

Struttura per scadenza

Esercizio 1

Il prezzo di un ZCB a 6 mesi, valore nominale 100, è 96,5. Il prezzo di un BTP a un anno, cedola 8%, valore nominale di 100 è 99, determinare:

- a) il tasso spot a 6 mesi e 12 mesi su base annua;
- b) il prezzo di un portafoglio obbligazionario che offre 4.000 € tra 6 mesi e 20.000 € tra un anno;
- c) il prezzo di mercato di un BTP che ha un valore nominale di 100, cedola 6%, e scade tra 18 mesi, sapendo che il valore attuale di uno ZCB 1,5 anni, che ha un valore nominale di € 10.000, è di € 8.700.

Esercizio 2

Data la seguente struttura dei tassi spot espressi su base annua

Maturity (months)	Spot rate (yearly basis)
1	1,208%
2	2,434%
3	2,436%
4	2,749%
5	3,190%
6	3,489%
7	3,887%
8	4,031%
9	4,145%
10	4,368%

11	4,081%
12	4,275%

calcolare:

a) il prezzo di mercato di un BTP che ha un valore nominale di 100 €, cedola 4%, e scade tra 11 mesi;

b) il prezzo di una rendita obbligazionaria che paga a 3 flussi di cassa trimestrali di € 100 ciascuno in via posticipata.

Esercizio 3

Data la seguente struttura dei tassi spot (%) espressi su base mensile

1m	2m	3m	4m	5m	6m	7m	8m	9m	10m	11m	12m
0,615	0,799	0,985	1,071	1,144	1,225	1,261	1,295	1,339	1,369	1,393	1,419

determinare il prezzo di una obbligazione avente i seguenti flussi di cassa

Time	3m	6m	9m	12m
Cash flow	100	130	130	90

Esercizio 4

Data la seguente struttura dei tassi spot (%) espressi su base semestrale

1se m	2se m	3se m	4se m	5se m	6se m	7se m	8se m	9se m	10se m
1,00	1,10	1,21	1,29	1,37	1,43	1,51	1,62	1,79	1,85

calcolare il prezzo di un BTP, valore nominale 100, cedola 3%, scadenza 5 anni.

Esercizio 5

Nella tabella seguente sono riportati i prezzi dei BTP con scadenza semestrale, valore nominale 100, cedola 4,6%:

BTP 1 sem	BTP 2 sem	BTP 3 sem	BTP 4 sem	BTP 5 sem
101	101,5	101,3	100,7	100,2

Determinare:

- A) il prezzo di uno ZCB, valore nominale= 1.000, scadenza= 12 mesi;
- B) il valore attuale di un'obbligazione, scadenza due anni, valore nominale=100, cedola=5 (pagata alla fine di ogni anno).

Esercizio 6

I tassi spot con scadenza 6 mesi e 1 anno sono rispettivamente del 2,5% e del 2,4%. Trovare il tasso spot con scadenza 1,5 anni, sapendo che il prezzo di mercato di un BTP, scadenza 18 mesi, valore nominale 100, tasso cedola 3%, è 101.331.

Esercizio 7

Il prezzo forward per acquistare tra 6 mesi uno ZCB con scadenza 1 anno è 97. Il prezzo spot di uno ZCB con scadenza 1,5 anni è 94. Trovare il prezzo di uno ZCB, FV 100, con scadenza 6 mesi e il tasso forward $f(0; 0,5y; 1,5y)$.

Esercizio 8

I tassi spot con scadenza 1 anno e 2 anni sono rispettivamente del 2% e del 3%. Trovare il tasso forward $f(0; 1y; 2y)$ e il prezzo forward per acquistare in 1 anno uno ZCB, scadenza 1 anno, FV 1.000.

Esercizio 9

Il prezzo di mercato di uno ZCB, scadenza 1 anno, è 94,75. Il prezzo di un'obbligazione bullet, scadenza 2 anni, tasso cedolare 6% (pagamenti annuali), è 104. Trovare il prezzo forward per acquistare uno ZCB, FV 10.000, scadenza 1 anno, tra un 1 anno.

Esercizio 10

Il tasso spot con scadenza 3 anni è del 7% e il tasso forward $f(0;1y;3y)$ è del 6,5%. Trovare il prezzo spot di uno ZCB, FV 1.000, scadenza 1 anno, e il prezzo forward per acquistare tra un anno uno ZCB, valore nominale 100, con scadenza 2 anni.

