

Metodi Numerici per il Calcolo

Esercitazione 6: Integrazione Numerica

A.A.2023/24

Scaricare dalla pagina web del corso l'archivio `matlab_mnc2324_6.zip` e scompattarlo nella propria home directory. Verrà creata una cartella con lo stesso nome contenente alcuni semplici script e function Matlab/Octave. Si svolga la seguente esercitazione che ha come obiettivo quello di sperimentare l'integrazione numerica di funzioni e la sua applicazione nel disegno.

A. Integrazione Numerica

Si considerino le seguenti funzioni test di cui si vuole calcolare l'integrale definito sul loro dominio di definizione:

$$\begin{array}{llll} f_1 = e^{\sqrt{x}} \sin(x) + 2x - 4 & x \in [0, 12] & \int_0^{12} f_1(x) dx & = 68.3532891202483 \\ f_2 = \frac{32}{1+1024x^2} & x \in [0, 4] & \int_0^4 f_2(x) dx & = 1.56298398573480 \\ f_3 = \frac{e^{-x}}{x} & x \in [1, 2] & \int_1^2 f_3(x) dx & = 0.170483423687459 \\ f_4 = \frac{4}{1+x^2} & x \in [0, 1] & \int_0^1 f_4(x) dx & = 3.14159265358979 \\ f_5 = \sqrt{1-x^2} e^x & x \in [0, 1] & \int_0^1 f_5(x) dx & = 1.24395050141647 \end{array}$$

1. Formule di Quadrature di Newton-Cotes

Le function `trapezi_comp.m` e `simpson_comp.m` implementano rispettivamente la formula dei trapezi e Simpson composte;

- si eseguano le function in oggetto su alcune funzioni test analizzando gli output;
- si analizzino gli script e si osservi la costruzione e rappresentazione grafica dei polinomi a tratti;
- si analizzi lo script `err_trapezi_comp.m` (`err_simpson_comp.m`) che utilizza la function Matlab `integral` (si dia `help integral` per info sui parametri) per ottenere un valore "esatto", richiama la function `trapezi_comp.m` (`simpson_comp.m`) per avere un valore approssimato e stampa l'errore di integrazione.

Ricordando le espressioni degli errori di integrazione per le formule dei trapezi e Simpson composte

$$R_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\eta), \quad R_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta);$$

si modifichino gli script precedenti per stimare sperimentalmente che l'errore è di ordine 2 (caso trapezi) e ordine 4 (caso Simpson), cioè si

riducono come h^2 e come h^4 . (I due nuovi script/function si chiamino `err2.trapezi_comp.m`, `err2.simpson_comp.m`). (Sugg. si applichi la formula composta per valori di h che si dimezzano e si stampi il rapporto dei relativi errori; nella cartella sono presenti le derivate della funzione integranda; possono essere utili?)

2. Errore di Integrazione ed Estrapolazione di Richardson

Si consideri lo script `err2.trapezi_comp.m` dell'esercizio precedente.

- Si modifichi il codice per aggiungere l'estrapolazione di Richardson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4T(h/2) - T(h)}{3} + O(h^4)$$

e tre nuove colonne di stampa simili a quelle presenti (il nuovo script si chiami `err2.trapezi_rich.m`).

- A partire dallo script `err2.simpson_comp.m` si realizzare uno script simile a quanto richiesto al punto precedente per aggiungere l'estrapolazione di Richardson, sapendo che:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{16S(h/2) - S(h)}{15} + O(h^5).$$

Il nuovo script si chiami `err2.simpson_rich.m`.

B. Lunghezza ed area di una curva di Bézier

1. Data una curva 2D di Bézier lo script `slung_bezier.m` calcola la sua lunghezza. (Sugg. si completi la function `norm_c1_val.m` in modo che possa essere passata come argomento alla builtin function Matlab `integral`). Si modifichi poi la script per calcolare la lunghezza di una curva 2D di Bézier a tratti (vedi file `ppbez_esse.m` e lo script si chiami `slung_ppbez.m`)
2. Data una curva 2D di Bézier lo script `sarea_bezier.m` calcola la sua area. (Sugg. si completi la function `cxc1_val.m` in modo che possa essere passata come argomento alla builtin function Matlab `integral`). Si modifichi poi lo script per calcolare l'area di una curva 2D di Bézier a tratti. (vedi file `ppbez_esse.m` e lo script si chiami `sarea_ppbez.m`)
3. Data una curva di Bézier a tratti chiusa (vedi file `ppbez_corona.db`), la si scali affinché abbia area/lunghezza predefinita, per esempio unitaria. La scala della curva sia fatta rispetto al suo baricentro. (Completare i codici `sarea_ppbez_unitaria.m`, `slung_ppbez_unitaria.m`)
4. Lo script `sppbez_fill.m` carica un'immagine definita da più curve di Bézier a tratti e la disegna a colori. Dopo aver analizzato lo script e compreso cosa fa, lo si modifichi per calcolare l'area della superficie colorata. Il nuovo script si chiami `sppbez_fill_area.m`.

5. Siano date la circonferenza A di centro l'origine e raggio 1 e la circonferenza B di centro $(2, 0)$ e raggio 1. Si faccia rotolare in senso antiorario la circonferenza B sulla A . Si effettui una simulazione del rotolamento e del disegno che ne risulta se nel punto C della circonferenza B viene posta una penna. Si analizzi lo script `anim_4.m` che realizza l'animazione utilizzando le builtin function di Matlab `moviein`, `getframe` e `movie`. L'animazione simula la costruzione geometrica della curva cardiode.

Modificare poi lo script in modo da produrre il disegno ottenuto posizionando la penna nel punto D della circonferenza B mentre rotola in senso antiorario sulla circonferenza A . Che disegno si ottiene? Il nuovo script si chiami `animi_4_mod.m`

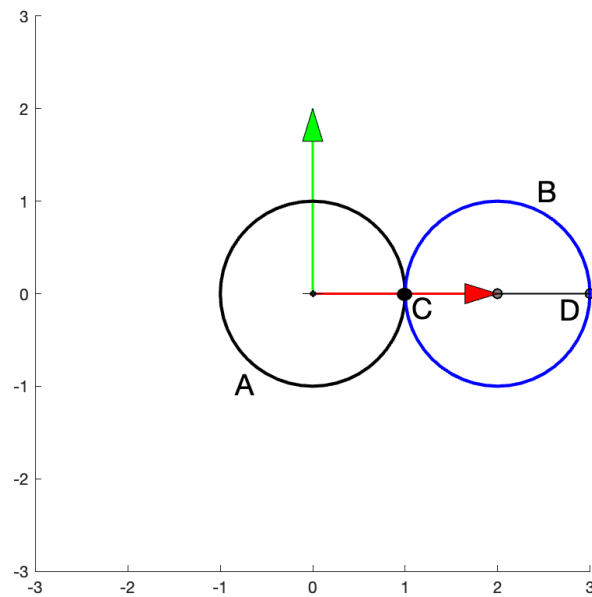


Figura 1: Animazione del rotolamento della circonferenza B sulla A .