06/02/23

SEMANTICA LOGICA CLASSICA

attribuire valore a $\underbrace{\text{variabili enunciative}}_{\text{insieme } \Phi}$. Stabiliamo 1 funzione

$I : \Phi \to \{0,1\}$ oppure $I \subseteq \{\Phi\}$

$\notin$ $\in$

usereemo questa notaz.

Siamo in logica classica $\Rightarrow$ ogni enunciato è necessariamente o VERO o FALSO

Def. $I \models A$ "A è vero rispetto a interpretazione I"

Def. $I \models p_i$ sse $p_i \in I$ o $I(p_i) = 1$

Def. $I \not\models \bot$

Def. $I \models \neg A$ sse $I \not\models A$

Def. $I \models A \cap B$ sse $I \models A \cap I \models B$

Def. $I \models A \cup B$ sse $I \models A \cup I \models B$

Def. $I \models A \Rightarrow B$ sse $I \not\models A \cup I \models B$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \cup B)$

TEOREMA: se $I(p_i) = I'(p_i)$ $\forall p_i \in A$

allora $I \models A$ sse $I' \models A$

dim: per induzione strutturale su A.

CASO p_i:

devo dimostrare $I \models p_i$ sse $I' \models p_i$

ovvero $I(p_i) = 1$ sse $I'(p_i) = 1$. OVVIO

CASO $\perp$:

devo dimostrare $I \models \perp$ sse $I' \models \perp$. OVVIO

CASO $\neg B$:

devo dimostrare $I \models \neg B$ sse $I' \models \neg B$

sse $\underset{I(B)=0}{I \not\models B}$ $\underset{sse}{\text{sse}}$ $\underset{I'(B)=0}{I' \not\models B}$. OVVIO

CASO $C \wedge B$:

devo dimostrare $I \models (C \wedge B)$ sse $I' \models (C \wedge B)$

sse $I(C \wedge B) = 1$ sse $I' \models (C \wedge B)$

sse $I(C) = 1 \cap I(B) = 1$ sse $I'(C) = 1 \cap I'(B) = 1$

OVVIO

CASO $B \cup C$

devo dimostrare $I \models (B \cup C)$ sse $I' \models (B \cup C)$

sse $I \models B \cup I \models C$ sse $I' \models B \cup I' \models C$

OVVIO.

CASO $B \rightarrow C$

devo dimostrare $I \models (B \rightarrow C)$ sse $I' \models (B \rightarrow C)$

sse $I \not\models B \cup I \models C$ sse $I' \not\models B \cup I' \models C$

OVVIO.

ES

$I \models A$ sse $I \models \neg^{2k} A$

Dimostrazione per induzione strutturale su k

CASO $k=0$

d.d. $I \models A$ sse $I \models A$ OVVIO

CASO $k = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d.d. $I \models A$ sse $I \models \neg^{2(n+1)} A$

per induzione so che

$I \models A$ sse $I \models \neg^{2n} A$

$I \models \neg^{2(n+1)} A$ sse $I \models \neg^{2n+2} A$ sse $I \models \neg\neg(\neg^{2n}) A$

sse $I \not\models \neg(\neg^{2n}) A$ sse $I \models \neg^{2n} A$ OVVIO

ES

$\models (\neg A \cup \neg B) \longleftrightarrow \neg(A \cap B)$

1) $I \models (\neg A \cup \neg B)$ sse $I \models \neg A$ oppure $I \models \neg B$

$I \models A$ sse $I \not\models A$

$I \models B$ sse $I \not\models B$

2) $I \models \neg(A \cap B)$ sse $I \not\models A \cap B$ sse $\overbrace{I \not\models A \text{ e } I \not\models B}$

Def. A è *soddisfatta* da I sse $I \models A$

Def. A è *NON soddisfatta* da I sse $I \not\models A$

Def. A è *soddisfacibile* sse $\exists I. (I \models A)$

Def. A è *valida* sse $\forall I. (I \models A)$ $\models A$

Def. A è *conseguenza logica* di Γ dove $\Gamma \subseteq Fm_{\Phi}$

sse $\forall I. (I \models \Gamma$ allora $I \models A)$ $\Gamma \models A$

TEOREMA di DEDUZIONE:

$\Gamma, A \models B$ sse $\Gamma \models A \to B$

dim.

$\Rightarrow$ assumo $\Gamma, A \models B$ ovvero $I \models \Gamma, A$ allora $I \models B$

d.d. $\boxed{I \models \Gamma \text{ allora } I \models A \to B}$

$I' \models \Gamma \begin{cases} I' \models A & I' \models A \to B \\ I' \not\models A & I' \models A \to B \end{cases}$

$\Leftarrow$

assumo $\Gamma \models A \to B$ ovvero $\forall I (I \models \Gamma$ allora $I \models A \to B)$
ovvero $\forall I (I \models \Gamma$ allora $(I \not\models A$ oppure $I \models B))$

d.d. $\forall I. \boxed{(I \models \Gamma, A \text{ allora } I \models B)}$

$\forall I. (I' \models \Gamma, A$ allora $I' \models B)$ sse $\Gamma \models A \to B$

perché non può rendere falso A

08/02/23

ES $\vDash (A \cap B) \to A$

VIA DIRETTA: assumo antecedente e dimostro conseguente

Sia I t.c. $I \vDash A \cap B$, mostro che $I \vDash A$

$I \vDash A \cap B$ sse $I \vDash A$ e $I \vDash B$ OVVIO

PER ASSURDO: assumo per assurdo $\exists I (I \nvDash (A \cap B) \to A)$
ovvero $I \vDash A \cap B$ e $I \nvDash A$

Ma $I \vDash A \cap B$ sse $I \vDash A$ e $I \vDash B$ ASSURDO

TEOREMA: $\Gamma \vDash A$ sse $\Gamma, \neg A$ è insoddisfacibile

$(\Rightarrow)$ $\forall I (I \vDash \Gamma$ allora $I \vDash A)$ falso antecedente ① o vero conseg. ②

① $\exists B \in \Gamma$ t.c. $I \nvDash B \leadsto \Gamma, \neg A$ è insoddisf. da I

② $I \vDash A \leadsto \Gamma, \neg A$ è insodd. da I

$(\Leftarrow)$ $\forall I (I \nvDash \Gamma, \neg A)$

d.d. $\Gamma \vDash A$ ovvero $\forall I (I \vDash \Gamma$ allora $I \vDash A)$

09/02/23

LOGICA MODALE PROPOSIZIONALE

Alfabeto: $\Phi = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ variabili enunciative

$\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond$ operatori

( ) simboli ausiliari

Linguaggio definito così:

1) se $p_i \in \Phi$ allora $p_i \in Fm$
2) $\bot \in Fm$
3) se $A \in Fm$ allora $\neg A, \Box A, \Diamond A \in Fm$
4) se $A, B \in Fm$ allora $(A \cap B), (A \cup B), (A \rightarrow B) \in Fm$
5) nient'altro $\in Fm$

$\top \equiv \bot \rightarrow \bot \qquad (A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Definire **lunghezza** formule

- $lg(p_i) = lg(\bot) = 0$
- $lg(\neg A) = lg(\Box A) = lg(\Diamond A) = lg(A) + 1$
- $lg(A \cap B) = lg(A \cup B) = lg(A \rightarrow B) = lg(A) + lg(B) + 1$

Dimostrazione per induzione:

1. BASE $P(\bot)$, $P(p_i)$
2. PASSO ASSUMO $P(A), P(B)$

   MOSTRO $\left[\begin{array}{l} P(\neg A) \\ P(A \wedge B), P(A \vee B), P(A \to B) \end{array}\right.$

   $P(\Box A), P(\Diamond A)$
3. CONCLUDO

$$\forall A \in Fm\,(P(A))$$

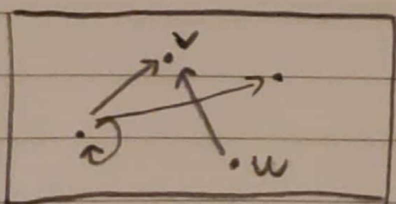
SEMANTICA di Kripke

STRUTTURA (RELAZIONALE) o FRAME

$$\boxed{\mathcal{F} = \langle W, R \rangle}$$

- W è insieme NON vuoto di mondi / punti
- $R \subseteq W \times W$ è la RELAZIONE di ACCESSIBILITÀ
- usiamo w v, u per i mondi
- wRv significa "v è accessibile da w" o "w vede v"

$\mathcal{F}$



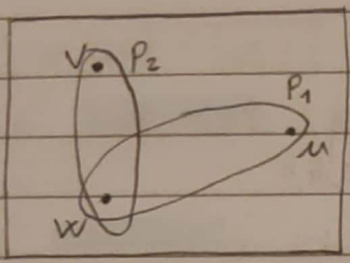
wRv

insieme punti — coppie punti — interpretazione

Definiamo un **MODELLO** $M = \langle W, R, I \rangle$

$\boxed{I : \Phi \to \mathcal{P}(W)}$ ovvero $\boxed{I(p_i) \subseteq W}$

ovvero $I : W \to (V : \Phi \to \{0,1\})$



M é basato su F se

$$M = \langle M, R, I \rangle \quad e \quad F = \langle W, R \rangle$$

$V \equiv I$

Definiamo **VERITÁ** di A in un punto w di M

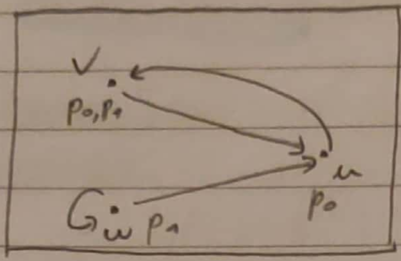
$$\models^{M}_{w} A \qquad (\models_w A)$$

- $\models_w p_i$ sse $w \in I(p_i)$
- $\not\models_w \bot$
- $\models_w \neg A$ sse $\not\models_w A$
- $\models_w A \wedge B$ sse $\models_w A \wedge \models_w B$
- $\models_w A \vee B$ sse $\models_w A \vee \models_w B$
- $\models_w A \to B$ sse $\not\models_w A \vee \models_w B$

- $\models_w \Box A$ sse $\forall v \in W (w R v$ implica $\models_v A)$
- $\models_w \Diamond A$ sse $\exists v \in W (w R v$ e $\models_v A)$

esempio:

