Rendite

Che cosa è una rendita?

- Molte operazioni finanziarie prevedono il pagamento o l'incasso di somme di denaro di importo costante con cadenza periodica per un determinato periodo di tempo.
- Tale sequenza di flussi monetari viene chiamata rendita.
- Un tipico esempio di rendita è rappresentato dalle rate necessarie per acquistare un bene o per estinguere un debito.

Alcuni esempi

- Supponete che una impresa abbia contratto un mutuo di $100.000 che la obbliga alla fine di ogni mese e per 30 anni a rimborsare di $5.000. Questo flusso di rimborsi costituisce un esempio di rendita.
- Una concessionaria ha venduto una auto dal prezzo di 30.000 Euro. Al cliente viene consentito di ripagarla in 2 anni mediante rate bimestrali posticipare di 3.000 Euro ciascuna per la durata di 2 anni. La serie delle rate costituisce una rendita.
- Acquistate una obbligazione dal valore nominale di $1.000. L'obbligazione ha una cedola del 5%, semestrale e scadenza 20 anni. I 40 coupon semestrali di $25 rappresentano una rendita a rata costante.

Tipologie di rendite

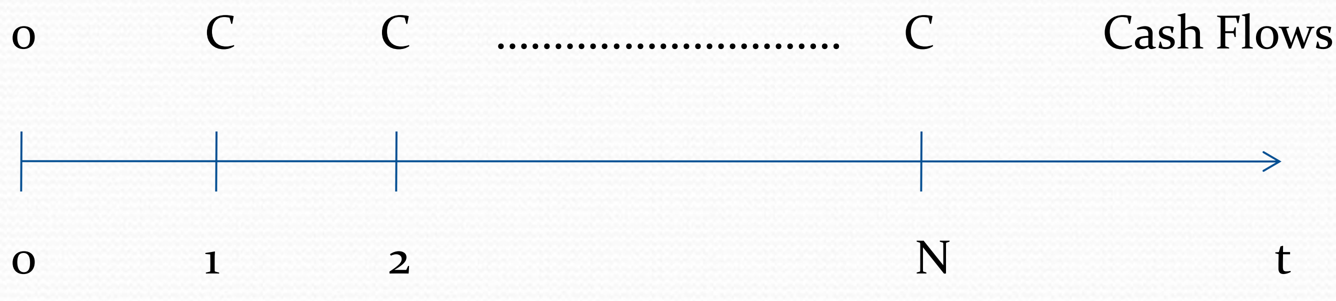
- *Posticipate vs anticipate.* Nel primo caso i pagamenti sono effettuati alla fine di ogni periodo, nel secondo all'inizio (es. fine vs inizio di ogni mese)
- *Differite vs immediate.* Nel primo caso l'inizio dei pagamenti prevede un differimento temporale iniziale, nel secondo l'inizio è immediato.
- *Temporanee vs perpetue.* Nel primo caso il numero dei pagamenti è finito, nel secondo è infinito.

Notazione

- *PV*: valore attuale o present value della rendita
- *FV*: montante o future value della rendita
- *C*: rata costante della rendita
- *i*: tasso di interesse composto coerente con la frequenza dei pagamenti (per esempio, se la rendita prevede rate semestrali, *i* è il tasso composto semestralmente)
- *N*: numero di rate

Rendita immediata, posticipata e temporanea

- Struttura operazione



Rendita immediata, posticipata e temporanea

- Valore attuale

$$PV = \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} \dots + \frac{C}{(1+i)^N} = C\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \dots + \frac{1}{(1+i)^N}\right]$$

$$= C\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k = C\left[\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k - 1\right] = C\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{1+i}} - 1\right]$$

$$= \frac{C\left[1\text{-}(1+i)^{-N}\right]}{i}$$

- Montante

$$FV = PV(1+i)^N = \frac{C\left[(1+i)^N - 1\right]}{i}$$

Esempio 1

- State considerando l'acquisto di un titolo che vi promette \$1.000 alla fine di ogni anno per 5 anni. Il tasso di rendimeto richiesto da questo investimento è il 12% composto annuo. Quale è il prezzo equo di acquisto del titolo?

$$PV = \frac{C\left[1\text{-}(1+0,12)^{-5}\right]}{0,12} = 1.000(3.604776) = 3.604,78$$

Esempio 2

- Alla fine di ogni anno versate in un deposito bancario \$2.000. La vostra banca vi riconosce un tasso composto annuo i=2%. Qual sarà il capitale disponibile nel deposito dopo 10 anni in assenza di prelievi?

