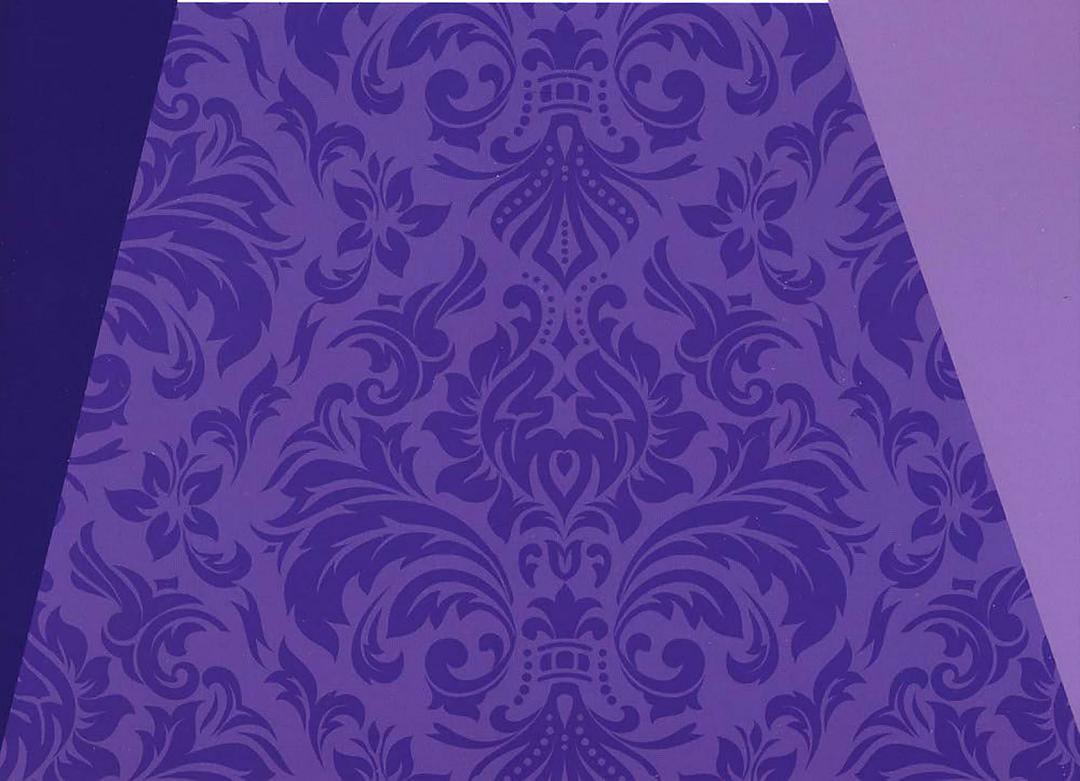


Corso di logica modale proposizionale

Eugenio Orlandelli, Giovanna Corsi

Carocci editore  Studi Superiori



STUDI SUPERIORI / 1169

FILOSOFIA

I lettori che desiderano
informazioni sui volumi
pubblicati dalla casa editrice
possono rivolgersi direttamente a:

Carocci editore

Corso Vittorio Emanuele II, 229
00186 Roma
telefono 06 42 81 84 17
fax 06 42 74 79 31

Siamo su:

www.carocci.it

www.facebook.com/caroccieditore

www.twitter.com/caroccieditore

Eugenio Orlandelli Giovanna Corsi

Corso di logica modale proposizionale



Carocci editore

1^a edizione, aprile 2019
© copyright 2019 by Carocci editore S.p.A., Roma

Impaginazione: CompoMat srl, Configni (RI)

Servizi editoriali: Pagina soc. coop., Bari

Finito di stampare nell'aprile 2019
da Grafiche VD srl, Città di Castello (PG)

ISBN 978-88-430-9526-1

Riproduzione vietata ai sensi di legge
(art. 171 della legge 22 aprile 1941, n. 633)

Senza regolare autorizzazione,
è vietato riprodurre questo volume
anche parzialmente e con qualsiasi mezzo,
compresa la fotocopia, anche per uso interno
o didattico.

Indice

Prefazione	9
Introduzione	13
1. Linguaggio modale e semantica	23
1.1. Linguaggio	23
1.2. Semantica per \mathcal{L}^Φ	25
1.2.1. Strutture relazionali / 1.2.2. Modelli / 1.2.3. Verità e validità	
1.3. Schemi validi e non validi	28
1.4. Regole che conservano la validità	29
1.5. Che cos'è una logica modale normale?	32
1.6. Chiusura riflessiva e transitiva	33
2. Corrispondenza e non esprimibilità	37
2.1. Risultati di corrispondenza	38
2.2. Proprietà non esprimibili	44
2.2.1. Sottomodelli generati / 2.2.2. p-morfismi / 2.2.3. Proprietà non esprimibili	
3. Logiche modali normali	53
3.1. La logica K	53
3.2. Alcune estensioni di K	59
3.3. Validità	63

3.4.	Modalità	65
3.4.1.	Modalità nelle estensioni di K / 3.4.2 Modalità in S4 /	
3.4.3.	Modalità in S5	
4.	Completezza via modello canonico	73
4.1.	Proprietà di insiemi di formule	75
4.2.	Modelli canonici	77
4.3.	Completezza via canonicità	79
5.	Corrispondenza <i>vs</i> completezza e incompletezza	87
5.1.	Incompletezza	88
5.2.	Strutture generali	89
5.3.	Incompletezza di KVB	92
6.	Modelli finiti e decidibilità	95
6.1.	Nozioni preliminari	95
6.2.	Filtrazione e modelli finiti	97
7.	KW: la logica della dimostrabilità	105
7.1.	Completezza di KW	109
7.2.	Modalità in KW e il predicato $Teor_{PA}(x)$	112
8.	Diagrammi per estensioni di K4.3	117
8.1.	Diagrammi finiti per estensioni di K4.3	125
8.1.1.	Lemmi generali / 8.1.2. Costruzione iniziale / 8.1.3. Costruzione dei diagrammi di base $\Gamma_0, \Gamma_1 \dots \Gamma_n$ / 8.1.4. Grovigli	
8.2.	Completezza per alcune estensioni di K4.3	138
8.2.1.	K4.3.Z	
8.3.	Sulle estensioni di K4.3 che dimostrano T	142
9.	Sequenti etichettati	149
9.1.	Nozioni introduttive	150
9.2.	Il calcolo G3.K	151
9.3.	Alcune estensioni di G3.K	154

INDICE

9.4.	Elementi base di metateoria	158
9.5.	Validità e completezza	161
	9.5.1. Validità / 9.5.2. Completezza	
9.6.	Proprietà strutturali	170
9.7.	Decidibilità	178
9.8.	Identità e proprietà inesprimibili	184
	9.8.1. Identità / 9.8.2. Proprietà inesprimibili	
	Bibliografia	189
	Indice analitico	191

Prefazione

Le logiche modali sono divenute negli ultimi decenni un settore ricco e fiorento della logica, settore che abbraccia tutte le estensioni della logica classica con operatori intensionali. Ci occuperemo solo delle logiche modali proposizionali; le loro versioni predicative, ancorché estremamente interessanti, esulano completamente dagli scopi di questo libro. La varietà delle interpretazioni degli operatori intensionali ha favorito applicazioni in campo filosofico, informatico, matematico. Le logiche aletiche, temporali, dinamiche, epistemiche, doxastiche, deontiche rappresentano alcune delle diverse declinazioni della modalità, ovvero del modo in cui un enunciato viene qualificato: in senso temporale, in senso epistemico, in senso aletico, deontico, teorematico. Tipici esempi di enunciati modali sono:

È necessario che A
È possibile che A
Sempre in passato A
Talora in futuro A
Si crede che A
Si sa che A
È obbligatorio che A
È permesso che A
È dimostrabile nell'aritmetica di Peano che A
È consistente con l'aritmetica di Peano che A
Dopo ogni esecuzione del programma che termini, A è vero
Esiste almeno un'esecuzione del programma che termina, ed A è vero

Questo testo non intende in alcun modo offrire al lettore una panoramica delle varie specificazioni delle logiche modali come le troviamo nella letteratura, intende invece offrire al lettore gli strumenti base per affrontare ognuna di queste specificazioni qualora ne abbia curiosità e interesse. La cosiddetta semantica dei mondi possibili, la teoria della corrispondenza e la presentazione assiomatica di alcune logiche modali co-

stituiscono un prerequisito imprescindibile per entrare nello spirito dei problemi e dei temi tipici delle logiche modali. Questi temi fanno parte dei primi tre capitoli del libro. Una tecnica metateorica divenuta strumento onnipresente per affrontare il problema della completezza delle logiche modali è la costruzione del cosiddetto modello canonico. A questa tecnica è dedicato il CAP. 4. I CAPP. 5 e 6 mettono a confronto proprietà metateoriche delle logiche modali quali corrispondenza, completezza, incompletezza, decidibilità, proprietà del modello finito. Il CAP. 7 presenta una particolare logica modale, la logica della dimostrabilità, che detiene un posto tutto speciale nel panorama delle logiche modali e che gode di proprietà metateoriche assai peculiari. Il metodo dei diagrammi cui è dedicato il CAP. 8 introduce una tecnica nuova per dimostrare la completezza di un'ampia classe di logiche modali caratterizzate da strutture connesse. In opposizione al modello canonico che presenta profonde criticità quando lo si voglia applicare a logiche caratterizzate da strutture connesse, il metodo dei diagrammi sembra essere uno strumento duttile ed efficace e assai sorprendente nella sua semplicità. Il CAP. 9 è dedicato alla presentazione di calcoli di sequenti per le logiche modali, in particolare ai calcoli di sequenti con etichette. Questi calcoli sono entrati assai di recente nella letteratura ed offrono una presentazione assiomatica di un'ampia gamma di logiche modali in modo uniforme attraverso l'internalizzazione della semantica nella sintassi delle regole del calcolo. In questo contesto vengono forniti teoremi di validità, completezza, decidibilità e non esprimibilità di alcune proprietà della relazione semantica di accessibilità.

Questo libro è inteso per studenti di filosofia che abbiano seguito solo un corso di logica classica proposizionale e che conoscano il linguaggio del primo ordine. Si è cercato quindi di tenere il formalismo entro limiti ragionevoli, senza utilizzare strumenti matematici avanzati, ma al contempo senza rinunciare a una trattazione rigorosa dei vari argomenti in termini formali. Con una minima familiarità del linguaggio del primo ordine, il libro è scritto, almeno nelle intenzioni degli autori, in modo tale che “si legge e si capisce”.

Approfondimenti di teoria dei modelli, di teoria della dimostrazione, di teoria della decisione che avrebbero richiesto l'uso di strumentazione matematica più sofisticata sono stati esclusi. In ogni caso il testo fornisce tutti gli strumenti utili per affrontarli nella letteratura cui spesso si rimanda. Il metodo dei diagrammi è l'unico tema che non è trattato, a nostra conoscenza, nella manualistica in lingua inglese sulle logiche modali

e che è stato invece qui inserito vuoi per la sua valenza innovativa vuoi per la sua valenza teorica. I temi trattati nei CAPP. 1-7 sono invece dei temi classici che troviamo negli storici manuali di George Hughes e Maxwell Cresswell, *Introduction to Modal Logic* (1963), *A New Introduction to Modal Logic* (1996), *A Companion to Modal Logic* (1984), così come nei bellissimi e ricchi trattati di Alexander Chagrov e Michael Zakharyashev, *Modal Logic* (1997), oppure di Patrick Blackburn, Maarten de Rijke e Yde Venema, *Modal Logic* (2001). Uno snello ancorché fondamentale manuale è quello di Robert Goldblatt, *Logics of Time and Computation* (1987). Il CAP. 9 si avvale delle metodiche introdotte da Sara Negri nell'articolo *Proof Analysis in Modal Logic* (2005). La manualistica sulle logiche modali in lingua italiana è pressoché inesistente, fatta eccezione per le traduzioni dei volumi di Hughes e Cresswell e vogliamo pensare che il presente libro colmi una lacuna per troppo tempo trascurata.

Percorsi didattici Si possono prevedere tre diversi corsi da 30 ore:

1. Capitoli 1 + 2 + 3 + 4

Logiche modali presentate in modo assiomatico alla Hilbert e teorema di completezza via modello canonico.

2. Capitoli 1 + 2 + 3 + 8

Logiche modali caratterizzate da strutture lineari e teorema di completezza via metodo dei diagrammi.

3. Capitoli 1 + 2 + 3 + 9

Logiche presentate via calcoli di sequenti etichettati e teorema di completezza via costruzione di alberi saturi.

Per un corso da 60 ore si possono avere varie combinazioni, fra cui:

4. Capitoli 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7

5. Capitoli 1 + 2 + 3 + 4 + 8

6. Capitoli 1 + 2 + 3 + 4 + 9

Ringraziamenti Questo libro nasce da un nucleo piccolo e antico relativo a un corso sulle logiche modali dell'a.a. 2005-06 che è stato poi rielaborato completamente, sviluppato con l'aggiunta di nuovi temi e redatto da Eugenio Orlandelli. Solo il CAP. 8 sui diagrammi è stato redatto da Giovanna Corsi. Gli studenti e i colleghi che in vari momenti e in varia misura hanno contribuito con i loro commenti ed osservazioni sono stati tanti, un particolare ringraziamento va a Melissa Antonelli, Erica Calardo, Guido Gherardi, Paolo Maffeioli, Wilmer Ricciotti, Eleonora Signorini, Francesco Spegni, Alessia Tosi, Valeria Vignudelli.

Bologna, dicembre 2018

Introduzione

Sono moltissime le esperienze che si lasciano descrivere come eventi inseriti in una struttura dotata di un ordine. Si pensi all'ordine determinato dallo scorrere del tempo: c'è un prima e c'è un dopo. Il linguaggio naturale si è dotato dei tempi verbali proprio per esprimere le relazioni temporali: 'ieri sono andata al cinema', 'domani andrò a teatro'. L'evento 'andare al cinema' oppure 'andare a teatro' ha luogo in un preciso ordine temporale. Espressioni come *dopodomani*, *l'altro ieri*, *in futuro*, *in passato* stabiliscono un ordine tra eventi che può essere schematizzato con un grafo del tipo:



ove la relazione temporale *prima di* è indicata dalla freccia \longrightarrow . L'enunciato 'Da domani smetto di fumare' chiama in causa tutti gli istanti futuri a partire da domani.

La logica modale studia quegli enunciati del linguaggio naturale il cui valore di verità non dipende solo dallo stato (mondo, istante) in cui l'enunciato è proferito, ma anche da altri stati. 'Eva sposerà Giorgio' è vero nel mondo attuale, se in un mondo futuro rispetto a quello attuale, Eva sposa Giorgio.

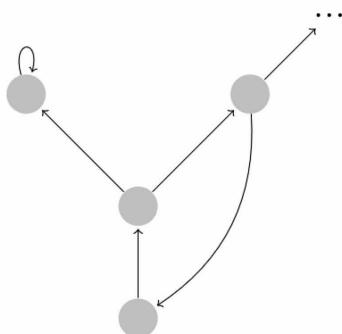
Mondi alternativi a quello attuale erano già stati autorevolmente evocati per render conto della nozione di *necessità*; secondo Leibniz, una verità si dice *necessaria* se è vera in tutti i *mondi possibili*. I mondi possibili sono *modi in cui il mondo attuale avrebbe potuto essere*, alternative possibili del mondo attuale, e il mondo attuale è solo uno (il migliore!) dei mondi possibili. In Leibniz tra i mondi possibili non intercorre alcuna relazione:



Ciò che li accomuna è che in ognuno di essi si realizzano tutte le verità necessarie.

L'analisi dei concetti di necessario, possibile, impossibile, contingente hanno occupato logici e filosofi sin da Aristotele. Basti pensare alle discussioni intorno alle condizioni di verità dei futuri contingenti ('Domani ci sarà una battaglia a Salamina') oppure alla teoria dei sillogismi modali.

Scopo di questa introduzione non è quello di tracciare una storia, ancorché sintetica, delle logiche modali quanto quello di mostrare la varietà degli ambiti che trovano un'analisi significativa attraverso la metafora dei mondi possibili, ovvero dal considerare simultaneamente insiemi di situazioni, mondi, istanti, stati di cose. Inoltre gli elementi di questi insiemi non sono, in generale, costituiti da monadi, bensì sono in relazione fra di loro. Ci occuperemo quindi di *strutture relazionali* costituite da un insieme \mathcal{W} di elementi di base (mondi, istanti ecc.) e da una relazione binaria \mathcal{R} che connette questi elementi. \mathcal{R} è detta *relazione di accessibilità* e se il mondo w è relato al mondo v , in simboli $w\mathcal{R}v$, allora v è detto *accessibile* rispetto a w . Una struttura è, pertanto, una coppia $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ che graficamente possiamo disegnare con cerchietti (i mondi) e con frecce che rappresentano la relazione \mathcal{R} .



La presenza della relazione \mathcal{R} è di fondamentale importanza, come vedremo. Notiamo subito che se \mathcal{R} è la relazione vuota, ritroviamo, come caso limite, le monadi leibniziane; se invece \mathcal{W} contiene un solo mondo ed \mathcal{R} è riflessiva, ritroviamo una struttura classica in cui la modalità non gioca alcun ruolo, non si distingue tra l'esser vero e l'essere necessariamente vero.



Per parlare di questo tipo di strutture dotate di relazione di accessibilità occorre un linguaggio più ricco del linguaggio della logica classica. Un tale linguaggio si ottiene, nel caso più semplice, aggiungendo al linguaggio della logica proposizionale classica un connettivo unario, solitamente indicato con \Box . Il linguaggio così ottenuto è detto *linguaggio modale* ed in esso, se A è una formula ben formata, lo è anche $\Box A$. Di conseguenza, espressioni del tipo $\Box A \rightarrow A$, $A \vee \neg \Box A$, $\Box A \rightarrow \Box \Box A$, $\Box(\neg A \vee \Box \neg A)$ sono formule ben formate.

Il termine *modale* risale ad una terminologia medievale secondo la quale gli enunciati sono proferiti secondo varie *modalità*: dichiarativa, negativa, della possibilità, dell'impossibilità, della necessità. Di fatto, con *linguaggio modale* si intende un qualsiasi linguaggio che estende quello classico e che contiene uno o più connettivi non vero-funzionali.

L'idea che sta alla base di tutto l'impianto delle logiche modali è molto semplice:

l'enunciato ' $\Box A$ ' è vero in un mondo w
se e soltanto se

‘ A ’ è vero in tutti mondi che stanno nella relazione \mathcal{R} con w

Come spesso capita con le idee semplici, anche la definizione appena data ha una storia lunga e complessa. Non vogliamo ripercorrere i passaggi che hanno portato a considerare le modalità, ad esempio ‘è necessario che’, come facenti parte del linguaggio oggetto piuttosto che del metalinguaggio, né di come si sia arrivati a considerare insiemi di mondi interrelati fra loro piuttosto che insiemi di monadi. Ci interessa solo ricordare che la semantica dei mondi possibili ha trovato la sua formulazione definitiva in una serie di articoli del logico americano Saul Kripke a partire dal 1959 e che per questo va anche sotto il nome di *semantica kripkeana*.

Ma torniamo al linguaggio modale. Caratteristica interessante è che l'operatore \Box ammette più letture. La formula $\Box A$ può leggersi non solo come ‘A è necessario’, ma anche ‘A è obbligatorio’, ‘Si sa che A’, ‘Si crede che A’, ‘Sempre in futuro A’, ‘Sempre in passato A’ ecc. Combinando l'operatore \Box con la negazione, possiamo definire un nuovo operatore, \Diamond , l' *operatore duale* di \Box , ponendo $\Diamond A := \neg\Box\neg A$. Dalla definizione dell'operatore \Diamond appena data discende che:

l'enunciato ‘ $\Diamond A$ ’ è vero in un mondo w
se e soltanto se

‘A’ è vero in almeno un mondo che sta nella relazione \mathcal{R} con w

Diamo qui di seguito alcune letture dell'operatore \Box insieme al suo duale \Diamond .

$\Box A$	$\Diamond A$
È necessario che A	È possibile che A
Sarà sempre vero che A	Sarà talvolta vero che A
È sempre stato vero che A	Talvolta è stato vero che A
È obbligatorio che A	È permesso che A
Si sa che A	È plausibile che A
È dimostrabile nell'aritmetica di Peano che A	È consistente con l'aritmetica di Peano che A
Dopo ogni esecuzione del programma, A è vero	Esiste almeno una esecuzione del pro- gramma che termina, ed A è vero

Leggiamo alcune formule modali.

Lettura aletica:

- | | |
|---|--|
| $\Box A \rightarrow A$ | se A è necessario, A è vero; |
| $\Box A \rightarrow \Diamond A$ | se A è necessario, A è possibile; |
| $\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$ | se A è necessario, A è necessariamente possibile; |
| $\neg\Diamond A$ | A è impossibile; |
| $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ | A è necessario se e solo se è impossibile che A sia falso; |
| $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$ | è possibile che A sia necessario solo se è necessario che A sia possibile. |

Lettura deontica:

- | | |
|--------------------------|---|
| $\Box A \vee \Box\neg A$ | è obbligatorio A oppure è obbligatorio non A; |
|--------------------------|---|

$$\Box A \rightarrow \Box\Box A$$

se è obbligatorio A , allora è obbligatorio che sia obbligatorio A ;

$$\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$$

se A è permesso, allora A è obbligatoriamente permesso;

$$\Box(A \rightarrow B) \wedge \Box A \rightarrow \Box B$$

se è obbligatorio che A implichì B e A è obbligatorio allora B lo è a sua volta.

Caratteristica della semantica kripkeana, che ne ha determinato la grande fortuna, è la sua versatilità. Al variare vuoi delle proprietà della relazione \mathcal{R} , vuoi dell'interpretazione stessa di \mathcal{R} , riesce a offrire modelli astratti per costrutti linguistici tutt'affatto diversi. Vediamone alcuni.

Linguaggio aletico Possiamo considerare diverse concezioni di necessità: la necessità *logica* piuttosto che la necessità *fisica*. In quest'ultimo caso v è un mondo accessibile rispetto a w , ovvero $w\mathcal{R}v$, se in esso valgono tutte le leggi della fisica che valgono in w e quindi $\Box A$ sta a significare che ‘ A è conseguenza delle leggi della fisica’. In particolare, $\Box A$ è vero nel mondo attuale se A è vero in tutti quei mondi che soddisfano le leggi fisiche del mondo attuale. Ne segue che nel mondo attuale $\Box(x < c)$ è vero nella lettura fisica, ove c è la velocità della luce e x la velocità di un corpo materiale.

D'altra parte, se $\Box A$ è interpretato come ‘è logicamente necessario che A ’, i mondi accessibili rispetto a quello attuale saranno i mondi che soddisfano le leggi logiche del mondo attuale e quindi è *logicamente* possibile che nel mondo attuale $\Box(x < c)$ sia falso¹. Nel caso della necessità logica sembra naturale assumere che \mathcal{R} sia una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

Linguaggio deontico $\Box A$ si legge ‘ A è obbligatorio’ e $w\mathcal{R}v$ sta a significare che v è un mondo moralmente/normativamente ideale alternativo a w , un mondo in cui tutti gli obblighi di w sono onorati. In questo caso non vogliamo che la relazione \mathcal{R} sia riflessiva perché implicherebbe, fra l'altro, che il mondo attuale è un'alternativa moralmente/normativamente ideale di se stesso e quindi uno in cui tutti gli obblighi sono onorati. E questa tesi non è facilmente sostenibile!

Linguaggio epistemico Fanno parte di questo linguaggio espressioni del tipo ‘si sa che A ’ e ‘si crede che A ’ (anche se più propriamente nel caso di

1. L'esempio è preso da Goldblatt (1993).

‘si crede che’ dovremmo parlare di linguaggio doxastico). Nel linguaggio naturale l’operatore di conoscenza (o di credenza) non è usato solo in modo impersonale, anzi nella maggior parte dei casi si usano espressioni del tipo ‘Giorgio sa che A ’, ‘Maria crede che A ’. Per rendere conto di queste locuzioni si utilizzano linguaggi epistemici con agenti dando così luogo a linguaggi multi-modali, ovvero con più di un operatore modale. Fissato un numero finito k di agenti si introducono k operatori modali \Box_1, \dots, \Box_k , uno per ogni agente, e parallelamente altrettante relazioni $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k$; quindi una struttura per tale linguaggio sarà del tipo $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k \rangle$ e $w\mathcal{R}_j v$, $1 \leq j \leq k$, sta ad indicare che v è un mondo compatibile con lo stato epistemico dell’agente j nel mondo w . L’enunciato $\Box_j A$ ci dice che in ogni mondo compatibile con lo stato epistemico di j in w l’enunciato A è vero, ovvero che ‘l’agente j sa che A ’. Si noti che nel caso qui presentato non abbiamo postulato alcun rapporto fra le varie relazioni $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k$.

Linguaggio per sistemi di transizione Supponiamo di voler descrivere il comportamento simultaneo di un numero anche infinito numerabile di ‘azioni’, ognuna delle quali può essere pensata come un programma oppure come un modulo di un programma. Avremo bisogno di un insieme infinito numerabile di indici \mathcal{I} , uno per ogni azione e per ognuno di essi un operatore \Box_i . Parallelamente le strutture dovranno contenere un numero infinito di relazioni di accessibilità \mathcal{R}_i , una per ogni azione. Possiamo pensare ad una tale struttura come alla descrizione di possibili stati di una macchina. $w\mathcal{R}_i v$ si legge ‘quando la macchina è nello stato w e si trova sottoposta all’azione esterna i , allora passa nello stato v ’. L’azione i non necessariamente genera un unico effetto sullo stato w . Possiamo ben avere che $w\mathcal{R}_i v$ e $w\mathcal{R}_i z$, quindi l’azione i fa passare la macchina vuoi nello stato v o nello stato z in modo indeterminato. $\Box_i A$ è dunque vero nello stato w se in ogni stato raggiungibile attraverso l’azione i , A è vero e $\Diamond A$ è vero nello stato w se esiste uno stato raggiungibile attraverso l’azione i ed in quello stato A è vero.

Linguaggio temporale Nel contesto del discorso temporale ci troviamo di fronte ad una grande varietà di opzioni, vediamone alcune. Gli elementi di \mathcal{W} sono intesi come momenti del tempo. Se $w\mathcal{R}v$ significa ‘ v viene dopo w ’, allora $\Box A$ sta a significare che ‘da ora in avanti A ’, ovvero ‘sempre in futuro A ’, mentre $\Diamond A$ sta a significare che ‘talvolta in futuro A ’. Dualmente se $w\mathcal{R}v$ significa ‘ v viene prima di w ’, allora $\Box A$ sta a significare che ‘sempre in passato A ’. Più significativo è il caso in cui

si considerano in uno stesso linguaggio sia l'operatore ‘sempre in futuro’ che l'operatore ‘sempre in passato’ e quindi abbiamo bisogno di notazioni diverse per ognuno di essi, banalmente useremo \Box per ‘sempre in futuro’ e \square per ‘sempre in passato’. Analogamente le nostre strutture saranno dotate di due relazioni \mathcal{R}_+ e \mathcal{R}_- . I due concetti di passato e futuro sono però interrelati fra loro nel senso che v è nel futuro di w se e soltanto se w è nel passato di v . Quindi dobbiamo assumere questa interrelazione fra \mathcal{R}_+ e \mathcal{R}_- , stipulando che una struttura temporale è del tipo $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_+, \mathcal{R}_- \rangle$, in cui \mathcal{R}_+ è la relazione inversa di \mathcal{R}_- :

$$w \mathcal{R}_+ v \quad \text{sse} \quad v \mathcal{R}_- w$$

Strutture temporali molto studiate sono quelle in cui \mathcal{W} è l'insieme dei numeri naturali, o l'insieme degli interi o dei razionali o l'insieme dei reali e \mathcal{R}_+ è la relazione $<$ oppure \leqslant .

Un'altra possibilità interessante studiata da Rob Goldblatt è considerare vari ordinamenti dei punti nello spazio-tempo di Minkowski a quattro dimensioni (cfr. Goldblatt, 1992, p. 45 oppure Id., 1980) oppure studiare, come fanno Rescher e Urquhart (1971), strutture temporali non-lineari, in cui il futuro ammette ‘ramificazioni’.

Linguaggi temporali molto espressivi sono quelli che contengono operatori binari come *Since* e *Until* col significato che:

- *A Since B* è vero ora se e soltanto se in passato *A* e nel frattempo *B*;
- *A Until B* è vero ora se e soltanto se in futuro *A* e nel frattempo *B*.

Esempi:

- [ho preso quel medicinale] *Since* [sto meglio], che potremmo esprimere idiomaticamente con ‘Da quando ho preso quel medicinale, sto meglio’;
- [Paolo telefona] *Until* [sto a casa] che potremmo esprimere idiomaticamente con ‘Sto a casa fino a che Paolo non mi telefona’ (da notare il *non* pleonastico).

Linguaggio dinamico L'idea di base è quella di associare ad un programma α di un linguaggio di programmazione una modalità \Box , sì che la formula $\Box A$ è da intendersi ‘ogniqualvolta il programma α termina, viene a trovarsi in uno stato in cui A è vera’. Caratteristica fondamentale del linguaggio dinamico è che l'insieme delle modalità formano una struttura algebrica determinata dalle operazioni di composizione, test, unione e iterazione.

La composizione $\alpha; \beta$ dei programmi α e β corrisponde alla composizione delle rispettive relazioni di accessibilità \mathcal{R}_α e \mathcal{R}_β e eseguire $\alpha; \beta$ significa ‘prima esegui α e poi β ’.

$\text{test}A?$ corrisponde alla relazione di identità parziale sugli insiemi di stati in cui la formula A è vera ed eseguire $\text{test}A?$ significa ‘se A è vero, vai avanti, altrimenti stop’.

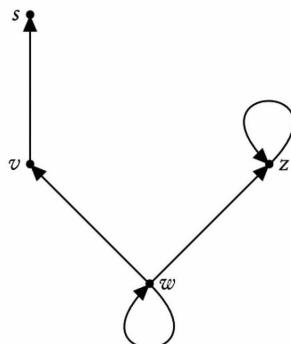
L’unione $\alpha \cup \beta$ corrisponde all’unione delle due relazioni di accessibilità \mathcal{R}_α e \mathcal{R}_β , eseguire $\alpha \cup \beta$ significa ‘esegui α o esegui β a piacere (in modo non deterministico)’.

L’iterazione α^* del programma α corrisponde alla chiusura riflessiva e transitiva della relazione di accessibilità \mathcal{R}_α e eseguire α^* significa ‘ripeti α un numero finito di volte’.

Il campo delle logiche modali è vastissimo e, non potendo certo darne una panoramica esauriente, terminiamo questa breve carrellata con una logica molto famosa, la logica della dimostrabilità. In un articolo del 1933 Kurt Gödel accenna brevemente al fatto che la dimostrabilità può essere vista come un operatore modale. Questa intuizione ha dato luogo in particolare allo studio delle proprietà formali della dimostrabilità nell’aritmetica di Peano (PA) in cui $\Box A$ si legge come ‘ A è dimostrabile in PA’ e $\Diamond A$ come ‘ A è consistente con PA’. Questa linea di ricerca ha dato risultati molto interessanti e verrà brevemente discussa nel CAP. 7.

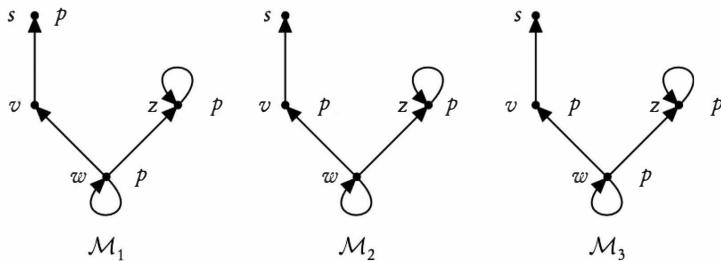
Semantica kripkeana in azione

Una struttura $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ può essere rappresentata da un grafo in cui i cerchietti rappresentano gli elementi di \mathcal{W} e le frecce rappresentano la relazione \mathcal{R} . Esempio:



In questo caso \mathcal{W} è l'insieme $\{w, z, v, s\}$ e le frecce ci dicono che z è accessibile da w , $w \mathcal{R} z$; w è accessibile da se stesso, $w \mathcal{R} w$; z è accessibile da se stesso, $z \mathcal{R} z$; v è accessibile da w , $w \mathcal{R} v$; s è accessibile da v , $v \mathcal{R} s$. Si noti che s non è relato ad alcun mondo, neppure a se stesso.