Esercizio 11

Dati i prezzi dei seguenti ZCB, valore facciale 100, determinare:

Scadenza mesi	Scadenza anni	Prezzi ZCB
3	0,25	99,5
6	0,5	99
9	0,75	98,6
12	1	97
15	1,25	96,6
18	1,5	96
21	1,75	95,4
24	2	94

- A) I fattori di sconto ed i tassi spot con scadenze corrispondenti a quelle degli ZCB;
- B) Il prezzo forward di uno ZCB da scambiarsi tra 6 mesi con scadenza 3 mesi, valore facciale 100, e il relativo tasso forward;
- C) Il prezzo di una annuity bond, scadenza 9 mesi, cedola trimestrale posticipata di 50;
- D) Il prezzo di un titolo con cedola 5%, corrisposta semestralmente, scadenza 2 anni, valore facciale 1.000;

E) Il prezzo di un titolo obbligazionario che paga 1.000 tra 3 mesi, 5.000 tra 9 mesi, 2.000 tra 1 anno.

Esercizio 12

Dati i seguenti tassi spot in base annua con scadenze semestrali

Scad mesi	Scad annue	Tassi spot
6	0,5	0,02
12	1	0,025
18	1,5	0,033
24	2	0,04

determinare:

- A) La struttura dei tassi forward con scambio a sei mesi;
- B) Il prezzo forward di uno ZCB da scambiarsi tra 6 mesi con scadenza 18 mesi, valore nominale 10.000.

Esercizio 13

Determinare il prezzo di un Corporate Bullet Bond, scadenza 2 anni, valore nominale \$ 1.000, tasso cedolare 5%, cedole semestrali, emesso da una società con un rating B data la seguente struttura per scadenza dei non defaultable tassi spot e degli spread per le società con rating B, riportati con scadenze semestrali ed in base annuo.

Tassi spot default free	Spread
0,02	0,02
0,025	0,025
0,033	0,03
0,04	0,02

Determinare inoltre la differenza tra il prezzo di questo Corporate Bond e del Bond equivalente in assenza di rischio di fallimento.

Esercizio 14

Determinare il prezzo di un Corporate Bullet Bond, scadenza 2 anni, valore nominale \$ 1.000, tasso cedolare 3%, cedole semestrali, emesso da una società con un rating BBB data la seguente struttura per scadenza dei non defaultable tassi spot, scadenze semestrali ed in base annua, sapendo che lo spread per le imprese con rating BBB è costante e pari ad 1%.

Tassi spot

default free

0,01

0,02

0,03

0,04

Determinare inoltre la differenza tra il prezzo di questo Corporate Bond e del Bond equivalente in assenza di rischio di fallimento.

Esercizio 15

La società Alfa, rating C, ha emesso un prestito obbligazionario attraverso ZCB con scadenza 4 per un valore nominale complessivo di \$ 10.000.000 raccogliendo \$ 7.000.000. Sapendo che il prezzo corrente di un ZCB non defaultable a 4 anni, valore nominale 100, è di \$ 91, si determini lo spread a 4 anni per una impresa con rating C.

SOLUTIONS: TERM STRUCTURES

Ex 1)

$$a) i^{6m} = \left(\frac{100}{96,5} \right)^{\frac{1}{0,5}} - 1 = 7,385\%$$

$$99 = \frac{4}{(1+7,385\%)^{0,5}} + \frac{104}{(1+i^{12m})^1}$$

$$\frac{104}{1+i^{12m}} = 99 - \frac{4}{(1+7,385\%)^{0,5}}$$

$$1+i^{12m} = 104 / \left(99 - \frac{4}{(1+7,385\%)^{0,5}} \right)$$

$$i^{12m} = 104 / \left(99 - \frac{4}{(1+7,385\%)^{0,5}} \right) - 1 = 9,312\%$$

$$b) P_{\text{port}} = \frac{4 \cdot 000}{(1+7,385\%)^{0,5}} + \frac{20 \cdot 000}{1+9,312\%} = 22 \cdot 156,15$$

$$c) i^{18m} = \left(\frac{10 \cdot 000}{8 \cdot 700} \right)^{\frac{1}{1,5}} - 1 = 9,728\%$$

$$d) P_{\text{BTP}} = \frac{3}{(1+7,385\%)^{0,5}} + \frac{3}{1+9,312\%} + \frac{103}{(1+9,728\%)^{1,5}} = 95,25$$