$F = \langle \{w, v, u\}, \{\langle w,w\rangle, \langle u,v\rangle, \langle v,u\rangle, \langle w,u\rangle\}\rangle$



$I(p_0) = \{v, u\}$

$I(p_1) = \{w, v\}$

$\models_w \Box p_0$ sse $\forall x \in W (wRx \supset \models_x p_0)$

sse $\cancel{\models_w p_0}$ e $\models_u p_0$ FALSO

$\models_v \Box p_0$ sse $\models_u p_0$ VERO

tutto ciò che vede v

$\models_u \Box \bot$ sse $\cancel{\models_v \bot}$ FALSO

vero solo se u non vede nulla

VALIDITÀ

W è insieme mondi di M
$w \in W$ dove

A è **VERA** in M ($\models^M A$) sse A è vera in ogni $w \in M$

A è **VALIDA in un frame** $\mathcal{F}$ sse $\forall M$ basato su $\mathcal{F}$ ($\models^M A$)

A è **VALIDA** ($\models A$) sse $\forall \mathcal{F} (\mathcal{F} \models A)$

A è **VALIDA in una classe** C di frame sse $\forall \mathcal{F} \in C (\mathcal{F} \models A)$

CONSEGUENZA LOGICA

$\boxed{\Gamma \models_C A}$ sse $\forall w \in M$ dove M è basato su $\mathcal{F} \in C$,

$\models^M_w \Gamma$ allora $\models^M_w A$

riepilogo

VERITÀ $\models^M_w A$, $\models^M A$ vero in 1 o + mondi

VALIDITÀ $\mathcal{F} \models A$ valida in 1 frame

$C \models A$ " " classe di frame

$\models A$ " tutti i frame

ES | x CASA

1) $\models \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$

2) $\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Sia $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ e $M = \langle W, R, I \rangle$, $w \in W$

1) so che $\models^M_w \Box(A \wedge B)$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A \wedge B)$

d.d.

$\models_w \Box A \wedge \Box B$ ovvero $\models_w \Box A$ e $\models_w \Box B$

Dimostro $\models_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A)$

OVVIO

Dimostro $\models_w \Box B$ " $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v B)$

OVVIO

ipotesi ci dice che $\models_v A \wedge B$ ovvero $\models_v A$ e $\models_v B$ $\forall v \in W$

2) so che $\models^M_w \Box(A \to B)$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A \to B)$

d.d.

$\models^M_w \Box A \to \Box B$

so che $\models^M_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A)$

d.d.

$\models^M_w \Box B$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v B)$

per ipotesi so che $\forall v \in W (\models_v A \to B)$

ovvero $\not\models_v A$ oppure $\models_v B$

ma so che $\forall v \in W$ $\models_v A$ quindi $\models_v B$

13/02/2023

es. in classe

$\vDash \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$

assumo $\vDash^M_w \Box A \wedge \Box B$ ovvero $\vDash^M_w \Box A$ e $\vDash^M_w \Box B$

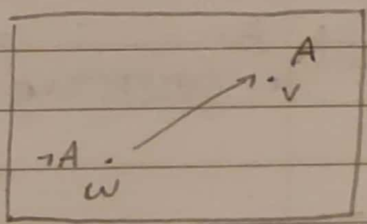
ovvero $\forall v \in W(wRv$ implica $\vDash^M_v A)$ e
$\forall v \in W(wRv$ implica $\vDash^M_v B)$

d.d. $\vDash^M_w \Box(A \wedge B)$ ovvero $\forall v \in W(wRv$ implica $\vDash^M_v A \wedge B)$

ovvero $\forall v \in W(\vDash^M_v A$ e $\vDash^M_v B)$ ovvio

$\nvDash \Box A \rightarrow A$ farne altri sul libro è utile

controesempio:



assumo $\vDash^M_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W(wRv$ implica $\vDash^M_v A)$
quindi non possiamo affermare che è sempre vero in tutti i $v \in W$

MODUS PONENS

$$\boxed{\dfrac{\models A \qquad \models A \to B}{\models B}}$$

$\cancel{\Downarrow} \qquad \Uparrow$

$$\frac{\models_w A \qquad \models_w A \to B}{\models_w B}$$

caso di 1 MODELLO
(tutti i mondi di 1 MODELLO)

$$\frac{\models_w A \text{ e } (\not\models_w A \text{ oppure } \models_w B)}{\models_w B}$$

non può essere $\not\models_w A$ e $\models_w$

REGOLA di NECESSITAZIONE

$$\boxed{\dfrac{\models^M A}{\models^M \Box A}}$$

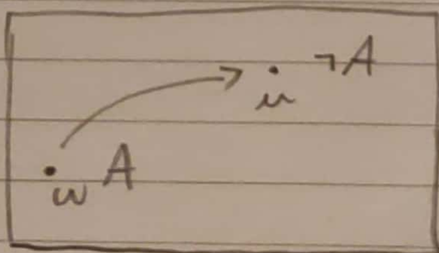
si preserva sul MODELLO

$\forall_v \in W (\models_v A)$

$\forall_v \in W (\models_v \Box A)$

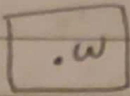
NON si preserva su 1 mondo

$$\cancel{\dfrac{\models^M_w A}{\models^M_w \Box A}}$$

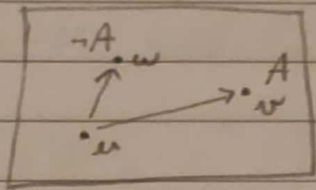


es. 1.2 pag 24 libro

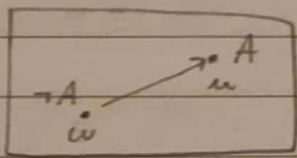
(1) $\nvDash \Diamond \top$



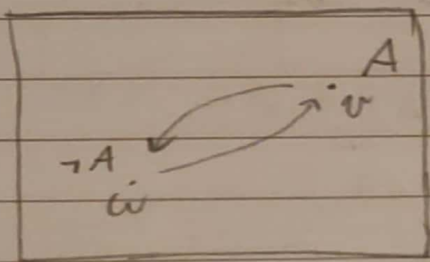
(2) $\nvDash \Diamond A \to \Box A$



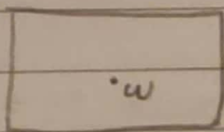
(3) $\nvDash \Box A \to A$



(4) $\nvDash \Box A \to \Box\Box A$



??? (5) $\nvDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Diamond B)$



??? (6) $\nvDash \Box(\Box A \to B) \vee (\Box B \to A)$

(7) $\nvDash \Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Box B)$

(8) $\nvDash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

regola SOSTITUZIONE

$A[B/p]$ A con B al posto di p

CASI:

- $q[B/p] \equiv \begin{cases} q & \text{se } q \not\equiv p \\ B & \text{se } q \equiv p \end{cases}$
- $\bot[B/p] \equiv \bot$
- $* \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$, $*C[B/p] \equiv *(C[B/p])$
- $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, $(C \circ D)[B/p] \equiv C[B/p] \circ D[B/p]$

TR: la validità su $\mathcal{F}$ (generica struttura) è chiusa sotto sostituzione uniforme

$$\frac{\mathcal{F} \models A}{\mathcal{F} \models A[B/p]}$$

NON vero in un modello: è possibile $M \models A$ e $M \not\models A[B/p]$

Assumiamo $M \models p$ ma $M \not\models \bot$

$M \not\models p[\bot/p]$

$$(\alpha \to \beta) \longleftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$$

DIMOSTRAZIONE: PER CONTRAPPOSIZIONE

assumo $\not\models A[B/p]$ mostro $\not\models A$

$\not\models^{M}_{w} A[B/p]$ dove $M = \langle W, R, I \rangle$

$\Gamma_B = \{ v \text{ t.c. } v \in W \text{ e } \models^{M}_{v} B \}$

$M' = \langle W, R, I' \rangle \qquad I'(q) = \begin{cases} I(q) & \text{se } q \not\equiv p \\ \Gamma(B) & \text{se } q \equiv p \end{cases}$

$\forall C \in Fm, \forall k \in W \qquad \models^{M}_{k} C[B/p] \text{ sse } \models^{M'}_{k} C$

Dimostro per induzione su C:

CASO BASE: $\models^{M}_{k} q = \begin{cases} q \equiv p & \models^{M}_{k} B \text{ sse } \models^{M'}_{k} q \\ q \not\equiv p & \models^{M'}_{k} q \qquad k \in I(q) \text{ sse } k \in I'(q) \end{cases}$

CASO $\wedge$: $\models^{M}_{k} (D \wedge E)[B/p] \overset{?}{\text{sse}} \models^{M'}_{k} D \wedge E$

sse

$\models^{M}_{k} D[B/p] \wedge E[B/p]$

sse

$\models^{M}_{k} D[B/p]$ e $\models^{M}_{k} E[B/p]$

sse

$\models^{M'}_{k} D$ e $\models^{M'}_{k} E$ (per ip. ind.)

sse

$\models^{M'}_{k} D \wedge E$

IDEM per $\vee$ e $\to$ e $\neg$

continua...