Una struttura $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ da sola non ci dice niente sui valori di verità degli enunciati nei vari mondi, abbiamo bisogno di arricchirla con ulteriori informazioni, ovvero *quali enunciati atomici sono veri in quali mondi*. Un modello assolve esattamente a questo compito, esso consiste di una struttura e di una funzione di interpretazione che ci dà l'informazione desiderata. Supponiamo per estrema semplicità che il linguaggio contenga solo un enunciato atomico p . Data una struttura come quella descritta nell'esempio, rappresenteremo alcuni dei modelli basati su di essa nel modo seguente:



Il grafo ci dice che nel modello \mathcal{M}_1 , p è vero nei mondi w, z e s , nel modello \mathcal{M}_2 , p è vero nei mondi z e v , nel modello \mathcal{M}_3 , p è vero nei mondi w, z e v . Ogni modello rappresenta situazioni semantiche ben diverse pur essendo basato sulla stessa struttura. Con la scrittura:

$$\mathcal{M}_2 \vDash_v p$$

vogliamo indicare che l'enunciato ' p è vero nel mondo v del modello \mathcal{M}_2 ' è con:

$$\mathcal{M}_1 \not\vDash_v p$$

che l'enunciato ' p non è vero nel mondo v del modello \mathcal{M}_1 '.

Ora proviamo a chiederci se ' $\Box p$ è vero nel mondo w di \mathcal{M}_1 ', in simboli se $\mathcal{M}_1 \vDash_w \Box p$. Sulla base della definizione data, $\mathcal{M}_1 \vDash_w \Box p$ è il caso quando e solo quando p è vero in tutti i mondi accessibili a w , quindi p dovrebbe essere vero in z, w e v . Ma questo non è il caso, perché p

non è vero in v . Quindi dobbiamo concludere che $\mathcal{M}_1 \not\models_w \Box p$. Chiediamoci ora se $\mathcal{M}_2 \models_w \Box p$; anche in questo caso la risposta è negativa, perché p non è vero in w . Chiediamoci infine se $\mathcal{M}_3 \models_w \Box p$; in questo caso la risposta è positiva. Ancora vediamo se $\mathcal{M}_1 \models_v \Box p$; la risposta è positiva perché l'unico mondo accessibile a v è s e $\mathcal{M}_1 \models_s p$.

Consideriamo ora la semplice struttura raffigurata sotto:



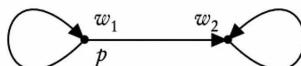
Si consideri il modello \mathcal{M} in cui p è vera nel solo mondo w_2 . Facciamo vedere che (i) $\mathcal{M} \models_{w_1} p \rightarrow \Box \Diamond p$ e (ii) $\mathcal{M} \models_{w_2} p \rightarrow \Box \Diamond p$ e dunque tale formula è vera in tutti i mondi del modello, in simboli: $\mathcal{M} \models p \rightarrow \Box \Diamond p$.



(i) $\mathcal{M} \models_{w_1} p \rightarrow \Box \Diamond p$ sse $\mathcal{M} \not\models_{w_1} p$ oppure $\mathcal{M} \models_{w_1} \Box \Diamond p$. Dato che p è falso in w_1 , banalmente $\mathcal{M} \models_{w_1} p \rightarrow \Box \Diamond p$.

(ii) $\mathcal{M} \models_{w_2} p \rightarrow \Box \Diamond p$ sse $\mathcal{M} \not\models_{w_2} p$ oppure $\mathcal{M} \models_{w_2} \Box \Diamond p$. Dato che p è vero in w_2 , dobbiamo far vedere che $\mathcal{M} \models_{w_2} \Box \Diamond p$, ovvero che (essendo w_2 relato solo a sé stesso) $\mathcal{M} \models_{w_2} \Diamond p$. Ma $w_2 \mathcal{R} w_2$ e p è vero in w_2 , dunque $\mathcal{M} \models_{w_2} \Diamond p$.

Si consideri ora il modello \mathcal{M} in cui p è vero in w_1 e falsa in w_2 :



Essendo p vero in w_1 , $\mathcal{M} \models_{w_1} p \rightarrow \Box \Diamond p$ sse $\mathcal{M} \models_{w_1} \Box \Diamond p$ sse (essendo w_1 relato sia a sé stesso che a w_2) $\mathcal{M} \models_{w_1} \Diamond p$ e $\mathcal{M} \models_{w_2} \Diamond p$. Ma w_2 è relato solo a sé stesso e p è falso in w_2 , dunque $\mathcal{M} \not\models_{w_2} \Diamond p$. Ne segue che $\mathcal{M} \not\models_{w_1} \Box \Diamond p$ da cui $\mathcal{M} \not\models_{w_1} p \rightarrow \Box \Diamond p$.

Linguaggio modale e semantica

1.1 Linguaggio

DEFINIZIONE 1.1 L'*alfabeto* del linguaggio modale enunciativo \mathcal{L}^Φ è costituito da:

- a) un insieme Φ al massimo numerabile di variabili enunciative: $p_0, p_1, p_2 \dots$;
- b) le costanti logiche:
 - zero-aria \perp ;
 - unarie \neg, \Box, \Diamond ;
 - binarie $\wedge, \vee, \rightarrow$;
- c) le parentesi $(,)$.

DEFINIZIONE 1.2 L'insieme Fm^Φ , delle formule ben formate (*fbf* in breve) di \mathcal{L}^Φ , è così definito:

1. se $p_i \in \Phi$, allora $p_i \in Fm^\Phi$;
2. $\perp \in Fm^\Phi$;
3. se $A \in Fm^\Phi$ allora $\neg A, \Box A, \Diamond A \in Fm^\Phi$;
4. se $A, B \in Fm^\Phi$, allora $(A \rightarrow B), (A \wedge B), (A \vee B) \in Fm^\Phi$;
5. nient'altro è in Fm^Φ .

Un insieme così definito si dice definito per *induzione*.

Useremo le lettere p, q, r come metavariabili per variabili enunciative e A, B, C come metavariabili per formule.

Le variabili enunciative, ovvero gli elementi di Φ , sono anche dette *atomi*.

DEFINIZIONE 1.3 Simboli logici ausiliari.

$$\begin{aligned}\top &:= (\perp \rightarrow \perp) \\ (A \leftrightarrow B) &:= ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))\end{aligned}$$

Convenzione sulle parentesi:

- si omettono le parentesi più esterne;
 - si stabilisce un ordine di precedenza fra i connettivi, in base al quale:
 1. \neg, \square e \Diamond legano più di tutti gli altri connettivi;
 2. \wedge, \vee legano più di \rightarrow ;
 - si omettono le parentesi che sono superflue sulla base dell'ordine di precedenza;
 - si scrive associando a sinistra:
- | | | |
|--|-----------|---|
| $A \vee B \vee C \vee \cdots \vee D$ | invece di | $(\dots((A \vee B) \vee C) \vee \cdots \vee D)$ |
| $A \wedge B \wedge C \wedge \cdots \wedge D$ | invece di | $(\dots((A \wedge B) \wedge C) \wedge \cdots \wedge D)$ |

Esempio 1.1 $p \vee q \rightarrow p$ sta per $((p \vee q) \rightarrow p)$

Introduciamo alcuni concetti attraverso definizioni per *ricorsione* che saranno utili in seguito.

- La *lunghezza* di una formula A , $\lg(A)$, è così definita:
 $\lg(p_i) = 0$, per ogni atomo p_i ;
 $\lg(\perp) = 0$;
 $\lg(\neg B) = \lg(\square B) = \lg(\Diamond B) = \lg(B) + 1$;
 $\lg(B \rightarrow C) = \lg(B \wedge C) = \lg(B \vee C) = \lg(B) + \lg(C) + 1$.
- L'*insieme delle sottoformule* di una formula A , $Sf(A)$, è così definito:
 $Sf(p_i) = \{p_i\}$, per ogni atomo p_i ;
 $Sf(\perp) = \{\perp\}$;
 $Sf(\sharp B) = Sf(B) \cup \{\sharp B\}$, ove $\sharp \in \{\neg, \square, \Diamond\}$;
 $Sf(B \star C) = Sf(B) \cup Sf(C) \cup \{(B \star C)\}$, ove $\star \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.
Diciamo che B è *sottoformula* di A se $B \in Sf(A)$.
- *Sostituzione uniforme*. Sia p una variabile enunciativa e D una formula. Definiamo l'operazione di *sostituzione uniforme di D al posto di p in una fbf A* . Con $A[D/p]$ indichiamo la formula ottenuta da A ove ogni occorrenza di p è stata sostituita con D :

1. $p[D/p] \equiv D$;
2. $q[D/p] \equiv q$, se $q \neq p$;
3. $\perp[D/p] \equiv \perp$;
4. $(\sharp B)[D/p] \equiv \sharp(B[D/p])$, ove $\sharp \in \{\neg, \square, \Diamond\}$;
5. $(B \star C)[D/p] \equiv (B[D/p] \star C[D/p])$, ove $\star \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.

$A[D_1/p_1, \dots, D_k/p_k]$ denota la formula ottenuta a partire da A sostituendo simultaneamente ogni occorrenza di p_i con D_i , per ogni i tale che $1 \leq i \leq k$ e $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

1.2

Semantica per \mathcal{L}^Φ

Iniziamo con l'introdurre la cosiddetta *semantica relazionale* (detta anche *semantica dei mondi possibili*), introdotta da Kripke nel 1959 e che si è dimostrata molto efficace e naturale per *attribuire un significato* ai linguaggi modali.

1.2.1. STRUTTURE RELAZIONALI

DEFINIZIONE 1.4 Una struttura relazionale \mathcal{F} è una coppia:

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$$

ove \mathcal{W} è un insieme non vuoto, detto *universo*, e $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ è una relazione binaria detta *relazione di accessibilità*.

Se $w \in \mathcal{W}$ diciamo che ‘ w è un mondo dell'universo \mathcal{W} ’ o che ‘ w è un punto dell'universo (o spazio) \mathcal{W} ’. Se $w\mathcal{R}v$ diremo che ‘il mondo v è accessibile a partire dal mondo w ’ o che ‘ w vede v ’.

Vediamo ora alcune strutture molto semplici. La prima è:

$$\mathcal{F} = \langle \{w\}, \emptyset \rangle$$

graficamente rappresentata dalla FIG. 1.1 (a). Il secondo caso è molto simile al primo, dove però la relazione \mathcal{R} è *riflessiva*. Formalmente tale struttura è così descritta:

$$\mathcal{F} = \langle \{w\}, \{(w, w)\} \rangle$$

e graficamente essa sarà rappresentata come in FIG. 1.1 (b). Una terza struttura è quella rappresentata nella FIG. 1.1 (c), ed è formalmente definita da:

$$\mathcal{F} = \langle \{w_1, w_2, w_3, w_4\}, \{(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_3, w_3), (w_4, w_1)\} \rangle$$

FIGURA 1.1

Tre semplici strutture relazionali



1.2.2. MODELLI

Data una struttura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, un *modello basato su* \mathcal{F} è una tripla:

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$$

ove \mathcal{I} è una funzione di *interpretazione* che associa ad ogni variabile enunciativa un sottoinsieme di \mathcal{W} :

$$\mathcal{I} : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})^1$$

ovvero è tale che per ogni $p \in \Phi$,

$$\mathcal{I}(p) \subseteq \mathcal{W}$$

Intuitivamente, la funzione di interpretazione stabilisce in quali mondi un atomo è vero.

Con l'espressione *\mathcal{F} -modello* indichiamo un modello basato su \mathcal{F} .

1.2.3. VERITÀ E VALIDITÀ

DEFINIZIONE 1.5 (Verità in un mondo di un modello) Dato un modello $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$, definiamo per induzione sulla costruzione delle formule quando una fbf A è *vera in un mondo* w di \mathcal{M} , $\mathcal{M} \vDash_w A$:

$\mathcal{M} \vDash_w p$	sse	$w \in \mathcal{I}(p)$
$\mathcal{M} \not\vDash_w \perp$		
$\mathcal{M} \vDash_w \neg B$	sse	$\mathcal{M} \not\vDash_w B$
$\mathcal{M} \vDash_w B_1 \rightarrow B_2$	sse	$\mathcal{M} \not\vDash_w B_1$ oppure $\mathcal{M} \vDash_w B_2$
$\mathcal{M} \vDash_w B_1 \wedge B_2$	sse	$\mathcal{M} \vDash_w B_1$ e $\mathcal{M} \vDash_w B_2$
$\mathcal{M} \vDash_w B_1 \vee B_2$	sse	$\mathcal{M} \vDash_w B_1$ oppure $\mathcal{M} \vDash_w B_2$
$\mathcal{M} \vDash_w \Box B$	sse	per ogni $v \in \mathcal{W}$, se $w \mathcal{R} v$ allora $\mathcal{M} \vDash_v B$
$\mathcal{M} \vDash_w \Diamond B$	sse	esiste $v \in \mathcal{W}$, tale che $w \mathcal{R} v$ e $\mathcal{M} \vDash_v B$

1. \mathcal{P} è l'*operatore potenza* che ad ogni insieme associa l'insieme dei suoi sottinsiemi.

Dalla Definizione 1.3 segue che:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \vDash_w T & & \\ \mathcal{M} \vDash_w A \leftrightarrow B & \text{sse} & \mathcal{M} \vDash_w A \text{ sse } \mathcal{M} \vDash_w B \\ \mathcal{M} \not\vDash_w \Diamond B & \text{sse} & \text{per ogni } v \in \mathcal{W}, \text{ se } w \mathcal{R} v \text{ allora } \mathcal{M} \not\vDash_v B \\ \mathcal{M} \not\vDash_w \Box B & \text{sse} & \text{esiste } v \in \mathcal{W}, \text{ tale che } w \mathcal{R} v \text{ e } \mathcal{M} \not\vDash_v B \end{array}$$

DEFINIZIONE 1.6 (Verità in un modello) Diciamo che una formula A è *vera in un modello* \mathcal{M} se e solo se essa è vera in ogni punto del modello stesso. Formalmente:

$$\mathcal{M} \vDash A \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } w \in \mathcal{W}, \mathcal{M} \vDash_w A$$

DEFINIZIONE 1.7 (Validità su una struttura) Una formula è *valida su una struttura* \mathcal{F} se e solo se essa è vera in ciascun modello basato su di essa:

$$\mathcal{F} \vDash A \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } \mathcal{F}\text{-modello } \mathcal{M}, \mathcal{M} \vDash A$$

DEFINIZIONE 1.8 (Validità) Una formula è *valida* se e solo se essa è valida su ogni struttura:

$$\vDash A \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } \mathcal{F}, \mathcal{F} \vDash A$$

DEFINIZIONE 1.9 (Validità su una classe di strutture) Una formula è *valida su una classe di strutture* \mathcal{C} , $\mathcal{C} \vDash A$, se è valida in ognuna di esse:

$$\mathcal{C} \vDash A \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } \mathcal{F} \in \mathcal{C}, \mathcal{F} \vDash A$$

DEFINIZIONE 1.10 (Conseguenza semantica) Una formula A è *conseguenza semantica* di un insieme di formule Γ rispetto a una classe di strutture \mathcal{C} , se A è vera in ciascun punto di ciascun modello basato su una struttura in \mathcal{C} che rende vere tutte le formule in Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma \vDash_{\mathcal{C}} A &\quad \text{sse} \quad \text{per ogni } w \in \mathcal{M}, \text{ dove } \mathcal{M} \text{ è basato su } \mathcal{F} \in \mathcal{C}, \\ &(\mathcal{M} \vDash_w \Gamma \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_w A) \end{aligned}$$

Il concetto di validità è strettamente legato alla forma logica di un enunciato: una fbf è valida su una struttura per la sua forma logica e non per le variabili enunciativa che occorrono in essa. Risulta quindi utile introdurre la nozione di *schema* con cui si intende, in breve, una collezione di formule aventi tutte una stessa forma sintattica.

Sia data la formula $\Box(C \wedge D) \rightarrow \Box C$, ove C e D sono variabili metalinguistiche, con l'espressione 'lo schema $\Box(C \wedge D) \rightarrow \Box C$ ' si intende l'insieme di tutte le formule della forma $\Box(E \wedge F) \rightarrow \Box E$, per qualche

E ed F . Per rendere rigoroso questo concetto dobbiamo fare due passaggi: sostituiamo uniformemente le variabili metalinguistiche con variabili enunciative ottenendo così la fbf $\square(p \wedge q) \rightarrow \square p$ e poi applichiamo la regola di sostituzione uniforme ottenendo l'insieme:

$$\Sigma_{\square(p \wedge q) \rightarrow \square p} = \{(\square(p \wedge q) \rightarrow \square p)[B_1/p, B_2/q] : B_1, B_2 \in Fm^\Phi\}$$

L'insieme $\Sigma_{\square(p \wedge q) \rightarrow \square p}$ è ciò che abitualmente si intende con l'espressione 'lo schema $\square(C \wedge D) \rightarrow \square C$ '.

1.3 Schemi validi e non validi

Cominciamo con l'esaminare la valenza semantica di alcuni schemi di formule e di regole che sono centrali per la nostra trattazione. Si tratta delle tautologie classiche, dello schema K , delle regole di Modus ponens, Necessitazione e Sostituzione uniforme.

1. Le tautologie classiche sono valide su ogni struttura.
2. Lo schema

$$K : \quad \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$$

è valido su ogni struttura.

Sia w un qualsiasi mondo di un qualsiasi modello \mathcal{M} basato su una qualsiasi struttura \mathcal{F} . Assumiamo che

- (1) $\mathcal{M} \vDash_w \square(A \rightarrow B)$ e
- (2) $\mathcal{M} \vDash_w \square A$

Dalla Definizione 1.5 segue che

- (3) per ogni v tale che $w \mathcal{R} v$, $\mathcal{M} \vDash_v A \rightarrow B$ da (1)
e
- (4) per ogni v tale che $w \mathcal{R} v$, $\mathcal{M} \vDash_v A$ da (2)
allora
- (5) per ogni v tale che $w \mathcal{R} v$, $\mathcal{M} \vDash_v B$ da (3) e (4)
- (6) $\mathcal{M} \vDash_w \square B$ da (5)

Esercizio 1.1 Mostra che i seguenti schemi sono validi:

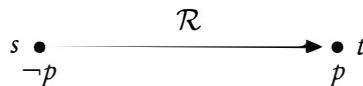
- (1) $\square \top$
- (2) $\square(A \wedge B) \leftrightarrow (\square A \wedge \square B)$

- (3) $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$
- (4) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$
- (5) $\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond B)$

Per mostrare che uno schema non è valido è sufficiente mostrare che una sua istanza non è valida. Si noti che anche se uno schema non è valido, alcune sue istanze possono esserlo, per esempio $\Box \top \rightarrow \top$ è una istanza di $\Box A \rightarrow A$ che è valida, mentre $\Box A \rightarrow A$ non è valido su tutte le strutture. Costruiamo un modello che falsifica $\Box p \rightarrow p$. Sia $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$, ove $\mathcal{W} = \{s, t\}$, $\mathcal{R} = \{\langle s, t \rangle\}$ e $\mathcal{I}(p) = \{t\}$. Il modello \mathcal{M} è rappresentato nella FIG. 1.2. Allora $\mathcal{M} \models_s \Box p$ e $\mathcal{M} \not\models_s p$, dunque $\mathcal{M} \not\models_s \Box p \rightarrow p$.

FIGURA 1.2

Modello che falsifica $\Box p \rightarrow p$



Esercizio 1.2 Mostra che i seguenti schemi non sono validi costruendo modelli che li falsificano.

- (1) $\Diamond \top$
- (2) $\Diamond A \rightarrow \Box A$
- (3) $\Box A \rightarrow A$
- (4) $\Box A \rightarrow \Box \Box A$
- (5) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond B)$
- (6) $\Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A)$
- (7) $\Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$
- (8) $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

1.4

Regole che conservano la validità

- *Modus ponens*

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad MP$$

- *Necessitazione*

$$\frac{A}{\Box A} \quad N$$

- *Sostituzione uniforme*

$$\frac{A}{A[B/p]} \quad SU$$

Esaminiamo la loro valenza semantica.

- *Modus ponens*

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{MP}$$

È facile vedere che la regola del Modus ponens conserva la verità in un punto di un modello:

$$\frac{\mathcal{M} \vDash_w A \quad \mathcal{M} \vDash_w A \rightarrow B}{\mathcal{M} \vDash_w B}$$

Ne segue che per ogni \mathcal{M} ,

$$\frac{\mathcal{M} \vDash A \quad \mathcal{M} \vDash A \rightarrow B}{\mathcal{M} \vDash B}$$

e per ogni \mathcal{F} ,

$$\frac{\mathcal{F} \vDash A \quad \mathcal{F} \vDash A \rightarrow B}{\mathcal{F} \vDash B}$$

- *Necessitazione*

$$\frac{A}{\Box A} \quad N$$

La regola *N* *non* conserva la verità in un punto di un modello, infatti possiamo avere che $\mathcal{M} \vDash_w A$ e contemporaneamente $\mathcal{M} \not\vDash_w \Box A$. Basti pensare al modello $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ basato sulla seguente struttura:



e tale che per qualche variabile enunciativa p , $\mathcal{I}(p) = \{w\}$. Allora $\mathcal{M} \models_w p$ e $\mathcal{M} \not\models_w \Box p$. N conserva però la verità in un modello, ovvero:

$$\frac{\mathcal{M} \models A}{\mathcal{M} \models \Box A}$$

Infatti se esistesse un punto w tale che $\mathcal{M} \not\models_w \Box A$, esisterebbe un $v, w \mathcal{R} v$ tale che $\mathcal{M} \not\models_v A$, contrariamente al fatto che $\mathcal{M} \models A$. Banalmente, per ogni \mathcal{F} :

$$\frac{\mathcal{F} \models A}{\mathcal{F} \models \Box A}$$

- *Sostituzione uniforme*

$$\frac{A}{A[B/p]} \quad SU$$

La regola di Sostituzione uniforme *non* conserva la verità in un modello, infatti possiamo avere che

$$\mathcal{M} \models p \quad \text{e} \quad \mathcal{M} \not\models p[B/p]$$

Basta porre $B := \perp$. La sostituzione però *conserva la validità su una struttura*:

$$\mathcal{F} \models A \Rightarrow \mathcal{F} \models A[B/p]$$

La dimostrazione procede per contrapposizione:

$$(\dagger) \quad \mathcal{F} \not\models A[B/p] \Rightarrow \mathcal{F} \not\models A$$

Supponiamo che $\mathcal{F} \not\models A[B/p]$. Allora

($\dagger\dagger$) esiste un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} , esiste un $w \in \mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \not\models_w A[B/p]$

Sia tale $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$. Consideriamo l'insieme:

$$H_B = \{w \in \mathcal{W} : \mathcal{M} \models_w B\}$$

Definiamo un nuovo modello $\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I}^* \rangle$ ove:

$$\mathcal{I}^*(q) = \begin{cases} \mathcal{I}(q) & \text{se } q \not\equiv p \\ H_B & \text{se } q \equiv p \end{cases}$$

Per ogni $D \in Fm^\Phi$ e per ogni $x \in \mathcal{W}$ facciamo vedere che:

$$(\dagger\dagger\dagger) \quad \mathcal{M} \vDash_x D[B/p] \text{ sse } \mathcal{M}^* \vDash_x D$$

La dimostrazione è per induzione sulla costruzione di D .

Sia $D \equiv q \neq p$. Allora $\mathcal{M} \vDash_x q[B/p]$ sse $\mathcal{M} \vDash_x q$ sse $\mathcal{M}^* \vDash_x q$ (per definizione di \mathcal{I}^*).

Sia $D \equiv p$. Allora $\mathcal{M} \vDash_x p[B/p]$ sse $\mathcal{M} \vDash_x B$ sse $\mathcal{M}^* \vDash_x p$ (poiché $\mathcal{I}^*(p) = H_B$).

Sia $D \equiv \square C$. Per ipotesi induttiva, per ogni $x \in \mathcal{M}$ vale che $\mathcal{M} \vDash_x C[B/p]$ sse $\mathcal{M}^* \vDash_x C$. Allora $\mathcal{M} \vDash_x \square(C[B/p])$ sse per ogni y ($x \mathcal{R} y \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_y C[B/p]$) sse (per ipotesi induttiva), per ogni y , ($x \mathcal{R} y \Rightarrow \mathcal{M}^* \vDash_y C$) sse $\mathcal{M}^* \vDash_x \square C$.

Si dimostri ($\dagger\dagger\dagger$) per tutti gli altri casi: $D \equiv \neg C$, $D \equiv \diamond C$, $D \equiv (C \wedge F)$, $D \equiv (C \vee F)$, $D \equiv (C \rightarrow F)$.

Per il principio di induzione sulla costruzione delle formule, ($\dagger\dagger\dagger$) è dimostrato. Poiché ($\dagger\dagger\dagger$) vale per ogni x ed ogni D , vale in particolare per w e per A , quindi

$$\mathcal{M} \vDash_w A[B/p] \text{ sse } \mathcal{M}^* \vDash_w A$$

Dall'ipotesi ($\dagger\dagger$) segue che $\mathcal{M}^* \not\vDash_w A$. Questo implica che $\mathcal{F} \not\vDash A$.

1.5

Che cos'è una logica modale normale?

Iniziamo col darne una definizione astratta, insiemistica, ovvero definendola come un particolare insieme di formule a prescindere dalla sua *eventuale* presentazione come sistema assiomatico.

Una *logica modale normale* è un insieme $\Gamma \subseteq Fm^\Phi$ tale che:

1. contiene le tautologie classiche;
2. contiene tutte le istanze dello schema $K: \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$;
3. contiene tutte le istanze dello schema $def_\diamond: \diamond A \leftrightarrow \neg \square \neg A$ (il che rende \diamond il duale di \square);
4. è chiuso sotto Modus ponens:

$$MP \quad \text{se } A \in \Gamma \text{ e } A \rightarrow B \in \Gamma, \text{ allora } B \in \Gamma;$$

5. è chiuso sotto Necessitazione:

$$N \quad \text{se } A \in \Gamma \text{ allora } \Box A \in \Gamma;$$

6. è chiuso sotto Sostituzione uniforme:

$$SU \quad \text{se } A \in \Gamma \text{ allora } A[B/p] \in \Gamma.$$

Da quanto stabilito fin qui, è facile mostrare che (*esercizio*):

- l'insieme $\{A : \mathcal{F} \models A\}$ delle formule valide su una struttura è una logica modale normale;
- per ogni classe di strutture \mathcal{C} , l'insieme $\{A : \mathcal{F} \models A, \text{ per ogni } \mathcal{F} \in \mathcal{C}\}$ è una logica modale normale;
- dato un modello \mathcal{M} , l'insieme $\{A : \mathcal{M} \models A\}$ delle formule vere in \mathcal{M} non è in generale una logica modale normale;
- dato un modello \mathcal{M} , l'insieme $\{A : \mathcal{M} \models_w A\}$ delle formule vere in un punto del modello non è in generale una logica modale normale.

Nel proseguo di questo libro saremo particolarmente interessati a studiare gli insiemi di formule valide su singole strutture relazionali o su specifiche classi di strutture relazionali. Di particolare importanza sarà l'insieme delle formule valide su *tutte* le strutture relazionali; tale insieme costituisce infatti la più piccola logica modale normale. Tale logica è chiamata K in onore a Saul Kripke.

In generale, data una classe \mathcal{C} di strutture, sappiamo che l'insieme Γ delle formule valide su \mathcal{C} è una logica modale normale, ma altri quesiti rimangono aperti: l'insieme Γ è assiomatizzabile? L'insieme Γ è finitamente assiomatizzabile? L'insieme Γ è decidibile?

1.6 Chiusura riflessiva e transitiva

DEFINIZIONE 1.11 (\Box^n e \Diamond^n)

$$\begin{aligned} \Box^0 A &= A \\ \Box^{n+1} A &= \Box(\Box^n A) \\ \Diamond^0 A &= A \\ \Diamond^{n+1} A &= \Diamond(\Diamond^n A) \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.12 (\mathcal{R}^n) Sia data la relazione binaria \mathcal{R} . Definiamo:

$$\begin{aligned} s \mathcal{R}^0 t &\Leftrightarrow s = t \\ s \mathcal{R}^{n+1} t &\Leftrightarrow \exists z (s \mathcal{R}^n z \wedge z \mathcal{R} t) \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.13 (Chiusura riflessiva e transitiva di \mathcal{R}) Data una relazione binaria \mathcal{R} , la relazione \mathcal{R}^* resta così definita:

$$s\mathcal{R}^*t \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} (s\mathcal{R}^n t)$$

\mathcal{R}^* è detta *chiusura riflessiva e transitiva* di \mathcal{R} .

Esercizio 1.3 Dimostrare le seguenti uguaglianze (suggerimento: procedere per induzione su n):

1. $\Box^1 A = \Box A$
2. $\Diamond^1 A = \Diamond A$
3. $\Box^n(\Box^m A) = \Box^{n+m} A$
4. $\Diamond^n(\Diamond^m A) = \Diamond^{n+m} A$

Esercizio 1.4 Dimostrare che:

1. $s\mathcal{R}^1 t \Leftrightarrow s\mathcal{R} t$
2. $s\mathcal{R}^n t \wedge t\mathcal{R}^m y \Rightarrow s\mathcal{R}^{n+m} y$

Esercizio 1.5 Data una relazione binaria \mathcal{R} , mostra che la relazione \mathcal{R}^* (chiusura riflessiva e transitiva di \mathcal{R}) è riflessiva e transitiva. (Suggerimento: sfruttare l'Esercizio 1.4)

LEMMA 1.14 Sia \mathcal{S} una relazione riflessiva e transitiva tale che $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Allora $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{S}$.

Dimostrazione Dobbiamo mostrare che se $w\mathcal{R}^*s$ allora $w\mathcal{S}s$. Sia $w\mathcal{R}^*s$, allora per qualche n , $w\mathcal{R}^n s$. Dobbiamo dimostrare che: $w\mathcal{S}s$. Si procede per induzione su n .

- Sia $n = 0$. Per la Definizione 1.12, risulta che $s = w$. Dobbiamo perciò provare che $s\mathcal{S}s$, ma questo segue immediatamente dalla riflessività di \mathcal{S} .
- Sia $n = m + 1$. L'ipotesi induttiva è che il teorema valga per $n = m$, vogliamo mostrare che: $w\mathcal{R}^{m+1}s$ implica $w\mathcal{S}s$. Per la Definizione 1.12, questo equivale a provare che esiste uno z tale che:

$$\text{se } (w\mathcal{R}^m z \text{ e } z\mathcal{R}s) \text{ allora } w\mathcal{S}s$$

Per l'ipotesi induttiva questo implica che:

$$\text{se } (w\mathcal{S}z \text{ e } z\mathcal{R}s) \text{ allora } w\mathcal{S}s$$

Poiché $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, allora abbiamo che:

$$\text{se } (w \mathcal{S} z \text{ e } z \mathcal{S} s) \text{ allora } w \mathcal{S} s$$

Questo vale poiché \mathcal{S} è transitiva. \square

Osservazione 1 Il Lemma 1.14 ci dice che \mathcal{R}^* è la più piccola relazione riflessiva e transitiva che estende \mathcal{R} .

LEMMA 1.15 *Per ogni modello $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$, per ogni mondo $w \in \mathcal{W}$ e per ogni formula A ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models_w \Box^n A &\quad \text{sse} \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{W}, \text{ se } w \mathcal{R}^n v \text{ allora } \mathcal{M} \models_v A \\ \mathcal{M} \models_w \Diamond^n A &\quad \text{sse} \quad \text{esiste un } v \in \mathcal{W} \text{ tale che } w \mathcal{R}^n v \text{ e } \mathcal{M} \models_v A \end{aligned}$$

Dimostrazione Dimostriamo il caso \Box^n per induzione su n . Il caso $n = 0$ è immediato.

Se $n = m + 1$, per ipotesi induttiva (I.I.) si ha che $\mathcal{M} \models_w \Box^m A$ sse per ogni $v \in \mathcal{W}$, se $w \mathcal{R}^m v$ allora $\mathcal{M} \models_v A$. Dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models_w \Box^{m+1} A &\quad \text{sse } \mathcal{M} \models_w \Box(\Box^m A) \\ &\quad \text{sse per ogni } t \in \mathcal{W}, \text{ se } w \mathcal{R} t \text{ allora } \mathcal{M} \models_t \Box^m A \quad (\text{I.I.}) \\ &\quad \text{sse per ogni } v, t \in \mathcal{W}, \text{ se } w \mathcal{R} t \text{ e } t \mathcal{R}^m v \text{ allora } \mathcal{M} \models_v A \\ &\quad \text{sse per ogni } v \in \mathcal{W}, \text{ se } w \mathcal{R}^{m+1} v \text{ allora } \mathcal{M} \models_v A \end{aligned}$$

Il caso \Diamond^n segue per dualità. \square

Corrispondenza e non esprimibilità

Particolari classi di strutture possono essere isolate imponendo condizioni alla relazione \mathcal{R} . Ad esempio, possiamo voler considerare solo quelle strutture in cui \mathcal{R} è riflessiva oppure riflessiva e transitiva. La domanda a cui intende rispondere questo capitolo è se queste stesse classi di strutture possano essere isolate attraverso formule modali, nel senso che queste strutture siano esattamente quelle su cui sono valide particolari formule modali. Mostreremo che in molti casi la risposta è positiva.