$$FV = PV(1+i)^N = \frac{C\left[(1+i)^N - 1\right]}{i}$$

$$= \frac{2.000\left[(1+0{,}02)^{10} - 1\right]}{0{,}02} = 21.899{,}44$$

Rendita immediata, anticipata, e temporanea

- Struttura operazione

Rendita immediata, anticipata, e temporanea

- Valore attuale

$$PV = C + \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} \dots + \frac{C}{(1+i)^{N-1}} = C\left[1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} \dots + \frac{1}{(1+i)^{N-1}}\right]$$

$$= C\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k = C\,\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^N}{1-\frac{1}{1+i}}$$

$$= \frac{C\left[1\text{-}(1+i)^{-N}\right]}{i}(1+i)$$

- Montante

$$FV = PV(1+i)^N = \frac{C\left[(1+i)^N - 1\right]}{i}(1+i)$$

Esempio 3

- Il vostro affittuario vi pagherà all'inizio di ogni mese e per 2 anni \$500. Sapendo che il tasso composto annuo è il 4%, qual è il valore corrente dell'affitto?

$$i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1 = (1+0{,}04)^{1/12} - 1 = 0{,}003274$$

$$PV = \frac{C\left[1\text{-}(1+i_{12})^{-N}\right]}{i_{12}}(1+i_{12})$$

$$= \frac{500\left[1\text{-}(1+0{,}003274)^{-24}\right]}{0{,}003274}(1+0{,}003274)$$

$$= 11.522{,}57(1{,}003274) = 11.560{,}29$$

Esempio 4

- All’inizio di ogni anno versate in un deposito bancario \$2.000. La vostra banca vi riconosce un tasso composto annuo i=2%. Qual è il capitale disponibile nel deposito dopo 10 anni in assenza di prelievi?

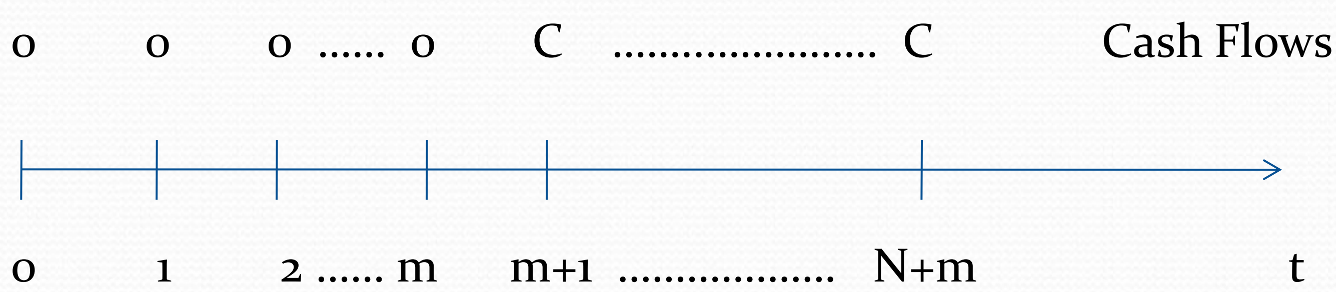
$$FV = \frac{C\left[(1+i)^N - 1\right]}{i}(1+i)$$

$$= \frac{2.000\left[(1+0{,}02)^{10} - 1\right]}{0{,}02}(1+0{,}02)$$

$$= 21.899{,}44(1{,}02) = 22.337{,}43$$

Rendite differite, temporanee

- Consideriamo una rendita di N rate, il cui primo pagamento avviene alla fine dell'anno m
- Questa rendita può essere vista sia come differita di m+1 anticipata, che come differita di m ma posticipata, entrambe temporanee di N rate
- Struttura operazione



Rendita differite, temporanee

- Vedremo direttamente negli esercizi come sia molto semplice calcolare il valore attuale di una rendita differita temporanea, semplicemente partendo dalle formula che più vi piace tra quella del valore attuale di una rendita immediata anticipata e quello della posticipata, ed apportando una semplice correzione per tenere conto del differimento.

