

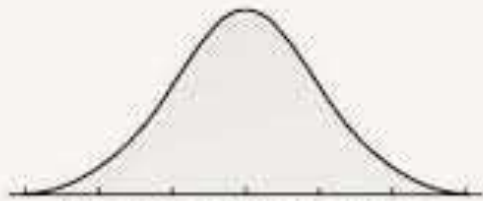
Statistica della Formazione

Slides

A.A. 2020-2021

Docente: ANNA LINA SARRA

Basics of Statistics



Normal Distribution



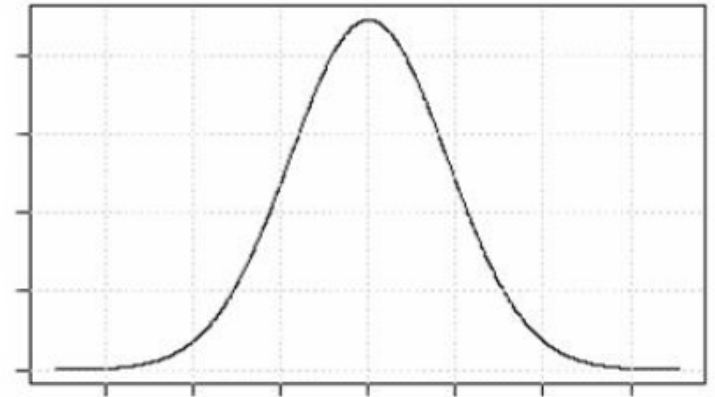
Paranormal Distribution

Distribuzione normale

La distribuzione normale

La Distribuzione **Normale** o **Gaussiana** è la distribuzione **più importante ed utilizzata in tutta la statistica**

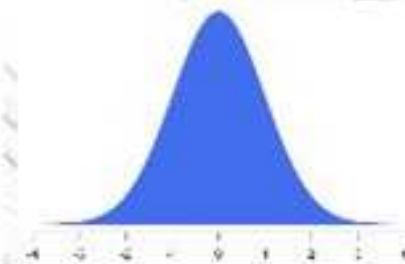
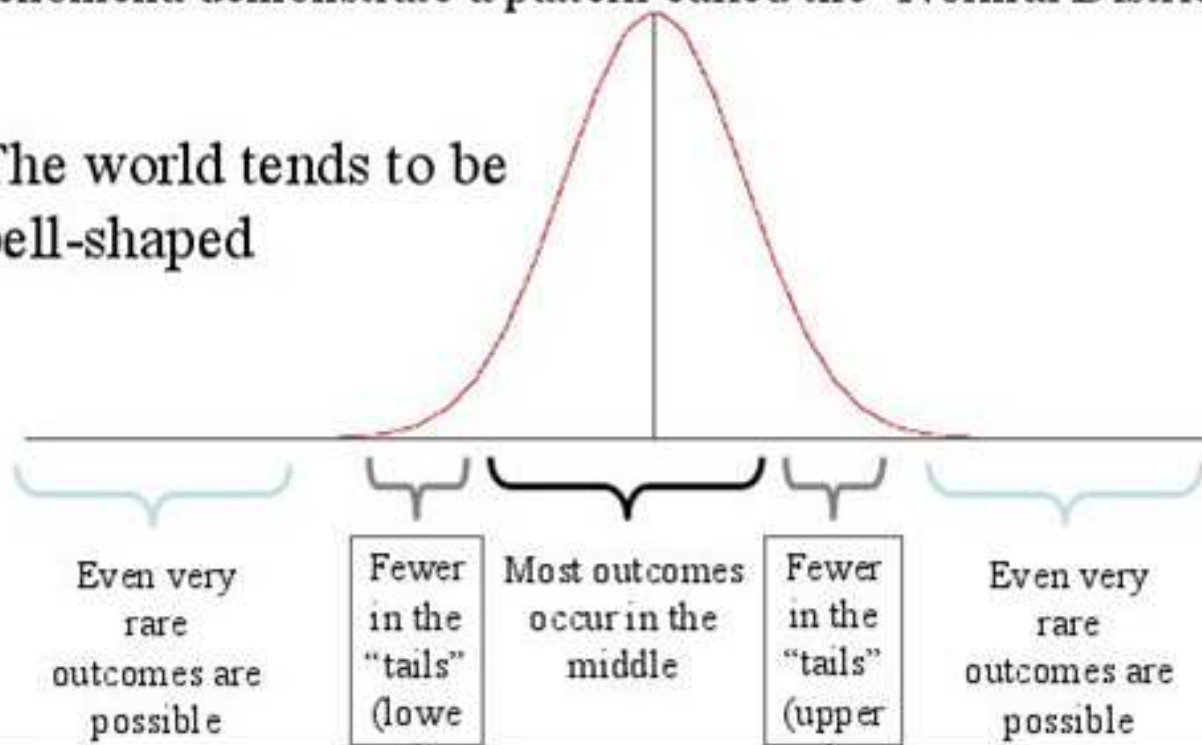
- La curva delle frequenze della distribuzione Normale ha una forma caratteristica, simile ad una campana
- Il valore medio si trova esattamente al centro della distribuzione, e la curva è simmetrica rispetto ad esso: quindi valor medio, mediana e moda coincidono
- La maggior parte delle osservazioni si concentrano intorno al valore medio
- Allontanandosi dal valore medio, la curva si avvicina sempre più all'asse delle ascisse ma non giunge mai a toccarlo: quindi si possono avere anche (pochissime) osservazioni che risultano molto distanti dalla media