Per semplicità, diremo che una struttura $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ gode della proprietà \mathcal{P} se la relazione \mathcal{R} ne gode e scriveremo $\mathcal{F} \triangleright \mathcal{P}$.

In sintesi, ci chiediamo se la proprietà che definisce una certa classe di strutture relazionali, ad esempio la riflessività della relazione \mathcal{R} , corrisponda ad una formula modale, ovvero se per qualche formula modale A , si abbia che:

$$\text{per ogni } \mathcal{F} (\mathcal{F} \models A \text{ sse } \mathcal{F} \triangleright w\mathcal{R}w, \text{ per ogni } w \in W)$$

Generalizziamo quanto detto sopra per qualsiasi proprietà \mathcal{P} .

DEFINIZIONE 2.1 (Corrispondenza) Se vale che:

$$\text{per ogni } \mathcal{F} (\mathcal{F} \models A \text{ sse } \mathcal{F} \triangleright \mathcal{P})$$

diciamo che A corrisponde a \mathcal{P} .

In questo capitolo considereremo solo proprietà \mathcal{P} che possono essere espresse mediante una qualche formula di un linguaggio del primo ordine con identità contenente un simbolo per la relazione \mathcal{R} ¹.

1. Si veda il CAP. 7 per un risultato di corrispondenza rispetto a una formula del secondo ordine.

TABELLA 2.1

Alcune proprietà della relazione \mathcal{R}

Proprietà di \mathcal{R}	Definizione
Riflessività	$\forall s (s \mathcal{R} s)$
Transitività	$\forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge t \mathcal{R} u \rightarrow s \mathcal{R} u)$
Serialità	$\forall s \exists t (s \mathcal{R} t)$
Densità debole	$\forall s \forall t (s \mathcal{R} t \rightarrow \exists w (s \mathcal{R} w \wedge w \mathcal{R} t))$
Simmetria	$\forall s \forall t (s \mathcal{R} t \rightarrow t \mathcal{R} s)$
Euclidea	$\forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge s \mathcal{R} u \rightarrow t \mathcal{R} u)$
Convergenza debole	$\forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge s \mathcal{R} u \rightarrow \exists v (t \mathcal{R} v \wedge u \mathcal{R} v))$
Convergenza	$\forall s \forall t \exists u (s \mathcal{R} u \wedge t \mathcal{R} u)$
Connessione debole	$\forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge s \mathcal{R} u \rightarrow t \mathcal{R} u \vee u \mathcal{R} t \vee t = u)$
Connessione	$\forall s \forall t (s \mathcal{R} t \vee t \mathcal{R} s \vee s = t)$
Funzionalità parziale	$\forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge s \mathcal{R} u \rightarrow t = u)$
Funzionalità	$\forall s \exists ! t (s \mathcal{R} t)$
Isolamento	$\forall s \forall t (s \mathcal{R} t \leftrightarrow s = t)$
Cecità	$\forall s \forall t \neg(s \mathcal{R} t)$
$m n k j$ -Lemmon	$\forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R}^m t \wedge s \mathcal{R}^k u \rightarrow \exists v (t \mathcal{R}^n v \wedge u \mathcal{R}^j v))$

2.1

Risultati di corrispondenza

In questo paragrafo mostriamo le corrispondenze elencate nella TAB. 2.2.

TEOREMA 2.2 *Lo schema T corrisponde alla riflessività.*

$$\mathcal{F} \models \Box A \rightarrow A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s (s \mathcal{R} s)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Sia $s \in \mathcal{W}$. Definiamo un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} ponendo

$$\mathcal{I}(p) = \{w \in \mathcal{W} : s \mathcal{R} w\}$$

Allora $\mathcal{M} \vDash_s \Box p$, da cui $\mathcal{M} \vDash_s p$, poiché $\mathcal{F} \models \Box A \rightarrow A$, quindi $s \in \mathcal{I}(p)$. Possiamo allora concludere che $s \mathcal{R} s$.

(\Leftarrow) Sia \mathcal{F} riflessiva, \mathcal{M} un \mathcal{F} -modello e $\mathcal{M} \vDash_s \Box A$. Allora $\mathcal{M} \vDash_s A$, dunque $\mathcal{M} \vDash_s \Box A \rightarrow A$. □

TABELLA 2.2

Schemi e proprietà corrispondenti

Nome	Schema	Proprietà di \mathcal{R}
T	$\square A \rightarrow A$	riflessività
4	$\square A \rightarrow \square\square A$	transitività
D	$\square A \rightarrow \Diamond A$	serialità
X	$\square\square A \rightarrow \square A$	densità debole
B	$A \rightarrow \square\Diamond A$	simmetria
5	$\Diamond A \rightarrow \square\Diamond A$	euclidea
2	$\Diamond\square A \rightarrow \square\Diamond A$	convergenza debole
3	$\square(A \wedge \square A \rightarrow B) \vee \square(\square B \wedge B \rightarrow A)$	connessione debole
PF	$\Diamond A \rightarrow \square A$	funzionalità parziale
F	$\Diamond A \leftrightarrow \square A$	funzionalità
$Triv$	$A \leftrightarrow \square A$	isolamento
Ver	$\square A$	cecità
$Lemmon$	$\Diamond^m \square^n A \rightarrow \square^k \Diamond^j A$	$m n k j$ -Lemmon

TEOREMA 2.3 *Lo schema 4 corrisponde alla transitività.*

$$\mathcal{F} \models \square A \rightarrow \square\square A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge t \mathcal{R} u \rightarrow s \mathcal{R} u)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Per mostrare che \mathcal{R} è transitiva, siano s, t, u tali che $s \mathcal{R} t$ e $t \mathcal{R} u$. Consideriamo un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} , tale che:

$$\mathcal{I}(p) = \{w \in \mathcal{W} : s \mathcal{R} w\}$$

Allora $\mathcal{M} \models_s \square p$ e quindi $\mathcal{M} \models_s \square\square p$, poiché $\mathcal{F} \models \square A \rightarrow \square\square A$, da cui $\mathcal{M} \models_t \square p$, e $\mathcal{M} \models_u p$. Ne segue che $u \in \mathcal{I}(p)$, e quindi $s \mathcal{R} u$. (\Leftarrow) Sia \mathcal{R} transitiva. Sia \mathcal{M} un \mathcal{F} -modello. Per mostrare che $\mathcal{M} \models \square A \rightarrow \square\square A$, si consideri un qualsiasi $s \in \mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models_s \square A$. Dobbiamo mostrare che $\mathcal{M} \models_s \square\square A$, ovvero che $s \mathcal{R} t$ implica che $\mathcal{M} \models_t \square A$, in altre parole, $s \mathcal{R} t$ implica che ($t \mathcal{R} u$ implica che $\mathcal{M} \models_u A$). Così si supponga che $s \mathcal{R} t$ e $t \mathcal{R} u$. Abbiamo $s \mathcal{R} u$ grazie alla transitività, così $\mathcal{M} \models_u A$, poiché $\mathcal{M} \models_s \square A$ per ipotesi. \square TEOREMA 2.4 *Lo schema D corrisponde alla serialità.*

$$\mathcal{F} \models \square A \rightarrow \Diamond A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s \exists t (s \mathcal{R} t)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Sia $s \in \mathcal{W}$. Definiamo un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} ponendo

$$\mathcal{I}(p) = \{w \in \mathcal{W} : s \mathcal{R} w\}$$

Allora $\mathcal{M} \models_s \square p$, da cui $\mathcal{M} \models_s \Diamond p$, poiché $\mathcal{F} \models \square A \rightarrow \Diamond A$; quindi esiste un t , tale che $s \mathcal{R} t$.

(\Leftarrow) Sia \mathcal{F} seriale e sia \mathcal{M} un \mathcal{F} -modello ove per qualche s , $\mathcal{M} \models_s \Box A$. Poiché \mathcal{F} è seriale, $s \mathcal{R} t$ per qualche t , e dunque $\mathcal{M} \models_t A$; ne segue che $\mathcal{M} \models_s \Diamond A$, da cui $\mathcal{M} \models_s \Box A \rightarrow \Diamond A$. \square

TEOREMA 2.5 *Lo schema X corrisponde alla densità debole.*

$$\mathcal{F} \models \Box \Box A \rightarrow \Box A \quad \text{sse} \quad \forall s \forall t (s \mathcal{R} t \rightarrow \exists u (s \mathcal{R} u \wedge u \mathcal{R} t))$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Supponiamo che $s \mathcal{R} t$. Sia \mathcal{M} un \mathcal{F} -modello ove

$$\mathcal{I}(p) = \{w \in \mathcal{W} : w \neq t\}$$

Allora $\mathcal{M} \not\models_t p$, così $\mathcal{M} \not\models_s \Box p$. Quindi $\mathcal{M} \not\models_s \Box \Box p$ poiché $\mathcal{F} \models \Box \Box A \rightarrow \Box A$; ne segue che esiste un u , $s \mathcal{R} u$ e $\mathcal{M} \not\models_u \Box p$. Allora per qualche v , $u \mathcal{R} v$ e $\mathcal{M} \not\models_v p$; dunque data la definizione di $\mathcal{I}(p)$, $v = t$, così che \mathcal{R} è debolmente densa.

(\Leftarrow) *Esercizio.* \square

TEOREMA 2.6 *Lo schema B corrisponde alla simmetria.*

$$\mathcal{F} \models A \rightarrow \Box \Diamond A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t (s \mathcal{R} t \rightarrow t \mathcal{R} s)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Siano s e t tali che $s \mathcal{R} t$. Consideriamo un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} in cui

$$\mathcal{I}(p) = \{s\}$$

Allora $\mathcal{M} \models_s p$. Poiché $\mathcal{F} \models A \rightarrow \Box \Diamond A$, $\mathcal{M} \models_s \Box \Diamond p$, da cui $\mathcal{M} \models_t \Diamond p$. Quindi esiste v tale che $t \mathcal{R} v$ e $\mathcal{M} \models_v p$. Ne segue che esiste v , con $t \mathcal{R} v$, e $v = s$, da cui $t \mathcal{R} s$. Dunque \mathcal{R} è simmetrica.

(\Leftarrow) *Esercizio.* \square

TEOREMA 2.7 *Lo schema S corrisponde alla proprietà euclidea.*

$$\mathcal{F} \models \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge s \mathcal{R} u \rightarrow t \mathcal{R} u)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Siano s, t ed u tali che $s \mathcal{R} t$ e $s \mathcal{R} u$. Consideriamo un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} tale che:

$$\mathcal{I}(p) = \{u\}$$

Allora, $\mathcal{M} \models_u p$, $\mathcal{M} \models_s \Diamond p$, $\mathcal{M} \models_s \Box \Diamond p$, poiché $\mathcal{F} \models \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$, quindi $\mathcal{M} \models_t \Diamond p$. Allora esiste v tale che $t \mathcal{R} v$ e $\mathcal{M} \models_v p$, da cui $t \mathcal{R} v$ e $v = u$, quindi $t \mathcal{R} u$.

(\Leftarrow) *Esercizio.* \square

TEOREMA 2.8 *Lo schema 2 corrisponde alla convergenza debole.*

$$\mathcal{F} \models \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A \text{ sse } \mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge s \mathcal{R} u \rightarrow \exists v (t \mathcal{R} v \wedge u \mathcal{R} v))$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Supponiamo che $s \mathcal{R} t$ e $s \mathcal{R} u$. Consideriamo un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} in cui

$$\mathcal{I}(p) = \{w : u \mathcal{R} w\}$$

Allora $\mathcal{M} \models_u \Box p$ e quindi, poiché $s \mathcal{R} u$, $\mathcal{M} \models_s \Diamond \Box p$. Poiché $\mathcal{F} \models \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$, si ha che $\mathcal{M} \models_s \Box \Diamond p$, e dunque $\mathcal{M} \models_t \Diamond p$. Questo implica che esiste un v tale che $t \mathcal{R} v$ e $\mathcal{M} \models_v p$, ovvero $v \in \mathcal{I}(p)$, da cui $u \mathcal{R} v$, come desiderato.

(\Leftarrow) *Esercizio.* □

TEOREMA 2.9 *Lo schema 3 corrisponde alla connessione debole.*

$$\mathcal{F} \models \Box(\Box A \wedge A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \wedge B \rightarrow A) \quad \text{sse}$$

$$\mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge s \mathcal{R} u \rightarrow t \mathcal{R} u \vee u \mathcal{R} t \vee t = u)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Siano s, t ed u tali che $s \mathcal{R} t$ e $s \mathcal{R} u$. Consideriamo un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} in cui

$$\mathcal{I}(p) = \{w : t \mathcal{R} w\} \cup \{t\}$$

$$\mathcal{I}(q) = \{w : u \mathcal{R} w\} \cup \{u\}$$

Allora, $\mathcal{M} \models_t p \wedge \Box p$ e $\mathcal{M} \models_u q \wedge \Box q$. Poiché $\mathcal{F} \models \Box(\Box A \wedge A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \wedge B \rightarrow A)$, in particolare $\mathcal{M} \models_s \Box(\Box p \wedge p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \wedge q \rightarrow p)$. Assumiamo che $\mathcal{M} \models_s \Box(\Box p \wedge p \rightarrow q)$. Allora $\mathcal{M} \models_t \Box p \wedge p \rightarrow q$ e $\mathcal{M} \models_t q$. Da cui $u \mathcal{R} t$ oppure $t = u$. Analogamente se $\mathcal{M} \models_s \Box(\Box q \wedge q \rightarrow p \rightarrow p)$.

(\Leftarrow) Procediamo per assurdo. Sia \mathcal{F} una struttura debolmente connessa tale che per qualche formula $A, B, \mathcal{F} \not\models \Box(A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \wedge B \rightarrow A)$. Allora esiste un \mathcal{F} -modello $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ ed esiste un mondo $w \in \mathcal{W}$ tale che $\mathcal{M} \not\models_w \Box(A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \wedge B \rightarrow A)$, ovvero $\mathcal{M} \not\models_w \Box(A \wedge \Box A \rightarrow B)$ e $\mathcal{M} \not\models_w \Box(\Box B \wedge B \rightarrow A)$. Quindi esistono due mondi v ed s tali $w \mathcal{R} v$ e $w \mathcal{R} s$ tali che $\mathcal{M} \models_v A, \mathcal{M} \models_v \Box A, \mathcal{M} \not\models_v B, \mathcal{M} \models_s B, \mathcal{M} \models_s \Box B$ e $\mathcal{M} \not\models_s A$.

Queste condizioni di verità escludono che si abbia $v \mathcal{R} s$ oppure $s \mathcal{R} v$ oppure $v = s$, contrariamente al fatto che \mathcal{F} è debolmente connessa. □

TEOREMA 2.10 *Lo schema $P F$ corrisponde alla funzionalità parziale.*

$$\mathcal{F} \models \Diamond A \rightarrow \Box A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R} t \wedge s \mathcal{R} u \rightarrow t = u)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Siano s, t e u tali che $s \mathcal{R} t$ e $s \mathcal{R} u$. Consideriamo un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} in cui

$$\mathcal{I}(p) = \{u\}$$

Allora $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond p$, $\mathcal{M} \vDash_s \Box p$, poiché $\mathcal{F} \models \Diamond A \rightarrow \Box A$. Quindi $\mathcal{M} \vDash_t p$, da cui $t = u$.

(\Leftarrow) *Esercizio.* □

TEOREMA 2.11 *Lo schema F corrisponde alla funzionalità.*

$$\mathcal{F} \models \Diamond A \leftrightarrow \Box A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s \exists !t (s \mathcal{R} t)$$

Dimostrazione Segue dai Teoremi 2.6 (serialità) e 2.10 (funzionalità parziale). □

TEOREMA 2.12 *Lo schema $Tri v$ corrisponde all'isolamento.*

$$\mathcal{F} \models A \leftrightarrow \Box A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t (s \mathcal{R} t \leftrightarrow s = t)$$

Dimostrazione Sia $s \in \mathcal{W}$. Costruiamo il seguente \mathcal{F} -modello \mathcal{M} in cui

$$\mathcal{I}(p) = \{s\}$$

Allora $\mathcal{M} \vDash_s p$ e di conseguenza $\mathcal{M} \vDash_s \Box p$ poiché $\mathcal{F} \models A \leftrightarrow \Box A$. Quindi per ogni mondo t relato ad s , si ha che $\mathcal{M} \vDash_t p$, da cui $t = s$.

(\Leftarrow) *Esercizio.* □

TEOREMA 2.13 *Lo schema Ver corrisponde alla cecità.*

$$\mathcal{F} \models \Box A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t \neg(s \mathcal{R} t)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Se $\mathcal{F} \models \Box A$, allora $\mathcal{F} \models \Box \perp$, quindi nessun mondo può essere relato a qualche altro mondo.

(\Leftarrow) *Esercizio.* □

TEOREMA 2.14 Lo schema $m n k j$ -Lemmon corrisponde alla proprietà $m n k j$ -Lemmon.

$$\mathcal{F} \models \Diamond^m \Box^n A \rightarrow \Box^k \Diamond^j A \text{ sse } \mathcal{F} \triangleright \forall s \forall t \forall u (s \mathcal{R}^m t \wedge s \mathcal{R}^k u \rightarrow \\ \exists v (t \mathcal{R}^n v \wedge u \mathcal{R}^j v))$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Supponiamo che esistano s, t ed u tali che $(s \mathcal{R}^m t \wedge s \mathcal{R}^k u)$. Costruiamo il seguente \mathcal{F} -modello \mathcal{M} in cui

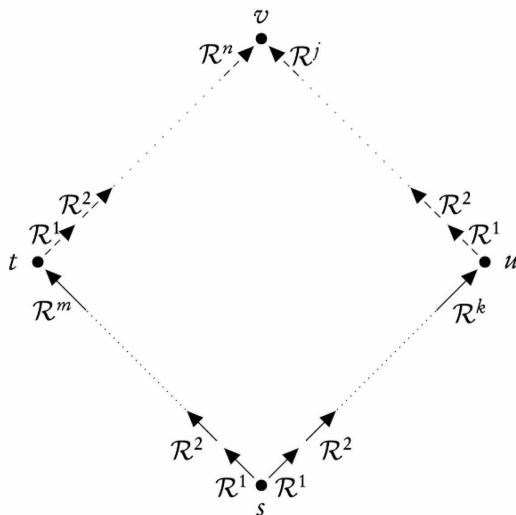
$$\mathcal{I}(p) = \{w \in \mathcal{W} : t \mathcal{R}^n w\}$$

Allora $\mathcal{M} \vDash_t \Box^n p$ per def. di $\mathcal{I}(p)$ e $\mathcal{M} \vDash_s \Diamond^m \Box^n p$, poiché $s \mathcal{R}^m t$. Poiché $\mathcal{F} \models \Diamond^m \Box^n A \rightarrow \Box^k \Diamond^j A$, $\mathcal{M} \vDash_s \Box^k \Diamond^j p$. Quindi $\mathcal{M} \vDash_u \Diamond^j p$. Questo implica che esiste un v , con $u \mathcal{R}^j v$ e $\mathcal{M} \vDash_v p$, ovvero $v \in \mathcal{I}(p)$, da cui $t \mathcal{R}^n v$.

(\Leftarrow) *Esercizio.*

□

FIGURA 2.1
m n k j-Lemmon



Esercizio 2.1 Mostra che lo schema $MV := \Box A \vee \Diamond \Box A$ corrisponde alla proprietà che ogni mondo o è un punto cieco o è relato ad un punto cieco.

Esercizio 2.2 Mostra che tutte le formule considerate fin qui, eccetto gli schemi 3 e *Ver*, sono casi particolari di formule di Lemmon.

2.2 Proprietà non esprimibili

I risultati positivi che abbiamo fin qui esposti, e addirittura generalizzazioni del teorema *mnkj-Lemmon* quale il teorema di Sahlqvist, non devono indurci a pensare che non esistano proprietà del primo ordine non esprimibili da formule modali. Invero proprietà quali l'irriflessività e l'antisimmetria non sono esprimibili. Per mostrare ciò abbiamo bisogno di introdurre dei concetti nuovi relativi alla trasformazione di modelli, in genere da modelli ‘complessi’ a modelli più ‘semplici’ purché conservino certe proprietà modali, in particolare quella di essere ‘modalmente equivalenti’.

Cominciamo col presentare due tecniche per trasformare modelli o per metterli in relazione con altri che potremmo dire ‘simili’. Queste due tecniche prendono il nome di *generazione di sottomodelli* e *p-morfismo* fra modelli.

2.2.1. SOTTOMODELLI GENERATI

La costruzione del sottomodello generato nasce dalla constatazione che il valore di verità di un enunciato A in un punto v di un modello dipende esclusivamente da ‘ciò che accade’ nei mondi raggiungibili a partire da v con un numero finito di \mathcal{R} -passi.

DEFINIZIONE 2.15 (Sottomodello generato) Dato un modello

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$$

chiamiamo il seguente modello

$$\mathcal{M}^v =_{\text{def}} \langle \mathcal{W}^v, \mathcal{R}^v, \mathcal{I}^v \rangle$$

sottomodello generato da $v \in \mathcal{W}$ dove:

- $\mathcal{W}^v = \{z \in \mathcal{W} : v \mathcal{R}^* z\}$, ove \mathcal{R}^* è la chiusura riflessiva e transitiva di \mathcal{R} ;
- $\mathcal{R}^v = \mathcal{R} \cap (\mathcal{W}^v \times \mathcal{W}^v)$;
- $\mathcal{I}^v(p) = \mathcal{I}(p) \cap \mathcal{W}^v$.

La struttura $\mathcal{F}^v := \langle \mathcal{W}^v, \mathcal{R}^v \rangle$ è la *sottostruttura* di $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ generata da v , anche detta struttura con *radice* v .

LEMMA 2.16 *Dati $A \in Fm^\Phi$ e $z \in \mathcal{W}^v$:*

$$\mathcal{M}^v \models_z A \quad \text{sse} \quad \mathcal{M} \models_z A$$

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza di $A \in Fm^\Phi$. Dimostriamo, come esempio, il caso in cui $A \equiv \Box B$, cioè dimostriamo che:

$$\mathcal{M}^v \models_z \Box B \quad \text{sse} \quad \mathcal{M} \models_z \Box B$$

(\Leftarrow) Supponiamo $\mathcal{M} \models_z \Box B$. Consideriamo un qualsiasi $u \in \mathcal{W}^v$ tale che $z \mathcal{R}^v u$. Allora $z \mathcal{R} u$ vale immediatamente per definizione di \mathcal{R}^v in quanto $\mathcal{R}^v \subseteq \mathcal{R}$. Per Definizione 1.5 vale $\mathcal{M} \models_u B$, da cui, per ipotesi di induzione, ricaviamo $\mathcal{M}^v \models_u B$. Possiamo così concludere $\mathcal{M}^v \models_z \Box B$ per Definizione 1.5.

(\Rightarrow) Supponiamo $\mathcal{M}^v \models_z \Box B$, e dunque che per ogni u , $(z \mathcal{R}^v u \Rightarrow \mathcal{M}^v \models_u B)$. Dobbiamo far vedere che per ogni u ($z \mathcal{R} u \Rightarrow \mathcal{M} \models_u B$). Consideriamo un qualsiasi $u \in \mathcal{W}$ tale che $z \mathcal{R} u$ e facciamo vedere che vale $z \mathcal{R}^v u$. Infatti $v \mathcal{R}^* z$ si dà giacché $z \in \mathcal{W}^v$, ed in più $z \mathcal{R} u$ vale per ipotesi. Da questo segue $v \mathcal{R}^* u$ per la Definizione 2.15. Questo significa che $u \in \mathcal{W}^v$. Allora $z, u \in \mathcal{W}^v$, $z \mathcal{R} u$, e quindi $z \mathcal{R}^v u$ per definizione di \mathcal{R}^v , da cui $\mathcal{M}^v \models_u B$. Per ipotesi di induzione si ha dunque che $\mathcal{M} \models_u B$, possiamo così concludere $\mathcal{M} \models_z \Box B$ per Definizione 1.5. \square

Osservazione 2 Attraverso l'utilizzo di opportuni sottomodelli generati mostreremo che le proprietà di *convergenza* e *connessione* non corrispondono ad alcuna formula modale. Vedi i Teoremi 2.25 e 2.26.

2.2.2. P-MORFISMI

DEFINIZIONE 2.17 (p-morfismo fra strutture) Date due strutture relazionali $\mathcal{F}_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{R}_1 \rangle$ e $\mathcal{F}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{R}_2 \rangle$, chiamiamo *p-morfismo* tra \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 ² una funzione $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ che gode delle seguenti proprietà:

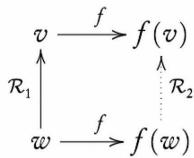
2. Anziché p-morfismo, alcuni chiamano questa particolare funzione *morfismo limitato* (dall'inglese: *bounded morphism*).

1. (*forth condition*)

$$\forall w, v \in \mathcal{W}_1 (w \mathcal{R}_1 v \Rightarrow f(w) \mathcal{R}_2 f(v))$$

Questa proprietà è descritta graficamente dalla FIG. 2.2.

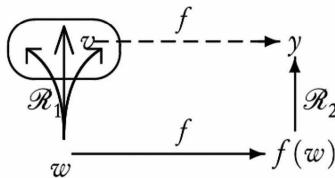
FIGURA 2.2

Forth condition2. (*back condition*)

$$\forall w \in \mathcal{W}_1 \forall y \in \mathcal{W}_2 (f(w) \mathcal{R}_2 y \Rightarrow \exists v \in \mathcal{W}_1 (w \mathcal{R}_1 v \wedge f(v) = y)).$$

Questa proprietà è descritta graficamente dalla FIG. 2.3.

FIGURA 2.3

Back condition

Osservazione 3 La condizione 2 dice che y è immagine sotto la funzione f di *almeno* un mondo relato a w . Ovviamente possono esserci altri mondi relativi allo stesso w che *non vengono mappati* sull'elemento y del codominio, come possono esserci mondi di \mathcal{W}_1 non relativi a w che vengono mappati su y .

DEFINIZIONE 2.18 (p-morfismo fra modelli) Dati i modelli $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{I}_1 \rangle$ e $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{I}_2 \rangle$, la funzione $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ è un *p-morfismo fra i modelli* \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se soddisfa oltre alle condizioni 1 e 2 della Definizione 2.17 anche la seguente condizione:

$$3. \quad \forall w \in \mathcal{W}_1 (w \in \mathcal{I}_1(p) \iff f(w) \in \mathcal{I}_2(p))$$

LEMMA 2.19 (Lemma del p -morfismo fra modelli) *Dati $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{I}_1 \rangle$ e $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{I}_2 \rangle$ ed un p -morfismo $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ tra \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 , per ogni $w \in \mathcal{W}_1$ vale che:*

$$\mathcal{M}_1 \vDash_w A \text{ sse } \mathcal{M}_2 \vDash_{f(w)} A$$

Dimostrazione Il lemma si dimostra per induzione sulla costruzione della formula A . Dimostriamo, come esempio, il caso in cui: $A \equiv \square B$, ovvero dimostriamo che

$$\mathcal{M}_1 \vDash_w \square B \text{ sse } \mathcal{M}_2 \vDash_{f(w)} \square B$$

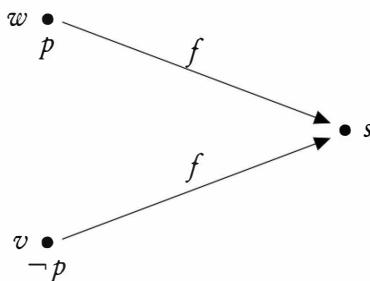
(\Leftarrow) Supponiamo che $\mathcal{M}_2 \vDash_{f(w)} \square B$. Consideriamo un qualsiasi $v \in \mathcal{W}_1$ tale che $w \mathcal{R}_1 v$. Per la *forth condition* della Definizione 2.17, $f(w) \mathcal{R}_2 f(v)$. Dall'assunzione $\mathcal{M}_2 \vDash_{f(w)} \square B$ segue $\mathcal{M}_2 \vDash_{f(v)} B$. Per ipotesi di induzione, $\mathcal{M}_1 \vDash_v B$. Ne segue che $\mathcal{M}_1 \vDash_w \square B$.

(\Rightarrow) Sia $\mathcal{M}_1 \vDash_w \square B$. Prendiamo un qualsiasi $y \in \mathcal{W}_2$ tale che $f(w) \mathcal{R}_2 y$. Per la *back condition*, $y = f(v)$ per un certo $v \in \mathcal{W}_1$ tale che $w \mathcal{R}_1 v$. Poiché $\mathcal{M}_1 \vDash_w \square B$, abbiamo che $\mathcal{M}_1 \vDash_v B$. Per ipotesi di induzione $\mathcal{M}_2 \vDash_{f(v)} B$, ovvero $\mathcal{M}_2 \vDash_y B$. Ne segue che $\mathcal{M}_2 \vDash_{f(w)} \square B$. \square

Osservazione 4 La condizione 3 è molto forte. Esistono infatti modelli \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 basati rispettivamente su strutture \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 tali che esiste un p -morfismo f tra \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , ma non esiste alcun p -morfismo tra \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 . Un esempio è mostrato in FIG. 2.4: chiaramente p non può essere né vero né falso in s .

FIGURA 2.4

f non può essere un p -morfismo fra modelli



DEFINIZIONE 2.20 (p-morfismo suriettivo) Dati i modelli $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{I}_1 \rangle$ e $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{I}_2 \rangle$ ed un p-morfismo $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ fra loro, diciamo che f è un *p-morfismo suriettivo* se f è una funzione suriettiva³.

DEFINIZIONE 2.21 (Immagine p-morfa) Se $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ è un p-morfismo suriettivo tra due strutture, allora diremo che \mathcal{F}_2 è *immagine p-morfa di* \mathcal{F}_1 .

LEMMA 2.22 (Lemma del p-morfismo suriettivo fra modelli) *Dati due modelli ed un p-morfismo $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ fra loro, se f è suriettivo vale che:*

$$\mathcal{M}_1 \vDash A \quad \text{sse} \quad \mathcal{M}_2 \vDash A$$

Dimostrazione Per la Definizione 1.6 abbiamo che:

$$\mathcal{M}_1 \vDash A \quad \text{sse} \quad \forall w \in \mathcal{W}_1 (\mathcal{M}_1 \vDash_w A)$$

Per il Lemma 2.19, sappiamo che:

$$\forall w \in \mathcal{W}_1 (\mathcal{M}_1 \vDash_w A) \quad \text{sse} \quad \forall y \in f(\mathcal{W}_1) (\mathcal{M}_2 \vDash_y A)$$

dove $f(\mathcal{W}_1) = \{y \in \mathcal{W}_2 : \exists w \in \mathcal{W}_1 (f(w) = y)\}$. Essendo il p-morfismo suriettivo, questo equivale a:

$$\forall w \in \mathcal{W}_1 (\mathcal{M}_1 \vDash_w A) \quad \text{sse} \quad \forall s \in \mathcal{W}_2 (\mathcal{M}_2 \vDash_s A)$$

Allora, sempre per 1.6, abbiamo che:

$$\mathcal{M}_1 \vDash A \quad \text{sse} \quad \mathcal{M}_2 \vDash A$$

□

LEMMA 2.23 Siano \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 due strutture e sia $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ un p-morfismo tra \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . Allora per ogni \mathcal{F}_2 -modello \mathcal{M}_2 esiste un \mathcal{F}_1 -modello \mathcal{M}_1 tale che f è p-morfismo tra \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 .

Dimostrazione Si ponga $\mathcal{I}_1(p) = \{w \in \mathcal{W}_1 : \mathcal{M}_2 \vDash_{f(w)} p\}$.

□

3. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta *suriettiva* se vale $\forall y \in B \ \exists x \in A (f(x) = y)$.

Si noti che l'inverso non vale necessariamente (cfr. Esercizio 2.3).

LEMMA 2.24 (Lemma del p-morfismo suriettivo fra strutture) *Date due strutture ed un p-morfismo $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ fra loro, se f è suriettivo vale che:*

$$\mathcal{F}_1 \models A \Rightarrow \mathcal{F}_2 \models A$$

Dimostrazione La dimostrazione procede per contrapposizione, ovvero mostriamo che:

$$\mathcal{F}_2 \not\models A \Rightarrow \mathcal{F}_1 \not\models A$$

Sia $\mathcal{F}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{R}_2 \rangle$, tale che $\mathcal{F}_2 \not\models A$.

Allora esiste un \mathcal{F}_2 -modello \mathcal{M}_2 tale che $\mathcal{M}_2 \not\models A$. Essendo f un p-morfismo tra \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , per il Lemma 2.23 sappiamo che esiste un \mathcal{F}_1 -modello \mathcal{M}_1 tale che f è un p-morfismo tra \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 . Essendo f suriettivo, per il Lemma 2.22 abbiamo che $\mathcal{M}_1 \not\models A$. Allora abbiamo anche che $\mathcal{F}_1 \not\models A$. \square

Osservazione 5 Notiamo che passando dal livello dei modelli a quello delle strutture, passiamo da una equivalenza della verità ad una implicazione della validità. Quindi la struttura che è immagine p-morfa a \mathcal{F}_1 conserva tutto ciò che era valido su \mathcal{F}_1 (e, in genere, rende valide altre formule).

