Retta di Bilancio

$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$

- x_i: quantità di bene i
- p_i: prezzo del bene i
- $p_i x_i$: quantità di moneta che il consumatore spende per il bene i.
  $\frac{m}{p_i}$: quantità che posso comprare se spendo tutto in i.
  $-\frac{p_1}{p_2}$: rapporto del prezzo dei beni, ovvero quanto sul mercato posso sostituire il consumo di un bene con un altro. *Costo opportunità*: costo della miglior scelta alternativa (consumo bene 1 in termini di bene 2).

Tassi e sussidi

- Sulla quantità: $p_1 \to p_1 \pm t$
- Sussidio: $p_1 \to (1 \pm \tau) p_1$
- Tassa sul reddito: $m \to m \mp T$

Assiomi di razionalità:

Dati X, Y panieri:

- Completezza: $X \succeq Y \ \vee \ Y \succ X \vee$ entrambe (Il consumatore è in grado di confrontare panieri diversi, non ci sono panieri che lo lasciano indifferente l'uno rispetto all'altro)
- Riflessività: $X \succeq X$ (ogni paniere è almeno preferito a se stesso)
- Transitività: $X \succeq Y \ \wedge \ Y \succeq Z \implies X \succeq Z$ (non si può strettamente preferire un paniere all'altro se sono identici)
  Inoltre:
- $X \succeq Y \wedge Y \succeq X \implies X \sim Y$
- $X \succeq Y \wedge Y \nsucceq X \iff X \succ Y$ (X è debolmente preferito a Y, ma Y non è debolmente preferito a X se e solo se X è strettamente preferito a Y)
  Ci sono altri due assiomi:
- Monotonicità: $X \geq Y \iff X \succ Y$ (X ha almeno una componente in più di Y, quindi è strettamente preferito)
- Convessità: se scelgo una combinazione convessa delle delle preferenze, questa è strettamente preferita a quella di partenza. La curva di indifferenza di X e Y non può intersecare quella di Z e per il principio di monotonicità. L'assioma di convessità riflette l'idea che i consumatori generalmente preferiscono la diversificazione o la varietà nei loro consumi. In altre parole, sono disposti a scambiare beni in modo tale che, mantenendo l'utilità costante, possano ottenere una combinazione di beni diversa.

Saggio marginale di sostituzione (MRS)

- saggio: rapporto;
- marginale: infinitesimale;

- sostituzione: quante unità di bene 2 rinunciare per averne una in più di bene 1 e restare sulla stessa curva di indifferenza.

  $$MRS = \lim_{x_1 \to 0} (-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}) = -\frac{\delta x_1}{\delta x_2}$$

  Formule alternative:

  $$SMS = -\frac{\alpha b}{\beta a} = -\frac{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{x_1}}{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{x_2}} = -\frac{p_1}{p_2}$$

  Più la distanza tra x_1 e $x_2 \to 0$, più l'approssimazione sarà corretta.

Utilità

$$u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+ | \begin{cases} x \succ y \iff u(x) > u(y) \\ x \sim y \iff u(x) = u(y) \end{cases}$$

Utilità *ordinale* non importa il valore relativo dei numeri, non c'è cardinalità nel valore.
Funzione di utilità Cobb-Douglas: $u(x) = u(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$

$$\begin{cases} x_1 \times x_2 > y_1 \times y_2 \\ x_1 > y_1, x_2 > y_2 \end{cases}$$

Utilità marginale (MU)

$$MU_1 = \frac{\delta u(x_1, x_2)}{\delta(x_1)} > 0$$

Monotonicità forte, x_2 fisso.

Variazione utilità (du)

$$du = MU_1 \times dx_1$$

Concavità curve di indifferenza (IP)

$$IP = \frac{\delta'' u(x_1, x_2)}{\delta''(x_1)} \leq 0$$

Curve sempre rivolte verso l'origine: questo indica che il consumatore è disposto a scambiare una quantità maggiore di un bene per una quantità minore dell'altro, a patto che l'utilità rimanga costante.

Preferenze Cobb-Douglas

$$u(x_1, x_2) = x_1^c, x_2^d \qquad MRS = \frac{c x_i^{c-1} x_2^d}{d x_i^c x_2^{d-1}} = \frac{c x_1}{d x_2}$$

Paniere Ottimale

$$x^* | \begin{cases} p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m \\ MRS(x_1^*, x_2^*) = \frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

Entrambe le condizioni sono necessarie per un ottimo intero.