Ex 2)

$$a) P_{\text{BTP}} = \frac{2}{(1+i^{5m})^{\frac{5}{12}}} + \frac{102}{(1+i^{11m})^{\frac{11}{12}}} = \frac{2}{(1+3,19\%)^{\frac{5}{12}}} + \frac{102}{(1+4,081\%)^{\frac{11}{12}}} = 100,3$$

$$b) P_{\text{ANNUITY BOND}} = \frac{100}{(1+i^{4m})^{4/12}} + \frac{100}{(1+i^{8m})^{8/12}} + \frac{100}{(1+i^{12m})^{12/12}} =$$

$$= \frac{100}{(1+2,749\%)^{4/12}} + \frac{100}{(1+4,031\%)^{8/12}} + \frac{100}{(1+4,225\%)^1} = 292,4$$

Ex 3)

$$\text{Price} = \frac{100}{(1+0,985\%)^3} + \frac{130}{(1+1,225\%)^6} + \frac{130}{(1+1,339\%)^9} + \frac{90}{(1+1,419\%)^{12}} = 409,22$$

Note: Since we used monthly interest rates (i.e. expressed on a monthly basis) the time is measured in months

Ex 4)

$$P_{BTP} = \frac{1,5}{(1+1\%)^1} + \frac{1,5}{(1+1,10\%)^2} + \frac{1,5}{(1+1,21\%)^3} + \dots + \frac{1,5}{(1+1,29\%)^9} + \frac{101,5}{(1+1,85\%)^{10}} = 97,05$$

Ex 5)

$$i_2^{1sem} = \frac{102,3}{101} - 1 = 1,29\%$$

$$i_2^{2sem} = \left(\frac{102,3}{101,5 - 2,3/(1+1,29\%)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,54\%$$

$$i_2^{3sem} = \left(\frac{102,3}{101,3 - 2,3/(1+1,29\%) - 2,3/(1+1,54\%)^2} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1,86\%$$

$$i_2^{4sem} = \left(\frac{102,3}{100,7 - 2,3/(1+1,29\%) - 2,3/(1+1,54\%)^2 - 2,3/(1+1,86\%)^3} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2,13\%$$

$$P_{ZCB} = \frac{1.000}{(1+1,54\%)^2} = 968,98$$

$$P_{BB} = \frac{5}{(1+1,54\%)^2} + \frac{105}{(1+2,13\%)^4} = 105,51$$

Ex 6

$$P_{BTP} = \frac{1,5}{(1+i^{6m})^{0,5}} + \frac{1,5}{(1+i^{12m})} + \frac{101,5}{(1+i^{18m})^{1,5}}$$

$$101,331 = \frac{1,5}{1,025^{0,5}} + \frac{1,5}{1,024} + \frac{101,5}{(1+i^{18m})^{1,5}}$$

$$101,331 = 7,947 + \frac{101,5}{(1+i^{18m})^{1,5}}$$

$$98,384 = \frac{101,5}{(1+i^{18m})^{1,5}}$$

$$(1+i^{18m})^{1,5} = \frac{101,5}{98,384}$$

$$1+i^{18m} = \left(\frac{101,5}{98,384} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$i^{18m} = \left(\frac{101,5}{98,384} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 2,10\%$$

Ex 7

$$\hat{F}(0; 0,5y; 1,5y) = \frac{P(0; 1,5y)}{P(0; 0,5y)} \cdot 100 = \frac{P(0; 1,5y)}{\hat{F}(0; 0,5y; 1,5y)} \cdot 100 = \frac{94 \cdot 100}{97} = \underline{96,907}$$

$$f(0; 0,5y; 1,5y) = \left(\frac{100}{97} \right)^{\frac{1}{1,5-0,5}} - 1 = 3,0928\%$$