Esercizio 2.3 Si dimostri che l'inverso del Lemma 2.23 non vale, ovvero se \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 sono due strutture e $f : \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_2$ è un p-morfismo tra \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , non è detto che per ogni \mathcal{F}_1 -modello \mathcal{M}_1 esista un \mathcal{F}_2 -modello \mathcal{M}_2 tale che f è un p-morfismo tra \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 .

Suggerimento: si riconsideri la FIG. 2.4.

2.2.3. PROPRIETÀ NON ESPRIMIBILI

In questo paragrafo vedremo alcune proprietà che non sono esprimibili per mezzo di formule modali. Per farlo utilizzeremo i lemmi relativi ai sottomodelli generati ed ai p-morfismi.

TEOREMA 2.25 (La convergenza non è esprimibile) *Non esiste alcuna formula $A \in Fm^\Phi$ tale che*

$$\mathcal{F} \models A \text{ sse } \mathcal{F} \triangleright \forall w \forall v \exists z (w \mathcal{R} z \wedge v \mathcal{R} z)$$

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che esista una tale formula A . Si consideri ora la struttura $\mathcal{F} := \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ dove $\mathcal{W} = \{w, v\}$ con $w \neq v$ e $\mathcal{R} = \{\langle w, v \rangle, \langle w, w \rangle\}$. \mathcal{F} non è convergente, quindi $\mathcal{F} \not\models A$. Dunque esiste un s ed un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} tale che $\mathcal{M} \not\models_s A$. Sia $s = w$ (Analogamente se $s = v$). Si consideri il sottomodello \mathcal{M}^w generato da w , per il lemma del sottomodello $\mathcal{M}^w \not\models_w A$. Ma il sottomodello generato è convergente, dunque $\mathcal{M}^w \models_w A$. L'ipotesi per assurdo ci ha condotti ad una contraddizione, quindi il lemma è dimostrato. \square

TEOREMA 2.26 (La connessione non è esprimibile) *Non esiste alcuna formula $A \in Fm^\Phi$ tale che*

$$\mathcal{F} \models A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall w \forall v (w \mathcal{R} v \vee v \mathcal{R} w \vee w = v)$$

Dimostrazione Esercizio. La dimostrazione è del tutto analoga a quella del lemma precedente. \square

TEOREMA 2.27 (L'irriflessività non è esprimibile) *Non esiste una formula $A \in Fm^\Phi$ tale che*

$$\mathcal{F} \models A \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \triangleright \forall w \neg(w \mathcal{R} w)$$

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che esista una tale formula A . Si consideri la struttura $\mathcal{F}_2 = \langle \{0\}, = \rangle$ che è immagine p-morfa di $\mathcal{F}_1 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ secondo la funzione $f(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

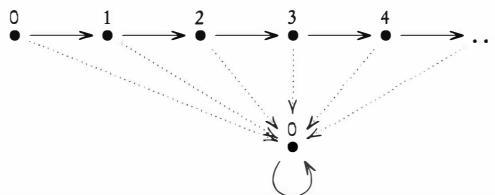
Verifichiamo che $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0\}$ soddisfa le due condizioni dei p-morfismi:

- *forth condition*: $\forall n, m \in \mathbb{N} (n < m \Rightarrow f(n) = f(m))$, in quanto $f(n) = f(m) = 0$.
- *back condition*: si prenda un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$. Allora $f(n) = 0$. Sia $0 \mathcal{R}_2 y$, allora $y = 0$. Poiché $f(n+1) = 0$ e $n < n+1$, la condizione è soddisfatta.

f è quindi un p-morfismo suriettivo tra \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . La situazione è sintetizzata graficamente nella FIG. 2.5 dove, per semplicità omettiamo di indicare la transitività di $<$.

$\langle \mathbb{N}, < \rangle$ è irriflessiva, dunque $\langle \mathbb{N}, < \rangle \models A$, allora $\mathcal{F}_2 \models A$ (per il Lemma 2.24 del p-morfismo suriettivo), per cui \mathcal{F}_2 dovrebbe essere irriflessiva, in contraddizione con la definizione data di \mathcal{F}_2 . Da qui l'assurdo. \square

FIGURA 2.5

Un p-morfismo da \mathbb{N} a $\{0\}$ 

TEOREMA 2.28 (L'antisimmetria non è esprimibile) *Non esiste una formula $A \in Fm^\Phi$ tale che*

$$\mathcal{F} \models A \text{ sse } \mathcal{F} \triangleright \forall w \forall v (w \mathcal{R} v \wedge v \mathcal{R} w \rightarrow w = v)$$

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che esista una tale formula A . Si consideri la struttura:

$$\mathcal{F}_2 := \langle \{a, b\}, \{a, b\} \times \{a, b\} \rangle, \quad a \neq b$$

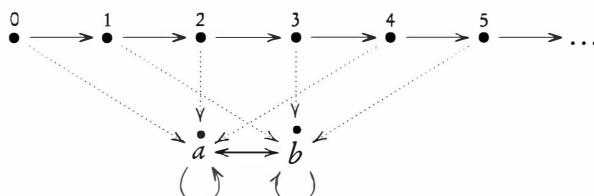
\mathcal{F}_2 non è antisimmetrica, in quanto $a \mathcal{R}_2 b$ e $b \mathcal{R}_2 a$, ma $a \neq b$. Si consideri ora la struttura antisimmetrica $\mathcal{F}_1 := \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.

Infine sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \{a, b\}$ una funzione definita come segue:

$$f(n) = \begin{cases} a, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ b, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

È immediato verificare che $f : \mathbb{N} \rightarrow \{a, b\}$ è suriettiva e costituisce un p-morfismo suriettivo tra le due strutture. Infatti abbiamo che:

FIGURA 2.6

Un p-morfismo da \mathbb{N} a $\{a, b\}$ 

- *forth condition*: $\forall n, m \in \mathbb{N} (n \leq m \Rightarrow f(n) \mathcal{R}_2 f(m))$. Infatti \mathcal{R}_2 è universale su $\{a, b\}$.

- *back condition*: sia dato $n \in \mathbb{N}$ e sia $f(n) = a$ (Analogamente se $f(n) = b$). Sia $a \mathcal{R}_2 y$. Due sono i casi:

$y = b$. Poiché $n \leq n + 1$ e $f(n + 1) = b$, la *back condition* è soddisfatta.

$y = a$. Poiché $n \leq n$ e $f(n) = a$, la *back condition* è soddisfatta.

Graficamente la situazione è descritta dalla FIG. 2.6, dove per semplificità omettiamo di indicare la riflessività e la transitività di \leq .

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ è antisimmetrica, dunque $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \models A$, allora $\mathcal{F}_2 \models A$ (per il Lemma 2.24 del p-morfismo suriettivo), da cui deriviamo che \mathcal{F}_2 è antisimmetrica. Questo però contraddice la definizione data di \mathcal{F}_2 e genera l'assurdo. Il teorema risulta così dimostrato. \square

3

Logiche modali normali

3.1 La logica K

Cominciamo con l'introdurre la logica K che, come vedremo, sarà, in un senso da precisare, la più piccola logica modale normale.

La logica modale K è definita dai seguenti schemi di assiomi e regole:

- schemi di assiomi:

taut Tutte le tautologie classiche

$$K \quad \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$$

$$def_{\Diamond} \quad \Diamond A \leftrightarrow \neg \square \neg A$$

- regole di inferenza:

$$\frac{A}{\square A} \quad N \qquad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \quad MP$$

Siano S_1, \dots, S_n schemi di formule; indichiamo con $KS_1 \dots S_n$ l'estensione della logica K ottenuta aggiungendo S_1, \dots, S_n come schemi di assiomi.

Dato che in seguito ci occuperemo solo di logiche modali normali, ometteremo l'aggettivo 'normale' riferendoci a una qualsiasi logica $L = KS_1 \dots S_n$.

DEFINIZIONE 3.1 Data una logica modale normale L, una *dimostrazione* in L è una successione finita di formule tali che ognuna di esse o è un assioma o è ottenuta da formule precedenti della successione via applicazione di una delle due regole di inferenza.

Una formula A si dice *teorema* di L, $\vdash_L A$, se e solo se esiste una dimostrazione in L la cui ultima formula è A.

Alcuni teoremi di K.

Esempio 3.1 La formula $\Box\top$ è teorema di K, infatti:

- (I) $\vdash_K \perp \rightarrow \perp$ taut
- (II) $\vdash_K \Box(\perp \rightarrow \perp)$ I, N
- (III) $\vdash_K \Box\top$ II, def. di \top

Esempio 3.2 Dimostriamo ora che la formula

$$K(1) : \quad \Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$$

è un teorema di K.

- (I) $\vdash_K A \wedge B \rightarrow A$ taut
- (II) $\vdash_K \Box(A \wedge B \rightarrow A)$ I, N
- (III) $\vdash_K \Box(A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A)$ K
- (IV) $\vdash_K \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A$ II, III, MP
- (V) $\vdash_K A \wedge B \rightarrow B$ taut
- (VI) $\vdash_K \Box(A \wedge B \rightarrow B)$ v, N
- (VII) $\vdash_K \Box(A \wedge B \rightarrow B) \rightarrow (\Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B)$ K
- (VIII) $\vdash_K \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box B$ VI, VII, MP
- (IX) $\vdash_K \Box(A \wedge B) \rightarrow \Box A \wedge \Box B$ IV, VIII, taut
- (X) $\vdash_K A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ taut
- (XI) $\vdash_K \Box(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$ X, N
- (XII) $\vdash_K \Box(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A \wedge B))$ K
- (XIII) $\vdash_K \Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow A \wedge B)$ XII, XIII, MP
- (XIV) $\vdash_K \Box(B \rightarrow A \wedge B) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$ K
- (XV) $\vdash_K \Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$ XIII, XIV, taut
- (XVI) $\vdash_K \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$ XV, taut
- (XVII) $\vdash_K \Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$ IX, XVI, taut

Esempio 3.3 Per dualità, ovvero utilizzando solo la logica classica e l'assioma def_{\Diamond} , possiamo dimostrare che

$$K(2) : \quad \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$$

è teorema di K.

- | | | |
|-------|--|------------------------------|
| (I) | $\vdash_K \Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \Box\neg A \wedge \Box\neg B$ | K(1) |
| (II) | $\vdash_K \neg\Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(\Box\neg A \wedge \Box\neg B)$ | I, taut |
| (III) | $\vdash_K \Diamond\neg(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg\Box\neg A \vee \neg\Box\neg B$ | II, def _◊ , taut |
| (IV) | $\vdash_K \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$ | III, def _◊ , taut |

La formula $K(1)$ (dualmente: $K(2)$) si può generalizzare al caso in cui vi compaiano un numero finito arbitrario di formule congiunte (dualmente: disgiunte).

Esempio 3.4 Dimostriamo che, dato un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$,

$$\Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \leftrightarrow (\Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_{n-1} \wedge \Box A_n)$$

è un teorema di K .

- | | | |
|-------|---|-----------|
| (I) | $\vdash_K \Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \leftrightarrow \Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \wedge \Box A_n$ | K(1) |
| (II) | $\vdash_K \Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1}) \leftrightarrow \Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-2}) \wedge \Box A_{n-1}$ | K(1) |
| : | : | : |
| (n) | $\vdash_K \Box(A_1 \wedge A_2) \leftrightarrow \Box A_1 \wedge \Box A_2$ | K(1) |
| (n+I) | $\vdash_K \Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_{n-1} \wedge A_n) \leftrightarrow (\Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_{n-1} \wedge \Box A_n)$ | I-n, taut |

Nel seguito denoteremo con $K(1)$ e $K(2)$ le versioni generalizzate dei due teoremi.

DEFINIZIONE 3.2 Sia L una logica. Una regola di inferenza α :

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{B} \alpha$$

si dice *regola ammissibile in L* se e solo se esiste una dimostrazione in L della formula B a partire dall'ipotesi che le formule A_1, \dots, A_n siano teoremi di L .

Ad esempio,

Esempio 3.5 La regola:

$$\frac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B} RM$$

è una regola ammissibile in K. Infatti:

- (I) $\vdash_K A \rightarrow B$ ipotesi
- (II) $\vdash_K \square(A \rightarrow B)$ I, N
- (III) $\vdash_K \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$ K
- (IV) $\vdash_K \square A \rightarrow \square B$ II, III, MP

Esempio 3.6 In generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la regola:

$$\frac{A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \dots)}{\square A_1 \rightarrow (\square A_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\square A_n \rightarrow \square B) \dots)} \quad RK_{\rightarrow}$$

è una regola ammissibile in K.

Esempio 3.7 Analogamente, per ogni $n \in \mathbb{N}$ la regola:

$$\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B}{\square A_1 \wedge \dots \wedge \square A_n \rightarrow \square B} \quad RK_{\wedge}$$

è una regola ammissibile in K.

- (I) $\vdash_K A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ ipotesi
- (II) $\vdash_K \square(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B)$ I, N
- (III) $\vdash_K \square(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B) \rightarrow (\square(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \square B)$ K
- (IV) $\vdash_K \square(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \square B$ II, III, MP
- (V) $\vdash_K \square A_1 \wedge \dots \wedge \square A_n \rightarrow \square B$ IV, K(1), taut

Esempio 3.8 Dualmente si dimostra che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la seguente è una regola ammissibile in K:

$$\frac{A \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n}{\Diamond A \rightarrow \Diamond B_1 \vee \dots \vee \Diamond B_n} \quad RK_{def\Diamond}$$

Esempio 3.9 Sfruttando queste regole ammissibili dimostriamo che:

$$K(3): \quad \square A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$$

è un teorema di K.

- | | | |
|-------|---|------------------------------|
| (I) | $\vdash_K A \rightarrow (\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg B)$ | taut |
| (II) | $\vdash_K \Box A \rightarrow \Box(\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg B)$ | I, RM |
| (III) | $\vdash_K \Box A \rightarrow (\Box \neg(A \wedge B) \rightarrow \Box \neg B)$ | II, Ax. K, taut |
| (IV) | $\vdash_K \Box A \rightarrow (\Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B))$ | III, def _◊ , taut |
| (V) | $\vdash_K \Box A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ | IV, taut |

Esempio 3.10 A partire da $K(3)$, si dimostra per dualità che

$$K(4): \quad \Box(A \vee B) \rightarrow \Diamond A \vee \Box B$$

è un teorema di K .

DEFINIZIONE 3.3 Sia L una logica modale normale e sia $\Gamma \cup \{A\} \subseteq Fm^\Phi$.

A è *derivabile da* Γ in L (in simboli: $\Gamma \vdash_L A$) se e solo se esistono $B_1, \dots, B_n \in \Gamma$ tali che:

$$\vdash_L (B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \rightarrow A$$

TEOREMA 3.4 Sia L una logica e sia $\Gamma \subseteq Fm^\Phi$. Valgono le seguenti proprietà:

1. Se $A \in \Gamma$ allora $\Gamma \vdash_L A$
2. Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash_L A$ allora $\Delta \vdash_L A$
3. Se $\vdash_L A$ allora $\Gamma \vdash_L A$
4. Se $\vdash_L A$ allora $\Gamma \vdash_L \Box A$

Dimostrazione

1. $\vdash_L A \rightarrow A$.
2. Se $\Gamma \vdash_L A$ allora per definizione esistono formule $B_1, \dots, B_n \in \Gamma$ tali che: $\vdash_L (B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \rightarrow A$. Se $\Gamma \subseteq \Delta$ allora $B_1, \dots, B_n \in \Delta$, quindi $\Delta \vdash_L A$.
3. Se $\vdash_L A$ allora per ogni $B_1, \dots, B_n \in Fm^\Phi$, $\vdash_L (B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \rightarrow A$. In particolare ciò vale per un qualsiasi insieme finito di formule in Γ .
4. Per la regola di Necessitazione, se $\vdash_L A$ allora $\vdash_L \Box A$, quindi segue dal punto precedente che $\Gamma \vdash_L \Box A$. \square

TEOREMA 3.5 Per ogni logica $KS_1 \dots S_n$ l'insieme $\{A : \vdash_L A\}$ è chiuso sotto sostituzione uniforme.

Dimostrazione Dimostriamo per induzione sulla costruzione delle dimostrazioni che per ogni formula B, C e per ogni atomo p ,

$$\text{se } \vdash_L B \text{ allora } \vdash_L B[C/p]$$

- Se B è una tautologia, una istanza dello schema K o una istanza di uno schema S_i , con $1 \leq i \leq n$, anche $B[C/p]$ lo è grazie alla definizione di sostituzione.
- Se B è ottenuta per Modus ponens, allora per ipotesi di induzione sia $A[C/p]$ che $(A \rightarrow B)[C/p]$, ovvero $A[C/p] \rightarrow B[C/p]$, sono teoremi di L . Da cui anche $B[C/p]$ lo è, grazie alla regola del Modus ponens.
- Se B è ottenuta per Necessitazione, allora $B \equiv \Box D$ per qualche D e per ipotesi di induzione $\vdash_L D[C/p]$ e dunque anche $\Box D[C/p]$ è un teorema di L , essendo L chiusa per Necessitazione. \square

TEOREMA 3.6 (Regola di sostituzione di equivalenti) *Sia $L = KS_1 \dots S_n$.*

$$\frac{\vdash_L A \leftrightarrow B}{\vdash_L C[A/p] \leftrightarrow C[B/p]} \quad SE$$

Dimostrazione La dimostrazione è del tutto analoga alla dimostrazione che si dà per il calcolo proposizionale classico. \square

TEOREMA 3.7 (Teorema sulla derivabilità)¹ *Siano $A, B \in Fm^\Phi$ e $\Gamma \subseteq Fm^\Phi$. Vale la seguente proprietà:*

$$\Gamma \cup \{B\} \vdash_L A, \Leftrightarrow \Gamma \vdash_L B \rightarrow A$$

Dimostrazione (\Leftarrow) Sia $\Gamma \vdash_L B \rightarrow A$. Allora $\Gamma \cup \{B\} \vdash_L B$ (Teorema 3.4.1), $\Gamma \cup \{B\} \vdash_L B \rightarrow A$ (Teorema 3.4.2), $\Gamma \cup \{B\} \vdash_L A$ (Modus ponens).

(\Rightarrow) Sia $\Gamma \cup \{B\} \vdash_L A$. Esistono allora $B_1, \dots, B_{n-1} \in \Gamma$ tali che $\vdash_L B_1 \wedge \dots \wedge B_{n-1} \wedge B \rightarrow A$. Dunque $\vdash_L B_1 \wedge \dots \wedge B_{n-1} \rightarrow (B \rightarrow A)$ da cui $\Gamma \vdash_L B \rightarrow A$. \square

1. Non ha niente a che fare col teorema di deduzione.

3.2

Alcune estensioni di K

La TAB. 3.1 definisce alcune logiche che estendono K e le FIGG. 3.1 e 3.2 presentano i rapporti di inclusione che intercorrono tra alcune delle logiche modali normali più note.

TABELLA 3.1
Estensioni di K

Nome della logica	Schemi di assiomi
D	KD
X	KX
T	KT
K4	K4
S4	KT, 4
B	KB
S5	KT, B, 4
S4.2	KT, 4, 2
K4.3	K4, 3
S4.3	KT, 4, 3
KW	KW
Triv	KTriv
Ver	KVer

Esempio 3.11 (Assiomatizzazione alternativa di D) La logica D, definita come la logica KD, può essere equivalentemente assiomatizzata come la logica $D^* = K + D_\Diamond$, ove $D_\Diamond : \Diamond T$.

- | | | |
|-------|---|--------------------|
| (I) | $\vdash_D T$ | taut |
| (II) | $\vdash_D \Box T$ | I, N |
| (III) | $\vdash_D \Box T \rightarrow \Diamond T$ | Ax. D |
| (IV) | $\vdash_D \Diamond T$ | II, III, MP |
| | | |
| (I) | $\vdash_{D^*} A \wedge \neg A \rightarrow \perp$ | taut |
| (II) | $\vdash_{D^*} \Box A \wedge \Box \neg A \rightarrow \Box \perp$ | I, RK _Λ |
| (III) | $\vdash_{D^*} \Diamond T \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond A)$ | II, taut |
| (IV) | $\vdash_{D^*} \Diamond T$ | Ax. D _◊ |
| (V) | $\vdash_{D^*} \Box A \rightarrow \Diamond A$ | III, IV, MP |

FIGURA 3.1

Una gerarchia di alcune delle logiche considerate

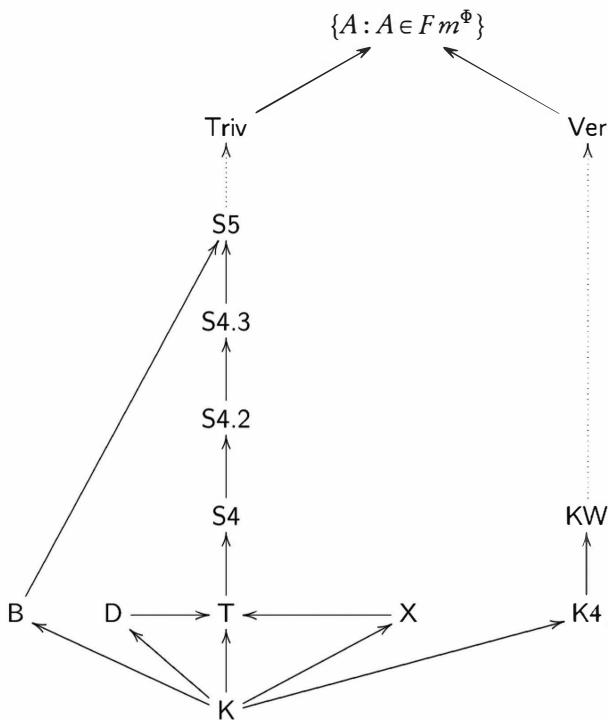
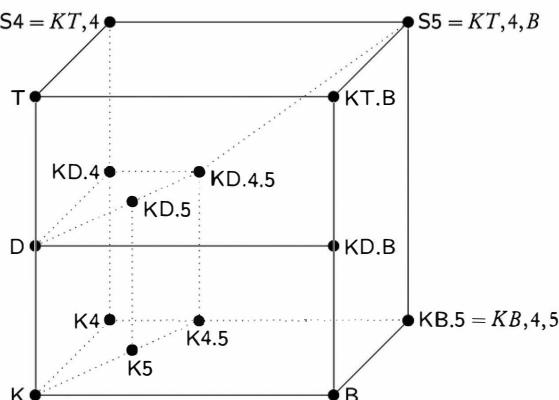


FIGURA 3.2

Il cubo delle logiche assiomatizzabili con $D, T, 4, 5, B$ 

Vediamo qualche esempio di teoremi delle logiche presentate.

Esempio 3.12

$$T_{\Diamond} : \vdash_T A \rightarrow \Diamond A$$

- (I) $\vdash_T \Box \neg A \rightarrow \neg A$ Ax. T
- (II) $\vdash_T \neg \neg A \rightarrow \neg \Box \neg A$ I, taut
- (III) $\vdash_T A \rightarrow \Diamond A$ II, taut, Ax. def_{\Diamond}

Esempio 3.13 Banalmente $\vdash_T \Box A \rightarrow \Diamond A$ e $\vdash_T \Box \Box A \rightarrow \Box A$

Consideriamo la logica $S4$. Banalmente abbiamo che:

Esempio 3.14

$$S4(1) : \vdash_{S4} \Box A \leftrightarrow \Box \Box A$$

- (I) $\vdash_{S4} \Box A \rightarrow \Box \Box A$ Ax. 4
- (II) $\vdash_{S4} \Box \Box A \rightarrow \Box A$ Ax. T
- (III) $\vdash_{S4} \Box A \leftrightarrow \Box \Box A$ I, II, taut

Esempio 3.15

$$S4(2) : \vdash_{S4} \Diamond A \leftrightarrow \Diamond \Diamond A$$

Per dualità, da $S4(1)$.

Esempio 3.16

$$S4(3) : \vdash_{S4} \Box \Diamond A \leftrightarrow \Box \Diamond \Diamond A$$

- (I) $\vdash_{S4} \Box \Diamond A \rightarrow \Diamond \Diamond \Diamond A$ T_{\Diamond}
- (II) $\vdash_{S4} \Box \Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond \Diamond \Diamond \Diamond A$ I, RM
- (III) $\vdash_{S4} \Box \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond \Diamond \Diamond A$ II, $S4(1)$, taut
- (IV) $\vdash_{S4} \Box \Diamond A \rightarrow \Diamond A$ Ax. T
- (V) $\vdash_{S4} \Diamond \Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond \Diamond A$ IV, $RK_{def_{\Diamond}}$
- (VI) $\vdash_{S4} \Diamond \Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$ V, $S4(2)$, taut
- (VII) $\vdash_{S4} \Box \Diamond \Diamond \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ VI, RM
- (VIII) $\vdash_{S4} \Box \Diamond A \leftrightarrow \Box \Diamond \Diamond \Diamond A$ III, VII, taut

Esempio 3.17

$$S4(4) : \vdash_{S4} \Diamond \Box A \leftrightarrow \Diamond \Box \Diamond \Box A$$

Per dualità, da $S4(3)$.

Esempio 3.18 (Assiomatizzazione alternativa di S5) La logica S5, definita come la logica KT.B.4, può essere equivalentemente assiomatizzata come la logica KT.5. Facciamo vedere che 5 è teorema di KT.B.4:

- (I) $\vdash_{KT.B.4} \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond \Diamond A \quad B$
- (II) $\vdash_{KT.B.4} \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A \quad I, S4(2), SE$

Dimostriamo ora che B e 4 sono teoremi di KT.5:

- (I) $\vdash_{KT.5} A \rightarrow \Diamond A \quad T_\Diamond$
- (II) $\vdash_{KT.5} \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A \quad Ax. 5$
- (III) $\vdash_{KT.5} A \rightarrow \Box \Diamond A \quad I, II, \text{taut}$

- (I) $\vdash_{KT.5} \Diamond \neg A \rightarrow \Box \Diamond \neg A \quad 5$
- (II) $\vdash_{KT.5} \Diamond \Box A \rightarrow \Box A \quad I, \text{taut}$
- (III) $\vdash_{KT.5} \Box \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Box A \quad II, RM$
- (IV) $\vdash_{KT.5} \Box A \rightarrow \Box \Diamond \Box A \quad Ax. B$
- (V) $\vdash_{KT.5} \Box A \rightarrow \Box \Box A \quad III, IV, \text{taut}$

Esempio 3.19 Consideriamo la logica KT.3 e mostriamo che lo schema 2 è un suo teorema:

- (I) $\vdash_{KT.3} \Box(\Box A \rightarrow \neg A) \vee \Box(\Box \neg A \rightarrow A) \quad Ax. 3$
- (II) $\vdash_{KT.3} \Box(\Diamond \neg A \vee \neg A) \vee \Box(\Diamond A \vee A) \quad I, \text{taut}$
- (III) $\vdash_{KT.3} \Box \Diamond \neg A \vee \Box \Diamond A \quad II, Ax. T, \text{taut}$
- (IV) $\vdash_{KT.3} \Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A \quad III, \text{taut}$

Esempio 3.20 Consideriamo la logica K5 e mostriamo che lo schema 3 è un suo teorema. Ne segue che lo schema 3 è teorema di S5:

- (I) $\vdash_{K5} \Diamond \neg A \vee \Box B \vee \Diamond \neg B \vee \Box A \quad \text{taut}$
- (II) $\vdash_{K5} \Box \Diamond \neg A \vee \Box B \vee \Box \Diamond \neg B \vee \Box A \quad I, Ax. 5, \text{taut}$
- (III) $\vdash_{K5} (\Box \Diamond \neg A \vee \Box B) \vee (\Box \Diamond \neg B \vee \Box A) \quad II, \text{taut}$
- (IV) $\vdash_{K5} \Box(\Diamond \neg A \vee B) \vee \Box(\Diamond \neg B \vee A) \quad III, \text{teor. di K}$
- (V) $\vdash_{K5} \Box(\Box A \rightarrow B) \vee \Box(\Box B \rightarrow A) \quad IV, \text{taut}$

Esempio 3.21 Banalmente sono teoremi di K5 anche i seguenti due importanti schemi:

$$\begin{aligned} D \cup m &:= \square(\square(A \rightarrow \square A) \rightarrow A) \rightarrow (\Diamond \square A \rightarrow A) \\ Z &:= \square(\square A \rightarrow A) \rightarrow (\Diamond \square A \rightarrow \square A) \end{aligned}$$

Infatti si ottengono per *a fortiori* da $\Diamond \square A \rightarrow \square A$ che è la versione duale di 5.

3.3 Validità

Sia L una logica modale. Una struttura $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ è detta una *struttura per L* sse per ogni formula A ,

$$\vdash_L A \Rightarrow \mathcal{F} \vDash A$$

in breve,

$$\mathcal{F} \vDash L$$

Con \mathcal{C}^L indichiamo la classe di tutte le strutture per L .

Sia \mathcal{C} una qualsiasi classe di strutture. Una logica L è *valida* rispetto a \mathcal{C} sse

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^L$$

In questo paragrafo mostreremo che alcune logiche modali sono valide rispetto a classi di strutture definite attraverso proprietà della relazione \mathcal{R} , ad esempio che la logica T è valida rispetto alla classe delle strutture in cui la relazione \mathcal{R} è riflessiva, che K4 è valida rispetto alla classe delle strutture in cui la relazione \mathcal{R} è transitiva. Nel caso di T dovremo quindi far vedere che se una struttura \mathcal{F} è riflessiva, allora $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^T$, ovvero che

$$\vdash_T A \Rightarrow \text{per ogni } \mathcal{F} \in \mathcal{C}^T (\mathcal{F} \vDash A)$$

TEOREMA 3.8 *La logica K è valida rispetto alla classe di tutte le strutture.*

Dimostrazione Sia B_1, B_2, \dots, B_n una dimostrazione di A in K, ove $B_n \equiv A$. Facciamo vedere che per ogni i , $1 \leq i \leq n$, B_i è valida su tutte le strutture.

$i = 1$. B_1 è un assioma.

$i = k + 1 \leq n$. B_i è un assioma oppure B_i è ottenuta da B_j , $j < i$, via regola di necessitazione oppure B_i è ottenuto da B_j e B_k , $j, k < i$, via regola di Modus ponens.

Esercizio: completare la dimostrazione. □

DEFINIZIONE 3.9 Con $\overline{KS_1 \dots S_n}$ indichiamo la chiusura deduttiva di $KS_1 \dots S_n$, ovvero

$$\overline{KS_1 \dots S_n} = \{B : KS_1 \dots S_n \vdash B\}$$

TEOREMA 3.10 *Sia $KS_1 \dots S_n$ una logica modale. Per ogni struttura \mathcal{F} ,*

$$\mathcal{F} \models \overline{KS_1 \dots S_n} \quad \text{sse} \quad \mathcal{F} \models S_1 \text{ e } \dots \text{ e } \mathcal{F} \models S_n$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Banale. (\Leftarrow) Analogamente al Teorema 3.8. □

Il teorema ci dice che per mostrare che una logica $KS_1 \dots S_n$ è valida su una classe di strutture è sufficiente mostrare che gli schemi S_1, \dots, S_n sono validi su quella classe di strutture.

TABELLA 3.2

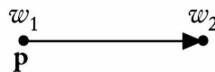
Logiche e classi di strutture rispetto a cui sono valide.

Logica	Assiomi	Classe delle strutture ove \mathcal{R} è valida
D	KD	seriale
X	KX	debolmente densa
T	KT	riflessiva
K4	$K4$	transitiva
S4	$KT, 4$	riflessiva e transitiva
B	KB	simmetrica
S5	$KT, B, 4$	equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva)
S4.2	$KT, 4, 2$	riflessiva, transitiva e debolmente convergente
K4.3	$K4, 3$	transitiva e debolmente connessa
S4.3	$KT, 4, 3$	riflessiva, transitiva e debolmente connessa

I teoremi di validità ci offrono una via maestra per mostrare che una formula A non è teorema di una data logica. Ad esempio, per dimostrare che $p \rightarrow \Diamond p$ non è teorema di K4 basta costruire un modello \mathcal{M} che sia basato su una struttura transitiva e tale che per qualche mondo $w \in \mathcal{W}$, $\mathcal{M} \not\models_w p \rightarrow \Diamond p$.

Sia \mathcal{M} il modello rappresentato nella FIG. 3.3, in cui la variabile enunciativa p è vera solo in w_1 . Allora, $\mathcal{M} \models_{w_1} p$ e $\mathcal{M} \not\models_{w_1} \Diamond p$ poiché $\mathcal{M} \not\models_{w_2} p$. Quindi $\mathcal{M} \not\models_{w_1} p \rightarrow \Diamond p$ da cui, per il teorema di validità per K4, $\not\models_{K4} p \rightarrow \Diamond p$.