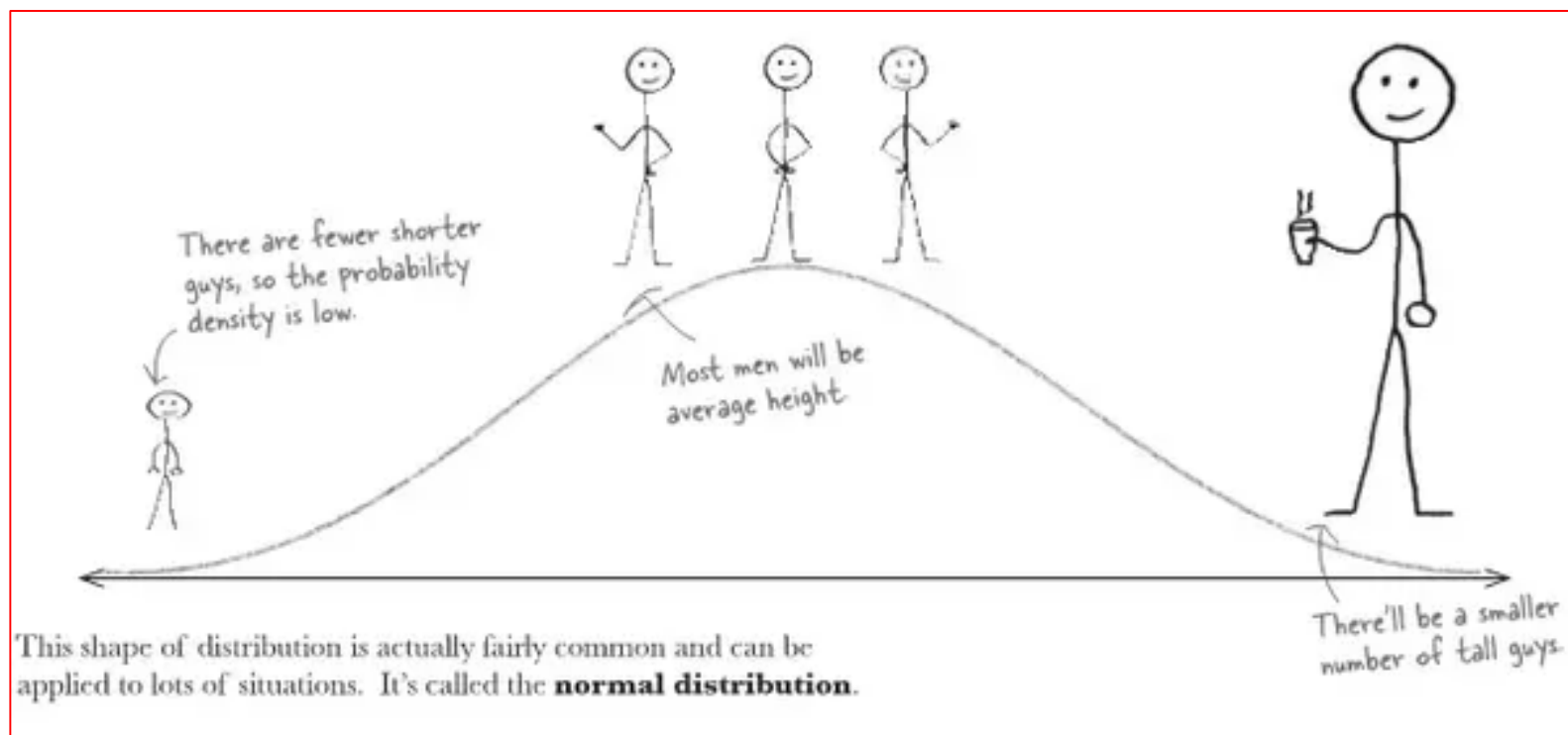
Normal Distribution (Bell) Curve

- Mathematical concept called normal distribution
- Many natural phenomena demonstrate a pattern called the 'Normal Distribution' or 'Bell Curve'.