$\models_x^M (\Box D)[B/p]$ sse $\models_x^{M'} \Box D$

sse

$\models_x^M \Box(D[B/p])$

sse

$\forall u\,(xRu \supset \models_u^M D[B/p])$

sse

$\forall u\,(xRu \supset \models_u^{M'} D)$

sse

$\models_x^{M'} \Box D$

IDEM per $\Diamond$ qed

Definizione di LOGICA

LOGICHE MODALI NORMALI

$\Gamma \subseteq Fm$

1. $TAUT \in \Gamma$

2. $K \in \Gamma$, $K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

3. Γ chiuso sotto MP $\dfrac{A \in \Gamma \quad A \to B \in \Gamma}{B \in \Gamma}$

4. Γ chiuso sotto regola necessitazione $\dfrac{A \in \Gamma}{\Box A \in \Gamma}$

(5. Γ chiuso sotto sostituzione uniforme $\dfrac{A \in \Gamma}{A[^B/_p] \Gamma}$)

ridondante

ASSIOMI: $\vdash TAUT \qquad \vdash K$

REGOLE: $\dfrac{\vdash A \quad \vdash A \to B}{\vdash B}$ modus ponens

$\dfrac{\emptyset \vdash A}{\emptyset \vdash \Box A}$ necessitazione

16/02/23

dimostrazione

$K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

assumo $\models^M_w \Box(A \to B)$ ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v A \to B$)

ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v \neg A \lor B$)
ovvero $\forall v \in W$ (wRv " $\models^M_v \neg A$ o $\models^M_v B$)

d.d. $\models^M_w \Box A \to \Box B$ assumo $\models^M_w \Box A$ ovvero
$\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v A$)

quindi so $\forall v \in W$

$$\frac{\models^M_v A \qquad \models^M_v A \to B}{\models^M_v B} \text{ per MP}$$

NOTAZIONE

$F \rhd P$ F gode di P

Def. CORRISPONDENZA

$A \in Fm$ corrisponde a una proprietà P (di R)

sse

$\forall F (F \models A$ sse $F \rhd P)$

A è valida in F

$T := \Box A \rightarrow A$ corrisponde a RIFLESSIVITÀ

$\forall F (F \models \Box A \rightarrow A$ sse $\forall w \in F \ (wRw))$

$\supset$ assumo $F \models \Box A \rightarrow A$ e mostro $\forall w \in F (wRw)$

$$\frac{\models^M_u \Box p \rightarrow p \qquad I \text{ t.c. } \models_u \Box p, \ I(p) = \{v \in W : uRv\}}{\models^M_u p}$$

quindi uRu

$\subset$ assumo $\forall w (wRw)$ e mostro $F \models \Box A \rightarrow A$

$\models_u \Box A$ mostro $\models_u A$

$\forall x \in W (uRx \supset \models_x A)$

$$\frac{uRu \supset \models_u A \qquad uRu}{\models_u A}$$

per contrapposizione

$\supset$ ASSUMO F NON riflessivo e MOSTRO $F \nvDash \Box A \to A$

ovvero $\exists x \exists M (\nvDash_x^M \Box p \to p)$

$\exists u (\neg uRu)$

$\vDash_x \Box p \quad \nvDash_x p$

$\neg (vRv) \quad I(p): \{z \in W, vRz\}$

per assurdo assumo $\forall w (wRw)$

$\subset \quad \vDash_u \Box A \quad \nvDash_u A$

w

$\Box A, \neg A \lightning A$

$D := \Box A \to \Diamond A$ corrisponde a SERIALITÀ

$\forall w \exists u (wRu)$

$F \vDash \Box A \to \Diamond A \longleftarrow$ sse

$\supset$ assumo $\vDash_w \Box p \to \Diamond p \quad I(p) = \{v \in W \text{ t.c. } wRv\}$

$$\frac{\vDash_w \Box p \to \Diamond p \qquad \vDash_w \Box p}{\vDash_w \Diamond p}$$

ovvero $\exists u \in W (wRu \text{ e } \vDash_u p)$

quindi $\exists u \in W (wRu)$

$\subset$ assumo $\forall w \exists u (wRu)$

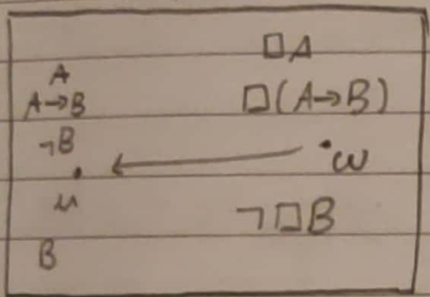
mostro $F \vDash_w \Box A \to \Diamond A$

assumo $\vDash_w \Box A$ e mostro $\vDash_w \Diamond A$

$\forall v \in W (wRv \supset \vDash_v A)$

quindi $\exists u \in W (wRu \text{ e } \vDash_u A)$

$K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$



$\not\models_w (\Box(A\to B) \cap \Box A) \to \Box B$

ES x CASA

4: $\Box A \to \Box\Box A$, $F \models 4$ sse $\forall x,y,z(xRy \text{ e } yRz \supset xRz)$

$\supset$ assumo $\models_w \Box p \to \Box\Box p$ $\quad I(p) = \{v \in W \mid wRv\}$

$$\frac{\models_w \Box p \to \Box\Box p \qquad \models_w \Box p}{\Box\Box p}$$

ovvero $\forall v \in W(wRv$ implica $\models_v \Box p)$

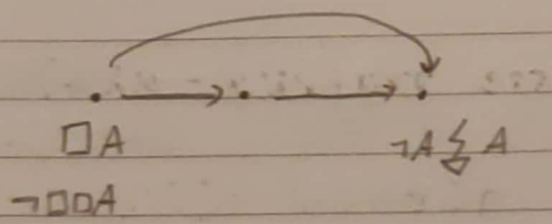
ovvero $\forall v \in W(wRv$ implica $\forall x \in W$ t.c. vRx implica $\models_x p)$

$\subset$ assumo $\forall x,y,z(xRy \text{ e } yRz \supset xRz)$

mostro $F \models_w \Box A \to \Box\Box A$. Assumo $\models_w \Box A$ e mostro $\models_w \Box\Box A$

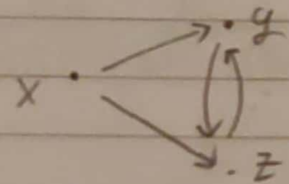
20/02/23

⊂ x ASSURDO

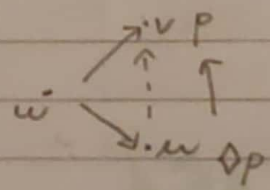


5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ prop. euclidea
B: $A \to \Box\Diamond A$ prop. simmetrica

5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xyz\ (xRy \text{ e } xRz \supset yRz)$



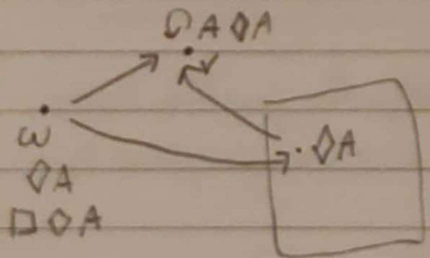
⊃ assumo $F \models \Diamond p \to \Box\Diamond p$



$\models_w \Diamond p$ $\quad I(p) = \{v\}$

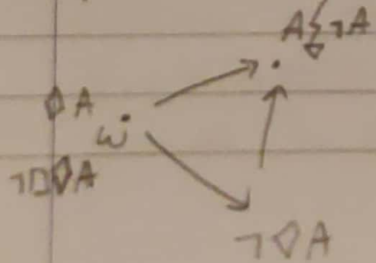
$\models_w \Box\Diamond p$ per MP

⊂ assumo $\forall xyz(xRy \text{ e } xRz \supset yRz)$ e mostro $\models \Diamond A \to \Box\Diamond A$
assumo $\models_w \Diamond A$



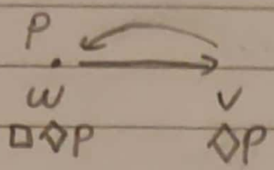
insieme di altri eventuali mondi visti da w

⊂ per ASSURDO. assumo $\models_w \Diamond A$ e $\not\models_w \Box\Diamond A$



B: $A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xy(xRy \supset yRx)$

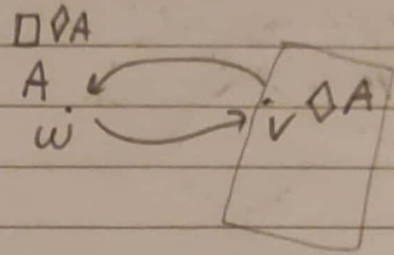
$\supset$ assumo $\vDash p \to \Box\Diamond p$



dato che p è vero solo in w

$I(p) = \{w\}$

$\subset$ assumo $\forall x,y(xRy \supset yRx)$
mostro $\vDash A \to \Box\Diamond A$



$\vDash_w A$ e mostro $\vDash_w \Box\Diamond A$

NOZIONI:

$\Box^n A$ $\qquad \Box^0 A \equiv A \; , \; \Box^{n+1} A \equiv \Box(\Box^n A)$

$wR^n v$ $\qquad wR^0 v$ sse $w = v$

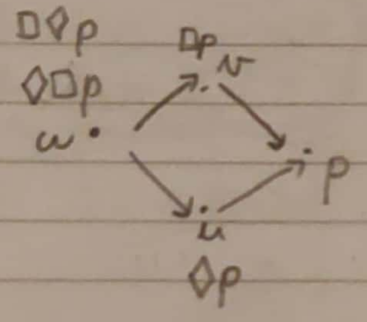
$wR^{n+1} v$ sse $\exists x(wR^n x$ e $xRv)$

idem per $\Diamond^n A$

CONVERGENZA DEBOLE

2: $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xyz(xRy \text{ e } xRz \supset \exists t(yRt \text{ e } zRt))$

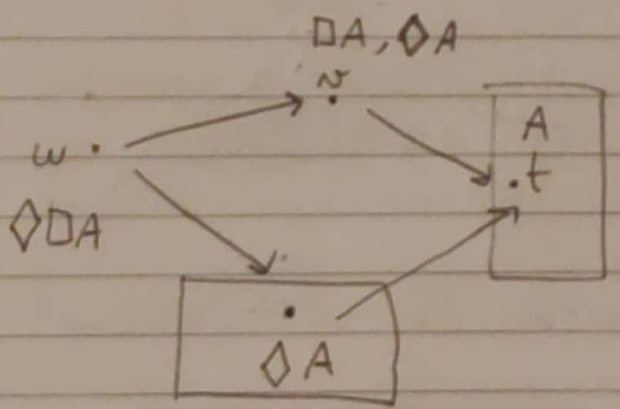
$\supset$ assumo
$$\frac{\models_w \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \qquad \models_w \Diamond\Box p}{\models_w \Box\Diamond p}$$