FIGURA 3.3

Contromodello per $p \rightarrow \Diamond p$ 

3.4 Modalità

DEFINIZIONE 3.11 Una *modalità* è una sequenza $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ tale che per ogni i ($1 \leq i \leq n$), $\sigma_i \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$.

Consideriamo una modalità anche il caso nullo, in cui $n = 0$, che indichiamo con \perp .

Data una logica L , due modalità σ e τ si dicono *equivalenti in L* se per ogni formula A ,

$$\vdash_L \sigma A \leftrightarrow \tau A$$

In caso contrario, diciamo che σ e τ sono *distinte in L*.

Consideriamo ad esempio la modalità $\neg \Box \Diamond \Diamond \neg \Diamond \Box$. Sfruttando la dualità di \Box e \Diamond , possiamo portare all'esterno la negazione:

$$\neg \Box \Diamond \Diamond \neg \Diamond \Box = \neg \Box \Diamond \neg \Box \Diamond \Box = \neg \Box \neg \Box \Box \Diamond \Box = \neg \neg \Diamond \Box \Box \Diamond \Box$$

Inoltre, dato che $\neg \neg A \leftrightarrow A$ è un teorema di K, otteniamo per sostituzione uniforme che $\vdash_K \neg \neg \Diamond \Box \Box \Diamond \Box A \leftrightarrow \Diamond \Box \Box \Diamond \Box A$. Dunque la modalità $\neg \Box \Diamond \Diamond \neg \Diamond \Box$ è equivalente alla modalità $\Diamond \Box \Box \Diamond \Box$, che diciamo essere la sua forma standard affermativa.

Una modalità è in forma:

- *standard affermativa* se è una sequenza di soli \Box e \Diamond ;
- *standard negativa* se è una sequenza di soli \Box e \Diamond preceduta da una negazione.

Si dimostra facilmente che ogni modalità è equivalente a una modalità in forma standard affermativa o negativa (esercizio).

Nelle modalità $\neg\Box\Diamond\neg\Diamond\Box$ e $\Diamond\Box\Box\Diamond\Box$, che abbiamo dimostrato essere equivalenti in K , compare lo stesso numero di operatori modali. Possiamo ora chiederci: esiste una modalità che sia equivalente in K , ma il cui numero di operatori modali sia inferiore? In altri termini, ci chiediamo se esistano *leggi di riduzione* in K , ossia se esistono modalità σ e τ in forma standard affermativa tali che σ sia di lunghezza maggiore di τ e σ sia equivalente a τ in K .

Data una logica L , una legge di riduzione è ad esempio la seguente:

$$\text{per ogni formula } A, \vdash_L \Box A \leftrightarrow \Box\Box A$$

È facile vedere, con il contromodello della FIG. 3.3, che $\not\vdash_K \Box\Box A \rightarrow \Box A$, quindi K non deriva la legge di riduzione $\Box A \leftrightarrow \Box\Box A$.

Se questa legge è teorema di una logica L , allora ogni modalità che consista di una sequenza finita di soli box sarà equivalente in L alla modalità composta da un unico box (esercizio). Questa costituisce una condizione necessaria affinché le modalità distinte² in una logica siano finite.

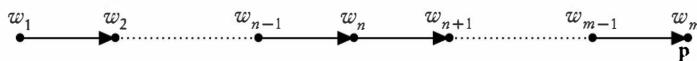
TEOREMA 3.12 *Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m \neq n$, $\not\vdash_K \Box^m A \leftrightarrow \Box^n A$.*

Dimostrazione Sia $m > n$. Dimostriamo che $\not\vdash_K \Box^m p \rightarrow \Box^n p$, costruendo un contromodello.

Nel modello \mathcal{M} rappresentato in FIG. 3.4, $w_1 \mathcal{R}^m w_m$ e $\mathcal{M} \models_{w_m} p$, quindi per il Teorema 1.15 si ha che $\mathcal{M} \models_{w_1} \Box^m p$. Ma $w_1 \mathcal{R}^n w_n$ e $\mathcal{M} \not\models_{w_n} p$, da cui segue analogamente che $\mathcal{M} \not\models_{w_1} \Box^n p$. \square

FIGURA 3.4

Contromodello per $\Box^m p \rightarrow \Box^n p$, con $m > n$



2. Da ora in avanti, parleremo di modalità sottintendendo che siano in forma standard.

COROLLARIO 3.13 *Nella logica K esistono infinite modalità distinte.*

Dimostrazione Segue direttamente dal Teorema 3.12: per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m \neq n$, le modalità \square^m e \square^n sono distinte in K. \square

3.4.1. MODALITÀ NELLE ESTENSIONI DI K

Abbiamo definito T come la logica ottenuta aggiungendo a K lo schema T .

Dimostriamo che

$$T(1): \quad \vdash_T \square \square A \rightarrow \square A$$

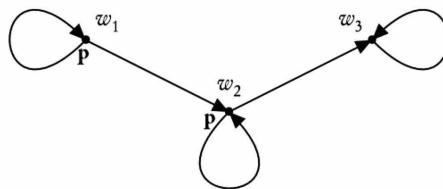
- | | | |
|------|--|---------|
| (I) | $\vdash_T \square p \rightarrow p$ | ax. T |
| (II) | $\vdash_T \square \square A \rightarrow \square A$ | I, SU |

Dalla dimostrazione segue che T è una estensione propria di K. In caso contrario, ossia se $\vdash_K \square A \rightarrow A$, si avrebbe che $\vdash_K \square \square A \rightarrow \square A$, mentre il modello rappresentato in FIG. 3.3 falsifica $\square \square p \rightarrow \square p$.

Consideriamo ora il modello \mathcal{M} rappresentato nella FIG. 3.5. $\mathcal{M} \models_{w_1} \square p$, mentre $\mathcal{M} \not\models_{w_3} p$, quindi $\mathcal{M} \not\models_{w_2} \square p$ e $\mathcal{M} \not\models_{w_1} \square \square p$.

FIGURA 3.5

Contromodello per $\square p \rightarrow \square \square p$



Essendo il modello \mathcal{M} riflessivo, per il Teorema 3.10 e per la TAB. 3.2, esso è un modello per T. Dal fatto che $\mathcal{M} \not\models_{w_1} \square p \rightarrow \square \square p$ si ha dunque che $\vdash_T \square A \rightarrow \square \square A$.

Ne segue che, come anche K, T non deriva la legge di riduzione $\square A \leftrightarrow \square \square A$. Quindi anche T contiene infinite modalità distinte (si veda la dimostrazione del Teorema 3.12).

Introduciamo ora due logiche in cui le modalità distinte sono finite.

3.4.2. MODALITÀ IN S4

La logica S4 è la logica T a cui si aggiunge lo schema 4.

Ricordiamo che i seguenti sono teoremi di S4 (cfr. Esempi 3.14-3.17):

- S4(1) $\vdash_{S4} \Box A \leftrightarrow \Box\Box A$
- S4(2) $\vdash_{S4} \Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Diamond A$
- S4(3) $\vdash_{S4} \Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$
- S4(4) $\vdash_{S4} \Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$

TEOREMA 3.14 *La logica S4 ha al più quattordici modalità distinte:*

$$\neg, \quad \Box, \quad \Diamond, \quad \Box\Diamond, \quad \Diamond\Box, \quad \Box\Diamond\Box, \quad \Diamond\Box\Diamond$$

e le rispettive negate.

Dimostrazione Dimostriamo che una qualsiasi modalità positiva σ è equivalente in S4 a una delle sette modalità elencate.

Se σ è la modalità nulla o $\sigma = \sigma_1 \in \{\Box, \Diamond\}$, allora il risultato segue per ipotesi.

Se $\sigma = \sigma_2\sigma_1$ allora:

- se $\sigma_2 = \sigma_1$ allora, per S4(1) e S4(2), σ è equivalente a \Box o \Diamond ;
- se $\sigma_2 \neq \sigma_1$ allora $\sigma \in \{\Box\Diamond, \Diamond\Box\}$.

Se, invece $\sigma = \sigma_3\sigma_2\sigma_1$, allora:

- se $\sigma_3 = \sigma_2$ allora, per S4(1) e S4(2), torniamo al caso precedente;
- se $\sigma_3 \neq \sigma_2$ allora:
 - se $\sigma_2 = \sigma_1$ allora, per S4(1) e S4(2), σ è equivalente a $\Box\Diamond$ o $\Diamond\Box$;
 - se $\sigma_2 \neq \sigma_1$ allora $\sigma \in \{\Box\Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond\}$.

In maniera analoga si dimostra che se $\sigma = \sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ allora o (per S4(1) e S4(2)) si riduce ai casi precedenti o $\sigma \in \{\Box\Diamond\Box\Diamond, \Diamond\Box\Diamond\Box\}$. Segue tuttavia da S4(3) e S4(4) che, in quest'ultimo caso, σ è equivalente o alla modalità $\Box\Diamond$ o alla modalità $\Diamond\Box$. Dunque non esistono altre modalità positive distinte in S4.

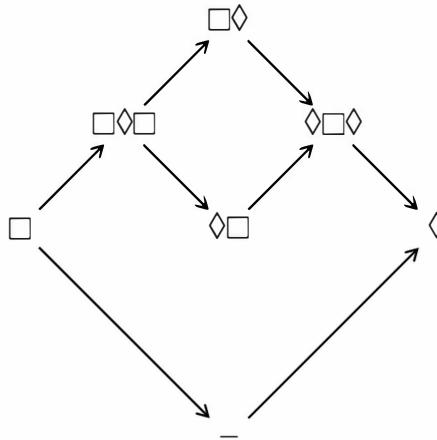
Parallelamente si dimostra il risultato per le modalità negative. \square

La FIG. 3.6 illustra le relazioni di implicazione che intercorrono tra le (al massimo) sette modalità positive distinte in S4. Ad esempio,

Esempio 3.22 Dimostriamo

$$S4(5): \quad \vdash_{S4} \Box A \rightarrow \Box\Diamond\Box A$$

FIGURA 3.6
Modalità in S4



- | | | |
|-------|--|---------------------------------|
| (I) | $\vdash_{S4} \square A \rightarrow \diamond \square A$ | $T_\diamond, SU[\square A / A]$ |
| (II) | $\vdash_{S4} \square \square A \rightarrow \square \diamond \square A$ | I, RM |
| (III) | $\vdash_{S4} \square A \rightarrow \square \diamond \square A$ | II, S4(1) |

TEOREMA 3.15 *La logica S4 ha esattamente quattordici modalità distinte:*

$$\neg, \quad \square, \quad \diamond, \quad \square\diamond, \quad \diamond\square, \quad \square\diamond\square, \quad \diamond\square\diamond$$

e le rispettive negate.

Dimostrazione Nel Teorema 3.14 abbiamo dimostrato che le modalità distinte in S4 sono al massimo queste quattordici. Per provare che sono esattamente queste, dimostriamo che non valgono le implicazioni inverse a quelle rappresentate nella FIG. 3.6. Da ciò segue che non esistono leggi di riduzione tra le sette modalità positive e, per dualità, neanche per le sette modalità negative.

Per il Teorema 3.10 e per la TAB. 3.2, S4 è valida sulle strutture riflesse e transitive. Quindi se esiste un modello \mathcal{M} basato su una struttura riflessiva e transitiva tale che per qualche mondo w e per qualche formula A , $\mathcal{M} \not\models_w \square \diamond \square A \rightarrow \square A$, allora $\not\models_{S4} \square \diamond \square A \rightarrow \square A$.

Sia \mathcal{M} il modello rappresentato nella FIG. 3.7. La struttura su cui è basato \mathcal{M} è riflessiva e transitiva, e la variabile enunciativa p è vera solo in w_2 . Abbiamo che:

1. w_2 è relato solo a se stesso e $\mathcal{M} \models_{w_2} p$, dunque $\mathcal{M} \models_{w_2} \Diamond \Box p$;
2. w_1 è relato a w_2 e $\mathcal{M} \models_{w_2} \Box p$, dunque $\mathcal{M} \models_{w_1} \Diamond \Box p$.

FIGURA 3.7

Contromodello per $\Box \Diamond \Box p \rightarrow \Box p$ 

Essendo w_1 relato solamente a se stesso e a w_2 , ne segue che $\mathcal{M} \models_{w_1} \Box \Diamond \Box p$. Ma $\mathcal{M} \not\models_{w_1} p$ e $w_1 \mathcal{R} w_1$, dunque $\mathcal{M} \not\models_{w_1} \Box p$.

Lasciamo al lettore la costruzione dei contromodelli per le restanti implicazioni. \square

3.4.3. MODALITÀ IN S5

La logica S5 è la logica S4 a cui si aggiunge lo schema *B*.

I seguenti sono teoremi di S5:

$$\text{S5(1)} : \quad \Box A \leftrightarrow \Diamond \Box A$$

- | | | |
|-------|---|-------------------------------------|
| (I) | $\vdash_{S5} \Diamond \Box \Box A \rightarrow \Box A$ | B_\Diamond , taut, $SU[\Box A/A]$ |
| (II) | $\vdash_{S5} \Diamond \Box A \rightarrow \Box A$ | I, S4(1) |
| (III) | $\vdash_{S5} \Box A \rightarrow \Diamond \Box A$ | T_\Diamond , $SU[\Box A/A]$ |
| (IV) | $\vdash_{S5} \Box A \leftrightarrow \Diamond \Box A$ | II, III |

$$\text{S5(2)} : \quad \Diamond A \leftrightarrow \Box \Diamond A$$

Per dualità, da S5(1).

TEOREMA 3.16 *La logica S5 ha al più sei modalità distinte:*

$$\neg, \quad \Box, \quad \Diamond$$

e le rispettive negate.

Dimostrazione S5 è un'estensione di S4, quindi per il Teorema 3.14 le modalità positive distinte in S5 sono al massimo sette: $\neg, \Box, \Diamond, \Box \Diamond, \Diamond \Box, \Box \Diamond \Box, \Diamond \Box \Diamond$.

Per S5(1) e S5(2), le modalità $\Diamond\Box$ e $\Box\Diamond$ sono equivalenti in S5 rispettivamente a \Box e \Diamond . Ne segue inoltre che $\Diamond\Box\Diamond$ è equivalente a $\Diamond\Diamond$, che a sua volta si riduce per S4(2) a \Diamond . Dualmente, segue da S4(1) che $\Box\Diamond\Box$ è equivalente a \Box . Quindi le modalità positive distinte in S5 sono al più tre: \neg, \Box, \Diamond .

In maniera analoga si dimostra il risultato per le modalità negative. \square

Le implicazioni tra le tre modalità positive distinte in S5 (FIG. 3.8) corrispondono rispettivamente allo schema T e al suo duale $T\Diamond$.

FIGURA 3.8

Modalità in S5

$$\Box \longrightarrow \neg \longrightarrow \Diamond$$

TEOREMA 3.17 *La logica S5 ha esattamente sei modalità distinte:*

$$\neg, \quad \Box, \quad \Diamond$$

e le rispettive negate.

FIGURA 3.9

Contromodello per $p \rightarrow \Box p$ 

Dimostrazione Dimostriamo che non vale l'implicazione inversa di T , costruendo un modello \mathcal{M} basato su una struttura con una relazione di equivalenza e tale che per qualche mondo w e per qualche formula A , $\mathcal{M} \not\models_w A \rightarrow \Box A$.

Il modello rappresentato nella FIG. 3.9 soddisfa tali requisiti: è basato su una struttura con relazione di equivalenza e $\mathcal{M} \models_{w_2} p$, mentre $\mathcal{M} \not\models_{w_2} \Box p$. Ne segue che $\not\models_{S5} p \rightarrow \Box p$.

Inoltre, $\mathcal{M} \models_{w_1} \Diamond p$ e $\mathcal{M} \not\models_{w_1} p$, dunque $\not\models_{S5} \Diamond p \rightarrow p$. \square

Completezza via modello canonico

Data una classe \mathcal{C} di strutture ci chiediamo se l'insieme delle formule valide su \mathcal{C} siano ottenibili come teoremi di una data logica L . Quando ciò accade diciamo che L è *completa* rispetto a \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} \vDash A \Rightarrow \vdash_L A$$

La domanda diviene più interessante se la classe considerata \mathcal{C} è una classe di strutture per L , quindi di strutture che rendono validi i teoremi di L , ovvero se si ha che

$$\vdash_L A \Rightarrow \mathcal{C} \vDash A$$

Si veda il teorema di validità, 3.10. Diremo che L è *caratterizzata* da \mathcal{C} sse

$$\vdash_L A \iff \mathcal{C} \vDash A$$

Indicando, come al solito, con \mathcal{C}^L la classe delle strutture per L , la caratterizzazione più debole di una logica L rispetto ad una classe di strutture è la seguente:

$$\mathcal{C}^L \vDash A \Rightarrow \vdash_L A$$

cioè le formule valide sulle strutture per L sono teoremi di L . Il più delle volte siamo interessati a mostrare la completezza di L rispetto a particolari sottoinsiemi di \mathcal{C}^L , determinati da proprietà della relazione \mathcal{R} o costituiti addirittura da una singola struttura.

La completezza di L rispetto a \mathcal{C} può essere formulata equivalentemente dicendo che ogni non teorema di L è falsificabile in modello basato su una struttura di \mathcal{C} . Poiché A non è teorema di L sse $\neg A$ è L -consistente, un modo per mostrare che una logica è completa, consiste nel far vedere che ogni formula L -consistente ha un modello basato su una struttura di \mathcal{C} , cioè che è vera in qualche punto di qualche modello basato su una struttura di \mathcal{C} .

E questa sarà la strategia che seguiremo in questo capitolo e lo faremo attraverso una costruzione molto generale che si applica a qualsiasi logica modale normale. La strategia consiste nel costruire per ogni logica L un modello, detto *modello canonico* per L , che gode delle seguenti due proprietà:

1. esso è un modello per L , i teoremi di L sono veri in ogni mondo del modello canonico per L ;
2. per ogni non-teorema di L esiste un mondo del modello canonico per L in cui è falso.

In realtà faremo molto di più perché cercheremo di mostrare con la tecnica del modello canonico che una logica L è *fortemente completa* rispetto ad una data classe di strutture \mathcal{C} , ovvero che per ogni $\text{fbf } A$ ed insieme di $\text{fbf } \Gamma$,

$$\Gamma \vDash_{\mathcal{C}} A \Rightarrow \Gamma \vdash_L A$$

Ciò significa che se A è vera in ciascun punto di ciascun modello basato su una struttura di \mathcal{C} che renda vere le formule di Γ allora A è derivabile in L da Γ . Equivalentemente

$$\Gamma \not\vdash_L A \Rightarrow \Gamma \not\vDash_{\mathcal{C}} A$$

Poiché $\Gamma \not\vdash_L A$ se e soltanto se $\Gamma \cup \{\neg A\}$ è L -consistente (cfr. Definizione 4.2), faremo vedere che ogni insieme L -consistente è vero in un punto del modello canonico per L .

Luci ed ombre del modello canonico. Che il modello canonico per L falsifichi tutti i non-teoremi di L è sicuramente una grande virtù del modello canonico, così come che renda vere in un qualche suo mondo tutte le formule di un insieme L -consistente, ma per dimostrare che L è completa (fortemente completa) rispetto ad una classe \mathcal{C} di strutture abbiamo bisogno che i non-teoremi siano falsificati (gli insiemi L -consistenti siano verificati) in modelli basati su strutture di \mathcal{C} . E non si dà sempre che il modello canonico sia basato su una struttura di \mathcal{C} .

DEFINIZIONE 4.1 Una logica L è detta *canonica* se la struttura $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^L \rangle$, su cui è basato il modello canonico per L , è una struttura per L :

$$\vdash_L A \Rightarrow \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^L \rangle \models A$$

Ne segue che ogni logica canonica L è completa, infatti esiste una struttura, $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^L \rangle$, che è una struttura per la logica e sulla quale è definito un modello, il modello canonico, che falsifica tutti i non-teoremi di L .

Se poi $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c \rangle$ appartiene ad una prefissata classe di strutture $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^L$, allora L è completa rispetto a \mathcal{C} .

Per la costruzione dei modelli canonici è necessario introdurre qualche preliminare.

4.1

Proprietà di insiemi di formule

Sia $\Gamma \subseteq Fm^\Phi$ e sia L una logica modale normale.

DEFINIZIONE 4.2 Γ è L -inconsistente se e solo se

$$\Gamma \vdash_L \perp$$

Γ è L -consistente se e solo se non è L -inconsistente.

LEMMA 4.3

1. Se $\Gamma \vdash_L A$ e $\Gamma \vdash_L \neg A$ allora Γ è L -inconsistente.
2. Se Γ è L -consistente e $\Gamma \vdash_L A$, allora $\Gamma \cup \{A\}$ è L -consistente.
3. Se Γ è L -consistente e $\Gamma \not\vdash_L A$, allora $\Gamma \cup \{\neg A\}$ è L -consistente.

Dimostrazione

1. Per Modus ponens da $\Gamma \vdash_L A$ e $\Gamma \vdash_L A \rightarrow \perp$.
2. Supponiamo per assurdo che $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L \perp$. Allora $\Gamma \vdash_L A \rightarrow \perp$. Ma per ipotesi $\Gamma \vdash_L A$, quindi Γ è L -inconsistente, contrariamente all'ipotesi.
3. Supponiamo per assurdo che $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_L \perp$. Allora $\Gamma \vdash_L \neg\neg A$, da cui $\Gamma \vdash_L A$. Ma questo è in contraddizione con l'ipotesi che $\Gamma \not\vdash_L A$. \square

DEFINIZIONE 4.4 Un insieme $\Gamma \subseteq Fm^\Phi$ è detto

- massimale se e solo se per ogni $f\beta f A$, $A \in \Gamma$ oppure $\neg A \in \Gamma$;
- L -massimale sse Γ è L -consistente e massimale.

LEMMA 4.5 (Proprietà degli insiemi L -massimali) *Sia Γ un insieme L -massimale, allora:*

1. $\Gamma \vdash_L A$ sse $A \in \Gamma$.
2. Se $A \notin \Gamma$ allora $\Gamma \cup \{A\}$ è L -inconsistente.
3. Se $A \in \Gamma$ e $(A \rightarrow B) \in \Gamma$ allora $B \in \Gamma$. [Γ è chiuso sotto MP]
4. $\perp \notin \Gamma$.
5. $(A \rightarrow B) \in \Gamma$ sse $(A \notin \Gamma$ oppure $B \in \Gamma)$.

6. $\neg A \in \Gamma$ sse $A \notin \Gamma$.
7. $(A \wedge B) \in \Gamma$ sse $(A \in \Gamma \text{ e } B \in \Gamma)$.
8. $(A \vee B) \in \Gamma$ sse $(A \in \Gamma \text{ oppure } B \in \Gamma)$.
9. $(A \leftrightarrow B) \in \Gamma$ sse $(A \in \Gamma \text{ sse } B \in \Gamma)$.

Dimostrazione

1. (\Rightarrow) Se $A \notin \Gamma$ allora per la massimalità di Γ , $\neg A \in \Gamma$, dunque Γ è L-inconsistente poiché $\Gamma \vdash_L A$.
 2. Se $A \notin \Gamma$ allora per massimalità di Γ , $\neg A \in \Gamma$. Dunque $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L A$ e $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L \neg A$, ovvero $\Gamma \cup \{A\}$ è L-inconsistente.
 3. Da 1.
 4. Poiché Γ è L-consistente.
- 5.-9. Esercizio. □

LEMMA 4.6 (di Lindenbaum) *Sia Γ un insieme L-consistente. Esiste un insieme Δ tale che:*

$$\Gamma \subseteq \Delta$$

Δ è L-massimale

Dimostrazione Sia Γ un qualsiasi insieme di formule L-consistente.

Si enumerino le formule di Fm^Φ :

$$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$$

Si definisce induttivamente la seguente catena di insiemi di formule:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{B_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{B_n\} \text{ è L-consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg B_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{B_n\} \text{ non è L-consistente} \end{cases}\end{aligned}$$

Si pone infine:

$$\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\Gamma_n\}$$

È immediato dalla costruzione che $\Gamma \subseteq \Delta$. Per mostrare che Δ è L-massimale, facciamo vedere che

1. Γ_n è L-consistente per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. Δ è L-consistente.
3. Δ è massimale.

1. Per induzione su n .

Base. Γ_0 è L -consistente per ipotesi, in quanto $\Gamma_0 = \Gamma$.

Passo. Sia Γ_n L -consistente per ipotesi di induzione. Se $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{B_n\}$, allora Γ_{n+1} è L -consistente per costruzione. Se $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg B_n\}$, allora $\Gamma_n \cup \{B_n\} \vdash \perp$ per costruzione, dunque $\Gamma_n \vdash \neg B_n$. Per il Lemma 4.3.2, ne segue che $\Gamma_n \cup \{\neg B_n\}$ è L -consistente, poiché Γ_n lo è.

2. Mostriamo che Δ è L -consistente. Supponiamo per assurdo che non lo sia, ovvero che

$$\Delta \vdash_L \perp$$

Siano $A_1, \dots, A_m \in \Delta$ tali che $\vdash_L A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow \perp$. Senza perdita di generalità sia $m = 3$. Ognuna delle formule A_1, A_2, A_3 , essendo in Δ , è stata aggiunta ad un qualche passo della costruzione dei Γ_n . Sia $A_1 \in \Gamma_j$, $A_2 \in \Gamma_k$ e $A_3 \in \Gamma_h$. Si consideri il massimo fra j, k e h , sia esso k . Allora $A_1, A_2, A_3 \in \Gamma_k$ e dunque Γ_k sarebbe L -inconsistente, contrariamente al punto 1.

3. Mostriamo che Δ è massimale, ovvero che per ogni formula C in Fm^Φ , $C \in \Delta$ oppure $\neg C \in \Delta$. Sia $C = B_i$ nella enumerazione iniziale. Allora $B_i \in \Gamma_{i+1}$ oppure $\neg B_i \in \Gamma_{i+1}$, dunque $C \in \Delta$ oppure $\neg C \in \Delta$. \square

4.2 Modelli canonici

DEFINIZIONE 4.7 Il *modello canonico* $\mathcal{M}^L = \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle$ di una logica L è così definito:

- $\mathcal{W}^L = \{w \subseteq Fm^\Phi : w \text{ è } L\text{-massimale}\};$
- $s \mathcal{R}^c t \quad \text{sse} \quad \text{per ogni formula } A (\Box A \in s \Rightarrow A \in t);$
- $\mathcal{I}^c(p) = \{s \in \mathcal{W}^L : p \in s\}.$

Indicando con $\Box^-(s)$ l'insieme $\{A : \Box A \in s\}$, allora

$$s \mathcal{R}^c t \quad \text{sse} \quad \Box^-(s) \subseteq t$$

Infatti sia $A \in \Box^-(s)$, allora $\Box A \in s$ e dunque $A \in t$, poiché $s \mathcal{R}^c t$, quindi $\Box^-(s) \subseteq t$. Sia $\Box A \in s$, allora $A \in \Box^-(s)$ e dunque $A \in t$, poiché $\Box^-(s) \subseteq t$, quindi $s \mathcal{R}^c t$.

Analogamente, ponendo $\Diamond^+(t) = \{\Diamond B : B \in t\}$ si ha che:

$$\Box^-(s) \subseteq t \quad \text{sse} \quad \Diamond^+(t) \subseteq s$$

LEMMA 4.8 (Box-lemma) *Per ogni $s \in \mathcal{W}^L$ ed ogni $C \in Fm^\Phi$:*

$$\square C \in s \quad \text{sse per ogni } t \ (s \mathcal{R}^c t \Rightarrow C \in t)$$

Dimostrazione (\Rightarrow) vale per definizione di \mathcal{R}^c .

(\Leftarrow) Per contrapposizione. Supponiamo che $\square C \notin s$ e mostriamo che esiste un $t \in \mathcal{W}^L$ tale che: $C \notin t$ e $s \mathcal{R}^c t$. Facciamo vedere che $\square^-(s) \cup \{\neg C\}$ è L -consistente. Supponiamo che così non sia, allora esistono formule $D_1, \dots, D_n \in \square^-(s)$ tali che:

- (I) $\vdash_L D_1 \wedge \dots \wedge D_n \wedge \neg C \rightarrow \perp$
- (II) $\vdash_L D_1 \wedge \dots \wedge D_n \rightarrow (\neg C \rightarrow \perp)$ I, taut
- (III) $\vdash_L D_1 \wedge \dots \wedge D_n \rightarrow C$ II, taut
- (IV) $\vdash_L \square D_1 \wedge \dots \wedge \square D_n \rightarrow \square C$ III, RK_\wedge
- (V) $\square D_1, \dots, \square D_n \in s$ def. $\square^-(s)$
- (VI) $\square D_1 \wedge \dots \wedge \square D_n \in s$ V, Prop. 4.5.7
- (VII) $\square C \in s$ IV, VI, Prop. 4.5.3

Ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi che $\square C \notin s$. Dunque $\square^-(s) \cup \{\neg C\}$ è L -consistente e, per il lemma di Lindenbaum, esiste una estensione t di $\square^-(s) \cup \{\neg C\}$ che è L -massimale, dunque $t \in \mathcal{W}^L$. Infine, essendo $\square^-(s) \subseteq t$, si ha che $s \mathcal{R}^c t$ e $C \notin t$. \square

LEMMA 4.9 (Diamond-lemma) *Per ogni formula $C \in Fm^\Phi$, e per ogni $s \in \mathcal{W}^L$ risulta che:*

$$\diamond C \in s \quad \text{sse} \quad \text{esiste } t \ (s \mathcal{R}^c t \text{ e } C \in t)$$

Dimostrazione $\diamond C \in s$ sse $\neg \square \neg C \in s$ sse $\square \neg C \notin s$ sse esiste un t tale che $s \mathcal{R}^c t$ e $\neg C \notin t$ sse esiste un t tale che $s \mathcal{R}^c t$ e $C \in t$. \square

LEMMA 4.10 (Fondamentale del modello canonico) *Per ogni $A \in Fm^\Phi$ ed ogni $w \in \mathcal{W}^L$:*

$$\mathcal{M}^L \vDash_w A \quad \text{sse} \quad A \in w$$

Dimostrazione Per induzione sulla costruzione di A .

$A \equiv p$. Vale per definizione di $\mathcal{I}^c(p)$.

$A \equiv \perp$. Per ogni $w \in \mathcal{W}^L$, $\perp \notin w$ poiché w è L -consistente.

$A \equiv \neg B$. $\mathcal{M}^L \vDash_w \neg B \iff \mathcal{M}^L \not\vDash_w B \Leftarrow$ (ip. ind.) $\Rightarrow B \notin w \Leftarrow$ (Lem. 4.5.6) $\Rightarrow \neg B \in w$.

$A \equiv B \rightarrow C$. $\mathcal{M}^L \models_w B \rightarrow C \iff \mathcal{M}^L \not\models_w B$ oppure $\mathcal{M}^L \models_w C \Leftarrow (\text{ip. ind.}) \Rightarrow B \notin w$ oppure $C \in w \Leftarrow (\text{Lem. 4.5.5}) \Rightarrow B \rightarrow C \in w$.

$A \equiv \Box B$. $\mathcal{M}^L \models_w \Box B \Leftrightarrow \text{per ogni } t (w \mathcal{R}^c t \Rightarrow \mathcal{M}^L \models_t B) \Leftarrow (\text{ip. ind.}) \Rightarrow \text{per ogni } t (w \mathcal{R}^c t \Rightarrow B \in t) \Leftarrow (\text{Lem. 4.8}) \Rightarrow \Box B \in w$.

$A \equiv B \wedge C, A \equiv B \vee C, A \equiv \Diamond B$ Esercizio. \square

TEOREMA 4.11 *Il modello canonico per L è un modello per L.*

Dimostrazione Ogni teorema di L appartiene ad ogni insieme L-massimale e dunque appartiene ad ogni mondo del modello canonico per L. Per il lemma fondamentale del modello canonico, ogni teorema di L è vero in ogni mondo del modello canonico per L. \square

TEOREMA 4.12 *Sia Γ un insieme di formule. Se Γ è L-consistente, allora ha un modello che è anche un modello per L.*

Dimostrazione Se Γ è L-consistente, per il lemma di Lindenbaum esiste una estensione L-massimale $w \supseteq \Gamma$. Ma w è per definizione di modello canonico un elemento di \mathcal{W}^L . Per il lemma fondamentale del modello canonico, $\mathcal{M}^L \models_w A$, per ogni $A \in w$, quindi in particolare per ogni $A \in \Gamma$. Che \mathcal{M}^L sia un modello per L segue dal Teorema 4.11. \square

TEOREMA 4.13 *Sia Γ un insieme di formule L-consistente. Se $\Gamma \not\models_L A$, allora esiste un modello \mathcal{M} per L tale che per qualche w ,*

$$\mathcal{M} \models_w \Gamma \quad \text{e} \quad \mathcal{M} \not\models_w A$$

Dimostrazione Se $\Gamma \not\models_L A$, allora $\Gamma \cup \{\neg A\}$ è L-consistente, quindi, per il Teorema 4.12, \mathcal{M}^L è un modello per L tale che per qualche w , $\mathcal{M}^L \models_w \Gamma$ e $\mathcal{M}^L \models_w \neg A$, dunque $\mathcal{M}^L \not\models_w A$. \square

4.3 Completezza via canonicità

In questo paragrafo prendiamo in considerazione varie logiche e per ognuna di esse mostriamo che il suo modello canonico è basato su una

struttura per la logica. Faremo ciò mostrando che tale struttura appartiene alla classe di strutture rispetto alla quale abbiamo dimostrato che la logica è valida.

