_0^2\right)^2} = 916{,}2 \rightarrow i_0^2 = \left(\frac{1.080}{916{,}2}\right)^{1/2} - 1 = 8{,}5717\%$$

$$P_{ZCB2} = \frac{FV}{\left(1+i_0^2\right)^2} = \frac{10.000}{\left(1+8{,}5717\%\right)^2} = 8.483{,}33$$

Prezzi a pronti (spot) vs prezzo a termine (forward)

- Operazione a pronti: il prezzo ed il bene oggetto della compravendita vengono scambiati oggi, cioè al momento della stipula del contratto
- Operazione a termine: il prezzo ed il bene oggetto della compravendita vengono fissati oggi, cioè al momento della stipula del contratto, ma vengono scambiati ad una data futura prestabilita nello stesso contratto.
- E’ possibile acquistare beni, compresi titoli, sul mercato a pronti pagando il prezzo “spot” o sul mercato a termine al prezzo “forward” stabilito oggi ma corrisposto ad una data futura prestabilita.

Tassi a pronti (spot) vs tassi a termine (forward)

- Un tasso spot è un tasso applicato ad un prestito che inizia oggi e che scade ad una certa data futura.
- Un tasso forward è il tasso di interesse applicato ad un prestito che avrà inizio ad una certa data futura e che scadrà ad un altra data futura. Tuttavia, tale tasso è fissato oggi.
- Il tasso forward composto annuo prevalente al tempo t relativo ad un prestito che ha inizio in T e che scade al tempo S si indica con

  $f_t^{T,S}$ with $t \leq T < S$
- E' il tasso appropriato al tempo t per calcolare il valore in T di una somma disponibile al tempo S

Tassi spot vs tassi forward

- Qual è la relazione tra tassi spot e tassi forward?
- Per rispondere a questa domanda consideriamo le seguenti strategie di investimento
- A) Investiamo al tempo t $1 al tasso spot prevalente in t con scadenza la data S. Al tempo S con certezza otterremo la somma di denaro

$$\$1 \cdot \left(1 + i_t^S\right)^{S-t} = \$\left(1 + i_t^S\right)^{S-t}$$

cioè il montante di $1 prodotto sul periodo di ampiezza S-t dall'investimento

Spot rates vs forward rates

- B) Investiamo oggi $1 al tasso spot prevalente al tempo t con maturity T. Al tempo T disinvestiamo ed otteniamo la somma

$$\left(1+i_t^T\right)^{T-t}$$

- Possiamo poi investire al tasso spot prevalente T la somma precedente sino al tempo S ottenendo la somma

$$\left(1+i_t^T\right)^{T-t}\left(1+i_T^S\right)^{S-T}$$

- Tuttavia, poichè al tempo t questo tasso spot futuro non è noto, anche il montante finale sarà ignoto in t.

Tassi spot vs tassi forward

- C) Possiamo in alternativa stabilire già al tempo t di investire al tempo T la somma disinvestita al tasso forward prevalente al tempo t per il periodo tra T e S ed ottenere in S la somma

$$\left(1+i_t^T\right)^{T-t}\left(1+f_t^{T,S}\right)^{S-T}$$

- Per evitare possibilità di arbitraggio, le strategie A) e C) devono produrre lo stesso montante in S

$$\left(1+i_t^S\right)^{S-t}=\left(1+i_t^T\right)^{T-t}\left(1+f_t^{T,S}\right)^{S-T}$$

- Il tasso forward è il tasso implicito nella struttura dei tassi spot prevalente in t e rappresenta una previsione del futuro tasso spot che prevarrà in T per prestiti di durata S-T.

Tassi spot vs tassi forward

$$\left(1+i_t^S\right)^{S-t} = \left(1+i_t^T\right)^{T-t}\left(1+f_t^{T,S}\right)^{S-T}$$

$$\frac{\left(1+i_t^S\right)^{S-t}}{\left(1+i_t^T\right)^{T-t}} = \left(1+f_t^{T,S}\right)^{S-T}$$

$$f_t^{T,S} = \left[\frac{\left(1+i_t^S\right)^{S-t}}{\left(1+i_t^T\right)^{T-t}}\right]^{\frac{1}{S-T}} - 1$$