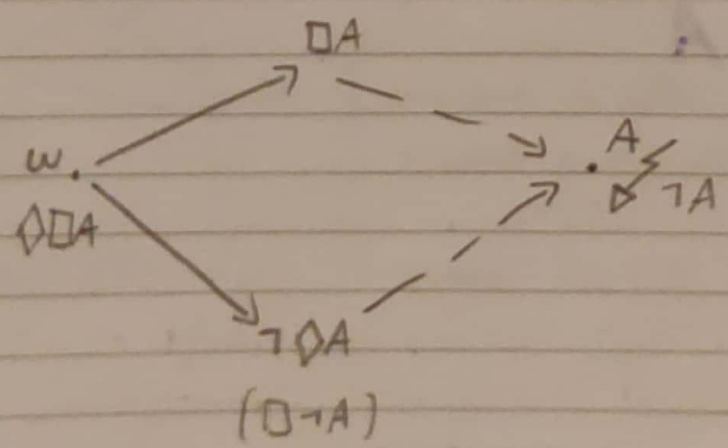
$I(p) = \{x \in W \mid vRx\}$

dato che p è vero solo in ciò che vede v

$\subset$ assumo $\models_w \Diamond\Box A$ mostro $\Box\Diamond A$



$\subset$ per ASSURDO $\models_w \Diamond\Box A$, $\not\models_w \Box\Diamond A$

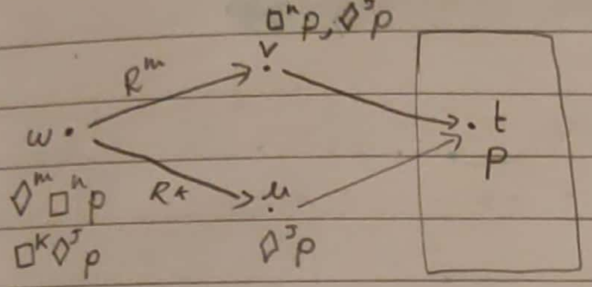


22/02/23

Lemmon

$F \models \Diamond^m \Box^n A \to \Box^k \Diamond^J A$ sse $\forall xyz(xR^m y$ e $xR^k z \supset \exists t(yR^n t$ e $zR^J t))$

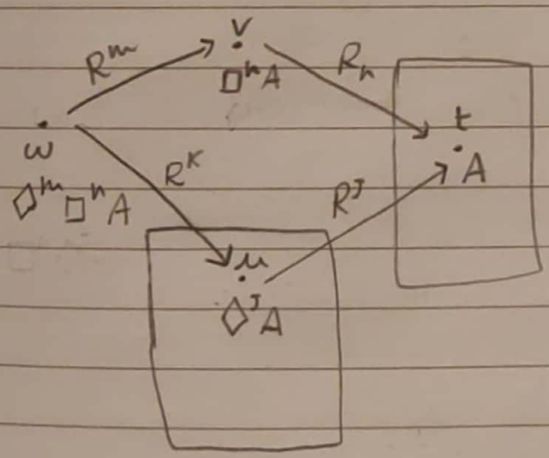
$\supset$ assumo $\models_w \Diamond^m \Box^n p \to \Box^k \Diamond^J p$ e mostro



$I(p) = \{z \in W \mid vR^n z\}$

$\subset$ assumo $\forall x,y,z(xR^m y$ e $xR^k z \supset \exists t(yR^n t$ e $zR^J t))$
e mostro

$\models_w \Diamond^m \Box^n A \to \Box^k \Diamond^J A$, assumo $\models_w \Diamond^m \Box^n A$



Possiamo usare Lemmon per dimostrare un sacco di robe:

T: $\Box A \to A \equiv \Diamond^0 \Box^1 A \to \Box^0 \Diamond^0 A$

4: $\Box A \to \Box\Box A \equiv \Diamond^0 \Box^1 A \to \Box^2 \Diamond^0 A$

$\forall wvu(wR^0 v$ e $wR^1 u \supset \exists t(vR^0 t$ e $uR^0 t))$ ovvero
$\forall wvu(w = v$ e $wRu \supset \exists t(v = t$ e $u = t))$ ovvero
$\forall w(wRw)$ dato che $w = v = t = u$ FIGO!

23/02/23

Sottomodelli generati

[wR^*v sse $\exists n (wR^n v)$ con $n \in \mathbb{N}^+$ (stella di Kleene)]

Dato $M = \langle W, R, I \rangle$, il sottomodello generato da $x \in W$

$$M^x = \langle W^x, R^x, I^x \rangle \quad \text{dove} \quad W^x = \{y \mid xR^*y\}$$

$$R^x = R \cap (W^x \times W^x)$$

$$I^x(p) = I(p) \cap W^x$$

Lemma sottomodello generato

$\forall M, \forall x \in W^{y \in W}, \forall A \in Fm^{\Phi}$ $\models^M_x A$ sse $\models^{M^y}_x A$

DIMOSTRAZIONE per INDUZIONE sulla struttura di A

- Sia $A \equiv p$ mostro $\models^M_x p$ sse $\models^{M^y}_x p$

$$\begin{array}{ccc} \models^M_x p & \text{sse} & \models^{M^y}_x p \\ \text{sse} & & \text{sse} \\ x \in I(p) & \text{sse} & x \in I^y(p) \end{array}$$

- Sia $A \equiv \bot$ mostro $\not\models^M_x \bot$ sse $\not\models^{M^y}_x \bot$

- Sia $A \equiv B \cap C$ mostro $\models^M_x B \wedge C$ sse $\models^{M^y}_x B \wedge C$

suppongo

$$\begin{array}{ccc} \models^M_x B \wedge C & \text{sse} & \models^{M^y}_x B \wedge C \\ \text{sse} & & \text{sse} \\ \models^M_x B & \overset{IH}{\text{sse}} & \models^{M^y}_x B \\ \text{e} & & \text{e} \\ \models^M_x C & \overset{IH}{\text{sse}} & \models^{M^y}_x C \end{array}$$

• Sia $A \equiv B \cup C$ mostro $\models^M_x B \cup C$ sse $\models^{My}_x B \cup C$

assumo

$$\begin{array}{ccc} \models^M_x B \cup C & \text{sse} & \models^{My}_x B \cup C \\ \text{sse} & & \text{sse} \\ \models^M_x B & \overset{IH}{\text{sse}} & \models_x B \\ \varnothing & & \varnothing \\ \models^M_x C & \overset{IH}{\text{sse}} & \models_x C \end{array}$$

• Sia $A \equiv B \to C$ mostro $\models^M_x B \to C$ sse $\models^{My}_x B \to C$

assumo

$$\begin{array}{ccc} \models^M_x B \to C & \text{sse} & \models^{My}_x B \to C \\ \text{sse} & & \text{sse} \\ \not\models^M_x B & \overset{IH}{\text{sse}} & \not\models^{My}_x B \\ \varnothing & & \varnothing \\ \models^M_x C & \overset{IH}{\text{sse}} & \models^M_x C \end{array}$$

• Sia $A \equiv \neg B$ mostro $\models^M_x \neg B$ sse $\models^{My}_x \neg B$

$$\begin{array}{ccc} \text{sse} & & \text{sse} \\ \not\models^M_x B & \overset{IH}{\text{sse}} & \not\models^{My}_x B \end{array}$$

• Sia $A \equiv \Box B$ assumo $\forall z \in W^y \models^M_z B$ sse $\models^{My}_z B$

d.d. $\models^M_x \Box B$ sse $\models^{My}_x \Box B$

$(\forall z \in W(xRz \supset \models^M_z B))$ sse $(\forall z \in W^y(xRz \supset \models^{My}_x A))$

$\supset$ sia $z \in W^y$ t.c. xRz d.d. $\models^{My}_z B$

Visto che xRz, allora $\models^M_z B$. Quindi per IH $\models^{My}_z B$

$\subset$ sia $z \in W$ t.c. xRz d.d. $\models^M_z B$. Visto che xRz, quindi xR^*z.

Quindi, $z \in W^y$. Quindi dato che xR^yz (per ipotesi) e $\models^M_z B$.

Quindi per IH $\models^{My}_z B$

Scansionato con CamScanner

• Sia $A \equiv \Diamond B$ $\forall z \in W \left(\models_z^M B \text{ sse } \models_z^{M^y} B \right)$ (IH)

d.d.

$$\models_x^M \Diamond B \text{ sse } \models_x^{M^y} \Diamond B$$

$\supset$ assumo $\models_x^M \Diamond B$ ovvero $\exists w \in W (xRw \text{ e } \models_w^M B)$

mostro $\models_x^{M^y} \Diamond B$

so che $w \in W^y$ e $\models_w^M B$

per IH ho $\models_w^{M^y} B$

$\subset$ assumo $\models_x^{M^y} \Diamond$ sse $\exists t \in W^y (\underbrace{xR^y t}$ e $\underbrace{\models_t^{M^y} B}_{\downarrow IH})$

$$\exists t \in W (xRt \text{ e } \models_t^M B)$$

sse

$$\models_x^M \Diamond B$$

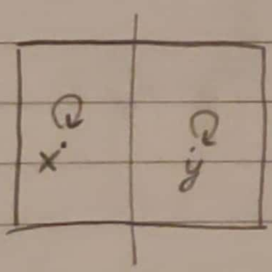
TR CONVERGENZA NON É ESPRIMIBILE

$\forall x,y \exists z (xRz \text{ e } yRz)$ $\nexists$ formula modale per esprimerla

DIM X ASSURDO

$\nexists A \in Fm$ t.c. $\forall F (F \models A$ sse F è convergente)

assumo $\exists A$ corrisponde a CONV

$F =$ 

$F \not\models A$ quindi ho 2 casi

$\exists M^x \not\models_x^{M^x} A$

$\exists M^y \not\models_y^{M^y} A$

ma dimostriamo che entrambi i casi creano una contraddizione

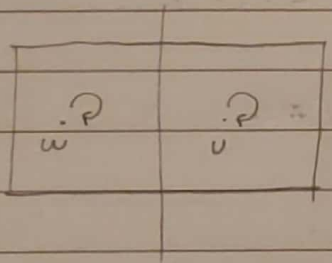
$\not\models^{M}_{x} A$ sse $\not\models^{M^x}_{x} A$ ↯ assurdo

$F^x \models A \rightarrow \models^{M^x}_{x} A$ ← così per entrambi i punti

TR CONNESSIONE NON È ESPRIMIBILE

$\forall w,v\ (wRv$ o vRw o $w=v)$ dim. x assurdo

$\nexists A \in Fm$ t.c. $\forall F\,(F \models A$ sse F è convergente$)$

$F =$  $F \not\models A$

$\not\models^{M}_{w} A$ sse $\not\models^{M^w}_{w} A$ ↯ ASSURDO

$F^w \models A \rightarrow \models^{M^w}_{w} A$

27/02/23

P-MORFISMO tra STRUTTURE

$F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ $\quad\quad$ $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$