TEOREMA 4.14 *K è completa rispetto alla classe di tutte le strutture.*

Dimostrazione Immediato perché ogni struttura è una struttura per K. \square

TEOREMA 4.15 *T è completa rispetto alla classe delle strutture riflessive.*

Dimostrazione Facciamo vedere che la struttura $\langle \mathcal{W}^T, \mathcal{R}^c \rangle$ è riflessiva, ovvero che per ogni w , $w\mathcal{R}^cw$, e dunque che per ogni A , se $\Box A \in w$ allora $A \in w$. Ma ciò è immediato perché $\vdash_{KT} \Box A \rightarrow A$, dunque $(\Box A \rightarrow A) \in w$ da cui $A \in w$ se $\Box A \in w$, essendo w chiuso sotto MP (cfr. Lemma 4.5.3). \square

TEOREMA 4.16 *D è completa rispetto alle strutture seriali.*

Dimostrazione Facciamo vedere che $\langle \mathcal{W}^D, \mathcal{R}^c \rangle$ è seriale, ovvero che per ogni $w \in \mathcal{W}^D$ esiste un mondo $t \in \mathcal{W}^D$ tale che $w\mathcal{R}^ct$. Cominciamo col mostrare che $\Box^-(w)$ è D-consistente. Supponiamo per assurdo che non lo sia e dunque che esistano formule $D_1, \dots, D_n \in \Box^-(w)$ tali che:

$$(I) \quad \vdash_D D_1 \wedge \dots \wedge D_n \rightarrow \perp$$

Allora

- (II) $\vdash_D \Box D_1 \wedge \dots \wedge \Box D_n \rightarrow \Box \perp$ I, RK_\wedge
- (III) $\Box D_1, \dots, \Box D_n \in w$ Def. $\Box^-(w)$
- (IV) $\Box D_1 \wedge \dots \wedge \Box D_n \in w$ III, Prop. 4.5.7
- (V) $\Box \perp \in w$ II, IV Prop. 4.5.3
- (VI) $\Box \perp \rightarrow \Diamond \perp \in w$ Ax. D
- (VII) $\Diamond \perp \in w$ V, VI, Prop. 4.5.3

contrariamente al fatto che $\vdash_D \neg \Diamond \perp$ e che w sia D-consistente. Dunque $\Box^-(w)$ è D-consistente e per il lemma di Lindenbaum esiste una estensione D-massimale t . Ma $t \in \mathcal{W}^D$ e $w\mathcal{R}^ct$ per costruzione. \square

TEOREMA 4.17 X è completa rispetto alle strutture debolmente dense.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che $\langle \mathcal{W}^X, \mathcal{R}^c \rangle$ è una struttura debolmente densa, ovvero che per ogni $s, t \in \mathcal{W}^X$

$$\text{se } s \mathcal{R}^c t \text{ allora esiste uno } z \text{ tale che } s \mathcal{R}^c z \text{ e } z \mathcal{R}^c t$$

Cominciamo col mostrare che $\square^-(s) \cup \diamond^+(t)$ è X -consistente. Supponiamo che così non sia e dunque che

$$\square^-(s) \cup \diamond^+(t) \vdash_X \perp$$

Allora esistono formule $\square S_1, \dots, \square S_m \in s$ e $T_1, \dots, T_n \in t$ tali che:

$$(I) \quad \vdash_X S_1 \wedge \dots \wedge S_m \wedge \diamond T_1 \wedge \dots \wedge \diamond T_n \rightarrow \perp$$

Allora

- | | | |
|-------|---|--|
| (II) | $\vdash_X \diamond(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) \rightarrow (\diamond T_1 \wedge \dots \wedge \diamond T_n)$ | teorema di K |
| (III) | $\vdash_X S_1 \wedge \dots \wedge S_m \wedge \diamond(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) \rightarrow \perp$ | I, II, taut |
| (IV) | $\vdash_X S_1 \wedge \dots \wedge S_m \rightarrow \neg \diamond(T_1 \wedge \dots \wedge T_n)$ | III, taut |
| (V) | $\vdash_X \square S_1 \wedge \dots \wedge \square S_m \rightarrow \square \neg \diamond(T_1 \wedge \dots \wedge T_n)$ | IV, RK _Λ |
| (VI) | $\vdash_X \square S_1 \wedge \dots \wedge \square S_m \rightarrow \square \square \neg(T_1 \wedge \dots \wedge T_n)$ | v, $\neg \diamond \equiv \square \neg$ |

Ma $\square S_1, \dots, \square S_m \in s$, allora per il Lemma 4.5.3, $\square \square \neg(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) \in s$ e per l'assioma X, $\square \neg(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) \in s$. Visto che $s \mathcal{R}^c t$, abbiamo che $\neg(T_1 \wedge \dots \wedge T_n) \in t$, in contraddizione con l'ipotesi che $T_1, \dots, T_n \in t$. Dunque esiste una estensione X -massimale z di $\square^-(s) \cup \diamond^+(t)$. Ma $z \in \mathcal{W}^X$ e $s \mathcal{R}^c z$ e $z \mathcal{R}^c t$ per costruzione. \square

TEOREMA 4.18 K4 è completa rispetto alle strutture transitive.

Dimostrazione Facciamo vedere che $\langle \mathcal{W}^{K4}, \mathcal{R}^c \rangle$ è una struttura transitiva. Siano $s, r, t \in \mathcal{W}^{K4}$ tali che (I) $s \mathcal{R}^c r$ e (II) $r \mathcal{R}^c t$. Vogliamo dimostrare che $s \mathcal{R}^c t$, ovvero che per ogni A , se $\square A \in s$ allora $A \in t$. Sia $\square A \in s$, allora, per MP con l'assioma 4, $\square \square A \in s$. Da questo, per (I) segue che $\square A \in r$ e per (II) che $A \in t$. \square

TEOREMA 4.19 B è completa rispetto alle strutture simmetriche.

Dimostrazione Facciamo vedere che $\langle \mathcal{W}^B, \mathcal{R}^c \rangle$ è una struttura simmetrica. Sia $(I) s \mathcal{R}^c t$. Dobbiamo mostrare che $t \mathcal{R}^c s$, ovvero che per ogni A , se $A \in s$ allora $\Diamond A \in t$. Sia $A \in s$, allora $\Box \Diamond A \in s$ grazie all'assioma B . Da (I) segue che $\Diamond A \in t$ e quindi che $t \mathcal{R}^c s$. \square

TEOREMA 4.20 $S4$ è completa rispetto alle strutture riflessive e transitive.

Dimostrazione Segue dai Teoremi 4.18 e 4.15. \square

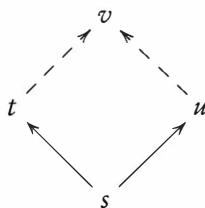
TEOREMA 4.21 $S4.2$ è completa rispetto alle strutture riflessive, transitive e debolmente convergenti.

Dimostrazione Sarà sufficiente mostrare che $\langle \mathcal{W}^{S4.2}, \mathcal{R}^c \rangle$ è debolmente convergente, ovvero che per ogni s, t, u

se $s \mathcal{R}^c t$ e $s \mathcal{R}^c u$ allora esiste un v tale che $t \mathcal{R}^c v$ e $u \mathcal{R}^c v$

FIGURA 4.1

Relazione debolmente convergente



Cominciamo col mostrare che $\Box^-(t) \cup \Box^-(u)$ è $S4.2$ -consistente. Supponiamo, per assurdo, che non lo sia e dunque che esistano $\Box A_1, \dots, \Box A_m \in t$ e $\Box B_1, \dots, \Box B_n \in u$ tali che:

$$\vdash_{S4.2} A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n \rightarrow \perp$$

allora

$$\begin{array}{ll} \vdash_{S4.2} A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow \neg(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) & \text{taut} \\ \vdash_{S4.2} \Box(A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \rightarrow \Box \neg(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) & RM \end{array}$$

Visto che t è chiuso sotto MP e che $\square(A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \in t$ (per $K(1)$), abbiamo che:

$$\square\neg(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in t$$

da cui

$$\begin{aligned} \diamond \square\neg(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) &\in s && \text{poiché } s \mathcal{R}^c t \\ \square \diamond \neg(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) &\in s && \text{per Ax. 2} \\ \diamond \neg(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) &\in u && \text{poiché } s \mathcal{R}^c u \\ \neg \square(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) &\in u && \text{poiché } \diamond \neg \equiv \neg \square \end{aligned}$$

contrariamente al fatto che $\square(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in u$. Dunque esiste una estensione $S4.2$ -massimale v di $\square^-(t) \cup \square^-(u)$. Ma $v \in W^{S4.2}$ e $t \mathcal{R}^c v$ e $u \mathcal{R}^c v$ per costruzione. \square

TEOREMA 4.22 K4.3 è completa rispetto alle strutture transitive e debolmente connesse.

Dimostrazione Dimostriamo che la struttura $\langle \mathcal{W}^{K4.3}, \mathcal{R}^c \rangle$ è debolmente connessa, ovvero che per ogni $s, t, v \in \mathcal{W}^{K4.3}$

$$\text{se } (s \mathcal{R}^c t \text{ e } s \mathcal{R}^c v) \text{ allora } (t \mathcal{R}^c v \text{ oppure } v \mathcal{R}^c t \text{ oppure } v = t)$$

Supponiamo per assurdo che così non sia e quindi che esistano tre mondi $s, t, v \in \mathcal{W}^{S4.3}$ tali che:

$$(1) s \mathcal{R}^c t, \quad (2) s \mathcal{R}^c v, \quad (3) \neg(v \mathcal{R}^c t), \quad (4) \neg(t \mathcal{R}^c v), \quad (5) t \neq v$$

e di conseguenza che esistano formule A, B, C tali che:

$$(1) \quad \square B \in t \text{ e } B \notin v, \quad (2) \quad \square A \in v \text{ e } A \notin t, \quad (3) \quad C \notin t \text{ e } C \in v$$

- Consideriamo il mondo v .

Essendo $\square A \in v$ abbiamo che $\square(A \vee C) \in v$. Inoltre, poiché $C \in v$, anche $(A \vee C) \in v$ e quindi abbiamo:

$$\square(A \vee C) \wedge (A \vee C) \in v$$

D'altra parte, poiché $\neg C \notin v$ e $B \notin v$, si ha $(\neg C \vee B) \notin v$ e quindi:

$$\square(A \vee C) \wedge (A \vee C) \rightarrow (\neg C \vee B) \notin v$$

Ricordando infine che $s \mathcal{R}^c v$ otteniamo:

$$\square(\square(A \vee C) \wedge (A \vee C) \rightarrow (\neg C \vee B)) \notin s$$

Ma

$$\square(\square(A \vee C) \wedge (A \vee C) \rightarrow (\neg C \vee B)) \vee \square(\square(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \rightarrow (A \vee C))$$

è una istanza dell'assioma 3, dunque $\square(\square(A \vee C) \wedge (A \vee C) \rightarrow (\neg C \vee B)) \in s$ oppure $\square(\square(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \rightarrow (A \vee C)) \in s$.

Avendo dimostrato che la prima delle due formule non appartiene a s , ne segue che:

$$\square(\square(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \rightarrow (A \vee C)) \in s$$

Inoltre, visto che $s \mathcal{R}^c t$, abbiamo che:

$$\square(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \rightarrow (A \vee C) \in t$$

- Ora consideriamo t .

Poiché $\neg C \in t$, anche $(\neg C \vee B) \in t$; d'altra parte, essendo $\square B \in t$, allora anche $\square(\neg C \vee B) \in t$. Quindi anche la loro congiunzione:

$$\square(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \in t$$

Per MP otteniamo allora: $(A \vee C) \in t$.

Da questo, per il Lemma 4.5.8, segue che $A \in t$ oppure $C \in t$; ma in (2) e (3) avevamo supposto $A \notin t$ e $C \notin t$, ottenendo così una contraddizione. Il teorema è quindi dimostrato. \square

TEOREMA 4.23 S4.3 è completa rispetto alle strutture riflessive, transitive e debolmente connesse.

Dimostrazione In presenza dell'assioma T, l'assioma 3 è equivalente a

$$L : \quad \square(\square A \rightarrow B) \vee \square(\square B \rightarrow A)$$

Dimostriamo che la struttura $\langle \mathcal{W}^{S4.3}, \mathcal{R}^c \rangle$ è debolmente connessa, ovvero che per ogni $s, t, v \in W^{S4.3}$

$$\text{se } s\mathcal{R}^c t \text{ e } s\mathcal{R}^c v \text{ allora } (t\mathcal{R}^c v \text{ oppure } v\mathcal{R}^c t)^1$$

Esercizio.

□

TEOREMA 4.24 S5 è completa rispetto alle strutture riflessive, transitive e simmetriche.

Dimostrazione La dimostrazione del teorema segue direttamente da quelle delle logiche T, K4.3 e B. □

TEOREMA 4.25 La logica K5 è completa rispetto alla classe di strutture basate su relazioni euclidee.

Dimostrazione Bisogna mostrare che \mathcal{R}^c è euclidea, ovvero che:

$$\text{per ogni } w, s, t \text{ se } (w\mathcal{R}^c s \text{ e } w\mathcal{R}^c t) \text{ allora } s\mathcal{R}^c t$$

Siano $w, s, t \in \mathcal{W}^{K5}$ tali che: $w\mathcal{R}^c s$ e $w\mathcal{R}^c t$. Mostriamo che se $A \in t$ allora $\Diamond A \in s$. Sia $A \in t$, allora, essendo $w\mathcal{R}^c t$, si ha che $\Diamond A \in w$. Da questo, per MP con l'assioma 5, $\Box \Diamond A \in w$. Ma $w\mathcal{R}^c s$, quindi $\Diamond A \in s$. Il teorema è così dimostrato. □

TEOREMA 4.26 Triv è completa rispetto alle strutture composte da punti isolati.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che

$$\text{per ogni } w, v (w\mathcal{R}^c v \text{ sse } w = v)$$

ovvero che

$$\text{per ogni } w, v (w\mathcal{R}^c v \text{ sse } (w \sqsubseteq v \text{ e } v \sqsubseteq w))$$

1. In presenza della riflessività siamo in grado di dimostrare questa forma più forte della connessione debole.

Sia $w \mathcal{R}^c v$. Se $A \in w$, allora, per Triv, anche $\Box A \in w$. Dunque $A \in v$.

Supponiamo per assurdo che esista una fbf B tale che: $B \in v$ e $B \notin w$. Visto che w è Triv-massimale, allora $\neg B \in w$. Abbiamo già mostrato che $w \subseteq v$, da cui $\neg B \in v$. Allora $\{B, \neg B\} \subseteq v$, ma questo va contro la Triv-consistenza di v . Dunque $w = v$.

Sia $w = v$. $w \mathcal{R}^c v$ si ha banalmente poiché $\Box A \rightarrow A$ è teorema di Triv. \square

TEOREMA 4.27 *La logica Ver è completa rispetto alle strutture composte da punti ciechi.*

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che

$$\forall w \neg \exists v (w \mathcal{R}^c v)$$

Sia w un punto del modello canonico, dunque $\Box \perp \in w$; se esistesse un v tale che $w \mathcal{R}^c v$, allora $\perp \in v$. Ma questo è impossibile visto che ogni punto del modello canonico è Ver-consistente. \square

TEOREMA 4.28 *La logica mnkj-Lemmon è completa rispetto alle strutture mnkj-Lemmon.*

Dimostrazione Si generalizzi la dimostrazione data per S4.2. \square

Corrispondenza *vs* completezza e incompletezza

Iniziamo col mettere a confronto i seguenti concetti:

- (a) La formula A corrisponde alla proprietà \mathcal{P} sulle strutture relazionali.
- (b) La logica K_A è caratterizzata dalla classe delle strutture che godono della proprietà \mathcal{P} .

Facciamo vedere che i due concetti sono indipendenti.

1° caso. (non critico) Valgono sia (a) che (b). Un esempio di questo caso è dato dalla classe delle strutture transitive e dalla formula 4: $\square A \rightarrow \square\square A$. $\square A \rightarrow \square\square A$ corrisponde alla transitività e K_4 è caratterizzata dalla classe delle strutture transitive.

2° caso. Vale (b) e non vale (a). Un esempio è dato dalle strutture irriflessive e da K . Si dimostra che K è caratterizzata dalla classe delle strutture irriflessive. Seguendo Hughes, Cresswell (1984, pp. 48-9) possiamo duplicare il modello canonico per K costruendo un modello $M^* = \langle W^*, R^*, I^* \rangle$ ove R^* è irriflessiva e ogni formula che sia vera in un punto del modello canonico per K è vera in qualche punto di M^* . Quindi ogni formula K -consistente è vera in qualche punto del modello irriflessivo, e ciò è sufficiente per concludere che K è caratterizzato dalla classe delle strutture irriflessive.

Non vale però che K corrisponde alla irriflessività poiché K è valido anche su strutture non irriflessive, infatti come sappiamo K è valida su tutte le strutture.

3° caso. Vale (a) e non vale (b). Sia $VB : \Diamond\Box\perp \vee \Box(\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow A)$ e sia \mathcal{P} la proprietà che ‘ogni mondo è un punto cieco o è relato ad un punto cieco’. Si dimostra che la formula VB corrisponde a \mathcal{P} .

$$\mathcal{F} \models \Diamond\Box\perp \vee \Box(\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow A)$$

sse

$$\mathcal{F} \triangleright \forall s [\neg \exists t (s \mathcal{R} t) \vee \exists v (s \mathcal{R} v \wedge \neg \exists z (v \mathcal{R} z))]$$

Dimostrazione Sia \mathcal{F} una struttura che non soddisfi \mathcal{P} , quindi esistono due mondi s e t tali che sRt e $\forall v(sRv \rightarrow \exists z(vRz))$. Si assuma che VB sia valida su \mathcal{F} e si definisca un modello \mathcal{M} in cui $I(q) = \{z : z \neq t\}$. Allora $M \models_s \Diamond \Box \perp \vee \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$ e dunque $M \models_s \Diamond \Box \perp$ oppure $M \models_s \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$. Il primo disgiunto è impossibile poiché s non è relato ad alcun punto cieco. Supponiamo allora che $M \models_s \Box(\Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q)$ e dunque in particolare $M \models_t \Box(\Box q \rightarrow q) \rightarrow q$, ma q è falso in t , dunque $M \not\models_t \Box(\Box q \rightarrow q)$. Ma ciò è impossibile poiché l'atomo q è vero in ogni punto eccetto t . \square

Ma KVB non è caratterizzata dalla classe delle strutture che godono di \mathcal{P} . Infatti la formula $(\Diamond \Box p \vee \Box p)$ è valida sulle strutture che godono di \mathcal{P} (si veda l'Esercizio 2.1), ma non è teorema di KVB.

Ci si può chiedere se KVB sia caratterizzata da una classe più ampia di strutture, ma ciò non può essere poiché ogni struttura in cui è vero VB gode di \mathcal{P} , vedi (a).

Morale Per ogni logica KA, il fatto che (I) i teoremi di KA siano validi in tutte e sole le strutture che godono di una certa proprietà \mathcal{P} non implica né è implicato dal fatto che (II) i teoremi di KA coincidono con l'insieme delle formule valide sulle strutture che godono di \mathcal{P} .

Se però A corrisponde a \mathcal{P} e la logica KA è caratterizzata da qualche classe di strutture, allora KA è caratterizzata dalla classe delle strutture che godono di \mathcal{P} . Dunque se per una logica KA vale (a) e non vale (b), allora KA è incompleta. Questo è il caso di KVB.

TEOREMA 5.1 *Se A corrisponde alla proprietà \mathcal{P} e KA è completa, allora KA è completa rispetto alla classe $C = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \triangleright \mathcal{P}\} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \models A\}$.*

Dimostrazione Se KA è completa, vuol dire che esiste una classe X di strutture tale che per ogni formula B ,

$$X \models B \quad \text{sse} \quad \vdash_{KA} B$$

In particolare $X \models A$ sse $\vdash_{KA} A$. Quindi $X \models A$ e dunque $X = C$. \square

5.1 Incompletezza

Se una logica L è caratterizzata da una qualche classe di strutture, allora è caratterizzata dalla classe \mathcal{C}^L delle strutture per L.

Dire che una logica L è *incompleta* equivale a dire che esiste una formula B tale che

$$(\dagger) \quad \mathcal{C}^L \models B \quad \text{e} \quad \not\vdash_L B$$

ovvero esiste una formula B che è valida sulle strutture per L e non è teorema di L . In genere è assai arduo dimostrare che una logica è incompleta, infatti occorre individuare una formula B per la quale si dimostri in particolare che $\not\vdash_L B$. Si possono prendere tre strade.

1. Individuare una struttura su cui siano a validi i teoremi di L e B non lo sia. È quello che abbiamo fatto nel PAR. 3.3.
2. Individuare un modello basato su una struttura qualsivoglia su cui siano veri i teoremi di L e B non lo sia. Se L è assiomatizzata ad esempio come KA , occorre mostrare che tutte le istanze di A ottenute per sostituzione sono vere nel modello. E in genere non è detto che così sia anche se A è vera nel modello poiché, come sappiamo, la verità su un modello non è chiusa sotto sostituzione.

Abbiamo anche una terza via:

3. Individuare una struttura qualsivoglia ed una famiglia di modelli su tale struttura che goda della seguente proprietà: se A è vera in ogni modello di tale famiglia, allora ogni teorema di KA è vero su ogni modello di quella famiglia (non si devono considerare le istanze ottenute per sostituzione da A !). Se poi esiste un modello di tale famiglia in cui B è falso, allora $\not\vdash_{KA} B$.

Considereremo due logiche, KVB e KGH la cui dimostrazione di incompletezza è assai breve e segue la terza via di cui sopra. Abbiamo quindi l'occasione di introdurre una classe particolare di strutture dette *strutture generali* che godono della proprietà che la nozione di conseguenza semantica coincide con la nozione di derivabilità.

5.2 Strutture generali

Le strutture generali differiscono dalle strutture come le abbiamo conosciute finora – che chiameremo in questo paragrafo strutture kripkeane per evitare confusioni – per il fatto che vengono indicati quali insiemi di mondi sono accettabili come interpretazione delle variabili proposizionali. Tali insiemi costituiscono la famiglia Π . Π deve soddisfare inoltre certe condizioni di chiusura. Le strutture kripkeane possono essere viste

come casi particolari di strutture generali in cui Π è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di \mathcal{W} .

DEFINIZIONE 5.2 (Struttura generale) Una *struttura generale* è una tripla $\mathcal{G} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \Pi \rangle$ tale che:

- $\mathcal{W} \neq \emptyset$;
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$;
- $\Pi \subseteq 2^{\mathcal{W}}$ – ovvero Π è un insieme di sottoinsiemi di \mathcal{W} – tale che:
 1. se $\mathcal{X} \in \Pi$, allora $\mathcal{W} - \mathcal{X} \in \Pi$;
 2. se $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Pi$, allora $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \in \Pi$;
 3. se $\mathcal{X} \in \Pi$, allora $\{w \in \mathcal{W} : \forall v \in \mathcal{W} (w \mathcal{R} v \Rightarrow v \in \mathcal{X})\} \in \Pi$.

DEFINIZIONE 5.3 (Modello generale) Un *modello generale* è una coppia $\mathcal{M}^{\mathcal{G}} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{I} \rangle$, dove \mathcal{G} è una struttura generale e \mathcal{I} è una funzione di interpretazione tale che per ogni variabile enunciativa p , $\mathcal{I}(p) \in \Pi$. Tali interpretazioni sono dette *ammissibili* in \mathcal{G} .

Π è chiuso rispetto a tutte le operazioni logiche:

TEOREMA 5.4 *Per ogni formula A, se indichiamo con $\mathcal{I}(A)$ l'insieme dei mondi in cui è vera, allora $\mathcal{I}(A) \in \Pi$.*

Dimostrazione Esercizio. □

Si dimostra, in maniera analoga a quanto fatto per le strutture kripkeane, che su ogni *struttura generale* le tautologie classiche e la formula K sono valide e le regole di Modus ponens, Necessitazione e Sostituzione uniforme preservano la validità. Il fatto notevole è che benché i modelli (generali) che si possono costruire su una struttura generale siano solo una parte di quelli che si possono costruire sull'analogia struttura kripkeana, pur tuttavia la validità su una struttura generale è chiusa sotto sostituzione uniforme.

DEFINIZIONE 5.5 (g-conseguenza semantica) Sia Γ un insieme di formule e sia A una formula; diremo che A è *g-conseguenza semantica*¹ di Γ se e solo se per ciascun modello \mathcal{M} basato su una struttura generale per

1. Con ciò si intende conseguenza semantica relativa alle strutture generali.

\vdash e per ogni punto w di \mathcal{M} , se tutte le formule di Γ sono vere in w allora A è vera in w . Ovvero, se \mathcal{C}_g^L è la classe di tutte le strutture generali per L

$$\Gamma \models_{\mathcal{C}_g^L} A \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } \mathcal{M} \text{ su } \mathcal{C}_g^L, \text{ per ogni } w (\mathcal{M} \models_w \Gamma \Rightarrow \mathcal{M} \models_w A)$$

LEMMA 5.6 (Completezza forte) *Sia Γ un insieme di formule e sia A una formula, abbiamo che:*

$$\Gamma \vdash_L A \quad \text{sse} \quad \Gamma \models_{\mathcal{C}_g^L} A$$

dove \mathcal{C}_g^L è la classe di tutte le strutture generali per L .

Dimostrazione

(\Rightarrow) Per quanto osservato sopra.

(\Leftarrow) La dimostrazione di questo lemma si basa sul seguente fatto: presso il modello canonico \mathcal{M}^L di una logica L , è possibile ottenere una struttura generale $\mathcal{G}^L = \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \Pi^c \rangle$ che caratterizza la logica L .

Sia $\mathcal{G}^L = \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \Pi^c \rangle$ così definita:

- $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c \rangle$ è la struttura del modello canonico per L , $\mathcal{M}^L = \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle$
- $\Pi^c = \{\mathcal{I}(A) : A \text{ è una formula}\} = \{\{w \in \mathcal{W}^L : A \in w\} : A \text{ è una formula}\}$

Dimostriamo che:

- (I) \mathcal{G}^L è una struttura generale;
- (II) $\mathcal{G}^L \models L$;
- (III) Se $\Gamma \not\vdash_L A$ allora esiste un modello \mathcal{M} su \mathcal{G}^L ed esiste un $w \in \mathcal{W}^L$ tale che $\mathcal{M} \models_w \Gamma$ e $\mathcal{M} \not\models_w A$.

(I)

- a) $\mathcal{W}^L \setminus \mathcal{I}^c(A) = \mathcal{I}^c(\neg A) \in \Pi^c$,
- b) $\mathcal{I}^c(A) \cup \mathcal{I}^c(B) = \mathcal{I}^c(A \vee B) \in \Pi^c$,
- c) $\square(\mathcal{I}^c(A)) = \{w \in \mathcal{W}^L : \forall v \in \mathcal{W}^L (w \mathcal{R}^c v \Rightarrow v \in \mathcal{I}^c(A))\} = \mathcal{I}^c(\square A) \in \Pi^c$.

(II) Se $\vdash_L A$ allora $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \Pi^c \rangle \models A$.

Sia \mathcal{I}^* una qualsiasi interpretazione ammissibile in \mathcal{G}^L , allora $\mathcal{I}^*(p) = \mathcal{I}^c(B)$ per qualche formula B . Siano p_1, \dots, p_n tutti gli atomi che occorrono in una formula C e sia $\mathcal{I}^*(p_1) = \mathcal{I}^c(B_1), \dots, \mathcal{I}^*(p_n) = \mathcal{I}^c(B_n)$, è facile vedere che per ogni $w \in \mathcal{W}^L$

$$\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^* \rangle \models_w C \quad \text{sse} \quad \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle \models_w C[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]$$

Sia ora A tale che $\vdash_L A$. Poiché l'insieme dei teoremi di L è chiuso sotto sostituzione uniforme $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle \vDash_w A[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]$. Ne segue che $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^* \rangle \vDash_w A$ per ogni interpretazione ammissibile \mathcal{I}^* di \mathcal{G}^L . Quindi $\mathcal{G}^L \models L$.

(III) Assumiamo che $\Gamma \not\vdash_L A$. Segue che $\Gamma \cup \{\neg A\}$ è L -consistente, quindi esiste un $w \in \mathcal{W}^L$ tale che $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle \vDash_w \Gamma \cup \{\neg A\}$. Poiché \mathcal{I}^c è una interpretazione ammissibile in \mathcal{G}^L , $\langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle$ è il modello generale cercato basato su \mathcal{G}^L . \square

5.3 Incompletezza di KVB

Mostreremo che la logica KVB è incompleta facendo vedere che

$$(\dagger) \quad \mathcal{C}^{VB} \models MV \quad \text{e} \quad \not\vdash_{KVB} MV$$

Come abbiamo visto nell'Esercizio 2.1, MV (ovvero $\Box A \vee \Diamond \Box A$) corrisponde alla proprietà \mathcal{P} , quindi abbiamo che:

$$\mathcal{F} \models VB \Rightarrow \mathcal{F} \triangleright \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{F} \models MV$$

dunque $\mathcal{C}^{VB} \models MV$. Rimane da dimostrare che $\not\vdash_{KVB} MV$.

A questo scopo presentiamo un modello \mathcal{M}^G basato su struttura generale $\mathcal{G} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \Pi \rangle$ tale che: (i) $\mathcal{M}^G \models VB$, (ii) $\mathcal{M}^G \not\models MV$.

LEMMA 5.7 *Sia $\mathcal{G} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \Pi \rangle$ tale che (cfr. FIG. 5.1):*

- $\mathcal{W} = \{\mathbb{N}, \infty, \infty + 1\}$;
- $\mathcal{R} = \{\langle m, n \rangle : m, n \in \mathbb{N} \& m > n\} \cup \{\langle \infty, n \rangle : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle \infty + 1, \infty \rangle\}$;
- $\Pi = \{\mathcal{X} : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{W} \wedge \mathcal{X} \text{ è finito} \wedge \infty \notin \mathcal{X}\} \cup \{\mathcal{X} : \mathcal{X} \subseteq \mathcal{W} \wedge \mathcal{X} \text{ è cofinito} \wedge \infty \in \mathcal{X}\}$.

Un insieme è detto cofinito se il suo complemento è finito. Allora si ha che:

FIGURA 5.1

La struttura \mathcal{G}



- (I) \mathcal{G} è una struttura generale;
- (II) $\mathcal{G} \models VB$;
- (III) $\mathcal{G} \not\models MV$.

Dimostrazione

(I) Diciamo che ' \mathcal{X} è F' se \mathcal{X} è un insieme finito e $\infty \notin \mathcal{X}$ e che ' \mathcal{X} è C' se \mathcal{X} è un insieme cofinito e $\infty \in \mathcal{X}$.

Siano $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Pi$:

a) se \mathcal{X} è F allora $\mathcal{W} \setminus \mathcal{X}$ è C e se \mathcal{X} è C allora $\mathcal{W} \setminus \mathcal{X}$ è F, dunque $\mathcal{W} \setminus \mathcal{X} \in \Pi$;

b) se \mathcal{X} e \mathcal{Y} sono entrambi F, allora $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ è F. Se \mathcal{X} e \mathcal{Y} sono entrambi C, allora $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ è C. Infine, se \mathcal{X} è F e \mathcal{Y} è C (o viceversa), allora $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ è C. Dunque $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \in \Pi$;

c) $\Box \mathcal{X} = \{w \mid \forall v (w \mathcal{R} v \Rightarrow v \in \mathcal{X})\}$ è l'insieme dei mondi relativi solo a mondi in \mathcal{X} . Facciamo vedere che, per ogni \mathcal{X} , $\Box \mathcal{X} \in \Pi$. Due casi sono possibili:

1. per qualche n finito, $n \notin \mathcal{X}$;
2. $n \in \mathcal{X}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Nel caso 1 abbiamo che $\Box \mathcal{X} \subseteq \{0, 1, \dots, n, \infty + 1\}$, dunque $\Box \mathcal{X} \in \Pi$ dato che è F. Nel caso 2 abbiamo che $\Box \mathcal{X} = \mathcal{W}$ oppure $\Box \mathcal{X} = \mathcal{W} - \{\infty + 1\}$, in entrambi i casi $\Box \mathcal{X} \in \Pi$ dato che è C.

(II) Esercizio, cfr. Hughes, Cresswell (1984, p. 61).

(III) Dimostriamo ora che $\mathcal{G} \not\models MV$.