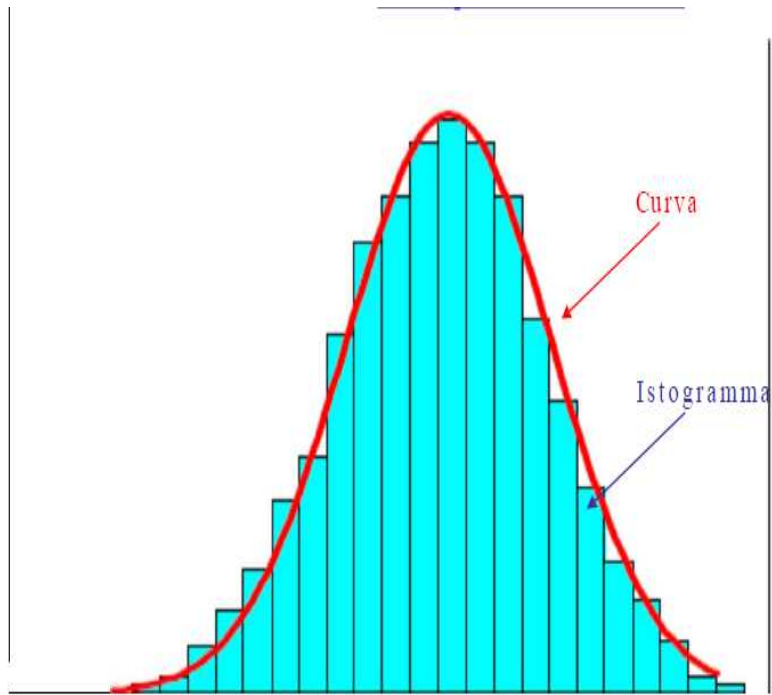
The world tends to be
bell-shaped



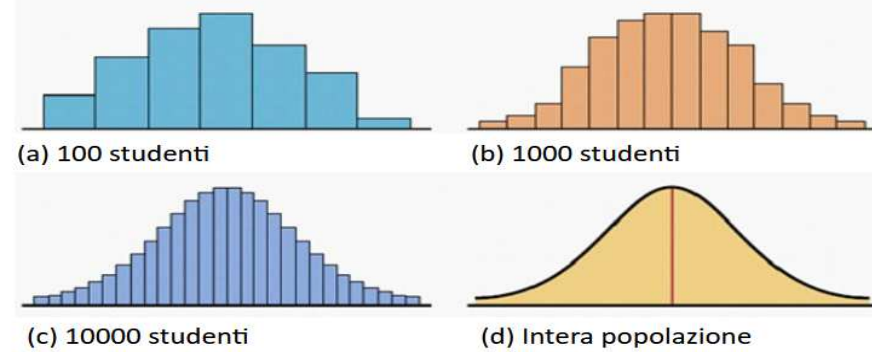
Esempio altezze



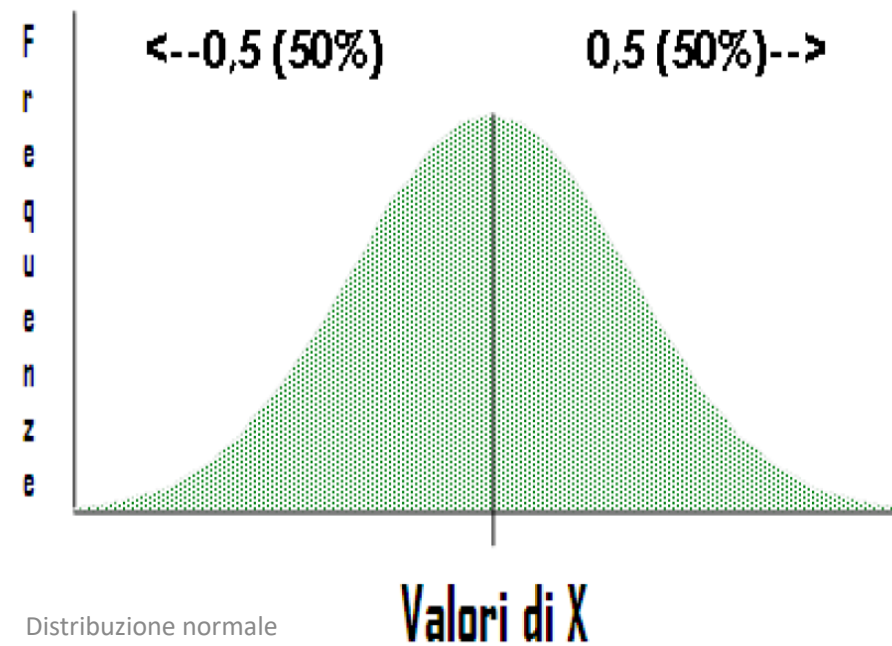
La distribuzione normale



Istogramma della distribuzione delle altezze

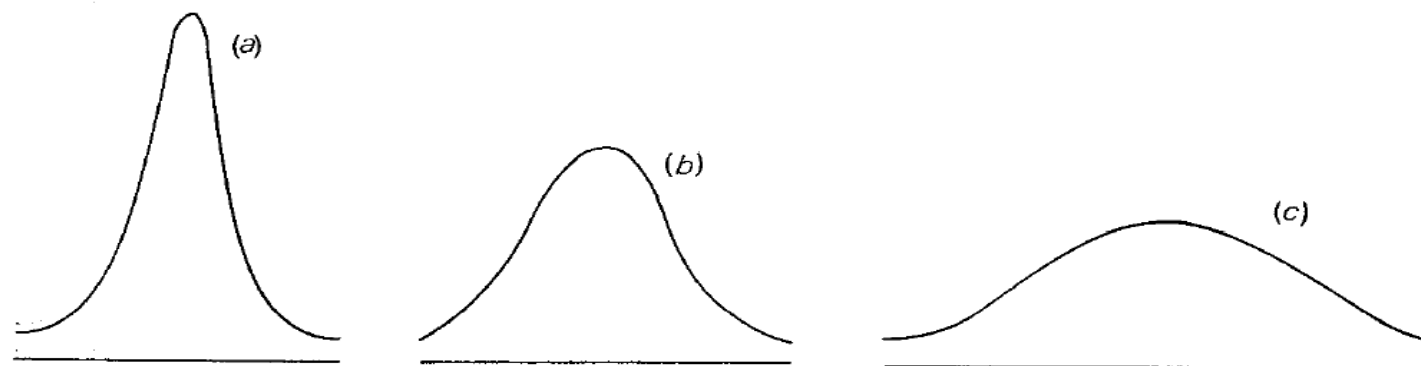


Molte variabili continue seguono questa distribuzione!!!



Distribuzione normale

La distribuzione normale



La Forma della Distribuzione Normale

La distribuzione Normale non descrive in realtà una sola distribuzione, ma piuttosto una famiglia di distribuzioni, tutte con la stessa forma a campana, ma **caratterizzate da media e varianza diverse**

Tutte le curve normali hanno cioè la stessa forma caratteristica, ma possono essere più strette e appuntite, oppure più larghe e piatte

La funzione matematica della distribuzione normale

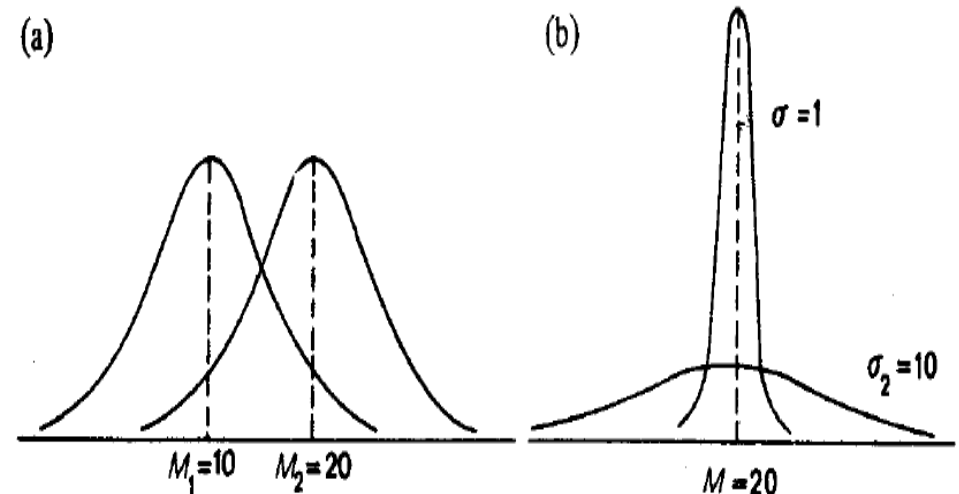
Una curva normale è definita in maniera univoca da due soli parametri:

il valore medio e lo scarto quadratico medio della distribuzione stessa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