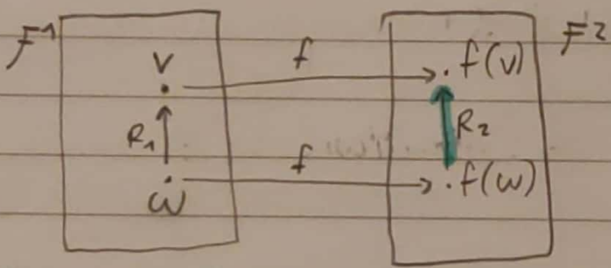
è una funzione $f: W_1 \to W_2$

$\forall x \in W_1 \exists! y \in W_2, \langle x, y \rangle$

Condizioni per P-Morfismo

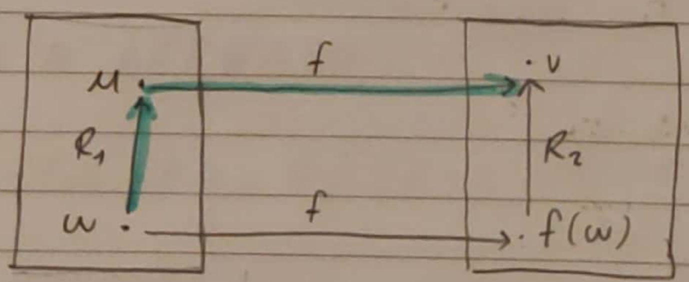
① FORTH CONDITION

$\forall w, v \in W_1 (wRv \supset f(w) R_2 f(v))$



② BACK CONDITION

$\forall w \in W_1, \forall v \in W_2 (f(w) R_2 v \supset \exists u \in W_1 (wR_1u \text{ e } f(u) = v))$



P-MORFISMO TRA MODELLI

M_1 $\qquad\qquad$ M_2

$f: W_1 \to W_2$ soddisfa prime 2 condizioni e in più

3 $\forall w \in W_1 (w \in I_1(p)$ sse $f(w) \in I_2(p))$

LEMMA Dato f P-MORFISMO tra M_1 e M_2

$$\forall x \in W_1 \left(\models_x^{M_1} A \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} A \right)$$

Dimostriamo per induzione strutturale su A.

- se $A \equiv p$: OVVIO per 3
- se $A \equiv \bot$: OVVIO (il $\bot$ è falso ovunque)
- se $A \equiv B \wedge C$: d.d. $\models_x^{M_1} B \wedge C$ sse $\models_{f(x)}^{M_2} B \wedge C$

per IH so $\begin{cases} \models_x^{M_1} B \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} B \\ \models_x^{M_1} C \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} C \end{cases}$

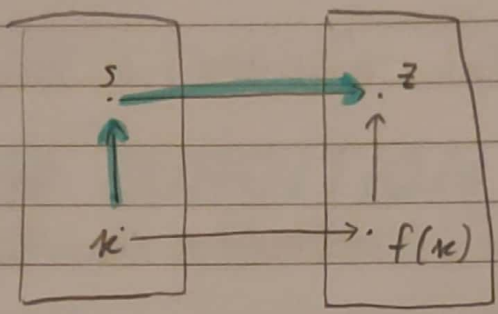
$\models_x^{M_1} B \wedge C$ sse $\left\{ \begin{array}{l} \models_x^{M_1} B \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} B \\ \qquad\quad IH \\ \models_x^{M_1} C \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} C \end{array} \right\}$ sse $\models_{f(x)}^{M_2} B \wedge C$

idem per disgiunzione e implicazione

• se $A \equiv \Box B$

$\supset$ assumo* $\models_x^{M_1} \Box B$ sse $\forall y \in W_1 \, (x R_1 y \supset \models_y^{M_1} B)$

d.d. $\models_{f(x)}^{M_2} \Box B$, ovvero $\forall z \in W_2 (f(x) R_2 z \supset \models_z^{M_2} B)$



grazie a BACK CONDITION

so che $\models_s^{M_1} B \overset{IH}{\text{sse}} \models_{f(s)}^{M_2} B$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad z$

modo alternativo

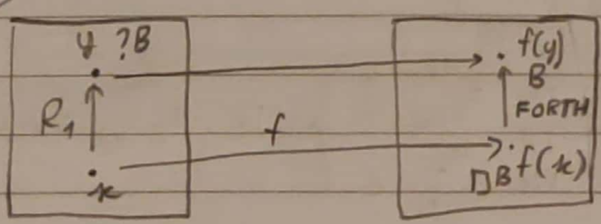
$\supset$ d.d. $\models_{f(x)}^{M_2} \Box B$ sse $\forall z \in W_2 (f(x) R_2 z \supset \models_z^{M_2} B)$

per BC e assunzione * lo dimostro

creo freccia

so che $\Box B$ é vero in x

$\subset$ assumo $\models_{f(x)}^{M2} \Box B$, d.d. $\models_x^{M_1} \Box B$ ovvero $\forall y \in W_1 (x R y \supset \models_y^{M_1} B)$

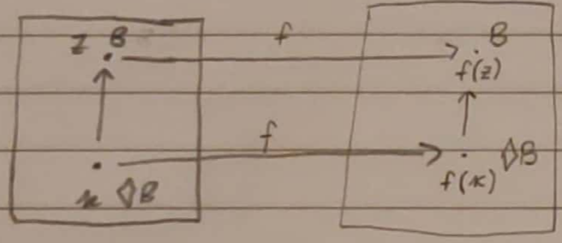


sse $\forall z \in W_2 (f(x) R_2 z \supset \models_z^{M_2} B)$

- se $A \equiv \Diamond B$

$\supset$ assumo $\models_x^{M_1} \Diamond B$ sse $\exists z \in W (x R_1 z$ e $\models_z^{M_1} B)$

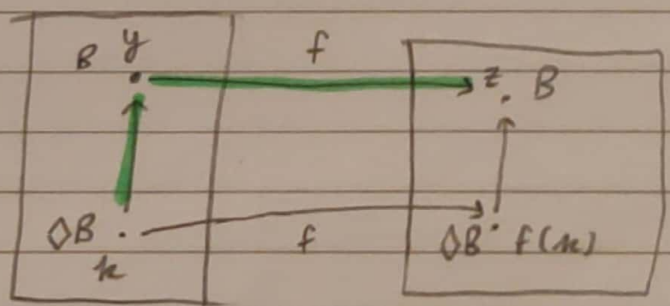
mostro $\models_{f(x)}^{M_2} \Diamond B$



per assunzione ho la freccia da x a z. per Forth Condition ho le altre 3 frecce. per IH ho $\models_{f(z)}^{M_2} B$ quindi ho $\models_{f(x)}^{M_2} \Diamond B$ fine

$\subset$ assumo $\models_{f(x)}^{M_2} \Diamond B$ sse $\exists z \in W (x R_2 z$ e $\models_z^{M_2} B)$

mostro $\models_x^{M_1} \Diamond B$



per BC

per IH so che $\models_y^{M_1} B$ dato che $z = f(y)$ e $\models_z^{M_2} B$

quindi sapendo $x R_1 y$ so che $\models_x^{M_1} \Diamond B$

01/03/23

RIPASSO FUNZIONI

$f: D \to C$ INIETTIVA se $\forall d_1, d_2 \in D \; d_1 \neq d_2 \supset f(d_1) \neq f(d_2)$

SURIETTIVA se $\forall c \in C \; \exists d \in D$ t.c. $f(d) = c$

applicata ai p-morfismi:

$f: W_1 \to W_2$ se è suriettiva

$\forall x \in W_2 \; \exists y \in W_1 \; (x = f(y))$

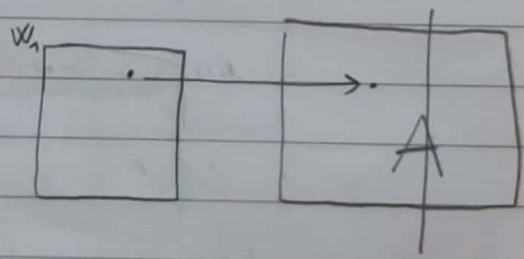
Lemma P-MORF. SURIET. tra MODELLI

Se $f: W_1 \to W_2$ è p-morfismo suriettivo

ALLORA $\models^{M_1} A$ sse $\models^{M_2} A$

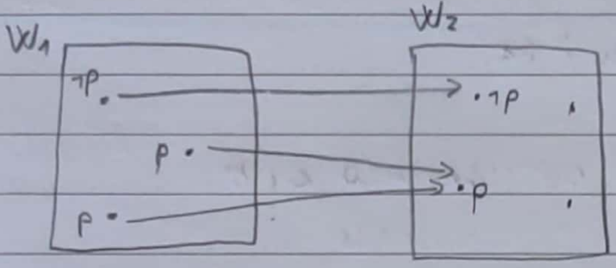
DIM $\models^{M_1} A \quad \forall x \in W_1 (\models_x^{M_1} A) \quad \forall z \in W_1 (\models_z^{M_1} A$ sse $\models_{f(z)}^{M_2} A)$

$W_2 = f(W_1) \quad \forall u \in W_2 (\models_u^{M_2} A)$



Lemma Dato f p-morfismo tra strutture F_1 e F_2

$\exists$ p-morfismo tra modelli per ciascun F_2-modello



(qui NON serve suriettività)

$I_1(p) = \{x \in W_1 : f(x) \in I_2(p)\}$

Lemma P-MORFISMO SURIET. tra STRUTT.