Massimizzare una funzione obiettivo con i moltiplicatori di Lagrange

Calcolare

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) | p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

Funzione ausiliaria $\mathbb{L}(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$

- $p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0$
- λ: moltiplicatore di Lagrange $= \frac{\delta \mathbb{L}}{\delta m} = \frac{\delta u}{\delta m}$: valore in termine di utilità della variazione del reddito

Beni

Normali: $\frac{\delta x_1^*}{\delta m} > 0$: maggiore è il reddito, maggiore è il consumo
Inferiori: $\frac{\delta x_1^*}{\delta m} < 0$: minore è il reddito, minore è il consumo

Curve omotetiche

Curve di Angel che se scalate mantengono lo steso ordine di preferenze strettamente crescente

Statica comparata rispetto al prezzo (m costante)

Beni ordinari: $\frac{\delta x_1(p_1, p_2)}{\delta p_1} < 0$: aumenta il prezzo, diminuisce la domanda
Beni di Giffen: $\frac{\delta x_1(p_1, p_2)}{\delta p_1} > 0$: aumenta il prezzo, aumenta la domanda

Funzioni di domanda

Beni perfetti sostituti:

$$\begin{cases} p_1 > p_2 \rightarrow x_1(\cdot) = 0 \\ p_1 = p_2 \rightarrow \text{indeterminata} \\ p_1 < p_2 \rightarrow x_1(\cdot) = \frac{m}{p_1} \end{cases}$$

Beni perfetti complementi:

$$x_1(\cdot) = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

Cobb-Douglas:

$$x_1(\cdot) = \frac{am}{p_1}$$

Sub-utilità (v)

$$r_i = v(i) - v(i-1)$$

r: consumo

$v(\cdot)$: funzione di sub-utilità

Preferenze

Le preferenze devono essere stabili nel tempo e *strettamente convesse*.
Se $p_1x_1 + p_2x_2 \geq p_1y_1 + p_2y_2 \to x \succeq y$

Quantità di Pasche

$$P_q = \frac{p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t}{p_1^t x_1^b + p_2^t x_2^b}$$

$P_q > 1 \iff p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t > p_1^t x_1^b + p_2^t x_2^b \implies t > b$

Indice di Laspeyres

$$L_q = \frac{p_1^b x_1^t + p_2^b x_2^t}{p_1^b x_1^b + p_2^b x_2^b}$$

$L_q < 1 \iff p_1^b x_1^t + p_2^b x_2^t < p_1^t x_1^t + p_2^t x_2^t$ indica che il paniere oggi costa meno rispetto all'anno base.

Equazione di Slutsky

- Beni ordinari: $p \uparrow \to x \downarrow$
- Beni di Giffen: $p \uparrow \to x \uparrow$
- Variazione della domanda compensata: $\Delta m = \Delta p_1 x_1$: si compensa il reddito per la variazione dei prezzi.

Effetto di sostituzione (rotazione)

Variazione del della domanda del bene 1 quando il prezzo è p_1' e il reddito è m'

$$\Delta x_1^S = x_1(p_1', m) - x_1(p_1, m)$$

Variazione della domanda compensata: cambiano i prezzi ma il potere d'acquisto rimane costante.

Effetto di reddito (spostamento)

Variazione della domanda del bene 1 al variare del reddito $m \rightarrow m'$ quando il prezzo è p_1'

$$\Delta x_1^n = x_1(p_1', m) - x_1(p_1', m')$$

Cambia il reddito ma i prezzi rimangono costanti.

- Beni normali: effetto reddito positivo ($\Delta x_1^n > 0$)
- Beni inferiori: effetto reddito negativo ($\Delta x_1^n < 0$)

Curva prezzo-consumo

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2$$

ω_i: quantità bene (dotazione iniziale) i.

Effetto reddito di dotazione

$$\Delta p = \text{effetto sostituzione} + \text{effetto reddito} + \text{effetto reddito di dotazione}$$

Equazione di Slutsky in presenza di dotazione iniziale

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{\delta x_1}{\delta p_1} + \frac{\delta x_1}{\delta m}(\omega_1 - x_1)$$

La quantità domandata aumenta all'aumentare del reddito

Offerta di lavoro

$$pC = M + wL$$

- C: quantità consumata
- p: prezzo di quantità consumata
- M: reddito non lavorativo
- ω: salario
- L: quantità di lavoro offerta
- wL: reddito lavorativo
- $\bar{L}$: numero massimo ore di lavoro
- $C = \frac{M}{p}$: massimo consumo da reddito non lavorativo
- $R = \bar{L} - L$: ore di riposo
- $\bar{R} = \bar{L}$: ore di riposo massime
- L: ore effettivamente lavorate
- $\bar{C} = \frac{M}{p}$: massimo che posso consumare se non lavoro ($M = p\bar{C}$)

Variazione di salario dulle ore lavorative

$$pC + \omega R = p\bar{C} + \omega\bar{R}$$

- ωR: costo-opportunità del riposo

Offerta di lavoro

$$\frac{dR}{d\omega} = \frac{\delta R^s}{\delta\omega} + (\bar{R} - R)\frac{dR}{dM}$$