Ex. 8

$$(1+i(0; 1y))^1 (1+f(0; 1y; 2y))^{2-1} = (1+i(0; 2y))^2$$

$$1+f(0; 1y; 2y) = (1+i(0; 2y))^2 / (1+i(0; 1y))$$

$$\underline{f(0; 1y; 2y) = [(1+3\%)^2 / (1+2\%)] - 1 = 4,0098\%}$$

$$\underline{F(0; 1y; 2y) = \frac{1.000}{(1+4,0098\%)^{2-1}} = 961,448}$$

Ex 9

$$i(0;1y) = \frac{100}{94,75} - 1 = 5,5409\%$$

$$P_{BB} = \frac{6}{1+i(0;1y)} + \frac{106}{[1+i(0;2y)]^2}$$

$$104 - \frac{6}{1+5,5409\%} = \frac{106}{[1+i(0;2y)]^2}$$

$$98,315 = \frac{106}{[1+i(0;2y)]^2} \Rightarrow [1+i(0;2y)]^2 = \frac{106}{98,315}$$

$$\Rightarrow i(0;2y) = \sqrt{\frac{106}{98,315}} - 1 = 3,8348\%$$

$$(1+i(0;1y))(f(0;1y;2y)+1) = (1+i(0;2y))^2$$

$$f(0;1y;2y) = \frac{(1+i(0;2y))^2}{1+i(0;1y)} - 1 = \frac{(1+3,8348\%)^2}{1+5,5409\%} - 1 = 2,1563\%$$

$$\hat{F}(0;1y;2y) = \frac{10.000}{(1+2,1563\%)^{2-1}} = 9.788,918$$

Ex 10

$$(1+i(0;1y))^{(3-1)} (1+f(0;1y;3y))^2 = (1+i(0;3y))^3$$

$$(1+f(0;1y;3y))^2 = \frac{(1+i(0;3y))^3}{(1+i(0;1y))^{(3-1)}}$$

$$i(0;1y) = \left[\frac{(1+i(0;3y))^3}{(1+f(0;1y;3y))^2} \right]^{1/2} - 1 = \frac{(1+7\%)^3}{(1+6,5\%)^2} - 1 = 8,0071\%$$

$$P_{ZCB(1y)} = \frac{1.000}{1+8,0071\%} = 925,865$$

$$\hat{F}(0;1y;3y) = \frac{100}{(1+6,5\%)^{3-1}} = \frac{100}{(1+6,5\%)^2} = 88,166$$

Ex 11

A) Fattori sconto $B_t^{T_k} = B(t, T_k)$ $t=0$ | Tassi spot $i_t^{T_k} = i(t, T_k)$

$$B(0; 0,25) = 99,5/100 = 0,995 \quad \rightarrow \quad i(0; 0,25) = (1/0,995)^{\frac{1}{0,25}} - 1 = 2,02\%$$

$$B(0; 0,5) = 99/100 = 0,99 \quad \rightarrow \quad i(0; 0,5) = (1/0,99)^{\frac{1}{0,5}} - 1 = 2,03\%$$

etc. etc...

[Vedere il file Excel per gli altri fattori di sconto e tassi spot]

B) $\hat{F}(0; \overset{6\text{ mesi}}{0,5}; \overset{9\text{ mesi}=6+3}{0,75}) = VF \cdot F(0; 0,5, 0,75) = VF \cdot \frac{B(0; 0,75)}{B(0; 0,5)}$

$$= 100 \cdot 0,986/0,99 = 99,596 \rightarrow \text{prezzo forward}$$

$$f(0; 0,5, 0,75) = \left(\frac{B(0; 0,5)}{B(0; 0,75)} \right)^{\frac{1}{0,75-0,5}} - 1 = \left(\frac{0,99}{0,986} \right)^{\frac{1}{0,25}} - 1 = 1,633\%$$

Tasso forward

C) $P_{\text{annuity}} = 50 B(0; 0,25) + 50 B(0; 0,5) + 50 B(0; 0,75)$

$$= 49,75 + 49,50 + 49,30 = 148,55$$

D) $\text{Ced sem} = \text{Tasso cedolare} / 2 \cdot VF = \frac{5\%}{2} \cdot 1000 = 25$