Dato f p-morfismo suriettivo tra strutture F_1 e F_2

se $F_1 \models A$ allora $F_2 \models A$

DIM $\times$ contrapposizione

assumo $F_2 \not\models A$, quindi $\exists M_2 \in F_2 \, (\not\models^{M_2} A) \Rightarrow \exists x \in W_2 \, (\not\models^{M_2}_x A)$
quindi per il lemma precedente

$\exists M_1 \in F_1 \, (\not\models^{M_1} A)$ dato che è suriettivo so che $x = f(y)$ per qualche $y \in W_1$

quindi $\not\models^{M_1}_y A$

RICORDA:
$f: F_1 \to F_2$ è P-MORF. SUR. allora $F_1 \models A \supset F_2 \models A$

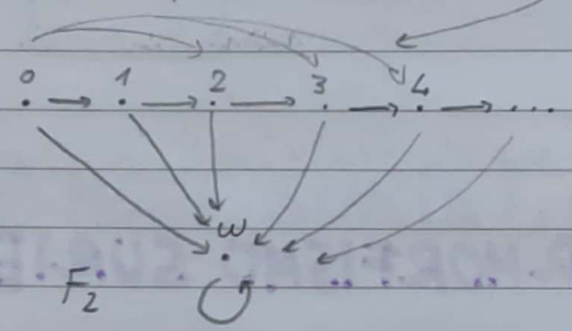
TR. IRRIFLESSIVITÀ è INESPRIMIBILE

$\forall w \neg(wRw)$ (*)

per ASSURDO
assumo che A corrisponda a (*)

ci sarebbero anche queste frecce transitive, MA non ci interessano

$F_1 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$



f è P-MORFISMO
$f(n) = w \ \forall n \in \mathbb{N}$

per ogni n, k t.c. $n<k$ $f(n) R f(k)$, vero $\forall n,k$ perché wRw

d.d. $\exists y \in W_1$ xRy e $w = f(y)$ (BACK CONDITION)

p-morfismo è suriettivo perché F_2 ha solo 1 mondo

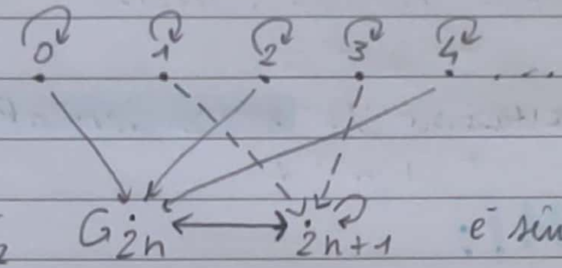
$$\frac{F_1 \models A}{F_2 \models A \ \lightning \ F_2 \not\models A}$$ per lemma P-M suriett. tra strutture

dato che wRw

$\forall w, v\, (wRv \text{ e } vRw \supset w = v)$ (†)

TR. ANTISIMMETRIA NON È ESPRIMIBILE

$F_1 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$



F_2 è simmetrica

assumo che A corrisponda a (†), $\dfrac{F_1 \models A}{F_2 \models A}$ ↯ $F_2 \not\models A$

CONCLUSA PARTE SULLA SEMANTICA

02/03/23

CALCOLO ASSIOMATICO

Unica regola: MODUS PONENS $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$

Assiomatizzeremo la logica modale K

ASSIOMI:

- TAUT : tutte le tautologie
- K : $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
- Def. $\Diamond$: $\Diamond A \longleftrightarrow \neg \Box \neg A$

REGOLE:

- necessitazione: $\dfrac{\emptyset \vdash A}{\emptyset \vdash \Box A}$ N
- modus ponens: $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$ MP

Introduciamo cos'è una derivazione

Def DERIVAZIONE

Una derivazione in L di A a partire da Γ ($\Gamma \vdash A$) è una successione FINITA di formule $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ t.c.:

$$\alpha_i \begin{cases} \bullet \text{ è assioma di } L \\ \bullet \in \Gamma \text{ (ipotesi)} \\ \bullet \text{ è ottenuto da } \alpha_j \text{ (e } \alpha_k) \\ \quad \text{per } j, k < i \text{ attraverso regole di } L \end{cases}$$

$\alpha_n = A$

Def ($\vdash_L A$)

diciamo che A è un teorema se A è derivabile da $\emptyset$ ($\emptyset \vdash_L A$, ovvero dimostrazione di A)

I teoremi fondamentali sono VALIDITÀ e COMPLETEZZA

$$\Gamma \models_k A \text{ sse } \Gamma \vdash A$$

VALIDITÀ

$\longrightarrow$

COMPLETEZZA

$\longleftarrow$

es. DERIVAZIONE $\vdash_K \Box\top$ $(\vdash \Box(\bot \to \bot))$

$$\frac{\vdash \bot \to \bot}{\vdash \Box(\bot \to \bot)}\,N$$

ripasso:

K := $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

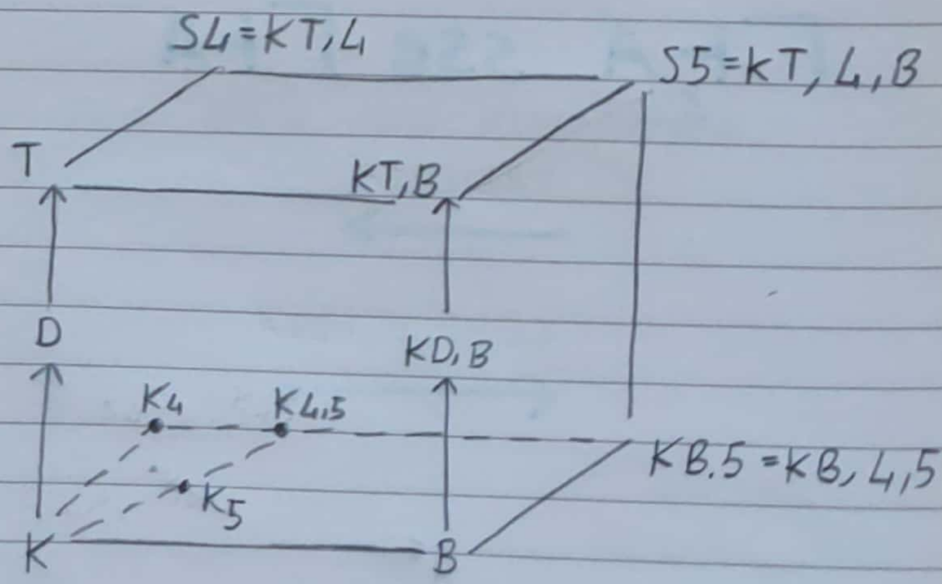
D := $\Box A \to \Diamond A$ (logica D: logica K + assioma D)

T := $\Box A \to A$

4 := $\Box A \to \Box\Box A$

5 := $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

B := $A \to \Box\Diamond A$



CUBO DELLE LOGICHE ASSIOMATIZZABILI CON D, T, 4, 5, B

08/03/23

TEORIA DELLA DIMOSTRAZIONE

CALCOLI PER LA LOGICA PROPOSIZIONALE

LK sequente: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ Γ, Δ sequenze di calcoli

ASSIOMI $A \Rightarrow A$ (unico assioma)

REGOLE

- $\dfrac{}{\bot \Rightarrow}\ L\bot$ left bottom, regola a zero premesse

- $\dfrac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_1 \wedge A_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\wedge_{i\in\{1,2\}}$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \wedge B}\ R\wedge$

- $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Pi \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ L\vee$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_1 \vee A_2}\ R\vee_{i\in\{1,2\}}$

- $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ L\to$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ R\to$

REGOLE STRUTTURALI

- $\dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}\ LP$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ RP$ permutazione

MA usiamo **MULTINSIEMI** anziché liste
↳ non è pedante ed è più comodo

in questo esempio, A_i è la FORMULA ATTIVA
Γ è il CONTESTO
$A_1 \wedge A_2$ è la FORMULA PRINCIPALE

virgola a SX : CONGIUNZIONE

virgola a DX : DISGIUNZIONE

- **INDEBOLIMENTO (WEAKENING)**

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} LW \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} RW$$

- **CONTRAZIONE (CONTRACTION)** serve perché usiamo multiinsiemi

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} LC \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} RC$$

esempio:

dimostrazione bottom-up

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A} LW}{A \Rightarrow A \to A} R\to}{\Rightarrow A \to (A \to A)} R\to$$

- **CESURA/TAGLIO (CUT)** teorema principale

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} cut$$

$\Gamma \vdash_{NK} A$ sse $\vdash_{LK} \Gamma \Rightarrow A$

$$\frac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Delta \\ \vdots & \vdots \\ A & B\end{array}}{A \wedge B} \qquad \frac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ A \wedge B\end{array}}{A}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B} \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow A}$$

CALCOLO LJ (LOGICA INTUIZIONISTA)

Uguale al calcolo LK ma con il vincolo che il succedente contiene o 0 o 1 formula

CALCOLO G3

Assorbiamo weakening e contrazione nelle regole logiche

ASSIOMI AGGIUNTI: $p, \Gamma \Rightarrow \Delta, p$ (con questo eliminiamo weak.)

per eliminare la contrazione riscriviamo:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow A, B}{\Gamma \Rightarrow A, A \wedge B} R\wedge$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\vee \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} R\vee$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\to \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B} R\to$$

⇨ TUTTE LE REGOLE SONO INVERTIBILI

20/03/2023

G3C

- $\boxed{\vdash_{G3C} \Gamma \Rightarrow \Delta}$ sse $\exists$ albero di sequenti t.c.
  1. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è la radice (parte più in basso)
  2. le foglie sono sequenti iniziali o istanze di L⊥
  3. l'albero cresce secondo le regole di G3C

- $h(D)$ = altezza (o profondità) della derivazione
  = numero nodi di 1 dei rami più lunghi di D

- Formula principale = occorre nella conclusione
  " attive = occorrono nella premessa
  Contesti = multiinsiemi delle formule che vengono copiate da premessa a conclusione

Def. Una regola $\dfrac{S_1 \dots S_n}{S}$ R è AMMISSIBILE in G3C sse

se $\vdash_{G3C} S_1 \dots \vdash_{G3C} S_n$ allora $\vdash_{G3C} S$

- $\vdash^{n}_{G3C} \Gamma \Rightarrow \Delta$ sse $\exists$ derivazione D t.c. $h(D) \leq n$ del seq. $\Gamma \Rightarrow \Delta$

Def. $\dfrac{S_1 \dots S_n}{S}$ R è AMMISSIBILE PRESERVANDO la PROFONDITÀ ovvero PP-AMMISSIBILE sse

se $\vdash^{n} S_1 \dots \vdash^{n} S_k$ allora $\vdash^{n} S$

↳ va bene anche se h(D) diminuisce, basta che non cresca

TR. le regole $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ LW e $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ RW sono PP-AMMISSIBILI

DIM. per induzione su $h(D)$ dove $\dfrac{D}{\Gamma \Rightarrow \Delta} R$

- CASO BASE $h(D)=1$, ovvero albero fatto da 1 solo nodo

$$\begin{cases} \vdash^1 p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', p \\ \vdash^1 A, p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', p \end{cases} \qquad \begin{cases} \vdash^1 \bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \\ \vdash^1 A, \bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \end{cases}$$

