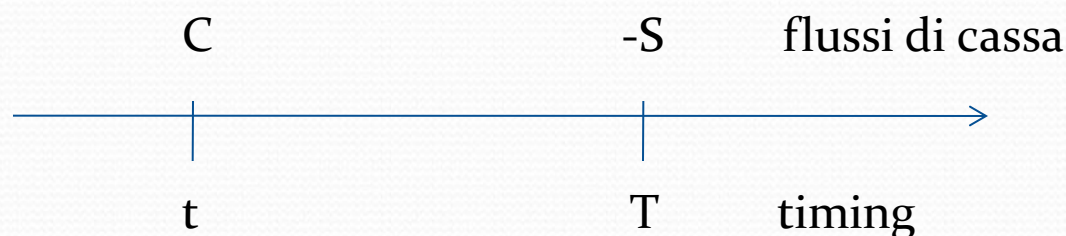


Valore attuale e montante

Finanza

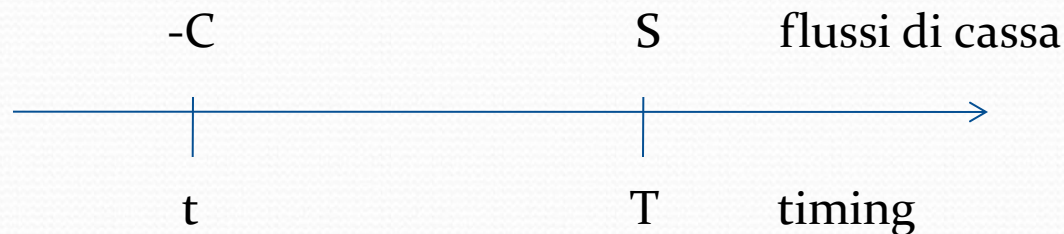
- In finanza è fondamentale conoscere le relazioni economiche funzionali tra importi di denaro esigibili in istanti temporali diversi.
- Analizziamo la struttura di due operazioni finanziarie elementari: finanziamento ed investimento.

Finanziamento



- Le grandezze fondamentali coinvolte sono:
C: l'importo ricevuto al tempo t
S: l'importo da restituire al tempo T
 $T-t$: la durata dell'operazione

Investimento



- Le grandezze fondamentali coinvolte sono:
C: l'importo investito al tempo t
S: l'importo incassato al tempo T
 $T-t$: la durata dell'operazione

Concetti base

- Per semplicità (senza perdita di generalità) consideriamo t come l'istante corrente, i. e. $t = 0$
- Il valore assoluto della somma disponibile al tempo 0 è chiamato valore attuale (VA) o *present value* (PV).
- Il valore assoluto dell'importo disponibile in T è chiamato montante o *future value* (FV).
- La scadenza dell'operazione è T .
- La differenza $I = FV - PV$ è chiamata interesse.
- L'importo $(FV - PV) / PV = I / PV$ è il tasso di variazione del capitale. È la variazione percentuale subita dal valore del prestito / investimento nel periodo.

Concetti base

- L'ultima quantità fondamentale (da aggiungere a PV, FV, T) è il tasso di interesse.
- Il tasso di interesse è il costo del denaro (in genere positivo). Posso mettere oggi in banca un dollaro e ricevere al tempo T il dollaro, più l'interesse maturato.
- I regimi finanziari si distinguono in base al modo in cui l'interesse viene determinato.

Regimi finanziari principali

- L'interesse è definito come il costo del denaro e, a seconda di come viene calcolato, abbiamo un regime finanziario diverso.
- I principali regimi finanziari sono:
 - Capitalizzazione/interesse semplice (legge lineare);
 - Capitalizzazione/interesse composto (legge esponenziale);
 - Capitalizzazione istantanea/interesse continuo;
 - Capitalizzazione iperbolica o Sconto commerciale

Nota IMPORTANTE

- *Durata dell'operazione e tasso devono essere coerenti!!!*
- *Se stiamo lavorando con un tasso mensile, il tempo deve essere misurato in mesi! Se stiamo lavorando con un tasso semestrale il tempo deve essere espresso in semestri! Se stiamo lavorando con un tasso annuo, il tempo deve essere espresso in anni! Etc...*

Capitalizzazione semplice

- L'interesse semplice è calcolato solo sul capitale iniziale di un prestito o di un investimento.
- L'interesse semplice è calcolato moltiplicando il capitale iniziale per il tasso di interesse e il numero di periodi che rappresentano la durata dell'operazione.
- Gli interessi semplici pagati o ricevuti in un determinato periodo sono una percentuale fissa del capitale iniziale.
- L'interesse accumulato è proporzionale al tempo, quindi cresce linearmente con il tempo.