Prezzi spot e prezzi forward di ZCB unitari

$$\left(1+i_t^S\right)^{S-t} = \left(1+i_t^T\right)^{T-t}\left(1+f_t^{T,S}\right)^{S-T}$$

$$\frac{1}{\left(1+i_t^S\right)^{S-t}} = \frac{1}{\left(1+i_t^T\right)^{T-t}}\frac{1}{\left(1+f_t^{T,S}\right)^{S-T}}$$

$$B_t^S = B_t^T F_t^{T,S} \rightarrow F_t^{T,S} = \frac{B_t^S}{B_t^T}$$

$$f_t^{T,S} = \left[\frac{B_t^T}{B_t^S}\right]^{\frac{1}{S-T}} - 1$$

Prezzo forward di uno ZCB

- Il prezzo forward stabilito al tempo t per acquistare al tempo T uno ZCB con valore facciale VF e scadenza S-T con S>T è

$$\hat{F}_t^{T,S} = \frac{VF}{\left(1+f_t^{T,S}\right)^{S-T}} = VF \cdot F_t^{T,S}$$

$$= VF \, \frac{B_t^S}{B_t^T}$$

- Nota bene: il contratto è stipulato al tempo t ed anche il prezzo ma l'acquirente pagherà il prezzo e riceverà il bond al tempo T

Osservazione

- Se t=T, il tasso forward di una operazione che inizia in t e termina in S coincide con il tasso spot prevalente al tempo t e scadenza S

$$f_t^{T,S} = \left[\frac{B_t^T}{B_t^S}\right]^{\frac{1}{S-T}} - 1$$

$$\downarrow$$

$$f_t^{t,S} = \left[\frac{B_t^t}{B_t^S}\right]^{\frac{1}{S-t}} - 1 = \left[\frac{1}{B_t^S}\right]^{\frac{1}{S-t}} - 1 = i_t^s$$

Esempio 6

- Uno ZCB, maturity 1 anno, valore nominale \$1.000, ha un prezzo di mercato di \$980. Un altro ZCB, scadenza 18 mesi, valore nominale \$1.000, ha un prezzo di mercato di \$970.

Determinare

- $f_0^{1y;1,5y}$

- $\hat{F}_0^{1y;1,5y}$ di uno ZCB, VF \$1.000

Esempio 6

$$f_0^{1y;1,5y} = \left[\frac{B_t^{1y}}{B_t^{1,5y}}\right]^{\frac{1}{0,5}} - 1 = \left[\frac{980}{970}\right]^{\frac{1}{0,5}} - 1 = 2,0725\%$$

$$\hat{F}_0^{1y;1,5y} = \frac{FV}{\left(1 + f_0^{1y;1,5y}\right)^{0,5}} = \frac{1.000}{\left(1 + 2,0725\%\right)^{0,5}} = 989,79$$

or

$$\hat{F}_0^{1y;1,5y} = FV \cdot F_0^{1y;1,5y} = FV \cdot \frac{B_t^{1,5y}}{B_t^{1y}} = 989,79$$

Rischio di Credito: Obbligazioni societarie

- I titoli di Stato sono normalmente assunti privi di rischio nel senso che, se detenuti sino alla scadenza, pagano secondo le corrette tempistiche tutte le eventuali cedole ed il valore nominale alla scadenza.
- In altri termini, questo significa assumere che gli Stati non possano fallire, e che saranno sempre in grado di far fronte in pieno ed in tempo ai loro impegni.
- In realtà, la storia ci insegna che anche gli Stati sovrani possono andare in default.

Rischio di Credito: Obbligazioni societarie

- L’esistenza dello spread tra rendimenti dei titoli di stato tedeschi ed italiani, per esempio, è una dimostrazione del fatto che i mercati percepiscono il debito tedesco più sicuro di quello italiano.
- Questo vuol dire che i mercati ritengono che, se anche assumessimo rischio nullo per la Germania, in qualche modo ci sarebbe una probabilità non nulla, magari anche molto bassa, di fallimento dell’Italia.
- Maggiore è lo spread tra i titoli tedeschi e quelli italiani, maggiore è la rischiosità percepita dei titoli di stato italiani rispetto a quelli tedeschi.