Esempio 5

- Avete vinto la lotteria. Riceverete alla fine di ogni anno per 10 anni $ 10.000. Il tasso composto annuo è il 10%. Sapendo che il primo pagamento sarà effettuato esattamente tra 2 anni, determinare il valore attuale della vostra vincita. (Copiare asse dei tempi dalla lavagna).

$$PV = \frac{C\left[1-(1+i)^{-N}\right]}{i}\frac{1}{(1+i)^{m}}$$

$$= \frac{10.000\left[1-(1+0,1)^{-10}\right]}{0,1}\frac{1}{(1+0,1)}$$

$$= 61.455,67(1,1)^{-1} = 55.859,70$$

Esempio 6

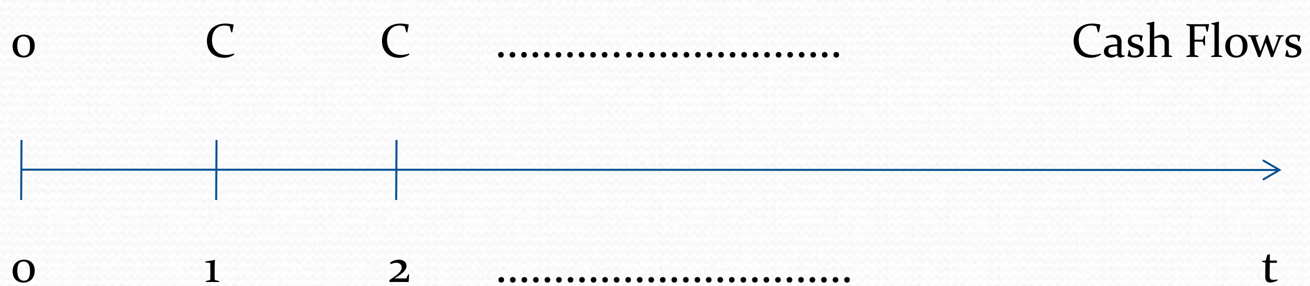
- Riceverete $ 10.000 alla fine di ogni anno e per 20 anni. Sapendo che il tasso composto annuo è il 5% e che il primo pagamento sarà effettuato all'inizio del quarto anno, determinare il valore attuale di questa rendita.

$$PV = \frac{10.000\left[1\text{-}(1+0{,}05)^{-20}\right]}{0{,}05} \frac{1}{(1+0{,}05)^{2}}$$

$$= 124.622{,}10(1{,}05)^{-2} = 113.035{,}92$$

Rendita immediata, posticipata e perpetua

- Struttura operazione



Rendita immediata, posticipata e perpetua

- Valore attuale

$$PV = \lim_{N \to \infty} \frac{C\left[1-(1+i)^{-N}\right]}{i}$$

$$= \frac{C}{i}$$

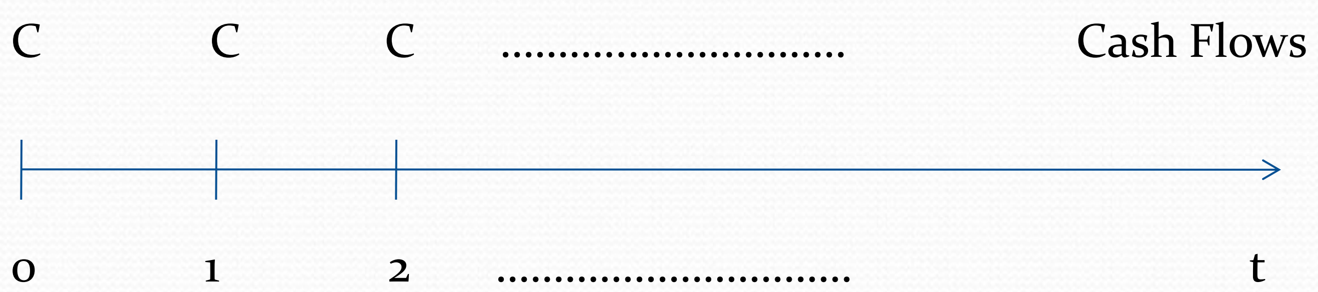
Esempio 7

- Il governo britannico emise un titolo obbligazionario chiamato Consol che prometteva il pagamento di una cedola periodica di importo costante per un periodo di tempo infinito. Sapendo che una Consol paga £100 alla fine di ogni anno, qual è il suo prezzo corrente se il tasso composto annuo è il 5%?