Capitalizzazione semplice

- *Relazioni fondamentali*

$$FV = PV(1 + i_s T)$$

$$PV = FV / (1 + i_s T)$$

$$i_s = \frac{FV - PV}{PV} \frac{1}{T} = \left(\frac{FV}{PV} - 1 \right) \frac{1}{T}$$

$$T = \frac{FV - PV}{PV} \frac{1}{i_s} = \left(\frac{FV}{PV} - 1 \right) \frac{1}{i_s}$$

$$I = i_s \cdot T \cdot PV$$

Esempio 1

- Una impresa ottiene un prestito bancario di \$20.000 per acquistare in contanti una automobile aziendale ad un tasso di interesse annuo semplice dell'8%. Il prestito sarà rimborsato dopo quattro anni. Calcolare l'interesse e l'importo totale rimborsato.

$$I = i_s \cdot T \cdot PV = 0,08 \cdot 4 \cdot 20.000 = 6.400$$

$$FV = PV(1 + i_s T) = PV + I = 20.000 + 6.400 = 26.400$$

Capitalizzazione composta

- Gli interessi complessivi sono calcolati sul capitale e anche sugli interessi accumulati dei periodi precedenti e possono quindi essere considerati come "interessi su interessi".
- Al contrario dell'interesse semplice, gli interessi composti si accumulano sull'importo del capitale iniziale diventando produttivi di ulteriori interessi.

Capitalizzazione composta

$$FV = PV(1 + i)^T$$

$$PV = FV / (1 + i)^T$$

$$i = \left(\frac{FV}{PV} \right)^{1/T} - 1$$

$$T = \ln \left(\frac{FV}{PV} \right) / \ln(1 + i)$$

$$I = [(1 + i)^T - 1]PV$$

Esempio 2

- Un'altra società ottiene un prestito di \$20.000 per acquistare un'auto identica presso lo stesso concessionario ad un tasso di interesse annuo composto dell'8%. Il prestito sarà rimborsato dopo quattro anni. Calcolare l'interesse e l'importo totale rimborsato.

$$I = [(1 + i)^T - 1]PV = [(1 + 0,08)^4 - 1]20.000 = 7.209,77$$

$$FV = PV(1 + i)^T = PV + I = 20.000 + 7.209,77 = 27.209,77$$

Tassi convertibili

- Due tassi di interesse, appartenenti allo stesso regime finanziario ed espressi con frequenze temporali diverse, sono detti convertibili o *temporalmente equivalenti* se producono lo stesso valore futuro a partire dallo stesso capitale iniziale nello stesso periodo di tempo.
- Interesse semplice

$$FV = PV(1 + i_s) = PV(1 + ki_s^{(k)})$$

$$1 + i_s = 1 + ki_s^{(k)}$$

$$i_s = ki_s^{(k)} \leftrightarrow i_s^{(k)} = \frac{i_s}{k}$$

k : numero di periodi in un anno

Tassi convertibili

- Interesse composto

$$FV = PV(1 + i) = PV(1 + i^{(k)})^k$$

$$1 + i = (1 + i^{(k)})^k$$

$$i = (1 + i^{(k)})^k - 1 \leftrightarrow i^{(k)} = (1 + i)^{1/k} - 1$$

Esempio 3

- Il tasso di interesse annuo semplice è del 6%, determinare:
 - A) Il tasso di interesse mensile semplice temporalmente equivalente
 - B) Il tasso di interesse semestrale semplice equivalente temporalmente

$$\text{A)} \quad i_s^{(12)} = \frac{i_s}{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005$$

$$\text{B)} \quad i_s^{(2)} = \frac{i_s}{2} = \frac{0,06}{2} = 0,03$$

Esempio 4

- Il tasso di interesse composto annuo è del 6%, determinare:

A) Il tasso di interesse mensile composto temporalmente equivalente

B) Il tasso di interesse semestrale composto temporalmente equivalente

$$A) \quad i^{(12)} = (1 + i)^{1/12} - 1 = (1 + 0,06)^{1/12} - 1 = 0,004868$$

$$B) \quad i^{(2)} = (1 + i)^{1/2} - 1 = (1 + 0,06)^{0,5} - 1 = 0,029563$$

Tassi finanziariamente equivalenti

- Due tassi di interesse, appartenenti a diversi regimi finanziari ed espressi con le stesse frequenze temporali, sono chiamati finanziariamente equivalenti se producono lo stesso valore futuro a partire dallo stesso capitale iniziale nello stesso periodo di tempo.
- Interesse semplice e composto

$$FV = PV(1 + i_s T) = PV(1 + i)^T$$

$$i_s = \frac{(1 + i)^T - 1}{T} \leftrightarrow i = (1 + i_s T)^{1/T} - 1$$

Esempio 5

- Il tasso di rendimento annuo continuo di un investimento di due anni è del 5%, determinare:
 - A) Il tasso di interesse annuo composto finanziariamente equivalente
 - B) Il tasso di interesse annuo semplice finanziariamente equivalente

$$A) \quad i = \exp(i_c) - 1 = \exp(0,05) - 1 = 0,051271$$

$$B) \quad i_s = \frac{\exp(i_c T) - 1}{T} = \frac{\exp(0,05 \cdot 2) - 1}{2} = 0,052585$$