$P_{T,T} \text{ con ced} = 25 \cdot B(0; 0,5) + 25 \cdot B(0; 1) + 25 \cdot B(0; 1,5) + 1025 B(0; 2)$

$$= 25 \cdot 0,99 + 25 \cdot 0,92 + 25 \cdot 0,96 + 1025 \cdot 0,94 = 1036,5$$

E) $P_2 = 1000 B(0; 0,25) + 5000 B(0; 0,75) + 2000 B(0; 1)$

$$= 1000 \cdot 0,995 + 5000 \cdot 0,986 + 2000 \cdot 0,92 = 7865$$

Ex 12

A) $f(0; 0,5; 1) = \left(\frac{[1+i(0; 1)]^1}{[1+i(0; 0,5)]^{0,5}} \right)^{\frac{1}{1-0,5}} - 1 = 3,002\%$

$f(0; 0,5; 1,5) = \left(\frac{[1+i(0; 1,5)]^{1,5}}{[1+i(0; 1)]^1} \right)^{\frac{1}{1,5-1}} - 1 = 4,91\%$

$f(0; 0,5; 2) = \left(\frac{[1+i(0; 2)]^2}{[1+i(0; 1,5)]^{1,5}} \right)^{\frac{1}{2-1,5}} - 1 = 6,129\%$

B) $\hat{F}(0; 0,5; 2) = \frac{10.000}{[1+f(0; 0,5; 2)]^{2-0,5}} = \frac{10.000}{[1+6,129\%]^1,5} = 9206,9$

Ex 13 $\hat{y} \rightarrow$ defaultable tasso spot $\hat{s} \rightarrow$ spread $i \rightarrow$ not rate

$$\hat{y}(0; 0,5y) = i(0; 0,5y) + \hat{s}(0; 0,5y) = 2\% + 2\% = 4\%$$

$$\hat{y}(0; 1y) = i(0; 1y) + \hat{s}(0; 1y) = 2,5\% + 2,5\% = 5\%$$

$$\hat{y}(0; 1,5y) = i(0; 1,5y) + \hat{s}(0; 1,5y) = 3,3\% + 3\% = 6,3\%$$

$$\hat{y}(0; 2y) = i(0; 2y) + \hat{s}(0; 2y) = 4\% + 2\% = 6\%$$

$$\text{Prezzo corporate bond} = \frac{25}{(1+4\%)^{0,5}} + \frac{25}{(1+5\%)^1} + \frac{25}{(1+6,3\%)^{1,5}} + \frac{1.075}{(1+6\%)^2} = \underline{983,38}$$

$$\text{Prezzo senza default risk} = \frac{25}{(1+2\%)^{0,5}} + \frac{25}{(1+2,5\%)^1} + \frac{25}{(1+3,3\%)^{1,5}} + \frac{1.075}{(1+4\%)^2} = \underline{1.020,63}$$

$$\text{Diff} = 1.020,63 - 983,38 = \underline{37,24} \rightarrow (\text{costo del default risk})$$

Ex 14

I "defaultable" tassi spot si ottengono semplicemente sommando ai tassi spot lo spread costante dell'1%.

Pertanto:

$$\text{Prezzo corporate bond} = \frac{15}{(1+2\%)^{0,5}} + \frac{15}{(1+3\%)^1} + \frac{15}{(1+4\%)^{1,5}} + \frac{1.015}{(1+5\%)^2} = \underline{964,19}$$

$$\text{Prezzo bond senza rischio fallimento} = \frac{15}{(1+1\%)^{0,5}} + \frac{15}{(1+2\%)^1} + \frac{15}{(1+3\%)^{1,5}} + \frac{1.015}{(1+4\%)^2} = \underline{982,405}$$

$$\text{Diff.} = 982,405 - 964,19 = \underline{18,21} \rightarrow \text{costo del rischio di fallimento}$$

Ex 15

$\hat{y}(0; 4y) \rightarrow$ defaultable Tasso spot a 4 anni rating C

$$\hat{y}(0; 4y) = \left(\frac{VN}{VA}\right)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left(\frac{10.000.000}{8.000.000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 9,3265\%$$

$i(0; 4y) \rightarrow$ non defaultable spot rate a 4 anni

$$i(0; 4y) = \left(\frac{VN}{P}\right)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left(\frac{100}{91}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2,3858\%$$

$$\text{Spread (0; 4y)} = 9,3265\% - 2,3858\% = \underline{6,9407\%}$$

C rating