$$PV = \frac{C}{i} = \frac{100}{0{,}05} = 2.000$$

Rendita immediata, anticipata e perpetua

- Struttura operazione



Rendita immediata, anticipata e perpetua

- Valore attuale

$$PV = \lim_{N \to \infty} \frac{C\left[1\text{-}\left(1+i\right)^{-N}\right]}{i}\left(1+i\right)$$

$$= \frac{C\left(1+i\right)}{i}$$

Esempio 8

- E' scomparso uno zio lontano. Egli aveva stipulato una polizza a vostro favore che, in caso di morte, avrebbe corrisposto immediatamente a voi e ai vostri eredi una rendita di \$300 al mese in eterno. Il tasso mensile composto è 0,5%. Qual è il valore di questa polizza?

$$PV = \frac{C(1+i_{12})}{i_{12}} = \frac{300(1+0{,}005)}{0{,}005} = 60.300$$

Esempio 9

- Avete vinto una lotteria che corrisponderà in eterno \$2.000 ogni anno in perpetuo a voi ed ai vostri eredi quando non ci sarete più. Il primo pagamento avverrà esattamente tra 5 anni da oggi. Il tasso di valutazione è del 3% composto annuo.

- Si tratta di una rendita perpetua, differita di 4 anni posticipata

$$PV = \frac{C}{i}\frac{1}{(1+i)^m} = \frac{2.000}{3\%}\frac{1}{(1+3\%)^4} = 59.232{,}47$$

Esempio 9

- In alternativa, i pagamenti possono essere visti anche come una rendita perpetua, differita di 5 anni, anticipata.

$$PV = \frac{C(1+i)}{i}\frac{1}{(1+i)^5} = \frac{2.000}{3\%}\frac{1}{(1+3\%)^4} = 59.232{,}47$$

- Usando la logica, tutte le strade portano a Roma!

Ex 1

- Finalmente oggi andate in pensione. Potete scegliere se ricevere la pensione in un unica soluzione o sotto forma di rendita periodica. In particolare, potreste ricevere oggi $2.000.000 o pagamenti anticipati di $200.000 all'anno per 20 anni. Il tasso composto annuo applicato dalla vostra banca è il 7%. Qual è l'opzione più vantaggiosa per voi?

Sol 1

- Per decidere dobbiamo confrontare il valore attuale delle due opzioni.
- La prima ha un valore corrente di $2.000.000.
- Il valore attuale è dato da

$$PV = \frac{C\left[1\text{-}(1+i)^{-N}\right]}{i}(1+i)$$

$$= \frac{200.000\left[1\text{-}(1+0{,}07)^{-20}\right]}{0{,}07}(1+0{,}07)$$

$$= 2.267.119$$

- E' preferibile la seconda opzione perché presenta un valore attuale superiore.

Ex 2

- Il gestore di un fondo pensione prevede che si dovrà corrispondere 1 milione di Euro per coloro che andranno in pensione. Non ci saranno pensionamenti prima che siano trascorsi 10 anni da ora. Una volta che il fondo inizierà ad effettuare pagamenti tali pagamenti dureranno per 30 anni. Qual è il valore del passivo del fondo se il tasso di attualizzazione appropriato è il 5% composto annuo?

Sol 2

- Abbiamo una rendita con primo pagamento in t = 10.
- Se osserviamo l'operazione in t = 9, siamo in presenza di una rendita posticipata di 30 rate.
- Perciò possiamo calcolare il suo valore in t=9 e successivamente attualizzarlo per 9 anni.

$$PV = \frac{C\left[1-(1+i)^{-N}\right]}{i}(1+i)^{-m}$$

$$= \frac{1.000.000\left[1-(1+0,05)^{-30}\right]}{0,05}(1+0,05)^{-9}$$

$$= 15.372.451 * (0,6446) = 9.909.219$$

Ex 3

- Sapendo che il tasso composto annuo è il 5%, si determini il valore attuale di una rendita perpetua di £100 all’anno sapendo che il primo pagamento avverrà esattamente dopo 5 anni da oggi.

Sol 3

- Calcoliamo il valore di questa rendita perpetua al tempo t = 4 e scontiamo il tutto sino a t = 0.

$$PV = \frac{C}{i}(1+i)^{-m}$$

$$= \frac{100}{0,05}(1+0,05)^{-4}$$

$$= 2.000(0,822702) = 1.645,40$$

Ex 4

- State progettando di acquistare una casa per $120.000 tramite un pagamento in contanti di $20.000 e prendendo a prestito il resto attraverso un mutuo di 30 anni a tasso fisso. Il mutuo prevede rate di rimborso mensili. La prima rata del mutuo verrà pagata dopo 30 giorni dall'erogazione del mutuo ad un tasso mensile composto del 0,6667%. Qual è la rata mensile del mutuo?