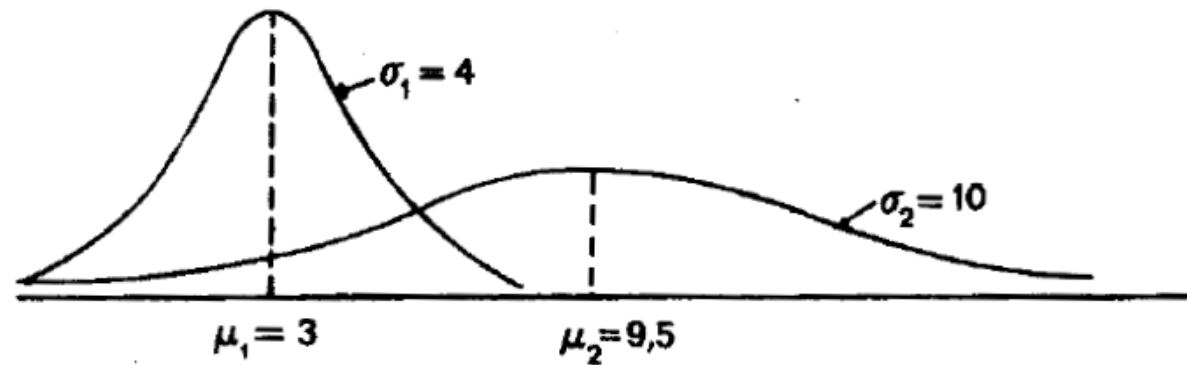
La funzione $f(x)$ descrive, al variare dei valori assunti dai due parametri, una famiglia di curve normali :

- **se si varia μ** : si sposta orizzontalmente l'asse di simmetria della curva
- **se si varia σ** : la curva si allarga e appiattisce al crescere del valore di σ



La distribuzione normale

Variando contemporaneamente μ e σ : la curva trasla orizzontalmente e contemporaneamente si fa più o meno appuntita



Una distribuzione Normale con media μ e scarto quadratico σ viene indicata semplicemente come: $N(\mu, \sigma)$

Per indicare che la variabile X si distribuisce come una Normale si scrive:

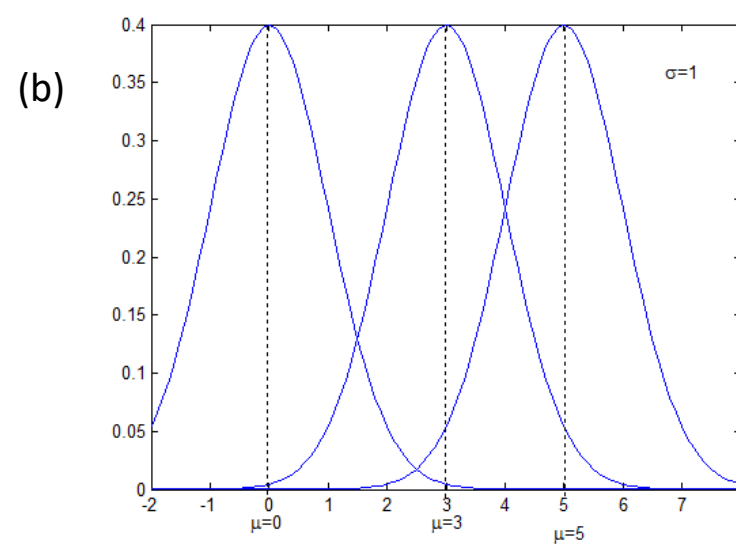
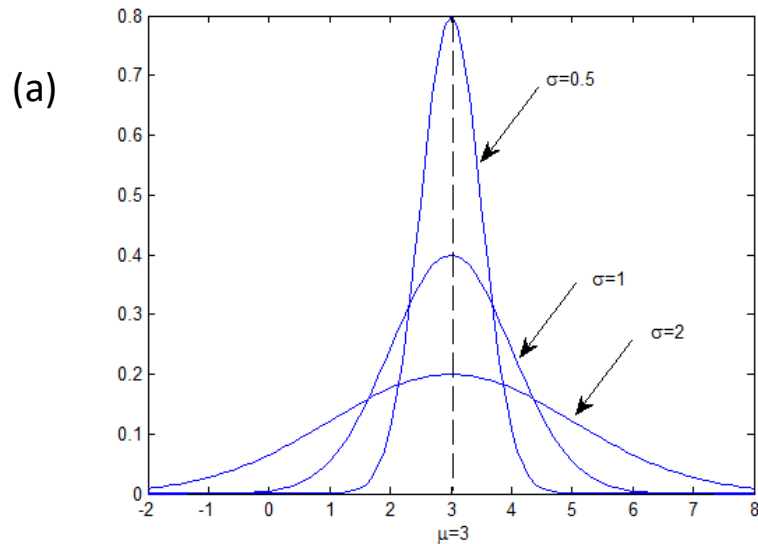
$$x \sim N(\mu, \sigma)$$

Posizione e forma della curva normale in funzione dei parametri μ e σ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

