REGOLE DEDUZIONE NATURALE

Logica intuizionista

Conjunction Rules

$$\frac{F_1 \qquad F_2}{F_1 \wedge F_2}\ \wedge I \qquad\qquad \frac{F_1 \wedge F_2 \qquad \begin{array}{c}[F_1][F_2]\\ \vdots \\ F_3\end{array}}{F_3}\ \wedge E^{*}$$

$$\frac{F_1 \wedge F_2}{F_i}\ \wedge E_i$$

with $i \in \{1, 2\}$

Disjunction Rules

$$\frac{F_i}{F_1 \vee F_2}\ \vee I_i^{*}$$

with $i \in \{1, 2\}$

$$\frac{F_1 \vee F_2 \qquad \begin{array}{c}[F_1]\\ \vdots \\ F_3\end{array} \qquad \begin{array}{c}[F_2]\\ \vdots \\ F_3\end{array}}{F_3}\ \vee E^{**}$$

Implication Rules

$$\frac{\begin{array}{c}[F_1]\\ \vdots \\ F_2\end{array}}{F_1 \Rightarrow F_2}\ \Rightarrow I \qquad\qquad \frac{F_1 \Rightarrow F_2 \qquad F_1}{F_2}\ \Rightarrow E^{*}$$

Ex Falso Quodlibet

$$\frac{\bot}{F}\ \bot E^{*}$$

Negation Rules

$$\frac{\begin{array}{c}[F]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg F}\ \neg I \qquad\qquad \frac{\neg F \qquad F}{\bot}\ \neg E$$

Regole $\top$

$$\frac{}{\top}\ \top I \qquad\qquad \frac{\top \qquad F}{F}\ \top E$$

*NON invertibile

*Inv. solo se abbiamo come ipotesi F1 ^ F2

**Inv. solo se abbiamo come ipotesi F1 v F2

Logica classica

Riduzione ad assurdo

$$\begin{array}{c} \neg[F] \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{F}\,(RAA) \end{array}$$

Utilizzo frequente della RAA

Un utilizzo frequente della RAA è il seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ A\end{array} \qquad [\neg A]}{\bot}\,(\neg_e)}{A}\,(RAA)$$

Principio del terzo escluso

$$\vdash A \vee \neg A$$

Uno schema molto potente di dimostrazione consiste infatti nell'utilizzo del principio del terzo escluso combinato alla regola di eliminazione dell'or:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A\vee\neg A\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ F\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ F\end{array}}{F}\,(\vee_e)$$

Logica del prim'ordine

Protip by Coen: applicare appena possibile le regole $\forall_I$ e $\exists_E$, in particolare la regola $\exists_E$ deve essere usata prima della regola $\exists_I$.

$$\dfrac{P[t/x]}{\forall x.P}\ \forall_I\ (\text{dove } t \notin FV)$$

$$\dfrac{\forall x.P}{P[t/x]}\ \forall_E$$

$$\dfrac{P[t/x]}{\exists x.P}\ \exists_I$$

$$\dfrac{\exists x.P \qquad \begin{array}{c}[P[y/x]]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\ \exists_E\ (\text{dove } y \notin FV(C) \cup FV(:))$$

FV = Free Varibles