Rischio di Credito: Obbligazioni societarie

- Quali sono le implicazioni di uno spread diverso?
- Supponiamo a titolo esemplificativo che sia Germania che Italia desiderino raccogliere denaro tramite l'emissione di un titolo senza cedola, scadenza 5 anni, con valore nominale complessivo della raccolta Euro 100.000.000. Supponiamo che il tasso spot tedesco a 5 anni sia del 3%, lo spread tra Bund e BTP sia del 2%.
- Quale importo Germania ed Italia raccolgono oggi grazie alla loro emissione di ZCB a 5 anni?
- Il tasso spot tedesco a 5 anni è del 3%, mentre quello italiano è del 5% (tasso tedesco + spread).

Rischio di Credito: Obbligazioni societarie

- Raccolta Germania

100.000.000/(1+3%)^5 = Euro 97.087.379

- Raccolta Italia

100.000.000/(1+5%)^5 = Euro 95.238.095

- Lo stato italiano a fronte della stessa emissione raccoglie 1.849.283 Euro in meno
- In altri termini, il debito dell'Italia vale meno. Per l'Italia risulta più costoso indebitarsi per raccogliere la stessa somma poiché per acquistare titoli di Stato italiani gli investitori chiedono rendimenti più alti (nell' esempio il 3% per investire nei titoli di Stato tedeschi ed il 5% per investire in quelli italiani).

Rischio di Credito: Obbligazioni societarie

- Conseguenza: ogni Stato sovrano ha una propria struttura per scadenza che riflette il rischio di default dello Stato su diversi orizzonti temporali.
- Poiché le aziende sono più esposte al rischio di default degli stati sovrani, potranno indebitarsi a tassi ancora più elevati.
- A ciascuna impresa che può emettere obbligazioni è associato un rating che riflette la rischiosità del suo debito.
- Ogni impresa pertanto, in base al proprio rating, avrà una diversa struttura per scadenza.

Rischio di Credito: Obbligazioni societarie

- Pertanto, per valutare il prezzo di una emissione obbligazionaria «corporate», occorre fare riferimento alla sua struttura per scadenza dei tassi spot e non a quella dei titoli di Stato.
- Nota bene: la trattazione contenuta in queste slide fornisce solo un cenno molto vago al rischio di credito per fornire allo studente una prima idea del suo significato e delle sue implicazioni basilari.

Valutazione di una obbligazione corporate

- La società Omega, operante in Italia, ha emesso un bullet bond, scadenza 2 anni, tasso cedolare del 6%, cedole annue, valore nominale 100.
- Questa società ha un rating C.
- Sapendo che i tassi spot dei titoli di Stato italiani a uno e due anni sono del 2% e del 2,5% e che gli spread per i tassi a uno e a due anni di una impresa con rating C sono del 3% e del 5% si calcolino:

a) Il prezzo del titolo nell'ipotesi che non ci sia rischio di default (ovvero che tale rischio sia uguale a quello dello Stato);

b) Il prezzo del titolo.

Valutazione di una obbligazione corporate

- Prezzo del titolo in assenza di rischio di default (non defaultable bond)

$P= 6/(1+2\%)+106/(1+2,5\%)^2= 106,77$

- Tassi spot rating C

$Y(0; 1y)= 2\%+3\%= 5\%$

$Y(0; 2y)=2,5\%+5\%= 7,5\%$

- Prezzo defaultable bond rating C

$P= 6/(1+5\%)+106/(1+7,5\%)^2= 97,44$

Ex 1

- Il prezzo degli ZCB a 3 mesi e a 6 mesi, VF=100, è rispettivamente 98,6 e 97,1 Euro. Il prezzo di un BTP con scadenza 9 mesi, cedola 5%, VF=100, è di 100,5, determinare:
  a) i tassi spot a 3, 6 e 9 mesi in base annua;
  b) il valore di un portafolio formato da 100 ZCB a 3 mesi, 80 ZCB a 6 mesi, 250 ZCB a 9 mesi;
  c) il prezzo di un BTP a 12 mesi, valore nominale 100, tasso cedolare del 6%, sapendo che sul mercato uno ZCB a 12 mesi, valore facciale 100, è quotato a 93 Euro.