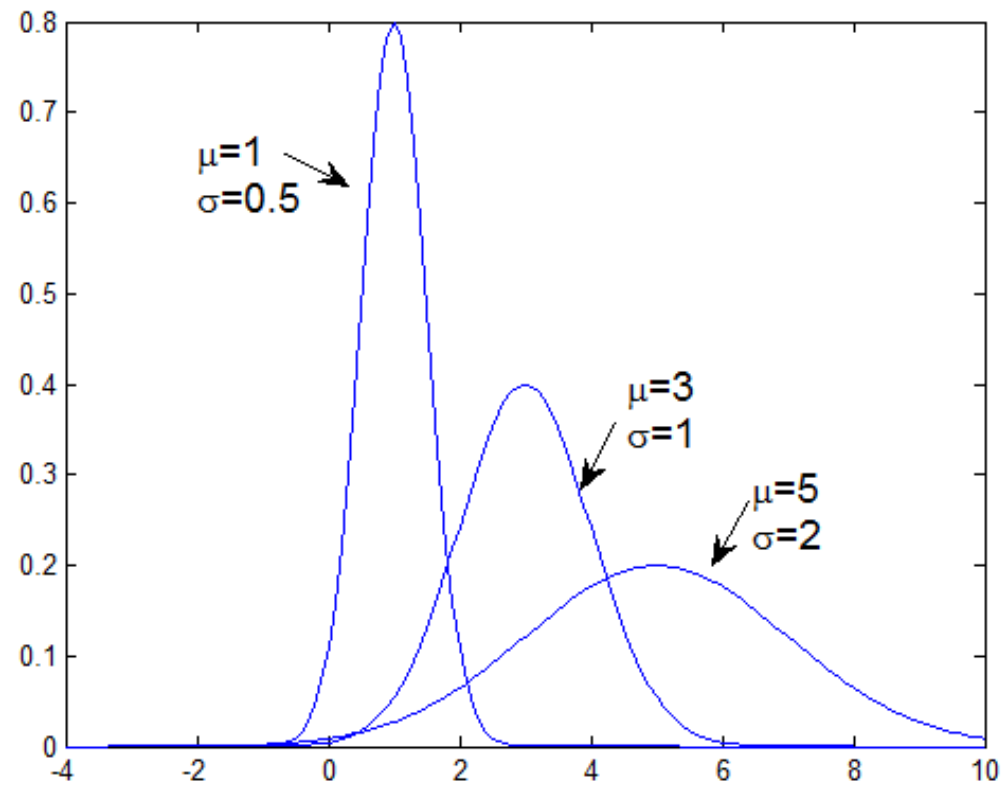
La media individua la **posizione** della curva lungo l'asse delle ascisse.

La varianza determina la **concentrazione** della curva attorno alla retta (figura a).



Distribuzioni normali: **con medie uguali e varianze diverse, grafico a**, **con medie diverse e varianze uguali, grafico b**.

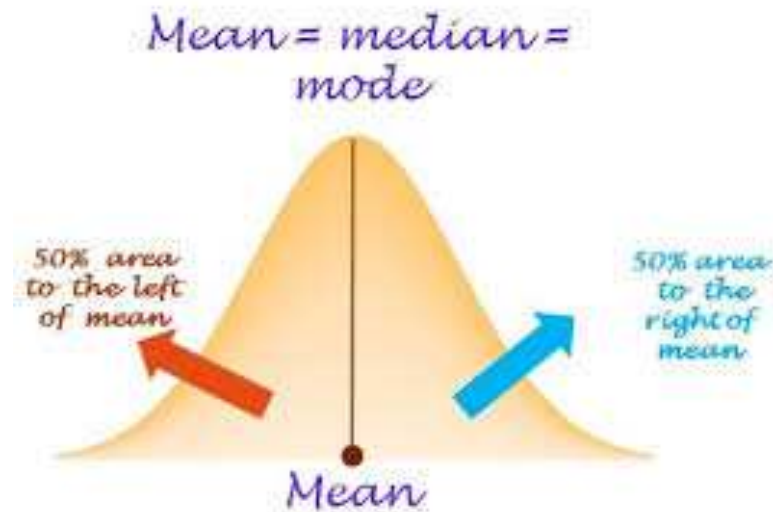
Posizione e forma della curva normale in funzione dei parametri μ e σ



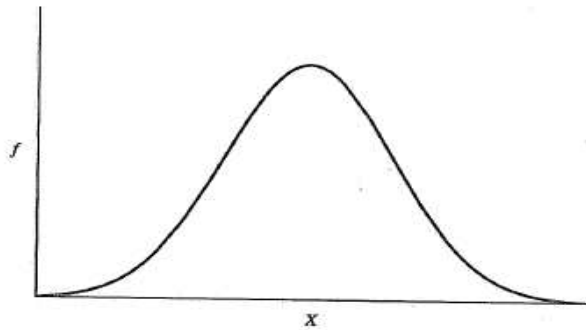
Proprietà della distribuzione normale

- È simmetrica, avendo come asse di simmetria la retta $x = \mu$;
- È crescente nell'intervallo $(-\infty, \mu)$ e decrescente nell'intervallo (μ, ∞) ;
- Ha due punti di flesso in $x = \mu - \sigma$ e $x = \mu + \sigma$;
- È concava (verso il basso) nell'intervallo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ e convessa altrove;
- Ha come asintoto l'asse delle x .

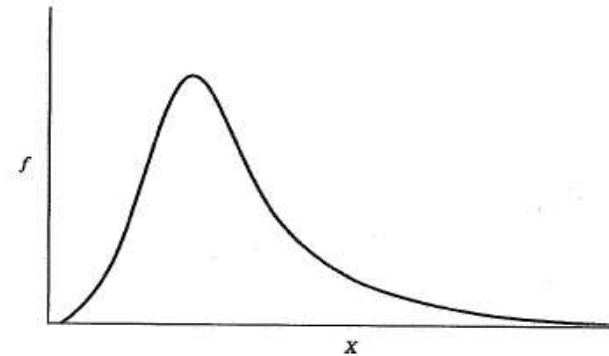
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$



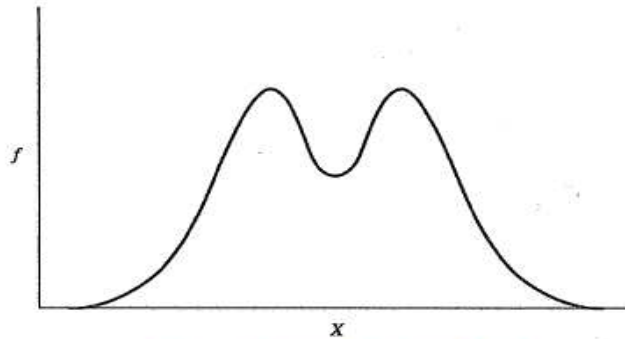
Qual è la curva corretta?