Consideriamo la seguente istanza di MV : $\Box \perp \vee \Diamond \Box \perp$. Dato che in essa non compare alcun simbolo non logico, la sua verità in un punto di un modello dipende unicamente da \mathcal{R} e non dalle interpretazioni. Dato che $\infty + 1$ né vede un mondo cieco,

$$\not\models_{\infty+1} \Box \perp \vee \Diamond \Box \perp$$

Dunque possiamo concludere che $\mathcal{G} \not\models MV$. □

Osservazione 6 (Incompletezza di KGH) La logica KGH è la logica K +

$$H : \quad \Box(A \leftrightarrow \Box A) \rightarrow A$$

Esercizio. Si faccia vedere che $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ è valida su tutte le strutture kripkeane su cui è valida $\Box(A \leftrightarrow \Box A) \rightarrow A$, ed inoltre che $\not\models_{KGH} \Box A \rightarrow \Box \Box A$.

Anche questo risultato di non dimostrabilità è ottenuto usando una struttura generale, cfr. Cresswell (1987, pp. 13-5).

6

Modelli finiti e decidibilità

Questo capitolo affronta un problema centrale per ogni logica (e, più in generale, per ogni teoria), ovvero se sia *decidibile*, intendendo con questo che esiste una procedura effettiva per determinare per ogni formula A , in un numero finito di passi, se A sia o meno teorema della logica. Questa proprietà è rilevante sia da un punto di vista teorico generale che per le applicazioni.

6.1 Nozioni preliminari

Mettiamo a confronto i seguenti concetti:

- (a) La logica L è finitamente assiomatizzabile.
- (b) La logica L ha la proprietà del modello finito.
- (c) La logica L ha la proprietà della struttura finita.
- (d) La logica L è decidibile.

DEFINIZIONE 6.1 (Finita assiomatizzabilità) Diciamo che una logica L è *finitamente assiomatizzabile* sse esiste un insieme finito di schemi di formule da cui, insieme alle regole MP e N , è possibile derivare tutti i teoremi di L ¹.

Tutte le logiche che abbiamo incontrato finora sono finitamente assiomatizzabili, di fatto sono assiomatizzate con un numero finito di schemi.

1. Equivalentemente una logica è *finitamente assiomatizzabile* sse esiste un insieme finito di formule da cui, insieme alle regole MP , N e US , è possibile derivare tutti i teoremi di L .

DEFINIZIONE 6.2 (Proprietà del modello finito) Diciamo che una logica L gode della proprietà del *modello finito* sse ogni suo non teorema è falsificabile su un modello che sia un modello per L e che sia anche finito, ovvero che contenga un numero finito di mondi.

DEFINIZIONE 6.3 (Proprietà della struttura finita) Diciamo che una logica L gode della proprietà della *struttura finita* sse ogni suo non teorema è falsificabile su un struttura che sia una struttura per L e che sia anche finita, ovvero che contenga un numero finito di mondi.

DEFINIZIONE 6.4 (Decidibilità) Diciamo che una logica L è *decidibile* se esiste una procedura effettiva che, per ciascuna formula A , in un tempo finito o verifica che $\vdash_L A$ o verifica che $\not\vdash_L A$.

- (b) \Leftrightarrow (c).

Che una logica con la proprietà della struttura finita abbia anche la proprietà del modello finito è banale, il contrario invece è alquanto sorprendente ed è stato dimostrato da Segerberg (1971). Altre dimostrazioni si trovano in Hughes, Cresswell (1984, pp. 151-2) e in Goldblatt (1992, Esercizio 4.9).

- (a) + (c) \Rightarrow (d).

TEOREMA 6.5 *Se una logica L è finitamente assiomatizzabile e gode della proprietà della struttura finita è decidibile.*

Diamo una dimostrazione intuitiva di questo teorema. Si tratta di costruire due procedure che lavorano in parallelo. Sia data una formula A e una logica L .

1^a procedura. La procedura è tale che se $\not\vdash_L A$, allora la procedura si ferma quando incontra una struttura per L che falsifica A . Ricordiamo che, dato un insieme finito, le (relazioni binarie e quindi le) strutture che si possono costruire su tale insieme sono in numero finito. Quindi possiamo pensare di poter disporre di un elenco (infinito) delle strutture finite. Si scelga (in un qualche ordine) una struttura \mathcal{F} dell'elenco. Si tratta di controllare:

i) se \mathcal{F} sia o meno una struttura per L e per questo basta controllare se gli (schemi di) assiomi di L siano validi su di essa. Poiché gli assiomi di L sono in numero finito e i modelli di tali assiomi che si possono definire

su una struttura finita sono in numero finito, la procedura termina in tempo finito;

II) se \mathcal{F} è una struttura per L , si tratta di controllare se la formula A è falsificabile su di essa. Se A non è teorema di L , prima o poi la procedura ci dà una struttura per L che falsifica A e si ferma.

2^a procedura. Poiché L è finitamente assiomatizzabile, l'insieme dei suoi teoremi è ricorsivamente enumerabile, ovvero esiste una procedura effettiva che genera ogni suo teorema in tempo finito. Quindi se A è teorema di L , prima o poi la procedura lo genera e si ferma.

Poiché $\vdash_L A$ oppure $\not\vdash A_L$, in un tempo finito la 1^a o la 2^a procedura dà una risposta al problema se A sia o meno teorema di L .

È interessante notare che la decidibilità non implica né la finita assiomatizzabilità né la proprietà del modello finito:

- (a) + \neg (b) + (d). Gabbay (1976) presenta una logica finitamente assiomatizzabile, senza la proprietà del modello finito e decidibile.
- \neg (a) + (b) + (d). Cresswell (1979) presenta una logica non finitamente assiomatizzabile, con la proprietà del modello finito e decidibile.

La proprietà del modello finito non implica né la finita assiomatizzabilità né la decidibilità:

- \neg (a) + (b) + \neg (d). Urquhart (1981) presenta una logica non finitamente assiomatizzabile, con la proprietà del modello finito e non decidibile.

6.2

Filtrazione e modelli finiti

Le logiche che abbiamo considerato finora e che in genere vengono considerate nella letteratura sono finitamente assiomatizzabili, quindi, per rispondere alla domanda se siano decidibili o meno, una possibile strategia è mostrare che godono della proprietà del modello finito (fmp) o della struttura finita. Questo paragrafo mostra una procedura, la filtrazione, che in molti casi permette di costruire i desiderati modelli finiti. La procedura è generale e si applica a ogni modello, noi la applicheremo al modello canonico. Ogni modello canonico è infinito, nel senso che, per come è stato costruito, \mathcal{W}^L contiene *infiniti elementi*. Questa caratteristica di \mathcal{W}^L è collegata a quello che potremmo chiamare ‘difetto per

eccesso' di \mathcal{M}^L . Come scrive Goldblatt (1992, p. 30): «nel suo essere capace di falsificare ogni particolare non-teorema A di L , \mathcal{M}^L fornisce una buona dose di informazione superflua». Il valore di verità di una specifica formula A in un mondo w di \mathcal{W}^L è determinato unicamente dai *valori di verità* assunti dalle sole sottoformule di A in w e nei mondi ad esso relativi. L'idea che sta dietro il concetto di filtrazione è quella di raggruppare in una stessa classe $X \subseteq \mathcal{W}^L$ tutti i punti che assegnano gli stessi valori di verità a ogni sottoformula di A . In altre parole: in X *collassano* tutti quei mondi che danno gli stessi valori di verità a ciascuna sottoformula di A , e che quindi sono *indistinguibili* per quanto concerne A . Poiché l'insieme delle sottoformule di A è finito, questo procedimento porta alla costruzione di un modello finito.

Si consideri una logica L , il suo modello canonico, $\mathcal{M}^L = \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle$, ed un insieme $\Gamma \subseteq Fm^\Phi$ chiuso sotto sottoformule, ovvero tale che:

$$B \in \Gamma \Rightarrow Sf(B) \subseteq \Gamma$$

Per ogni $w \in \mathcal{W}^L$ sia definito il seguente insieme:

$$\Gamma_w = \{B \in \Gamma : \mathcal{M}^L \vDash_w B\}$$

DEFINIZIONE 6.6 (Γ -relazione di equivalenza) Siano $w, v \in \mathcal{W}^L$, chiameremo *relazione di equivalenza rispetto a Γ* la relazione che soddisfa la seguente condizione:

$$w \sim_\Gamma v \text{ sse } \Gamma_w = \Gamma_v$$

Questo equivale a porre:

$$w \sim_\Gamma v \text{ sse per ogni } B \in \Gamma (\mathcal{M}^L \vDash_w B \iff \mathcal{M}^L \vDash_v B)$$

LEMMA 6.7 *La relazione \sim_Γ è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione Esercizio. □

DEFINIZIONE 6.8 (Γ -classe di equivalenza) Indicheremo con $|w|_\Gamma$ ($|w|$ per brevità) la classe di equivalenza di w rispetto a \sim_Γ , ovvero:

$$|w| = \{v \in \mathcal{W}^L : w \sim_\Gamma v\}$$

DEFINIZIONE 6.9 (Modelli filtrati) Dato un modello canonico $\mathcal{M}^L = \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle$, chiamiamo *modello filtrato* un modello $\mathcal{M}^\Gamma = \langle \mathcal{W}^\Gamma, \mathcal{R}^\Gamma, \mathcal{I}^\Gamma \rangle$ definito come segue:

- $\mathcal{W}^\Gamma = \{ |w| : w \in \mathcal{W}^L \}$
- Per ogni $p \in \Gamma$ e per ogni $|w| \in \mathcal{W}^\Gamma$

$$|w| \in \mathcal{I}^\Gamma(p) \iff p \in w$$

- \mathcal{R}^Γ soddisfa le due seguenti condizioni:

(F1) Per ogni $|s|, |t| \in \mathcal{W}^\Gamma$

$$s \mathcal{R}^c t \Rightarrow |s| \mathcal{R}^\Gamma |t|$$

(F2) Per ogni $|s|, |t| \in \mathcal{W}^\Gamma$:

$$|s| \mathcal{R}^\Gamma |t| \Rightarrow \text{per ogni } \Box B \in \Gamma (\mathcal{M}^L \vDash_s \Box B \Rightarrow \mathcal{M}^L \vDash_t B)$$

Ogni \mathcal{R}^Γ che soddisfi (F1) e (F2) è detta una Γ -filtrazione.

(F1) dice quali frecce devono obbligatoriamente essere messe in \mathcal{M}^Γ .
(F2), invece, rappresenta il limite massimo di frecce inseribili nel modello filtrato. Difatti in \mathcal{M}^Γ non possiamo aggiungere frecce da un mondo $|s|$ a un mondo $|t|$ se nel modello originario \mathcal{M}^L esiste una fbf B , tale che $\mathcal{M}^L \vDash_s \Box B$ e $\mathcal{M}^L \not\vDash_t B$. Ne segue che una Γ -filtrazione non è unica: si devono inserire le frecce richieste da (F1) e se ne possono aggiungere altre purché la condizione (F2) sia soddisfatta. Questo è il punto delicato di questa procedura perché a seconda delle frecce inserite, ovvero della Γ -filtrazione scelta, si ottiene o meno un modello per la logica L. Ecco due filtrazioni notevoli, dette rispettivamente *minima* e *massima*.

DEFINIZIONE 6.10 (Minima filtrazione) La *minima filtrazione* è così definita:

$$|s| \mathcal{R}^\Gamma |t| \iff \exists s' \in |s| \exists t' \in |t| (s' \mathcal{R}^c t')$$

Dobbiamo dimostrare che \mathcal{R}^Γ è una Γ -filtrazione.

(F1) Sia $s \mathcal{R}^c t$. Allora $|s| \mathcal{R}^\Gamma |t|$ segue immediatamente ponendo $s' = s$ e $t' = t$.

(F2) Sia $|s| \mathcal{R}^\Gamma |t|$. Allora per la definizione di minima filtrazione $\exists s' \in |s| \exists t' \in |t| (s' \mathcal{R}^c t')$. Quindi per ogni $\Box B \in \Gamma$ ($\Box B \in s' \Rightarrow B \in t'$). Poiché $s \sim_\Gamma s'$ e $t \sim_\Gamma t'$, per ogni $\Box B \in \Gamma$ ($\Box B \in s \Rightarrow B \in t$).

DEFINIZIONE 6.11 (Massima filtrazione) La *massima filtrazione* è così definita:

$$|s| \mathcal{R}^\Gamma |t| \iff \text{per ogni } \Box B \in \Gamma (\mathcal{M}^L \vDash_s \Box B \Rightarrow \mathcal{M}^L \vDash_t B)$$

Anche in questo caso dimostriamo che \mathcal{R}^Γ è una Γ -filtrazione. Innanzitutto (F2) coincide con \Rightarrow . Quanto a (F1), sia $s \mathcal{R}^c t$. Allora per ogni $\Box B \in \Gamma$ ($\Box B \in s \Rightarrow B \in t$). Da questo segue che $|s| \mathcal{R}^\Gamma |t|$ per il verso \Leftarrow della definizione di massima filtrazione.

LEMMA 6.12 (Finitezza di \mathcal{W}^Γ) *Se Γ è un insieme finito, allora l'insieme \mathcal{W}^Γ è anch'esso finito e contiene al massimo 2^n elementi, dove n è il numero di elementi di Γ . Quindi un modello \mathcal{M}^Γ ottenuto per filtrazione (a partire da un Γ finito) è finito.*

Sottolineiamo che di classi di equivalenza possono essercene meno di 2^n . Ad esempio, supponiamo che Γ contenga tre elementi $\Gamma = \{p, q, p \wedge q\}$, allora $n = 3$ e le classi di equivalenza sono al massimo 8, ovvero:

$$\begin{aligned}|x^1| &= \{w \in \mathcal{W}^\Gamma : \mathcal{M}^\Gamma \models_w p \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w q \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w p \wedge q\} \\|x^2| &= \{w \in \mathcal{W}^\Gamma : \mathcal{M}^\Gamma \models_w p \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w q \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \models_w p \wedge q\} \\|x^3| &= \{w \in \mathcal{W}^\Gamma : \mathcal{M}^\Gamma \models_w p \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \models_w q \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w p \wedge q\} \\|x^4| &= \{w \in \mathcal{W}^\Gamma : \mathcal{M}^\Gamma \models_w p \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \models_w q \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \models_w p \wedge q\} \\|x^5| &= \{w \in \mathcal{W}^\Gamma : \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w p \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w q \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \models_w p \wedge q\} \\|x^6| &= \{w \in \mathcal{W}^\Gamma : \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w p \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w q \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w p \wedge q\} \\|x^7| &= \{w \in \mathcal{W}^\Gamma : \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w p \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \models_w q \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \models_w p \wedge q\} \\|x^8| &= \{w \in \mathcal{W}^\Gamma : \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w p \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \models_w q \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_w p \wedge q\}\end{aligned}$$

In questo caso le classi di equivalenza effettive sono meno di 2^n visto che non è possibile ad esempio avere classi di equivalenza come $|x^7|$, $|x^5|$ o $|x^2|$.

TEOREMA 6.13 (Lemma della filtrazione) *Sia $\mathcal{M}^\Gamma = \langle \mathcal{W}^\Gamma, \mathcal{R}^\Gamma, \mathcal{I}^\Gamma \rangle$ una Γ -filtrazione di $\mathcal{M}^\Gamma = \langle \mathcal{W}^\Gamma, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle$. Per ciascuna formula $B \in \Gamma$ e per ogni mondo $w \in \mathcal{W}^\Gamma$, si ha che:*

$$\mathcal{M}^\Gamma \models_{|w|} B \quad \text{sse} \quad \mathcal{M}^\Gamma \models_w B$$

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione sulla costruzione di B . La base è una conseguenza immediata della definizione di \mathcal{I}^Γ . Si noti bene che, per poter applicare l'ipotesi induttiva, dobbiamo far ricorso alla chiusura sotto sottoformule di Γ . I casi proposizionali classici sono immediati e vengono lasciati come *esercizio*.

Dimostriamo il caso in cui $B \equiv \Box C$.

(\Leftarrow) Sia $|w|$ tale che $\mathcal{M}^\Gamma \not\models_{|w|} \Box C$. Allora esiste un $|v|$ tale che:

$$|w|\mathcal{R}^\Gamma|v| \text{ e } \mathcal{M}^\Gamma \not\models_{|v|} C$$

Dall'ipotesi induttiva segue che $\mathcal{M}^L \not\models_v C$ e per (F2) che

$$\mathcal{M}^L \not\models_w \Box C$$

(\Rightarrow) Sia w tale che: $\mathcal{M}^L \not\models_w \Box C$. Allora esiste un v tale che:

$$w\mathcal{R}^c v \text{ e } \mathcal{M}^L \not\models_v C$$

Dunque per (F1) $|w|\mathcal{R}^\Gamma|v|$ e per l'ipotesi induttiva $\mathcal{M}^\Gamma \not\models_{|v|} C$. Segue che

$$\mathcal{M}^\Gamma \not\models_{|w|} \Box C \quad \square$$

COROLLARIO 6.14 *Per ogni $B \in \Gamma$ ($\mathcal{M}^L \models B \Leftrightarrow \mathcal{M}^\Gamma \models B$).*

Da quanto fatto finora segue che se $\not\models_L A$ allora per il lemma del modello canonico $\mathcal{M}^L \not\models_w A$ per qualche w , e dunque per il lemma della filtrazione $\mathcal{M}^\Gamma \not\models_{|w|} A$, ove $\Gamma = \text{Sf}(A)$. Abbiamo quindi un modello finito che falsifica A . Il problema che rimane aperto è se \mathcal{M}^Γ sia o meno un modello per L . In alcuni casi lo è. Questo è banalmente il caso per K : poiché ogni struttura è una struttura per K , il modello filtrato è un modello per K , quindi K gode della proprietà del modello finito ed è decidibile.

TEOREMA 6.15 *K ha la proprietà del modello finito ed è decidibile.*

LEMMA 6.16 *Dati $\mathcal{M}^L = \langle \mathcal{W}^L, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle$ e una sua (qualsiasi) Γ -filtrazione $\mathcal{M}^\Gamma = \langle \mathcal{W}^\Gamma, \mathcal{R}^\Gamma, \mathcal{I}^\Gamma \rangle$, si ha che:*

Se \mathcal{R}^c è riflessiva	allora \mathcal{R}^Γ è riflessiva
Se \mathcal{R}^c è seriale	allora \mathcal{R}^Γ è seriale
Se \mathcal{R}^c è debolmente convergente	allora \mathcal{R}^Γ è debolmente convergente
Se \mathcal{R}^c è debolmente connessa	allora \mathcal{R}^Γ è debolmente connessa

Dimostrazione Riflessività. Sia $|w| \in \mathcal{W}^\Gamma$. Poiché $w\mathcal{R}^c w$, allora $|w|\mathcal{R}^\Gamma|w|$ per (F1).

Serialità. Sia $|w| \in \mathcal{W}^\Gamma$. Allora $w \in \mathcal{W}^L$ ed esiste un $v \in \mathcal{W}^L$, tale che $w \mathcal{R}^c v$. Per (F1) $|w| \mathcal{R}^\Gamma |v|$.

I casi della convergenza debole e della connessione debole sono lasciati come *esercizio*. \square

Dal Lemma 6.16 segue immediatamente che:

TEOREMA 6.17 T, D, K2 e K3 hanno la proprietà del modello finito e quindi sono decidibili.

Diversamente da quanto visto finora, se il modello canonico è transitivo non è detto che ogni sua filtrazione sia transitiva. Tuttavia è sempre possibile definire una filtrazione che preservi la transitività.

DEFINIZIONE 6.18 (Filtrazione transitiva) La filtrazione transitiva è così definita:

$$|s| \mathcal{R}^\Gamma |t| \iff \text{per ogni } \Box B \in \Gamma(\mathcal{M}^L \models_s \Box B \Rightarrow \mathcal{M}^L \models_t \Box B \wedge B)$$

LEMMA 6.19 Se \mathcal{R}^c è transitiva e \mathcal{R}^Γ è la sua filtrazione transitiva, allora \mathcal{R}^Γ è una Γ -filtrazione ed è transitiva.

Dimostrazione

(F1) segue da \Leftarrow . Sia infatti $s \mathcal{R}^c t$ e sia $\mathcal{M}^L \models_s \Box B$ per una qualche $\Box B \in \Gamma$. Allora $\mathcal{M}^L \models_t B$. Poiché \mathcal{R}^c è transitiva, $\mathcal{M}^L \models_s \Box \Box B$, da cui $\mathcal{M}^L \models_t \Box B$. Ne segue che $\mathcal{M}^L \models_t \Box B \wedge B$, e così $|s| \mathcal{R}^\Gamma |t|$.

(F2) segue da \Rightarrow . Sia infatti $|s| \mathcal{R}^\Gamma |t|$ e sia $\mathcal{M}^L \models_s \Box B$. Allora per definizione di filtrazione transitiva $\mathcal{M}^L \models_t \Box B \wedge B$, da cui $\mathcal{M}^L \models_t B$.

Transitività. Sia $|s| \mathcal{R}^\Gamma |t|$ e $|t| \mathcal{R}^\Gamma |u|$. Dobbiamo mostrare che $|s| \mathcal{R}^\Gamma |u|$, ovvero che se $\mathcal{M}^L \models_s \Box B$ allora $\mathcal{M}^L \models_u \Box B \wedge B$. Sia quindi $\mathcal{M}^L \models_s \Box B$. Giacché $|s| \mathcal{R}^\Gamma |t|$, abbiamo che $\mathcal{M}^L \models_t \Box B \wedge B$, e dunque $\mathcal{M}^L \models_t \Box B$. Poiché $|t| \mathcal{R}^\Gamma |u|$, abbiamo che $\mathcal{M}^L \models_u \Box B \wedge B$. \square

TEOREMA 6.20 K4, KD.4, S4, S4.3 e S4.2 hanno la proprietà del modello finito e quindi sono decidibili.

Dimostrazione Sia L uno dei sistemi del lemma. Se $\not\models_L A$, allora $\mathcal{M}^L \not\models_w A$ per qualche w . Si consideri una Γ -filtrazione transitiva di \mathcal{M}^L ove $\Gamma = \text{Sf}(A)$. Allora il modello \mathcal{M}^Γ è sicuramente transitivo, inol-

tre se \mathcal{M}^L è riflessivo oppure seriale oppure debolmente convergente o debolmente connesso, anche \mathcal{M}^Γ lo è per il Lemma 6.16. \square

LEMMA 6.21 *Se \mathcal{R}^c è simmetrica e \mathcal{R}^Γ è la minima filtrazione, allora \mathcal{R}^Γ è simmetrica.*

Dimostrazione Sia $|s|\mathcal{R}^\Gamma|t|$. Allora $\exists s' \in |s| \exists t' \in |t| (s'\mathcal{R}^c t')$. Poiché \mathcal{R}^c è simmetrica $t'\mathcal{R}^c s'$, quindi $|t|\mathcal{R}^\Gamma|s|$. \square

TEOREMA 6.22 KB, KD.B e KT.B hanno la proprietà del modello finito e quindi sono decidibili.

DEFINIZIONE 6.23 (Filtrazione transitiva e simmetrica) La *filtrazione transitiva e simmetrica* è così definita:

$$|s|\mathcal{R}^\Gamma|t| \iff \text{per ogni } \Box B \in \Gamma(\mathcal{M}^L \models_s \Box B \Rightarrow \mathcal{M}^L \models_t \Box B \wedge B) \quad \text{e}$$

$$\text{per ogni } \Box B \in \Gamma(\mathcal{M}^L \models_t \Box B \Rightarrow \mathcal{M}^L \models_s \Box B \wedge B)$$

Se \mathcal{R}^c è riflessiva, la *filtrazione transitiva e simmetrica* può essere così definita:

$$|s|\mathcal{R}^\Gamma|t| \iff \text{per ogni } \Box B \in \Gamma(\mathcal{M}^L \models_s \Box B \Leftrightarrow \mathcal{M}^L \models_t \Box B)$$

LEMMA 6.24 *Se \mathcal{R}^c è transitiva e simmetrica e \mathcal{R}^Γ è la sua filtrazione transitiva e simmetrica, allora \mathcal{R}^Γ è una \mathcal{R}^c -filtrazione ed è transitiva e simmetrica.*

LEMMA 6.25 *Se \mathcal{R}^c è riflessiva, transitiva e simmetrica e \mathcal{R}^Γ è la sua filtrazione transitiva e simmetrica, allora \mathcal{R}^Γ è una \mathcal{R}^c -filtrazione ed è riflessiva, transitiva e simmetrica.*

TEOREMA 6.26 K4.B, KD.4.B e KT.4.B hanno la proprietà del modello finito e quindi sono decidibili.

KW: la logica della dimostrabilità

Questo capitolo è dedicato ad una particolare logica modale, KW¹, notevole per le relazioni che la legano all'aritmetica di Peano. Nell'articolo del 1933 Gödel cita, *en passant*, che l'esser dimostrabile può essere interpretato come un operatore modale e dunque ogni teoria T definisce implicitamente un operatore modale ‘essere dimostrabile in T ’. La logica KW ben rappresenta la dimostrabilità in PA grazie ai teoremi di Solovay e di Löb. Ci soffermiamo su questa logica anche per le sue proprietà metateoriche non usuali: è completa rispetto ad una classe di strutture finite, non è canonica, non è fortemente completa, gode della proprietà della disgiunzione, l'assioma W corrisponde ad una proprietà non esprimibile al primo ordine.

La logica KW è assiomatizzata aggiungendo a K lo schema:

$$W : \quad \square(\square A \rightarrow A) \rightarrow \square A$$

DEFINIZIONE 7.1 Una relazione \mathcal{R} è un *ordine dualmente ben fondato* sse \mathcal{R} è irriflessiva, transitiva e non esistono catene infinite ascendenti, ovvero non esistono \mathcal{R} -successioni infinite: $x_0 \mathcal{R} x_1 \mathcal{R} x_2 \mathcal{R} x_3 \mathcal{R} \dots$

TEOREMA 7.2 *Sia $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$.*

$\mathcal{F} \models \square(\square B \rightarrow B) \rightarrow \square B$ sse $\mathcal{F} \triangleright \mathcal{R}$ è un ordine dualmente ben fondato.

Dimostrazione

(\Leftarrow) Supponiamo per assurdo che \mathcal{F} sia un ordine dualmente ben fondato e che $\mathcal{F} \not\models W$. Questo significa che esiste un \mathcal{F} -modello \mathcal{M} ed un

1. In letteratura tale logica è spesso chiamata GL o anche *logica di Gödel-Löb*.

mondo w tale che:

- (1) $\mathcal{M} \not\models_w \square(\square B \rightarrow B) \rightarrow \square B$
- (2) $\mathcal{M} \models_w \square(\square B \rightarrow B)$ (da 1)
- (3) $\mathcal{M} \not\models_w \square B$ (da 1)
- (4) $\exists v (w \mathcal{R} v \wedge \mathcal{M} \not\models_v B)$ (da 3)

Sia v il mondo la cui esistenza è asserita in (4). Si consideri il seguente insieme $X = \{x \in \mathcal{W} : \exists n \in \mathbb{N} (w \mathcal{R}^n x) \wedge \mathcal{M} \not\models_x B\}$. X non è vuoto, infatti $w, v \in X$ (poiché $w \mathcal{R}^0 w$ e $w \mathcal{R}^1 v$, rispettivamente). Dato che \mathcal{F} è un ordine dualmente ben fondato, l'insieme X deve avere un elemento massimale; sia esso w^* e sia $w \mathcal{R}^k w^*, k \in \mathbb{N}$. Allora

- (5) $\mathcal{M} \not\models_{w^*} B$ (poiché $w^* \in X$)
- (6) $\mathcal{M} \models_{w^*} \square B \rightarrow B$ (da 2 poiché $w \mathcal{R}^k w^*$ e \mathcal{R} è transitiva)
- (7) $\mathcal{M} \not\models_{w^*} \square B$ (da 5 e 6)
- (8) $\exists z (w^* \mathcal{R} z \wedge \mathcal{M} \not\models_z B)$ (da 7)

Da $w \mathcal{R}^k w^*$ e $w^* \mathcal{R} z$, segue che $w \mathcal{R}^{k+1} z$. Allora $z \in X$, ma questo è in contraddizione con l'ipotesi che w^* fosse elemento massimale di X . Dunque $\mathcal{F} \models W$.

(\Rightarrow) Dobbiamo mostrare che se $\mathcal{F} \models W$ allora \mathcal{F} è

1. priva di \mathcal{R} -catene infinite ascendenti;
2. transitiva;
3. irriflessiva.

1. *Facciamo vedere che \mathcal{F} è priva di \mathcal{R} -catene infinite ascendenti.* Procediamo per assurdo.

Sia X una \mathcal{R} -catena infinita ascendente e sia $w \in X$. Consideriamo il seguente modello in cui:

$$\mathcal{I}(p) = \{z \in \mathcal{W} : z \notin X\}$$

ovvero

$$z \notin X \iff \mathcal{M} \models_z p$$

Poiché $w \in X$ e X è infinito allora esiste un $v \in X$, tale che $w \mathcal{R} v$.

Per definizione di \mathcal{I} , $\mathcal{M} \not\models_v p$, da cui

$$\begin{aligned} &\mathcal{M} \not\models_w \square p \\ &\mathcal{M} \not\models_w \square(\square p \rightarrow p) \quad \text{poiché } W \text{ è valida su } \mathcal{F} \\ &\exists x (w \mathcal{R} x \wedge \mathcal{M} \models_x \square p \wedge \mathcal{M} \not\models_x p) \end{aligned}$$

Dal fatto che $\mathcal{M} \not\models_x p$ si ha che $x \in X$. Essendo X una successione infinita crescente, deve esistere un $y \in X$ tale che $x \mathcal{R} y$. Per definizione di $\mathcal{I}(p)$, $\mathcal{M} \not\models_y p$. Questo è in contraddizione col fatto che $\mathcal{M} \models_x \Box p$. Dunque \mathcal{F} è priva di \mathcal{R} -catene infinite ascendenti.

2. *Faciamo vedere che \mathcal{F} è transitiva.* Sia data una struttura \mathcal{F} tale che $\mathcal{F} \vDash W$. Fissato w , definiamo un \mathcal{F} -modello $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ in cui

$$\mathcal{I}(p) = \{x \in \mathcal{W} : \text{per ogni } y (x \mathcal{R}^* y \Rightarrow w \mathcal{R} y)\}$$

Questo equivale a porre:

$$(\dagger) \quad \mathcal{M} \models_x p \Leftrightarrow \text{per ogni } y (x \mathcal{R}^* y \Rightarrow w \mathcal{R} y)$$

Iniziamo col far vedere che

$$(\dagger\dagger) \quad \mathcal{M} \models_w \Box(\Box p \rightarrow p)$$

Se così non fosse, per qualche mondo v avremmo

$$(1) \quad w \mathcal{R} v \text{ e } \mathcal{M} \not\models_v \Box p \rightarrow p$$

$$(2) \quad \mathcal{M} \models_v \Box p \text{ e } \mathcal{M} \not\models_v p \quad (\text{da 1})$$

$$(3) \quad \text{per ogni } t (v \mathcal{R} t \text{ solo se } \mathcal{M} \models_t p) \quad (\text{da 2})$$

Per definizione di $\mathcal{I}(p)$ dal fatto che $\mathcal{M} \not\models_v p$ (cfr. (2)) segue che esiste un mondo, che chiameremo s , tale che:

$$(4) \quad \exists n \in \mathbb{N} (v \mathcal{R}^n s \text{ e } \neg(w \mathcal{R} s))$$

Mostriamo per induzione su n che ciò porta a contraddizione:

- $n = 0$. Allora, $v \mathcal{R}^0 s$ e quindi (per Definizione 1.12) $v = s$. Da questo e da (1) otteniamo che $w \mathcal{R} s$. Ma questo è in contraddizione con (4).

- $n = m + 1$. Allora $v \mathcal{R}^{m+1} s$ e quindi per qualche x , $v \mathcal{R} x$ e $x \mathcal{R}^m s$. Ma $v \mathcal{R} x$ implica, per (2), che $\mathcal{M} \models_x p$ e dunque per (\dagger) che per ogni $y (x \mathcal{R}^* y \text{ solo se } w \mathcal{R} y)$. Poiché $x \mathcal{R}^m s$ implica $x \mathcal{R}^* s$, segue che $w \mathcal{R} s$, in contraddizione con (4).

Dunque non esiste un $n \in \mathbb{N}$ che soddisfi (4). ($\dagger\dagger$) risulta così dimostrato. Possiamo procedere sapendo che:

$$(1) \quad \mathcal{M} \models_w \Box(\Box p \rightarrow p) \quad (\dagger\dagger)$$

Allora

- (2) $\mathcal{M} \vDash_w \Box p$ per MP con W
- (3) per ogni x ($w\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{M} \vDash_x p$) (da 2)
- (4) per ogni x ($w\mathcal{R}x \Rightarrow \forall y(x\mathcal{R}^*y \Rightarrow w\mathcal{R}y)$) (da 3, per (\dagger))
- (5) per ogni x e y ($w\mathcal{R}x \wedge x\mathcal{R}y \Rightarrow w\mathcal{R}y$)

Ma (5) ci dice che \mathcal{F} è transitiva.