- CASI INDUTTIVI $h(D) = K+1$

IH = teorema vale $\forall D' (h(D') \leq K)$

$$\vdash^{K+1} \dfrac{\vdash^K B, C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{B \wedge C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} L\wedge \qquad \text{per IH } \exists D \text{ di } \dfrac{A, B, C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A, B \wedge C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} \text{ con } h=K$$

$$\dfrac{\Gamma' \Rightarrow \Delta', B \qquad \Gamma' \Rightarrow \Delta', C}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', B \wedge C} R\wedge \qquad \dfrac{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta', B \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta', C}{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta', B \wedge C}$$

LEMMA

$L\neg$ e $R\neg$ sono AMMISSIBILI

$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ (derivabile)

$\vdash A \to \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \dfrac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\bot}{A \to \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\to$$

$\vdash A, \Gamma \Rightarrow \Delta$

$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to \bot$

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot} RW}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to \bot} R\to$$

22/03/2023

es. $\vdash^n A \cap B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ allora $\vdash^n A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (invertibilità)

TR. le regole $\dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ LC e $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ RC

sono PP-AMMISSIBILI

Dimostrazione per induz simultanea su h(D)

CASO BASE: $h(D) = 1$

$A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ è iniziale

$\left.\begin{array}{l} p, p, \Gamma \Rightarrow \Delta', p \\ A, A, \Gamma', p \Rightarrow \Delta', p \end{array}\right\}$ applicando contraz. ottengo ancora sequenti iniziali

CASO $h(D) = K+1$ per IH so che LC e RC sono PP-AMMISSIBILI su derivazioni di profondità $\leq K$

$\dfrac{}{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta} R$

1. A è principale in R
2. A NON è principale in R

(2) $\dfrac{\vdash_k A, A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad (\vdash_k A, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2)}{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta} R$ $\xrightarrow{IH}$ $\dfrac{\vdash_k A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad (\vdash_k A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2)}{\vdash_{k+1} A, \Gamma \Rightarrow \Delta} R$

(1) $A = B \cap C$
$A = B \cup C$
$A = B \to C$

$\dfrac{\vdash_k B, C, B \wedge C, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash_{k+1} B \wedge C, B \wedge C, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\wedge$ $\xrightarrow{PP-INV}$ $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash_k B, C, B, C, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash_k B, C, C, \Gamma \Rightarrow \Delta} IH}{\vdash_k B, C, \Gamma \Rightarrow \Delta} IH}{B \wedge C, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\wedge$

$$\vdash^k B\vee C,\Gamma \Rightarrow \begin{cases}\vdash B,\Gamma\Rightarrow\Delta\\ \vdash C,\Gamma\Rightarrow\Delta\end{cases}$$

$$\vdash^k \dfrac{B,B\vee C,\Gamma\Rightarrow\Delta \qquad C,B\vee C,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\vdash^{k+1} B\vee C, B\vee C,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

PP-INV PP-INV

$$\dfrac{\dfrac{\vdash^k B,B,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\vdash^k B,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,IH \qquad \dfrac{\vdash^k C,C,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\vdash^k C,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,IH}{\vdash^{k+1} B\vee C,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,L\vee$$

$$\vdash^k \dfrac{B\to C,\Gamma\Rightarrow\Delta,B \qquad C,B\to C,\Gamma\Rightarrow\Delta}{B\to C,\underline{B\to C},\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

PP-INV

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\to C,\Gamma\Rightarrow\Delta,B}{\vdash^k \Gamma\Rightarrow\Delta,B,B}\,PP\text{-}INV}{\vdash^k \Gamma\Rightarrow\Delta,B}\,IH \qquad \dfrac{\vdash^k C,C,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\vdash^k C,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,IH}{\vdash^{k+1} B\to C,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,L\to$$

Scansionato con CamScanner

23/03/2023

ELIMINAZIONE di CUT

TR. la regola del taglio

$$\frac{\overbrace{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}^{D_1} \quad \overbrace{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}^{D_2}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ \text{CUT}$$

è DERIVABILE

Dim. per induz. lessicografica su $\langle \ell(A), \text{profondità del taglio} \rangle$

lunghezza di A = num. connettivi

profondità del taglio $= h(D_1) + h(D_2)$

3 CASI:

1. D_1 o D_2 ha profondità 1
2. A non è principale in almeno 1 premessa (D_1 e/o D_2)
3. A è principale in entrambe le premesse

(1) ipotizziamo $h(D_1) = 1$

1) $p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', p, A$
2) $p, \Gamma' \Rightarrow \Delta, p$
3) $\bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A$

1) $$\frac{p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', p, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{p, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, p}$$

è 1 sequente iniziale perché c'è un atomo da entrambi le parti

2) $$\frac{p, \Gamma' \Rightarrow \Delta, p \qquad p, \Pi \Rightarrow \Sigma}{p, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \frac{p, \Pi \Rightarrow \Sigma}{p, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ \text{LW e RW}$$

indebolendo la premessa di destra ottengo la stessa conclus.

3) $$\frac{\bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\bot, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \frac{}{\bot, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ L\bot$$

ipotizziamo $h(D_2)=1$

$$\dfrac{\dfrac{D_1}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\bot} \qquad \dfrac{}{\bot,\Pi\Rightarrow\Sigma}\,L\bot}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}$$

per questo caso dobbiamo usare un piccolo lemma:

Lemma: $\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\bot}{\Gamma\Rightarrow\Delta}\,R\bot$ è ammissibile (anche PP)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\bot}{\Gamma\Rightarrow\Delta}\,R\bot}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}\,LW \text{ e } RW$$

② A non è principale in D_1 o D_2. Ipotizziamo non lo sia in D_1

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\Gamma'\Rightarrow\Delta',A}^{D_{11}} \qquad \overbrace{\Gamma''\Rightarrow\Delta'',A}^{D_{12}}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A}\,R \qquad \overbrace{A,\Pi\Rightarrow\Sigma}^{D_2}}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}$$

$\rightsquigarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma'\Rightarrow\Delta',A} \qquad \overset{D_2}{A,\Pi\Rightarrow\Sigma}}{\Gamma',\Pi\Rightarrow\Delta',\Sigma}\,IH_2 \qquad \dfrac{\overset{D_{12}}{\Gamma''\Rightarrow\Delta'',A} \qquad \overset{D_2}{A,\Pi\Rightarrow\Sigma}}{\Gamma'',\Pi\Rightarrow\Delta'',\Sigma}}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}\,R$$

3 A è principale in D_1 e D_2.

$A \equiv B \wedge C$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma \Rightarrow A, B} \qquad \overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B \wedge C}\,R\wedge \qquad \dfrac{\overset{D_{21}}{B, C, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{B \wedge C, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,L\wedge}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C} \qquad \dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B} \qquad \overset{D_{2}}{B, C, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{C, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,IH_1}{\Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma}\,IH_1}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,LC \text{ e } RC$$

$A \equiv B \vee C$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, C}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B \vee C}\,R\vee \qquad \dfrac{\Pi, B \Rightarrow \Sigma \qquad C, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Pi, B \vee C \Rightarrow \Sigma}\,L\vee}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, C \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta, C}\,IH1 \qquad C, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Sigma, \Delta}\,IH}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta}\,LC \text{ e } RC$$

$A \equiv B \to C$

$$\dfrac{\dfrac{B,\Gamma \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B \to C}\,R\!\to \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, B \qquad C,\Pi \Rightarrow \Sigma}{B \to C, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,L\!\to}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, B \qquad B,\Gamma \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Sigma, C}\,IH_1 \qquad C,\Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma,\Pi,\Pi \Rightarrow \Delta,\Sigma,\Sigma}\,IH_1}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Sigma}\,LC \text{ e } RC$$

27/03/2023

CALCOLI ALLA GENTZEN x LE LOGICHE MODALI

G3.Kg G3.C + $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Box A}$ LR$\Box$ $\Box\Gamma = \{\Box A : A \in \Gamma\}$

essendo in G3C, ogni istanza di una tautologia è derivabile.

$\left(\vdash_K A \text{ sse } \models A\right)$ sse G3.Kg $\vdash \Rightarrow A$

$$\dfrac{\Box(A \to B), \Box A \Rightarrow \Box B}{\Rightarrow \Box(A,B) \to (\Box A \to \Box B)}$$

KD $\dfrac{\Gamma \Rightarrow}{\Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma}$ LD **KT** $\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box A \Rightarrow \Delta}$ LT

S5 calcolo NON cut-free, ovvero il CUT NON è eliminabile:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\neg p \Rightarrow \Box\neg p}{\Rightarrow \neg\Box\neg p, \Box\neg p}\,R\neg}{\Rightarrow \Box\neg\Box\neg p, \Box\neg p}\,45 \qquad \dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{\neg p, p \Rightarrow}\,LT}{\Box\neg p, p \Rightarrow}\,LT}{\dfrac{p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p}{\Rightarrow p \to \Box\neg\Box\neg p}\,R\to}\,cut$$

$\dfrac{\Gamma^{\Box} \Rightarrow A, \Delta^{\Box}}{\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta}$ 45 (+LT+CUT) = ottengo calcolo completo per S5

$\dfrac{\Box\Pi_1 \Rightarrow A, \Box\Sigma_1}{\Box\Pi_1, \Pi_2 \Rightarrow \Box A, \Box\Sigma_1, \Sigma_2}$ stessa regola

① CALCOLI INTERNI

Ogni sequente può essere interpretato come una formula

G3.C $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ sse $C \vdash \wedge\Gamma \rightarrow \vee\Delta$

GH.L

$\vdash \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 | \dots | \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ ipersequente, multins. di sequenti

sse

$L \vdash \Lambda\Gamma_1 \rightarrow \vee\Delta_1 \vee \Box(\wedge\Gamma_2 \rightarrow \vee\Delta_2) \vee \dots \vee \Box(\wedge\Gamma_n \rightarrow \vee\Delta_n)$

② CALCOLI ESTERNI

CALCOLI ETICHETTATI

SINTASSI: - insieme numerabile di etichette $w, v, u, \dots$

- predicato binario R

FORMULE: - atomi relazionali wRv

- formule etichettate $w:A$ dove $A \in Fm_\Box$

SEQUENTE: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ dove Γ è 1 multins. di atomi relaz. e formule etichettate e Δ è un multinsieme di form. etichettate

AND

$$\frac{w:A, w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w:A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \wedge B}\, R\wedge$$