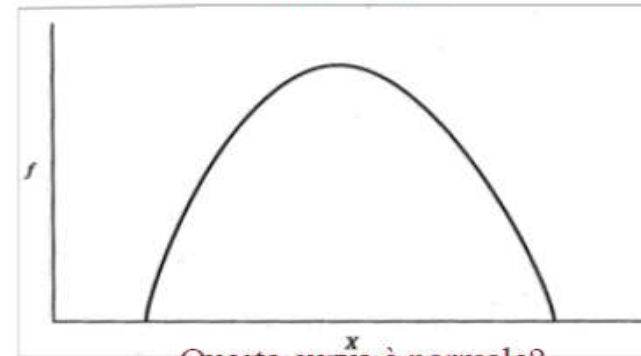
La curva normale è simmetrica,
asintotica e unimodale



Questa curva è Normale?
Simmetrica? Asintotica?
Unimodale?



Questa curva è normale?
Simmetrica? Asintotica?
Unimodale?

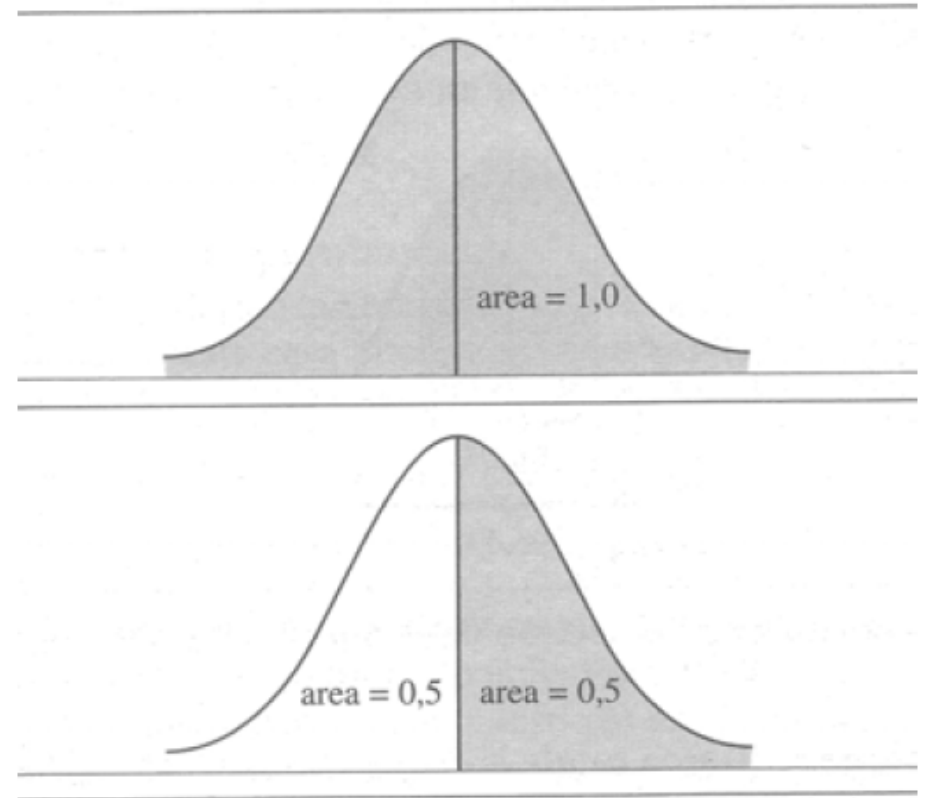


Questa curva è normale?
Simmetrica? Asintotica?
Unimodale?

La distribuzione normale

Quando una curva descrive una distribuzione di frequenze relative, l'area totale sottesa alla curva è pari a 1 (la somma delle frequenze relative).

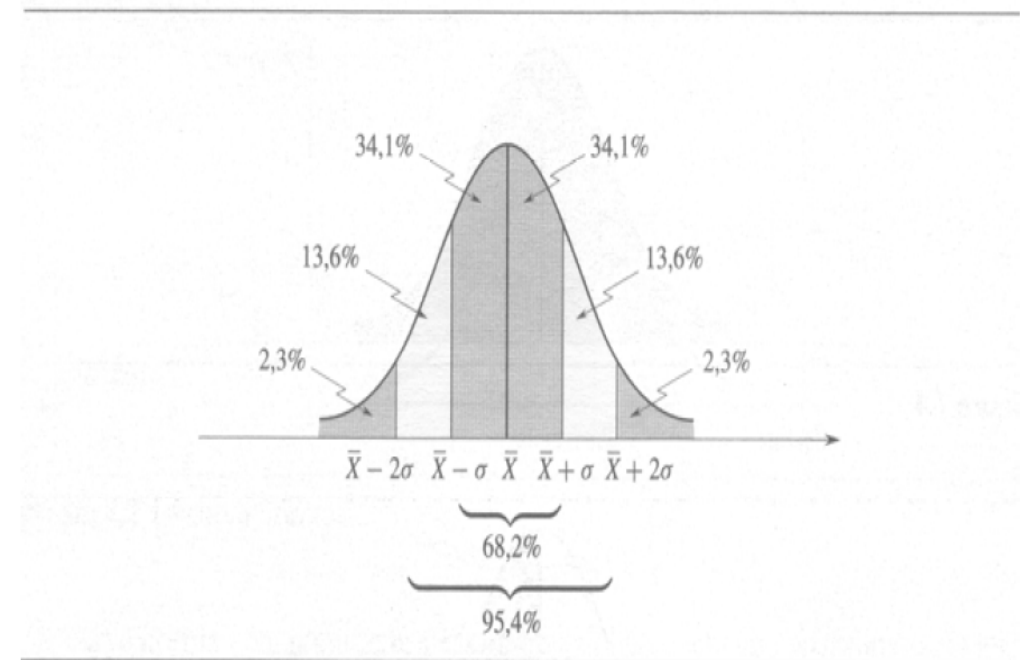
Dunque anche l'area sottesa alla distribuzione Normale è pari ad 1: allora per la simmetria della curva, l'area a sinistra della media è pari a $\frac{1}{2}$, come pure l'area alla sua destra