- $\frac{\delta R^s}{\delta\omega}$: effetto sostituzione

Surplus caso utilità quasi lineare

$$\Delta SC = \Delta u(\cdot)$$

Il surplus è il beneficio che rimane in tasca dopo aver acquistato n unità di bene.

$$\Delta \text{benessere} \leftrightarrow \Delta SC$$

Funzione di domanda partendo dai prezzi di riserva

$$u(x, m) = v(x) + m$$

- No effetto reddito
- $v(\cdot)$: funzione di sub-utilità

Domanda inversa

$$SC(\bar{P}) = \int_0^{\bar{x}} P(x) - \bar{P} dx = \int_0^{\bar{x}} P(x) dx - \bar{P} \ \ (+m)$$

- SC: surplus
- $+m$: costante di integrazione, trascurata

Domande di Mercato

$$X^1(P_1, P_2, (M_i)_i^n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^1(P_1, P_2, m_i) = x_1(P_1, P_2, m)$$

Elasticità (ϵ)

$$\epsilon = \frac{\Delta q(\%)}{\Delta p(\%)}$$

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}} = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = \epsilon$$

Minore è l'elasticità, minore è la reattività dei prezzi

$$\begin{cases} 0 \leq \epsilon < 1 \rightarrow \text{domanda rigida} \\ \epsilon = 1 \rightarrow \text{domanda unitaria} \\ \epsilon > 1 \rightarrow \text{domanda elastica} \end{cases}$$

Funzione di domanda inversa ($P(X)$)

Utilizzata per esprimere il prezzo in funzione della quantità: questa funzione rappresenta il prezzo del bene 1 in corrispondenza del quale ne vengono domandate X unità.
Il prezzo di un bene rappresenta il MRS tra quel bene e tutti gli altri beni, ovvero la disponibilità marginale a pagare per un unità addizionale di quel bene da parte di chi lo sta domandando.

Ricavo (R)

$$R = pq$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta p} = q + p\frac{\Delta q}{\Delta p} = q[1 - |\epsilon(p)|]$$

Se la domanda è molto sensibile al prezzo (molto elastica), un aumento del prezzo ridurrà talmente la domanda che i ricavi diminuiranno.
Se la domanda è poco sensibile al prezzo (inelastica) un aumento del prezzo non la modificherà e quindi i ricavi aumenteranno.

Ricavo marginale (MR)

$$MR = \frac{\Delta R}{\Delta q} = p + q\frac{\Delta p}{\Delta q} = p(q)\left[1 - \frac{1}{|\epsilon(q)|}\right]$$

- $\epsilon = -1 \implies MR = 0$
- $\epsilon < 1 \implies$ il ricavo diminuisce all'aumentare dell'output
  Se la domanda non è molto sensibile al prezzo, per poter aumentare l'output si dovranno ridurre i prezzi in modo consistente.

Curva del ricavo marginale

Da $p(q) = a - qb$, $\frac{\Delta p}{\Delta q} = -b$ e $\frac{\Delta R}{\Delta q} = p(q) + \frac{\Delta p(q)}{\Delta q}q$ si giunge a

$$MR = \frac{\Delta R}{\Delta q} = a - 2bq$$

- a: intercetta sul prezzo
- b = -inclinazione

Isoquanti

Insieme di tutte le possibili combinazioni degli input 1 e 2 esattamente sufficienti a produrre una data quantità di output (simili alle curve di indifferenza).

- x: input
- y: output

Prodotto marginale (MP)

$$MP = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

Il prodotto marginale è la quantità di output y addizionale ottenuta impiegando una unità addizionale del fattore 1. Il prodotto marginale è un saggio di variazione: la quantità addizionale di output per unità di input (simile all'utilità marginale).
Legge della produttività marginale decrescente: se la tecnologia è monotona, l'output totale aumenterà all'aumentare del livello del fattore 1 (mantenendo fisso il fattore 2). Il prodotto marginale diminuisce quando si utilizzano quantità crescenti.

Saggio tecnico di sostituzione ($TRS(x_1, x_2)$)

$$TRS(x_1, x_2) = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = -\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)}$$

Saggio tecnico di sostituzione decrescente: se si impiega una quantità maggiore del fattore 1 e si varia l'impiego del fattore 2 in modo da rimanere sullo stesso isoquanto, il saggio tecnico di sostituzione diminuisce. L'ipotesi che il TRS sia decrescente significa che l'inclinazione dell'isoquanto deve diminuire in valore assoluto man mano che ci si sposta lungo l'isoquanto nella direzione corrispondente all'aumento di x_1.