EX 1

- Abbiamo la possibilità di investire la somma di \$ 12.000 per 6 mesi ad un tasso di interesse annuo semplice del 3,20%. Qual è il valore del nostro investimento dopo sei mesi?

$$\begin{aligned} FV &= PV(1 + i_s T) \\ &= 12.000 \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 3.2\% \right) = 12.192 \end{aligned}$$

EX 2

- Abbiamo la possibilità di investire \$ 8.000 ad un tasso annuo semplice del 2,50% per 6 mesi, dopodiché possiamo reinvestire la somma ottenuta per altri 3 mesi ad tasso semplice annuo del 2,80%. Determinare il montante dopo 9 mesi.

$$FV_{6/12} = 8.000 \left(1 + \frac{6}{12} \cdot 2.5\% \right) = 8.100$$

$$FV_{9/12} = 8.100 \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 2.8\% \right) = 8.156,70$$

EX 3

- Un capitale di \$ 5.000 viene investito per 10 anni ad un tasso annuo composto di 3,50%. Determinare il valore dell'investimento dopo 10 anni.

$$\begin{aligned} FV &= PV(1+i)^T \\ &= 5.000(1+3.5\%)^{10} = 7.053 \end{aligned}$$

EX 4

- Il tasso di interesse composto annuo è del 10%, determinare
 - A) il tasso di interesse mensile composto temporalmente equivalente;
 - B) il tasso di interesse trimestrale composto temporalmente equivalente.

EX 4

$$\text{A) } i^{(12)} = (1 + i)^{1/12} - 1 = (1 + 10\%)^{1/12} - 1 = 0,007974$$

$$\text{B) } i^{(4)} = (1 + i)^{1/4} - 1 = (1 + 10\%)^{1/4} - 1 = 0,024114$$

EX 5

- A quale tasso composto annuo occorre investire una somma di \$5.000 per ottenere \$6.000 dopo 4 anni?

$$\begin{aligned} i &= \left(\frac{FV}{PV} \right)^{1/T} - 1 \\ &= \left(\frac{6.000}{5.000} \right)^{1/4} - 1 = 4,6635\% \end{aligned}$$

EX 6

- Una azienda investe il suo capitale in un progetto di investimento che rende un tasso d'interesse semplice annuo del 10%. Quanto tempo occorre all'impresa per raddoppiare il suo capitale? Trovare inoltre il tasso di interesse composto annuo necessario per raddoppiare il capitale nello stesso periodo di tempo.

$$\circ FV = PV(1 + i_s T)$$

$$FV = 2PV \rightarrow 2PV = PV(1 + i_s T)$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{i_s} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ anni}$$

$$\circ FV = PV(1 + i)^T \rightarrow 2PV = PV(1 + i)^{10}$$

$$\rightarrow i = (2)^{1/10} - 1 = 7,177\%$$

EX 7

- Per quanto tempo occorre impiegare un capitale di \$5.000 ad un tasso composto annuo 3% per ottenere una somma di \$5.600?

$$FV = PV(1 + i)^T$$

↓

$$T = \frac{\ln\left(\frac{FV}{PV}\right)}{\ln(1 + i)} = \frac{\ln\left(\frac{5.600}{5.000}\right)}{\ln(1 + 0,03)} = 3,843 \text{ anni}$$

$T \approx 3 \text{ anni } 10 \text{ mesi } 1 \text{ giorno}$

$0,843 \times 12 = 10,0081 \text{ mesi}$

$0,0081 \times 30 = 0,242 \text{ giorni}$

EX 8

- Un capitale di \$ 5.000 viene investito per 2 anni e 6 mesi ad un tasso semestrale composto di 1,50%. Quale sarà il valore del capitale alla fine del periodo?

a) $FV = PV(1 + i^{(2)})^{T_2} = 5.000(1 + 1,5\%)^5 = 5.386,42$

b) $i = (1 + i^{(2)})^2 - 1 = 3,0225\%$

$$FV = PV(1 + i)^T = 5.000(1 + 3,0225\%)^{5/2} = 5.386,42$$

EX 9

- Qual è il tasso composto trimestralmente che mi consente di ottenere un montante di \$ 4.000 in 1 anno e 9 mesi se investo un capitale di \$ 3.800?