La distribuzione normale

Vi sono aree importanti sottese alla curva Normale, individuate in termini di scarti quadratici medi di distanza dalla media:

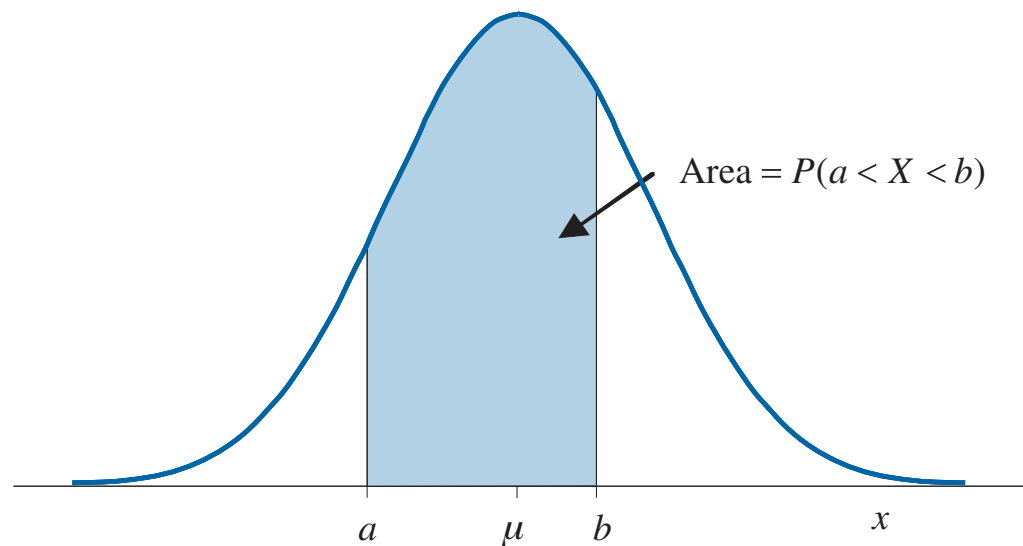
- lo 0,6826 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x} - \sigma)$ e $(\bar{x} + \sigma)$
- lo 0,9544 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x} - 2\sigma)$ e $(\bar{x} + 2\sigma)$
- lo 0,9973 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x} - 3\sigma)$ e $(\bar{x} + 3\sigma)$



Funzione di densità della curva normale

La funzione di densità consente di calcolare la probabilità che la X assuma valori all'interno di un qualsiasi intervallo (a, b) :

tale probabilità è data dall'**area sottesa alla curva normale in detto intervallo**.



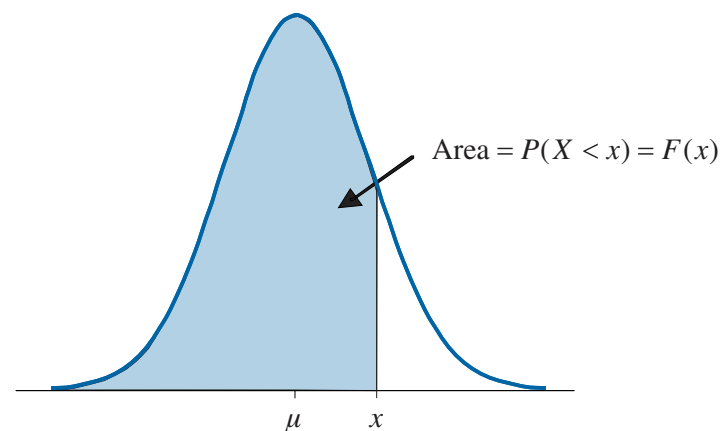
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Funzione di ripartizione della curva normale

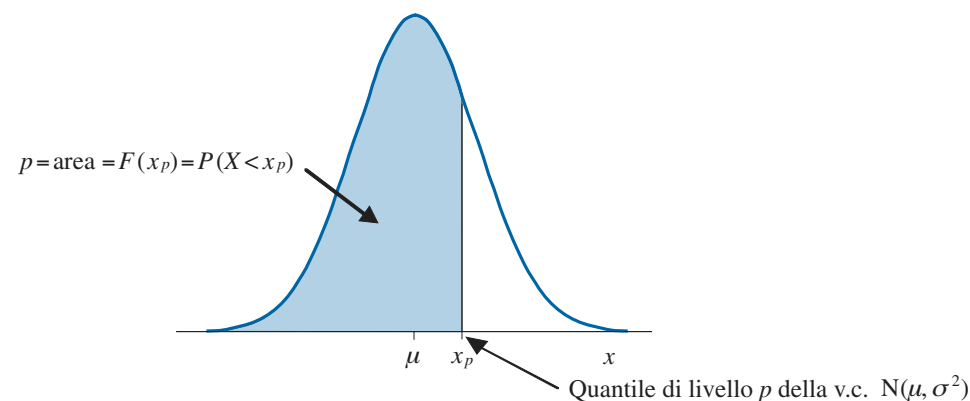
È la probabilità

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Graficamente $F(x)$ è rappresentata dall'area sottesa alla curva normale da $-\infty$ fino a x . ➡



La funzione di ripartizione consente anche di calcolare i quantili della distribuzione normale. ➡



La distribuzione Normale Standardizzata

La distribuzione Normale è scomoda da usare per calcolare le aree di interesse, quando i valori critici non sono multipli esatti di sigma, perché dipende da due parametri (μ e σ).

Per questo si introduce la **Normale Standard**, ottenuta standardizzando la variabile Normale.

Data una variabile X , Normale con media μ e scarto quadratico σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

la trasformazione $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

avrà media 0 e scarto quadratico medio uguale a 1.