$\vDash_w A \wedge B$ allora $\vDash_w A$ e $\vDash_w B$

OR

$$\frac{w:A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w:A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\vee \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A, w:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \vee B}\, R\vee$$

IMPLIC.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \quad w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w:A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\rightarrow \qquad \frac{w:A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \rightarrow B}\, R\rightarrow$$

$$\overline{w:\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\bot$$

$w:p, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:p$

sequenti iniziali

BOX

$\vDash_w \Box A$ sse $\forall v (wRv \supset \vDash_v A)$

$$\frac{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\Box \qquad \frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box A}\, R\Box \text{ con } u \notin \{\Gamma, \Delta, w\}$$

29/03/2023

$$\frac{wRu,\ u{:}A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{w{:}\Diamond A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\Diamond$$

$\forall v,w$ se $w{:}\Box A$ e wRv allora $v{:}A$

$$\frac{v{:}A,\ wRv,\ w{:}\Box A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv,\ w{:}\Box A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\Box \qquad \frac{wRu,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ u{:}A}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ w{:}\Box A}\ R\Box,\ u \notin \{\Gamma,\Delta,w\}$$

$$\frac{wRv,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ w{:}\Diamond A,\ v{:}A}{wRv,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ w{:}\Diamond A}\ R\Diamond$$

G3.K

$\vDash A$ allora in G3.K $\vdash \Rightarrow w{:}A$

esempio:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{wRv, v{:}A \Rightarrow v{:}B, v{:}A \qquad wRv, v{:}B, v{:}A \Rightarrow v{:}B}{wRv,\ v{:}A\to B,\ v{:}A \Rightarrow v{:}B}\ L\to}{wRv,\ v{:}A\to B,\ w{:}\Box(A\to B),\ w{:}\Box A \Rightarrow v{:}B}\ L\Box}{wRv,\ w{:}\Box(A\to B),\ w{:}\Box A \Rightarrow v{:}B}\ L\Box}{w{:}\Box(A\to B),\ w{:}\Box A \Rightarrow w{:}\Box B}\ R\Box}{w{:}\Box(A\to B) \Rightarrow w{:}\Box A \to \Box B}\ R\to}{\Rightarrow w{:}\Box(A\to B) \to (\Box A \to \Box B)}\ R\to$$

T

riflessività $\forall w\,(wRw)$

$\Box A \to A$

$$\frac{wRw,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ rif$$

G3.T = G3.K + rif

$$\frac{\dfrac{\dfrac{w:A,\ w:\Box A \Rightarrow w:A}{wRw,\ w:\Box A \Rightarrow w:A}\ L\Box}{w:\Box A \Rightarrow w:A}\ rif}{\Rightarrow w:\Box A \to A}\ R\to$$

G3.4

$\Box A \to \Box\Box A \qquad \forall w,v,u\ (wRv \text{ e } vRu \supset wRu)$

$$\frac{wRu,\ wRv,\ vRu,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv,\ vRu,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ trans$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{v:A,\ldots \Rightarrow v:A}{wRu,\ wRv,\ vRu,\ w:\Box A \Rightarrow v:A}}{wRv,\ vRu,\ w:\Box A \Rightarrow v:A}\ R\Box}{wRv,\ w:\Box A \Rightarrow v:\Box A}\ R\Box}{w:\Box A \Rightarrow w:\Box\Box A}$$

$$\frac{sRt,\ tRs,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{tRs,\ T \Rightarrow \Delta}\ sim$$

G3.S5 = G3.k + {rif, trans}

G3.S5 = G3.S4 + {sim}

$$\mathbf{D}: \Box A \to \Diamond A \qquad \forall w \exists v (wRv) \qquad \frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \overbrace{\text{ser}}(\text{ialità}) \ u \notin \Gamma, \Delta$$

3 regole in 1 volta :(

$$\frac{wRv, v:A \Rightarrow v:A}{w:\Box A \Rightarrow w:\Diamond A}$$

$$\mathbf{2}: \Diamond\Box A \to \Box\Diamond A \qquad \forall w,v,u\ (wRv \text{ e } wRu \supset \exists z (vRz \text{ e } uRz))$$

$$\frac{vRz, uRz, wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{CONVER. DEBOLE}$$

con z NON nella conclusione

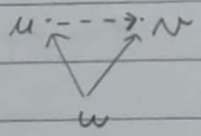
$$\frac{vRu, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{CONV. DEBOLE}$$

u NON nella conclusione

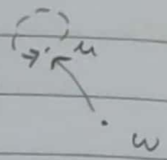
30/03/2023

c'è un refuso sul libro nella tabella 9.2

$$\frac{uRv, wRu, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRu, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Eucl}$$



$$\frac{uRu, wRu, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRu, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Euc, caso particolare}$$



$$\frac{uRu, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Euc (C)}$$

$$\left\{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{u:A, \ldots \Rightarrow u:A}{uRu, wRu, u:\Box A \Rightarrow u:A}\ L\Box}{wRu, u:\Box A \Rightarrow u:A}\ \text{Euc C}}{wRu \Rightarrow u:\Box A \to A}\ R\to}{\Rightarrow w:\Box(\Box A \to A)}\ R\Box\right\}$$

G3.L

$$\left.\begin{aligned} lg(w:A) &= lg(A) \\ lg(wRv) &= 0 \end{aligned}\right\}\ \text{lunghezza}$$

Lemma G3.L $\vdash w:A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:A$

DIM per induz. su $lg(w:A)$

CASO BASE: $w:p, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:p$

$u:\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:\bot \leftarrow L\bot$

CASO INDUTTIVO:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{w:B, w:C, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B}\ IH \qquad \dfrac{}{w:B, w:C, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:C}\ IH}{w:B, w:C, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B \wedge C}\ R\wedge}{w:B \wedge C, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B \wedge C}\ L\wedge$$

$$\dfrac{\dfrac{}{v:B, wRv, w:\Box B, \Gamma \Rightarrow \Delta, v:B}\ IH}{\dfrac{wRv, w:\Box B, \Gamma \Rightarrow \Delta, v:B}{u:\Box B, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box B}\ R\Box}\ L\Box$$

sostituzione etichette

Def sostituire u con v $[v/u]$

- $w[v/u] = \begin{cases} v & \text{se } w \equiv u \\ w & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $(w:A)[v/u] = w[v/u] : A$
- $(w_1 R w_2)[v/u] = w_1[v/u] R\, w_2[v/u]$
- $\Gamma[v/u]$ sostituzione in multinsieme
- $(\Gamma \Rightarrow \Delta)[v/u]$

lemma la regola $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{(\Gamma \Rightarrow \Delta)[v/u]}$ $[v/u]$ è PP-AMMISSIBILE

questo NON significa che sostituendo otteniamo la stessa cosa, infatti possiamo usare anche etichette "vecchie"

DIM per induz. sulla profondità della DER. di $\Gamma \Rightarrow \Delta$

CASO BASE:

	$w:p, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, w:p$	$w:\bot, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta$
$w \equiv u$	$u:p, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta_1[v/u], u:p$	$u:\bot, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]$
$w \not\equiv u$	$w:p, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta_1[v/u], w:p$	$w:\bot, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]$

Scansionato con CamScanner

CASI INDUTTIVI:

$$\frac{\vdash^{k} \quad w:A, w:B, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta}{\vdash^{k+1} \quad w:A\wedge B, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta} \; L\wedge$$

$\downarrow$ IH

$$\frac{\vdash^{k} \quad w[v/u]:A, w[v/u]:B, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]}{\vdash^{k+1} \quad u[v/u]: A\wedge B, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]}$$

$$\frac{w_2:A, w_1Rw_2, w_1:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w_1Rw_2, w_1:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; L\Box$$

IH

$$\frac{w_2[\cdot]:A, w_1[\cdot]Rw_2[\cdot], w_1[\cdot]:\Box A, \Gamma[\cdot] \Rightarrow \Delta[\cdot]}{}$$

$$\frac{w_1Rw_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_2:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w_1:\Box A} \; R\Box \quad w_2 \notin \{w_1, \Gamma, \Delta\}$$

IH
$w_3 \notin \{\Gamma, \Delta, w_1, u, v\}$
$[w_3/w_2]$

$$\frac{\dfrac{w_1Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_3:A}{w_1[\cdot]Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta[\cdot], w_3:A} \; IH}{\Gamma[\cdot] \Rightarrow \Delta[\cdot], w_1[\cdot]:\Box A} \; R\Box \quad \text{per costruz. } w_3 \notin \{(\Gamma, \Delta, w_1)[v/u]\}$$

$$\frac{w_2Rw_4, w_3Rw_4, w_1Rw_2, w_1Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w_1Rw_2, w_1Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

IH $[{}^{w_5}/_{w_4}]$

$$\frac{w_2Rw_5, w_3Rw_5, w_1Rw_2, w_1Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta}{}$$

TEOREMA le seguenti regole di indebolimento sono PP-AMMISS.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}LW \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}LW_R \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:B}RW$$

DIM per induz. nella profondità della DER di $\Delta \Rightarrow \Gamma$

$$\frac{u_2:A, u_1Ru_2, u_1:\Box A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta}{u_1Ru_2, u_1:\Box A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta}L\Box$$

IH

$$\frac{u_2:A, u_1Ru_2, u_1:\Box A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta, u:B}{u_1Ru_2 \ldots}$$

CAZZO

$$\vdash^k \frac{uRv, \Gamma \Rightarrow \Delta_1, v:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, u:\Box A}R\Box$$

$[{}^{v_1}/_{v}]$

$$\vdash^k \frac{uRv_1, \Gamma \Rightarrow \Delta_1, v_1:A}{}IH$$

$$\frac{\vdash^k uRv_1, \Gamma \Rightarrow \Delta_1, v_1:A, w:B}{\vdash^{k+1} \Gamma \Rightarrow \Delta_1, u:\Box A, u:B}R\Box \qquad v_1 \notin \{\Gamma, \Delta, u, w\}$$

Scansionato con CamScanner

La REG. di NECESSITAZIONE è AMMISSIBILE

$$\frac{\Rightarrow w:A}{\Rightarrow w:\Box A}\,N$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow w:A}{\Rightarrow v:A}\,[w/_{M}]}{wRv\Rightarrow v:A}\,LW_R}{\Rightarrow w:\Box A}\,R\Box$$