Profitto di un'impresa (π)

$$\pi = R - C$$

- $R = \sum P_i y_i$
- $C = \sum \omega_j x_j$
- i: output
- j: input
- ω: prezzo unitario

Massimizzazione del profitto (BP)

$$\max_{x_1} \pi(x_1, \bar{x}_2) = p \cdot f(x_1, \bar{x}_2) - \omega_1 x_1 - \omega_2 x_2$$

- $\bar{x}_2$: valore dato, non può essere scelto
- $\pi = p \cdot y - \sum_{j=1}^{2} \omega_j x_j$
  Massimizzazione del profitto nel breve periodo:

  $$pMP_1 - \omega_1 \Longleftrightarrow pMP_1(x_1^*, \bar{x}_2) = \omega_1 \rightarrow x_1^*$$

$$\frac{\delta \pi(\cdot)}{\delta x_1} \rightarrow p\frac{\delta MP_1}{\delta x_1} \leq 0$$

Curva di isoprofitto (y)

$$y = \frac{\tilde{\pi} + \omega_2 \bar{x}_2 + \omega_1 x_1}{p}$$

Un'azienda vorrà stare sulla curva di isoprofitto più alta che si può scegliere data la tecnologia a disposizione, ovvero la tangente alla curva di produzione.

Statica comprata nel lungo periodo (x_2 variabile)

$$\begin{array}{ll} \uparrow \omega_1 \rightarrow \downarrow x_1, y & \downarrow \omega_1 \rightarrow \uparrow x_1, y \\ \uparrow p \rightarrow \uparrow x_1, y & \downarrow p \rightarrow \downarrow x_1, y \end{array}$$

$$\max_{x_1, x_2} \pi = \begin{cases} \frac{\delta \pi(\cdot)}{\delta x_1} = 0 \Longleftrightarrow pMP_1 = \omega_1 \\ \frac{\delta \pi(\cdot)}{\delta x_2} = 0 \Longleftrightarrow pMP_2 = \omega_2 \end{cases} \Longrightarrow (x_1^*, x_2^*)$$

Isocosto

$$x_2 = \frac{\bar{c}_2}{\omega_2} - \frac{\omega_1}{\omega_2} x_1$$

L'isocosto è l'insieme dei punti corrispondenti alle varie combinazioni di due fattori produttivi da cui risulta lo stesso costo totale, dati i prezzi dei fattori stessi.

Obiettivo di produzione

$$\min_{x_1, x_2} c(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = \bar{y}$$

Costo minimo per produrre $\bar{y}$ unità.

Moltiplicatori di Lagrange

Si usano per minimizzare i costi sotto il vincolo di produrre una quantità data. Come si passa da una funzione di produzione a una funzione di costo

1. Leontief:

   $$c(\bar{y}) = \bar{y}(\omega_1 + \omega_2)$$

2. Fattori perfetti sostituti:

$$\begin{cases} \omega_1 > \omega_2 \to c(y) = \omega_2 y \\ \omega_1 < \omega_2 \to c(y) = \omega_1 y \end{cases}$$

Si sceglie quello che costa meno

3. Cobb-Douglas:

$$C(x_1^*, x_2^*) = y^{\frac{1}{a+b}} A$$

Moltiplicatore di Lagrange (λ)

In teoria del consumo se aumenta il reddito cosa succede all'utilità
In teoria della produzione se aumenta la produzione cosa succede al costo
Quanto si spende in più per produrre un unità infinitesimale in più? $\lambda = \frac{dC(y)}{dy}$

Curve di Costo Derivate

- $AVC(y)$: costi medi variabili
- $AFC(y)$: costi medi fissi
- $AC(y)$: Costo medio

$$AC(y) = \frac{c(y)}{y} = \frac{c_v(y)}{y} + \frac{F}{y} = AVC(y) + AFC(y)$$

Curva del Costo Marginale ($MC(y)$)

Il costo marginale misura la la variazione dei costi corrispondente ad una variazione dell'output.

$$MC(y) = \frac{\Delta c(y)}{\Delta y} = \frac{c(y + \Delta y)}{\Delta y}$$

Costo Medio di Lungo e Breve Periodo

$$LAC = \frac{c(y)}{y}$$

$$SAC = \frac{c(y, k^*)}{y}$$

- $k(y)$: funzione di costo di breve periodo

Condizione di chiusura nel breve periodo

$$\pi(y) = \begin{cases} p \cdot y - c_v(y) - F \text{ se } y > 0 \\ -F \text{ se } y = 0 \end{cases}$$

Surplus (S)

$$S = py - c_v(y) = \text{profitto-costi fissi}$$

I costi fissi (non sommersi) possono essere sempre recuperati chiudendo l'attività.

$$S = py - c_v(y) - \text{costi sommersi (se presenti)}$$

Analisi di lungo periodo

$$\pi(y) = py - c(y) = y(P - AC(y)) \quad \max(\pi(y)) \rightarrow p = MC(y)$$