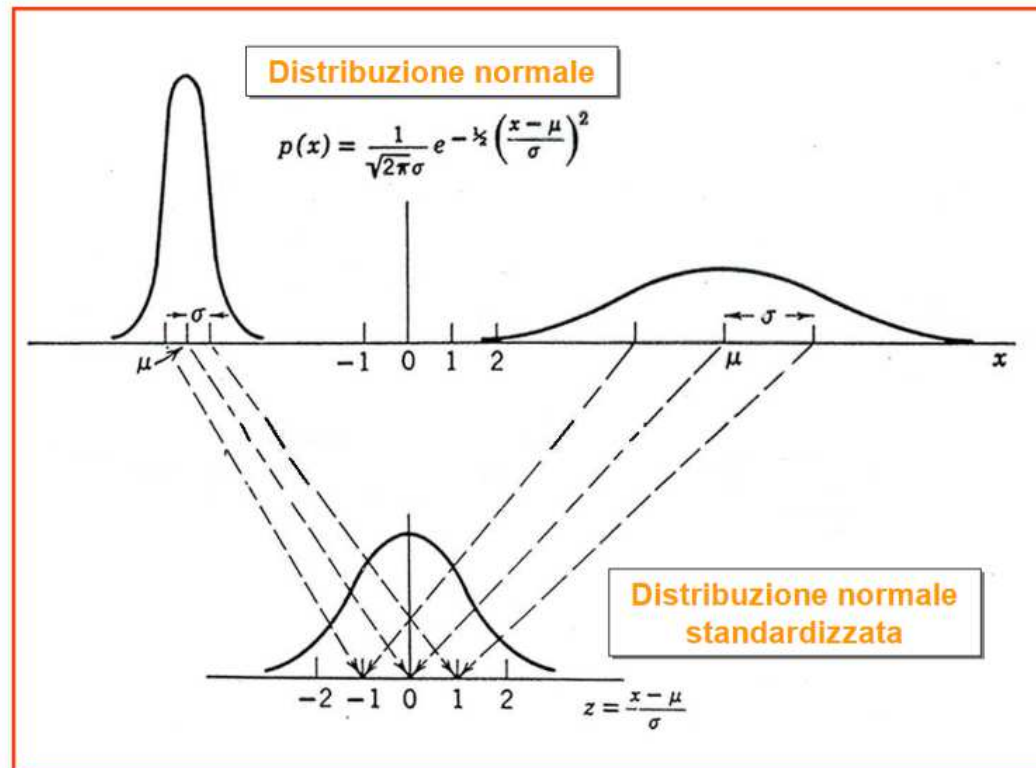
La funzione $f(z)$ risultante dalla trasformazione non dipende più da alcun parametro.



$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Questa distribuzione viene chiamata Normale Standard e indicata come: **N(0,1)**

Distribuzione normale e distribuzione normale standardizzata



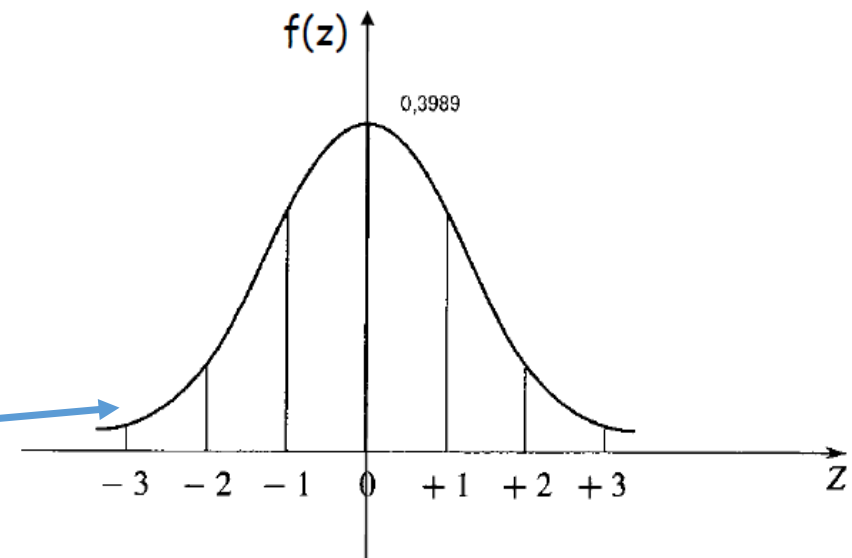
La distribuzione Normale Standardizzata

La funzione Normale Standard ha la stessa forma della Normale completa, ma non contenendo nessun parametro, **descrive una unica e ben determinata curva.**

Valgono naturalmente tutte le proprietà viste per la Normale, con gli opportuni adattamenti per tenere conto del fatto che la media è 0 e la varianza è 1, quindi:

- ☐ la curva è centrata e simmetrica rispetto all'origine degli assi: $z = 0$
- ☐ il massimo delle frequenze si ha per $z = 0$ e vale $f(0) = 0,3989$
- ☐ le aree di interesse viste in precedenza diventano più semplicemente

Distribuzione normale



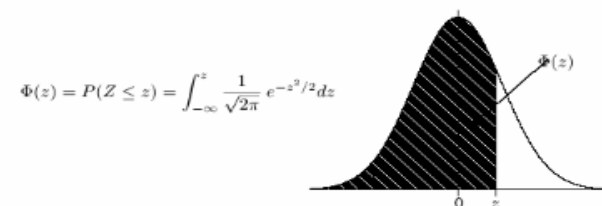
Funzione di ripartizione

❑ La tavola della Normale Standard può essere realizzata in diversi formati

❑ Uno dei formati più utilizzati è quello che riporta la Funzione di ripartizione $F(z)$ (frequenze cumulate), cioè l'intera area a sinistra di un dato valore z

Nei problemi di calcolo con la N conviene sempre per prima cosa **disegnare l'area** che ci interessa calcolare

Tavola 1: Funzione di ripartizione della Variabile Casuale Normale Standardizzata



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998