Sol 4

- La banca determina l'importo delle rate in modo che il loro valore attuale, calcolato al tasso applicato, uguagli il valore dell'importo prestato.

$$PV = \frac{C\left[1\text{-}(1+i_{12})^{-N}\right]}{i_{12}}$$

$$\downarrow$$

$$C = \frac{i_{12}PV}{1\text{-}(1+i_{12})^{-N}} = \frac{0{,}006667(100.000)}{1\text{-}(1+0{,}006667)^{-360}} = 733{,}76$$

Ex 5

- Avete vinto 1.000.000 di Euro al Superenalotto. Tale somma vi verrà corrisposta mediante 5 rate semestrali posticipate di 100.000 ed una maxirata finale di 500.000 Euro dopo 3 anni. Determinare il valore effettivo della vostra vincita, avendo la possibilità di depositare le somme incassate in un conto che vi offre il 2% composto annuo.

Sol 5

$$PV = \frac{C\left[1\text{-}\left(1+i_2\right)^{-N}\right]}{i_2} + \frac{Maxirata}{\left(1+i\right)^3}$$

$$\text{dove } i_2 = \left(1+i\right)^{0,5} - 1 = \left(1+2\%\right)^{0,5} - 1 = 0{,}995\%$$

$$\downarrow$$

$$PV(vincita) = \frac{100.000\left[1\text{-}\left(1+0{,}995\%\right)^{-5}\right]}{0{,}995\%} + \frac{500.000}{\left(1+2\%\right)^3}$$

$$= 485.414{,}03 + 471.161{,}16 = 956.575{,}19$$

Ex 6

- Avete ricevuto un prestito di 100.000 Euro da estinguere mediante rate annuali posticipate di 10.037,90 Euro ciascuna. Il tasso di interesse richiesto è del 4,9% composto annuo. Quanti anni occorrono per estinguere questo debito?

Sol 6

$$PV = \frac{C\left[1-(1+i)^{-N}\right]}{i} \rightarrow \frac{iPV}{C} = 1-(1+i)^{-N}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{iPV}{C} = (1+i)^{-N} \rightarrow \ln\left(1 - \frac{iPV}{C}\right) = -N\ln(1+i)$$

$$\rightarrow N = -\ln\left(1 - \frac{iPV}{C}\right) / \ln(1+i)$$

$$\downarrow$$

$$N = -\ln\left(1 - \frac{0{,}049 \times 100.000}{10.037{,}9}\right) / \ln(1+0{,}049) = 14 \text{ anni}$$

Ex 7

- Alla fine di ogni mese versate il 20% del vostro stipendio in una polizza assicurativa a tasso garantito nominale annuo del 2,4% capitalizzato mensilmente. Il vostro stipendio mensile è di 2.000 Euro. Sapendo che la durata della polizza è di 20 anni, qual è la somma che potrete prelevare dopo 20 anni?

Sol 7

$$FV = \frac{C\left[\left(1+i_{12}\right)^{N} - 1\right]}{i_{12}}$$

$$\text{dove } i_{12} = r/12 = 0{,}024/12 = 0{,}2\%$$

$$C = 2.000 \times 20\% = 400$$

$$N = 20 \times 12 = 240$$

$$\downarrow$$

$$FV = \frac{400\left[\left(1+0{,}002\right)^{240} - 1\right]}{0{,}002}$$

$$= 123.059{,}98$$

Ex 8

- Alla fine di ogni anno versate in un fondo che investe in titoli di Stato 4.250 Euro. Il fondo vi garantisce un tasso composto annuo del 2,315%. Quanti versamenti sono necessari per poter disporre di un capitale di 100.000 Euro?

Sol 8

$$FV=\frac{C\left[(1+i)^N-1\right]}{i}\rightarrow\frac{iFV}{C}=(1+i)^N-1$$

$$\rightarrow 1+\frac{iFV}{C}=(1+i)^N\rightarrow\ln\left(1+\frac{iFV}{C}\right)=N\ln(1+i)$$

$$\rightarrow N=\ln\left(1+\frac{iFV}{C}\right)/\ln(1+i)$$

$$\downarrow$$

$$N=\ln\left(1+\frac{2{,}315\%\times 100.000}{4.250}\right)/\ln(1+2{,}315\%)=19$$