$$\begin{aligned} a) FV &= PV(1 + i^{(4)})^{T_4} \rightarrow i^{(4)} = \left(\frac{FV}{PV} \right)^{1/T_4} - 1 \\ &= \left(\frac{4.000}{3.800} \right)^{1/7} - 1 = 0,7354\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) FV &= PV(1 + i)^T \rightarrow i = \left(\frac{FV}{PV} \right)^{1/T} - 1 \\ &= \left(\frac{4.000}{3.800} \right)^{1/(1+9/12)} - 1 = \left(\frac{4.000}{3.800} \right)^{4/7} - 1 = 2,9744\% \end{aligned}$$

$$i^{(4)} = (1 + i)^{1/4} - 1 = 0,7354\%$$

EX 10

- Una piccola azienda deposita una somma di denaro per nove mesi in un conto bancario che le riconosce un tasso annuo semplice del 3,30%. Alla fine del periodo il valore del deposito (in assenza di prelievi e di ulteriori depositi) è di \$ 20.495. Qual è l'importo depositato inizialmente dall'azienda? Qual è il tasso di interesse composto annualmente necessario per ottenere lo stesso capitale finale a partire dallo stesso deposito iniziale nello stesso periodo di tempo?

EX 11

$$\text{a) } FV = PV(1 + i_s T) \rightarrow PV = \frac{FV}{1 + i_s T} = \frac{20.495}{1 + 0,033 \cdot \frac{9}{12}} = 20.000$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1 + i_s T &= (1 + i)^T \rightarrow i = (1 + i_s T)^{1/T} - 1 \\ &= \left(1 + 3,3\% \cdot \frac{9}{12} \right)^{12/9} - 1 = 3,3135\% \end{aligned}$$

EX 12

- Determinare il tempo necessario, a partire da un capitale di \$ 12.000, per produrre un interesse di \$ 1.000 ad un tasso composto annuo di rendimento del 3,80%.

$$FV = PV(1 + i)^T$$

↓

$$PV + I = PV(1 + i)^T$$

↓

$$T = \frac{\ln\left(\frac{PV + I}{PV}\right)}{\ln(1 + i)} = \frac{\ln\left(\frac{12.000 + 1.000}{12.000}\right)}{\ln(1 + 0,038)} = 2,1461 \text{ anni}$$

$T \approx 2 \text{ anni } 1 \text{ mese } 23 \text{ giorni}$

mesi = $0,1461 \times 12 = 1,7532$ e giorni = $0,7532 \times 30 = 22,596$

EX 13

- Un investimento genererà tre flussi di cassa: \$ 1.550 tra 6 mesi, \$ 1.600 tra un anno, \$ 1.650 tra 1 anno e 6 mesi. Il tasso di interesse composto annuo è del 7%. Qual è il valore attuale dell'investimento?

$$\begin{aligned} PV &= \frac{CF_1}{(1+i)^{6/12}} + \frac{CF_2}{(1+i)^{12/12}} + \frac{CF_3}{(1+i)^{18/12}} \\ &= \frac{1.550}{(1+7\%)^{0,5}} + \frac{1.600}{(1+7\%)} + \frac{1.650}{(1+7\%)^{1,5}} \\ &= 1.498,44 + 1.495,33 + 1.490,76 = 4.484,53 \end{aligned}$$

EX 14

- Avete appena venduto la vostra quota investita in un fondo azionario che non corrispondeva dividendi ad un prezzo di 50.000 Euro. Avevate acquistato questa quota 6 anni e mezzo fa per 42.000 Euro. Determinare:
 - A) il tasso di variazione del capitale;
 - B) il tasso di rendimento effettivo reso dall'investimento (tasso composto annuo);
 - C) il tasso di rendimento semplice dell'investimento.

EX 14

- Tasso variazione del capitale

$$TVC = \frac{FV - PV}{PV}$$



$$TVC = \frac{50.000 - 42.000}{42.000} = 19,048\%$$

EX 14

- Il tasso di rendimento effettivo è il tasso di interesse composto annuo reso dall'investimento

$$i = \left(\frac{FV}{PV} \right)^{1/T} - 1$$



$$i = \left(\frac{50.000}{42.000} \right)^{1/6,5} - 1 = 2,719\%$$

EX 14

- Il tasso di rendimento semplice annuo reso dall'investimento si può calcolare per esempio come

$$i_s = \frac{1}{T} \frac{FV - PV}{PV}$$



$$i_s = \frac{1}{6,5} \frac{8.000}{42.000} = 2,93\%$$