SOL 1 a)

- a) Tassi spot a 3, 6 and 9 mesi in base annua

$$i^{3m} = \left(\frac{100}{98,6}\right)^{1/0,25} - 1 = 5,802\%$$

$$i^{6m} = \left(\frac{100}{97,1}\right)^{1/0,5} - 1 = 6,062\%$$

$$100,5 = \frac{2,5}{\left(1+5,802\%\right)^{0,25}} + \frac{102,5}{\left(1+i^{9m}\right)^{0,75}} \quad \rightarrow \quad i^{9m} = 6,118\%$$

SOL 1 b)

- b) Prezzo portafoglio

$$P_{Port} = 100 * 98,6 + 80 * 97,1 + 250 * \frac{100}{(1 + 6,118\%)^{0,75}} = \boxed{41.539,03}$$

SOL 1 c)

- c) Prezzo BTP a 12 mesi

$$i^{12m} = \frac{100}{93} - 1 = 7,527\%$$

$$P_{Btp} = \frac{3}{\left(1+6,062\%\right)^{0,5}} + \frac{103}{\left(1+7,527\%\right)} = \boxed{98,70}$$

EX 2

- Il prezzo dei BOT a 3, 6 e 12 mesi, valore nominale 100, è rispettivante 99, 97 and 94 Euro.

a) Determinare i tassi a pronti a 3, 6 e 12 mesi in base annua.

b) Determinare il prezzo di un BTP, valore nominale 100, maturity 12 mesi, cedola 7%.

c) Sapendo che il prezzo di un BTP, valore nominale 100, maturity 18 mesi, cedola 9%, è 102 Euro, determinare il prezzo di uno ZCB a 18 mesi, valore facciale 1.000.

d) Trovare il tasso forward f(t=0; T=3m; S=6m) ed il prezzo forward F(t=0; T=3m; S=6m) di un BOT di valore facciale 100 Euro.

SOL 2 a)

a) Tassi spot

$$i^{3m} = \left(\frac{100}{99}\right)^{\frac{12}{3}} - 1 = 4,102\%$$

$$i^{6m} = \left(\frac{100}{97}\right)^{\frac{12}{6}} - 1 = 6,281\%$$

$$i^{12m} = \left(\frac{100}{94}\right)^{\frac{12}{12}} - 1 = 6,383\%$$

SOL 2 b)

b) Prezzo BTP

$$P_{BTP} = \frac{C}{\left(1+i^{6m}\right)^{6/12}} + \frac{C+VN}{\left(1+i^{12m}\right)^{12/12}} =$$

$$= \frac{3,5}{\left(1+0,06281\right)^{0,5}} + \frac{103,5}{\left(1+0,06383\right)^{1}} =$$

$$= 3,395 + 97,290 =$$

$$= 100,685$$

SOL 2 c)

c) Prezzo ZCB

$$P_{BTP} = \frac{C}{(1+i^{6m})^{6/12}} + \frac{C}{(1+i^{12m})^{12/12}} + \frac{C+VN}{(1+i_2^{18m})^{18/12}}$$

$$\frac{C+VN}{(1+i^{18m})^{18/12}} = P_{BTP} - C\left[\frac{1}{(1+i^{6m})^{6/12}} + \frac{1}{(1+i^{12m})^{12/12}}\right]$$

$$(1+i^{18m})^{3/2} = \left(C+VN\right) / \left\{P_{BTP} - C\left[\frac{1}{(1+i^{6m})^{0,5}} + \frac{1}{(1+i^{12m})^{1}}\right]\right\}$$

SOL 2 c)

$$i^{18m} = \left(C + VN\right) / \left\{ P_{BTP} - C\left[\frac{1}{(1+i^{6m})^{0,5}} + \frac{1}{(1+i^{12m})^{1}} \right] \right\}^{\frac{2}{3}} - 1 =$$

$$= \left\{ 104,5 / \left[102 - 4,5\left(\frac{1}{(1+0,06281)^{0,5}} + \frac{1}{(1+0,06383)^{1}} \right) \right] \right\}^{2/3} - 1 =$$

$$= 7,77\%$$

$$P_{ZCB} = \frac{1.000}{\left(1+7,77\%\right)^{1,5}} = 893,83$$

SOL 2 d)

d) Tasso e prezzo forward

$$f_0^{3m;6m} = \left[\frac{B_t^{3m}}{B_t^{6m}}\right]^{\frac{1}{(3/12)}} - 1 = \left[\frac{99}{97}\right]^4 - 1 = 8{,}506\%$$

$$\hat{F}_0^{3m;9m} = \frac{FV}{\left(1+f_0^{3m;6m}\right)^{(6-3)/12}} = \frac{100}{\left(1+f_0^{3m;6m}\right)^{1/4}} = 97{,}98$$