3. Ora mostriamo che lo schema W è falso su ogni struttura che contenga un mondo riflessivo. Sia \mathcal{F} una tale struttura e w^* un tale mondo. Si definisca una interpretazione \mathcal{I} tale che:

$$\mathcal{I}(p) = \{v : v \neq w^*\}$$

Si vede facilmente che $\mathcal{M} \not\vDash_{w^*} \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$. \square

Dal Teorema 7.2 segue che:

TEOREMA 7.3 *KW è valida rispetto alle strutture irriflessive, transitive e prive di \mathcal{R} -catene infinite ascendenti. In particolare KW è valida rispetto alla classe degli ordini parziali stretti finiti.*

TEOREMA 7.4 $\vdash_{\text{KW}} \Box B \rightarrow \Box \Box B$

*Dimostrazione*²

- (I) $\vdash_{\text{KW}} B \rightarrow ((\Box B \wedge \Box \Box B) \rightarrow (B \wedge \Box B))$ taut
- (II) $\vdash_{\text{KW}} B \rightarrow (\Box(B \wedge \Box B) \rightarrow (B \wedge \Box B))$ I, K(1), taut
- (III) $\vdash_{\text{KW}} \Box B \rightarrow \Box(\Box(B \wedge \Box B) \rightarrow (B \wedge \Box B))$ RM
- (IV) $\vdash_{\text{KW}} \Box(\Box(B \wedge \Box B) \rightarrow (B \wedge \Box B)) \rightarrow \Box(B \wedge \Box B)$ Ax. W
- (V) $\vdash_{\text{KW}} \Box B \rightarrow \Box(B \wedge \Box B)$ III, IV, taut
- (VI) $\vdash_{\text{KW}} \Box B \rightarrow \Box B \wedge \Box \Box B$ V, K(1), taut
- (VII) $\vdash_{\text{KW}} \Box B \rightarrow \Box \Box B$ VI, taut \square

Altri teoremi di KW :

$$((\Box A \rightarrow A) \wedge \Box(\Box A \rightarrow A)) \rightarrow A$$

$$\Diamond \top \rightarrow \neg \Box \Diamond \top$$

2. Questa dimostrazione è divenuta standard e si può trovare in Hughes, Cresswell (1984, p. 101). Che ogni struttura per W sia transitiva segue banalmente dal fatto che lo schema 4 è teorema di KW.

$$\Diamond \top \rightarrow \Diamond \Box \perp$$

$$\Box \blacktriangleleft \leftrightarrow \Box \Diamond \top$$

Non sono teoremi di KW: $\Box A \rightarrow A$, $\Diamond \top$, $\neg \Box \perp$, $\Box \Diamond \top$

7.1 Completezza di KW

La dimostrazione del teorema di completezza che qui presentiamo è a nostra conoscenza la più semplice presente nella letteratura e si trova in Cresswell (1983).

Sia A una formula data. Poniamo $Sf'(A) = \{B : B \text{ è sottoformula di } A\} \cup \{\neg B : B \text{ è sottoformula di } A\}$.

DEFINIZIONE 7.5 (A -modello canonico per KW) Un A -modello canonico per KW è una tripla $\mathcal{M}_A^{\text{KW}} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ così definita:

- \mathcal{W} è la classe dei sottoinsiemi di $Sf'(A)$ che sono KW-consistenti e massimali rispetto all'insieme $Sf'(A)$, ovvero per ogni formula $B \in Sf'(A), B$ è elemento dell'insieme o $\neg B$ è elemento dell'insieme;
- \mathcal{R} è una relazione binaria tale che $w \mathcal{R} v$ se e solo se per qualunque formula $\Box B \in w$ si ha $B \in v$ e $\Box B \in v$, e inoltre esiste una fbf C tale che $\Box C \notin w$ e $\Box C \in v$;
- \mathcal{I} è tale che $\mathcal{I}(p) = \{w \in \mathcal{W} : p \in w\}$.

LEMMA 7.6 Per ogni $B \in Sf'(A)$ ed ogni $w \in \mathcal{W}$

$$\mathcal{M}_A^{\text{KW}} \models_w B \quad \Leftrightarrow \quad B \in w$$

Dimostrazione La dimostrazione è analoga a quella del lemma fondamentale del modello canonico (4.10), pertanto trattiamo soltanto il caso in cui B è del tipo $\Box C$.

$\Box C \in w$. Se $w \mathcal{R} v$, allora dalla definizione di \mathcal{R} nell' A -modello canonico, $C \in v$, dunque per ipotesi di induzione $\mathcal{M}_A^{\text{KW}} \models_v C$, da cui $\mathcal{M}_A^{\text{KW}} \models_w \Box C$.

$\Box C \notin w$. Facciamo vedere che per qualche v , $w \mathcal{R} v$ e $\mathcal{M} \not\models_v C$. Si ponga:

$$\Gamma = \{D : \Box D \in w\} \cup \{\Box E : \Box E \in w\} \cup \{\neg C, \Box C\}$$

Mostriamo che Γ è KW-consistente. Supponiamo per assurdo che non lo sia, quindi esistono formule $\square D_1, \dots, \square D_n, \square E_1, \dots, \square E_k$ in w tali che

$$\begin{aligned}\vdash_{\text{KW}} (D_1 \wedge \dots \wedge D_n \wedge \square E_1 \wedge \dots \wedge \square E_k) &\rightarrow (\square C \rightarrow C) \\ \vdash_{\text{KW}} \square(D_1 \wedge \dots \wedge D_n \wedge \square E_1 \wedge \dots \wedge \square E_k) &\rightarrow \square(\square C \rightarrow C) \\ \vdash_{\text{KW}} (\square D_1 \wedge \dots \wedge \square D_n \wedge \square \square E_1 \wedge \dots \wedge \square \square E_k) &\rightarrow \square(\square C \rightarrow C)\end{aligned}$$

e poiché lo schema 4 è teorema di KW,

$$\vdash_{\text{KW}} (\square D_1 \wedge \dots \wedge \square D_n \wedge \square E_1 \wedge \dots \wedge \square E_k) \rightarrow \square(\square C \rightarrow C)$$

usando infine W :

$$\vdash_{\text{KW}} (\square D_1 \wedge \dots \wedge \square D_n \wedge \square E_1 \wedge \dots \wedge \square E_k) \rightarrow \square C$$

Siccome $\square D_1, \dots, \square D_n, \square E_1, \dots, \square E_k \in w$, dev'essere anche $\square C \in w$, il che contraddice l'assunzione che $\square C \notin w$. Quindi Γ è KW-consistente. Γ può essere esteso ad un insieme v che sia KW-consistente e $Sf'(A)$ -massimale, dunque $v \in \mathcal{W}$ e per ipotesi di induzione $\mathcal{M}_A^{\text{KW}} \not\models_v C$. Inoltre per costruzione di Γ si ha che $w \mathcal{R} v$, dunque $\mathcal{M}_A^{\text{KW}} \not\models_w \square C$. \square

TEOREMA 7.7 KW è completo rispetto agli ordini parziali stretti finiti.

Dimostrazione Si abbia che $\not\models_{\text{KW}} A$ per qualche formula A . Si consideri un A -modello canonico $\mathcal{M}_A^{\text{KW}}$. Per il lemma 7.6 A è falsa in qualche mondo di $\mathcal{M}_A^{\text{KW}}$. Ma questo modello è un ordine parziale stretto finito, infatti:

- \mathcal{W} contiene un numero finito di mondi, al massimo 2^n , ove n è la cardinalità di $Sf'(A)$;
- \mathcal{R} è irriflessiva perché, se valeesse $x \mathcal{R} x$ per qualche x , dalla definizione di \mathcal{R} seguirebbe che $\square B \in x$ e $\square B \notin x$ per qualche B , contro la KW-consistenza di x ;
- \mathcal{R} è transitiva, infatti sia $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z$. Se $\square A \in x$ allora per definizione di \mathcal{R} , $\square A \in y$ e quindi $\square A \in z$ e $A \in z$. Inoltre presa una formula $\square B$ tale che $\square B \notin x$ e $\square B \in y$ si deve avere $\square B \in z$. Quindi vale $x \mathcal{R} z$. \square

TEOREMA 7.8 KW non è fortemente completa, ovvero non vale che

$$\Gamma \vdash_{\text{KW}} B \quad \text{sse} \quad \Gamma \vDash_{\text{KW}} B$$

Con $\Gamma \vDash_{\text{KW}} B$ si intende che B è valida su tutte le strutture per KW su cui sono valide le formule di Γ .

Dimostrazione Sia

$$\Gamma = \{\Diamond p_0, \Box(p_0 \rightarrow \Diamond p_1), \Box(p_1 \rightarrow \Diamond p_2), \Box(p_2 \rightarrow \Diamond p_3), \dots, \Box(p_n \rightarrow \Diamond p_{n+1}), \dots\}$$

$\Gamma \not\vDash_{\text{KW}} \perp$ poiché per ogni sottoinsieme finito $\Delta \subseteq \Gamma$, $\Delta \not\vDash_{\text{KW}} \perp$, infatti ogni tale Δ ha un modello su un ordine stretto finito. Γ invece non ha modelli su alcun ordine stretto finito, quindi $\Gamma \vDash_{\text{KW}} \perp$. \square

TEOREMA 7.9 KW gode della proprietà della disgiunzione, ovvero

$$\text{Se } \vdash_{\text{KW}} \Box B_1 \vee \Box B_2 \vee \dots \vee \Box B_n \text{ allora } \vdash_{\text{KW}} B_i$$

per qualche $i, 1 \leq i \leq n$.

Dimostrazione La dimostrazione si compone di 4 passi.

Si consideri il modello canonico per KW, $\mathcal{M}^{\text{KW}} = \langle \mathcal{W}^{\text{KW}}, \mathcal{R}^c, \mathcal{I}^c \rangle$ e si definisca il seguente nuovo modello

1. $\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{W}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{I}^* \rangle$, dove

- $\mathcal{W}^* = \mathcal{W}^{\text{KW}} \cup \{z\}$, ove z è un nuovo elemento che non occorre in \mathcal{W}^{KW} .

- se $w, v \in \mathcal{W}^{\text{KW}}$ allora $(w \mathcal{R}^c v \iff w \mathcal{R}^* v)$

- se $v \in \mathcal{W}^{\text{KW}}$ allora $z \mathcal{R}^* v$

- $\mathcal{I}^*(p) = \mathcal{I}^c(p)$ per ogni variabile p .

Si noti che $\neg(z \mathcal{R}^* z)$ e che $z \notin \mathcal{I}^*(p)$.

2. È facile mostrare (*Esercizio*) che per ogni $w \in \mathcal{W}^{\text{KW}}$,

$$(\dagger) \quad \mathcal{M}^* \vDash_w A \iff \mathcal{M}^{\text{KW}} \vDash_w A$$

e di conseguenza che

$$(\dagger\dagger) \quad \mathcal{M}^* \vDash_z \Box A \iff \mathcal{M}^{\text{KW}} \vDash A$$

La freccia (\Rightarrow) dipende dal fatto che $\neg(z \mathcal{R}^* z)$.

3. $\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{W}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{I}^* \rangle$ è un modello per W. Basta mostrare che $\mathcal{M}^* \vDash_z W$.

A questo scopo supponiamo che $\mathcal{M}^* \models_z \Box(\Box A \rightarrow A)$. Allora per $(\dagger\dagger)$

$$(\dagger\dagger\dagger) \quad \mathcal{M}^{KW} \models \Box A \rightarrow A$$

da cui

$$\mathcal{M}^{KW} \models \Box(\Box A \rightarrow A), \text{ quindi per } W$$

$\mathcal{M}^{KW} \models \Box A$. Questo implica con $(\dagger\dagger)$ che

$$\mathcal{M}^{KW} \models A \text{ e quindi per } (\dagger\dagger) \text{ abbiamo che } \mathcal{M}^* \models_z \Box A.$$

4. Sia $\vdash_{KW} \Box B_1 \vee \Box B_2 \vee \dots \vee \Box B_n$, allora, per 3, \mathcal{M}^* è un modello per KW; da cui

$$\mathcal{M}^* \models_z \Box B_1 \vee \Box B_2 \vee \dots \vee \Box B_n$$

$\mathcal{M}^* \models_z \Box B_i$ per qualche $i, 1 \leq i \leq n$, quindi per $(\dagger\dagger)$

$$\mathcal{M}^{KW} \models B_i \text{ da cui}$$

$$\vdash_{KW} B_i.$$

□

TEOREMA 7.10 KW non è canonica.

Dimostrazione Mostriamo che il modello canonico per KW contiene un punto riflessivo, quindi la struttura del modello canonico per KW non è una struttura per KW. Si consideri l'insieme $\Gamma = \{\neg \Box A : KW \not\models A\}$. Γ è KW-consistente: infatti se non lo fosse, per talune formule di Γ , diciamo A_1, \dots, A_n , avremmo che $\vdash_{KW} \neg \Box A_1 \wedge \dots \wedge \neg \Box A_n \rightarrow \perp$, da cui $\vdash_{KW} \Box A_1 \vee \dots \vee \Box A_n$. Per la proprietà della disgiunzione segue che $\vdash_{KW} A_i$ per qualche $i, 1 \leq i \leq n$. Ma questo è chiaramente contraddittorio.

Poiché Γ è KW-consistente, esiste un punto w del modello canonico per KW tale che $\Gamma \subseteq w$. Quindi per ogni formula $A, \not\models_{KW} A$ implica $\neg \Box A \in w$, da cui per ogni formula $A, \Box A \in w$ implica che $\vdash_{KW} A$ e quindi $A \in w$. Segue che $w \mathcal{R}^c w$. □

7.2

Modalità in KW e il predicato $Teor_{PA}(x)$

Sia *prova* (n, m) la relazione che intercorre tra due numeri naturali n ed m quando n è il numero di Gödel di una dimostrazione di una formula di numero di Gödel m . Si dimostra che tale relazione è fortemente rappresentabile nell'aritmetica (formale) PA, ovvero che esiste una formula $Dim(x, y)$ di PA tale che per ogni n ed m ,

$$\begin{aligned} PA \vdash \text{Dim}(\bar{n}, \bar{m}) &\text{ se vale } \textit{prova}(n, m) \\ PA \vdash \neg \text{Dim}(\bar{n}, \bar{m}) &\text{ se vale } \textit{non prova}(n, m) \end{aligned}$$

\bar{n} e \bar{m} sono i numerali di n ed m .

DEFINIZIONE 7.11 $\text{Teor}_{PA}(x)$ sse $PA \vdash \exists y \text{Dim}(y, x)$.

TEOREMA 7.12 Il predicato unario $\text{Teor}_{PA}(x)$ gode delle seguenti proprietà:

- T1 $PA \vdash A$ solo se $PA \vdash \text{Teor}_{PA}(\bar{A})$;
- T2 $PA \vdash (\text{Teor}_{PA}(\bar{A}) \wedge \text{Teor}_{PA}(\overline{A \rightarrow B}) \rightarrow \text{Teor}_{PA}(\bar{B}))$;
- T3 $PA \vdash \text{Teor}_{PA}(\bar{A}) \rightarrow \text{Teor}_{PA}(\text{Teor}_{PA}(\bar{A}))$.

Si riconosce facilmente che le proprietà T-1-T3 corrispondono agli assiomi e regole di K4 e, ricordiamo, ogni teorema di K4 è un teorema di KW.

Nel 1952 Leon Henkin pose una questione relativamente agli enunciati che esprimono la propria dimostrabilità : quali sono, se esistono, e di che proprietà godono gli enunciati dell'aritmetica che dimostrano la propria dimostrabilità, ovvero gli enunciati tali che $PA \vdash \text{Teor}_{PA}(\bar{A}) \leftrightarrow A$?

Come sappiamo gli enunciati che esprimono la propria indimostrabilità, ovvero tali che $PA \vdash \neg \text{Teor}_{PA}(\bar{A}) \leftrightarrow A$ non sono dimostrabili in PA (primo teorema di Gödel), ma sono veri (proprio perché dicono la verità: non sono dimostrabili!).

Löb dimostra che $PA \vdash \text{Teor}_{PA}(\bar{A}) \rightarrow A$ si ha solo nel caso banale in cui $\vdash_{PA} A$, ovvero che il predicato $\text{Teor}_{PA}(x)$ gode della seguente proprietà:

$$T4 \quad PA \vdash \text{Teor}_{PA}(\bar{A}) \rightarrow A \quad \text{solo se} \quad PA \vdash A$$

Questo risultato, noto come *teorema di Löb*, risponde immediatamente al quesito di Henkin. Inoltre Löb dimostra anche una versione formalizzata di questo fatto, facendo vedere che:

$$PA \vdash \text{Teor}_{PA}(\overline{\text{Teor}_{PA}(\bar{A}) \rightarrow A}) \rightarrow \text{Teor}_{PA}(\bar{A})$$

L'assioma W è nient'altro che la versione modale di questa proprietà del predicato $\text{Teor}_{PA}(x)$.

Si consideri ora la seguente regola di inferenza:

$$\frac{\vdash \Box A \rightarrow A}{\vdash A} LR$$

Chiamiamo K4.LR il calcolo assiomatico che estende K4 con la regola LR. Abbiamo che

LEMMA 7.13 *Per ogni formula modale A,*

$$\vdash_{K4.LR} A \quad \text{sse} \quad \vdash_{KW} A$$

Dimostrazione (\Rightarrow) Dobbiamo provare che la regola LR è ammissibile in KW.

- | | | |
|-------|---|-------------|
| (I) | $\vdash_{KW} \Box A \rightarrow A$ | assunzione |
| (II) | $\vdash_{KW} \Box(\Box A \rightarrow A)$ | I, N |
| (III) | $\vdash_{KW} \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$ | Ax. W |
| (IV) | $\vdash_{KW} \Box A$ | II, III, MP |
| (V) | $\vdash_{KW} A$ | I, IV, MP |

(\Leftarrow) Dobbiamo far vedere che W è un teorema di K4.LR, si ponga

$$B \equiv \Box(\Box A \rightarrow A) \quad C \equiv \Box A \quad W \equiv B \rightarrow C$$

abbiamo che

- | | | |
|-------|---|----------------------------------|
| (I) | $\vdash_{K4.LR} \Box W \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box C)$ | Ax. K |
| (II) | $\vdash_{K4.LR} B \rightarrow (\Box C \rightarrow C)$ | Ax. K |
| (III) | $\vdash_{K4.LR} B \rightarrow \Box B$ | Ax. 4 |
| (IV) | $\vdash_{K4.LR} \Box W \rightarrow (B \rightarrow C)$ | I, II, III, taut |
| (V) | $\vdash_{K4.LR} \Box W \rightarrow W$ | IV, $(B \rightarrow C) \equiv W$ |
| (VI) | $\vdash_{K4.LR} W$ | v, LR |

□

Dunque le proprietà T1-T4 corrispondono agli assiomi e regole di inferenza di (un sistema equivalente a) KW.

Sia τ una funzione di traduzione dall'insieme delle variabili enunciative Φ a enunciati di PA, tale che:

- $\tau(\perp) = \perp;$

- $\tau(B \rightarrow C) = \tau(B) \rightarrow \tau(C);$
- $\tau(\Box B) = \text{Teor}(\ulcorner \tau(B) \urcorner).$

TEOREMA 7.14 (Teorema di Solovay, 1976)
 $\vdash_{\text{KW}} A \quad \text{sse per ogni traduzione } \tau, PA \vdash \tau(A).$

Il teorema di Solovay (1976) è molto significativo perché mostra che un frammento di una teoria formale indecidibile può essere studiato per mezzo di una logica modale decidibile, KW.

Per una trattazione significativa della logica KW e dei rapporti con PA, cfr. Boolos (1993) e Smorinski (1985).

Diagrammi per estensioni di K4.3

La costruzione del modello canonico è una costruzione di grande generalità e potenza, uniforme per ogni logica normale, ma spesso di scarsa efficacia quando si voglia dimostrare che una logica è caratterizzata da particolari classi di strutture o da un'unica struttura. Caso tipico di questa situazione è dato dalla classe delle strutture connesse. Qual è la logica dei razionali positivi ordinati da $<$? o la logica degli ordini lineari finiti? Il metodo dei diagrammi qui presentato si applica a logiche caratterizzate da strutture connesse ed è un metodo speculare a quello del modello canonico perché il modello per una data formula viene costruito dal basso. Un diagramma Δ può essere visto come un insieme di indici linearmente ordinati a ognuno dei quali è associato un insieme di enunciati. Se una formula A è associata ad un indice (punto, mondo) w (cioè la coppia $\langle w, A \rangle \in \Delta$) il significato inteso è che A è vera in w . Un diagramma è costruito passo dopo passo aggiungendo un nuovo indice (insieme ad una formula) al diagramma costruito fino a quel punto o aggiungendo una formula a un indice già presente nel diagramma. La costruzione è tale per cui alla fine si ottiene un diagramma che non è altro che un modello di Kripke. Con questa tecnica dimostriamo in modo uniforme la completezza delle logiche K4.3, K4.3.D, K4.3.D.Z, K4.3.W, K4.3.Z, S4.3, S4.3.Dum, S4.3.Grz, S4.3.C_m^o ($m \geq 1$), S5, S5.Alt_n.

In questo capitolo con L intendiamo ogni logica $L \supseteq K4.3$.

Il nostro insieme privilegiato di indici è l'insieme \mathbb{Q}_0^+ dei numeri razionali positivi, zero incluso, ordinato dalla relazione “minore di”, $<$.

DEFINIZIONE 8.1

- Un *diagramma* Δ è un sottoinsieme di $(\mathbb{Q}_0^+ \times Fm^\Phi)$.
- Se $\Gamma \subseteq \Delta$, allora Γ è detto *sottodiagramma* di Δ e Δ è detto *sopradiagramma* di Γ .

Esempio Sia $\Pi = \{\langle 0, \neg C \rangle, \langle 0, \Diamond A \rangle, \langle s, \top \rangle, \langle v, A \rangle, \langle v, \Box G \rangle, \langle w, D \vee G \rangle\}$, ove $0 < s < v < w$. È assai utile pensare ai diagrammi nel modo qui rappresentato:

 Π

$\neg C$	\top	$\Box G$	$D \vee G$
$\Diamond A$	\circ	\circ	\circ
0	s	v	w

DEFINIZIONE 8.2 Sia Δ un diagramma.

- Il *supporto* di Δ è così definito:

$$\text{Supp}(\Delta) = \{w : \langle w, A \rangle \in \Delta, \text{ per qualche formula } A\}$$

Se il supporto di Δ è finito, lo indichiamo con $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, ove $v_1 < v_2 < \dots < v_n$.

- Per ogni $w \in \text{Supp}(\Delta)$ l'insieme degli enunciati associati a w in Δ è

$$\Delta(w) = \{A : \langle w, A \rangle \in \Delta\}$$

Ovviamente un diagramma è finito se contiene un numero finito di copie $\langle w, A \rangle$, per qualche indice $w \in \mathbb{Q}_0^+$ e qualche formula A , ne segue che il suo supporto è costituito da un numero finito di indici e ad ognuno di essi è associato un numero finito di formule.

Ecco due sottodiagrammi del diagramma dell'esempio, il primo ha lo stesso supporto di Π , il secondo no.

 Π_1

$\neg C$	\top	$\Box G$	$D \vee G$
$\Diamond A$	\circ	\circ	\circ
0	s	v	w

 Π_2

$\neg C$	\top	$\Box G$	$D \vee G$
$\Diamond A$	\circ	\circ	\circ
0	s	v	w

Ora introduciamo la nozione di L-coerenza che risulta essere cruciale per la costruzione dei diagrammi e che si riduce alla L-consistenza nel caso di diagrammi il cui supporto consiste di un solo indice.

DEFINIZIONE 8.3

- Sia Δ un diagramma finito il cui supporto è $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, Δ è L-coerente sse

$$\not\vdash_L [\Delta_1 \rightarrow \square[\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \square[\Delta_n \rightarrow \perp] \dots]]$$

ove per ogni i , $1 \leq i \leq n$, $\Delta_i = \bigwedge \Delta(v_i)$.

- Un diagramma infinito è detto L-coerente sse tutti i suoi sottodiagrammi finiti lo sono.

Il diagramma Π dell'esempio è L-coerente sse

$$\not\vdash_L (\neg C \wedge \Diamond A) \rightarrow \square[\top \rightarrow \square[(\square G \wedge A) \rightarrow \square[(D \vee G) \rightarrow \perp]]]$$

LEMMA 8.4

- a) Se M è un insieme di enunciati L-consistente, allora per ogni $w \in Q_0^+$, $\{\langle w, A \rangle : A \in M\}$ è L-coerente.
- b) Se Δ è un diagramma finito e L-coerente e $\Gamma \subseteq \Delta$, allora Γ è L-coerente.
- c) Se Δ è L-coerente, allora per ogni $w \in \text{Supp}(\Delta)$, $\Delta(w)$ è L-consistente.

Dimostrazione

- a) Immediata.

Il lemma (b) sarà usato estensivamente poiché spesso è più facile dimostrare che un diagramma “più grande” è L-coerente. Da notare che l'assioma della transitività è essenziale nella dimostrazione di questo lemma.

- b) Sia $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ il supporto di Δ e supponiamo che $\Gamma = \Delta - \{\langle v_b, A \rangle\}$. Se $v_b \in \text{Supp}(\Gamma)$, allora Γ è banalmente L-coerente; se $v_b \notin \text{Supp}(\Gamma)$, allora Γ non è L-coerente sse

$$\vdash_L \Gamma_1 \rightarrow \square[\Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \square[\Gamma_{b-1} \rightarrow \square[\Gamma_{b+1} \rightarrow \dots \rightarrow \square[\Gamma_n \rightarrow \perp] \dots]] \dots]$$

Quindi per l'assioma 4,

$$\vdash_L \Gamma_1 \rightarrow \square[\Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \square[\Gamma_{b-1} \rightarrow \square[\Gamma_{b+1} \rightarrow \dots \rightarrow \square[\Gamma_n \rightarrow \perp] \dots]] \dots]$$

da cui

$$\vdash_L \Gamma_1 \rightarrow \square[\Gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \square[\Gamma_{b-1} \rightarrow \square[\Gamma_b \rightarrow \square[\Gamma_{b+1} \rightarrow \dots \rightarrow \square[\Gamma_n \rightarrow \perp] \dots]] \dots]]$$

contrariamente alla L-coerenza di Δ .

- c) Se $\Delta(w)$ non è L -consistente, allora $\vdash_L A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow \perp$ per taluni enunciati $A_1, \dots, A_n \in \Delta(w)$. Così il diagramma $\Gamma = \{\langle w, A_i \rangle : 1 \leq i \leq n\}$ non è L -coerente contrariamente al fatto che è un sottodiagramma di Δ . \square

DEFINIZIONE 8.5 Sia Δ un diagramma.

1. Δ è *massimale* sse per ogni $v \in \text{Supp}(\Delta)$ e formula $A, \langle v, A \rangle \in \Delta$ oppure $\langle v, \neg A \rangle \in \Delta$.
2. Δ è *ricco* sse $\langle v, \Diamond A \rangle \in \Delta$, allora esiste un $w \in \text{Supp}(\Delta)$, $w > v$ e $\langle w, A \rangle \in \Delta$.
3. Δ è *L -saturo* sse Δ è L -coerente, massimale e ricco.

I prossimi lemmi ci dicono che ogni diagramma L -coerente può essere esteso ad un diagramma L -saturo.

Convenzione notazionale: $\Delta + \langle w, A \rangle =_{df} \Delta \cup \{\langle w, A \rangle\}$.

LEMMA 8.6 Sia Δ un diagramma L -coerente e finito il cui supporto è $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Allora per ogni $1 \leq i \leq n$ e formula A, B ,

- a) Se $\Delta(v_i) \vdash_L A \vee B$ allora $\Delta + \langle v_i, A \rangle$ è L -coerente oppure $\Delta + \langle v_i, B \rangle$ è L -coerente.
- b) $\Delta + \langle v_i, A \rangle$ è L -coerente oppure $\Delta + \langle v_i, \neg A \rangle$ è L -coerente.

Dimostrazione

- a) Supponiamo per assurdo che sia $\Delta + \langle v_i, A \rangle$ che $\Delta + \langle v_i, B \rangle$ siano L -incoerenti. Dunque

$$\vdash_L \Delta_1 \rightarrow \Box(\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta(v_i) \wedge A \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_n \rightarrow \perp) \dots) \dots)$$

e

$$\vdash_L \Delta_1 \rightarrow \Box(\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta(v_i) \wedge B \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_n \rightarrow \perp) \dots) \dots)$$

Allora

$$\begin{aligned} \vdash_L \Delta_1 \rightarrow & \Box(\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box((\Delta(v_i) \wedge A) \vee (\Delta(v_i) \wedge B) \rightarrow \dots \\ & \rightarrow \Box(\Delta_n \rightarrow \perp) \dots) \dots) \\ \vdash_L \Delta_1 \rightarrow & \Box(\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta(v_i) \wedge (A \vee B) \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_n \rightarrow \perp) \dots) \dots) \\ \vdash_L \Delta_1 \rightarrow & \Box(\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta(v_i) \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_n \rightarrow \perp) \dots) \dots) \end{aligned}$$

contrariamente alla L -coerenza di Δ .

- b) Esercizio. \square

LEMMA 8.7 *Sia Δ un diagramma L-coerente e finito il cui supporto è $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Allora per ogni estensione L-coerente Δ^* di Δ , per ogni $1 \leq i \leq n$ e formula A,*

- a) *Se $\Delta(v_i) \vdash_L A$, allora $\Delta^* + \langle v_i, A \rangle$ è L-coerente*
- b) *Se $\Delta(v_i) \vdash_L \Box A$, allora*
 - (I) *$\Delta^* + \langle v_j, A \rangle$ è L-coerente, per ogni $j, i < j \leq n$*
 - (II) *$\Delta^* + \langle v_j, \Box A \rangle$ è L-coerente, per ogni $i \leq j \leq n$*
- c) *Se $\Delta(v_i) \vdash_L A$, allora $\Delta^* + \langle v_j, \Diamond A \rangle$ è L-coerente per ogni $j < i$*
- d) *Se $\Delta(v_i) \vdash_L \Diamond A$, $\Delta^* + \langle v_j, \Diamond A \rangle$ è L-coerente, per ogni $j \leq i$*

Dimostrazione

a) Se per qualche estensione Δ^* , $\Delta^* + \langle v_i, A \rangle$ non è L-coerente, allora $\Delta^* + \langle v_i, \neg A \rangle$ è L-coerente, contrariamente al fatto che $\Delta^* + \langle v_i, \neg A \rangle \vdash_L \perp$.

b)(I) Facciamo vedere che se $\langle v_j, \neg A \rangle \in \Delta^*$, allora Δ^* non è L-coerente. Per il Lemma 8.6 segue che $\Delta^* + \langle v_j, A \rangle$ è L-coerente.

$$\vdash_L \Box A \rightarrow \Box A$$

$$\vdash_L \Box A \rightarrow \Box(\neg A \rightarrow \perp)$$

$$\vdash_L \Delta_i^* \wedge \Box A \rightarrow \Box(\Delta_j^* \wedge \neg A \rightarrow \perp)$$

$$\vdash_L \Delta_i^* \wedge \Box A \rightarrow \Box(\Delta_j^* \wedge \neg A \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_n^* \rightarrow \perp) \dots)$$

$$\vdash_L \Delta_i^* \wedge \Box A \rightarrow (\Box \Delta_{i+1}^* \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_j^* \wedge \neg A \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_n^* \rightarrow \perp) \dots))$$

$$\vdash_L \Delta_1^* \rightarrow \Box(\Delta_2^* \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_i^* \wedge \Box A \rightarrow (\Box \Delta_{i+1}^* \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_j^* \wedge \neg A \rightarrow \dots \rightarrow \Box(\Delta_n^* \rightarrow \perp) \dots)))$$

b)(II) La dimostrazione è analoga a quella di (b)(I) eccetto che inizia con l'assioma 4, $\vdash_L \Box A \rightarrow \Box \Box A$.

c) Se $\Delta^* + \langle v_j, \Diamond A \rangle$ non è L-coerente, allora $\Delta^* + \langle v_j, \Box \neg A \rangle$ è L-coerente, da cui $\Delta^* + \langle v_i, \neg A \rangle$ è L-coerente per (b)(I), contrariamente al fatto che $\Delta^* + \langle v_i, \neg A \rangle \vdash_L \perp$.

d) Se $\Delta^* + \langle v_j, \Diamond A \rangle$ non è L-coerente, allora $\Delta^* + \langle v_j, \Box \neg A \rangle$ è L-coerente, da cui per l'assioma 4, $\Delta^* + \langle v_j, \Box \Box \neg A \rangle$, quindi $\Delta^* + \langle v_i, \Box \neg A \rangle$ è L-coerente per (b)(I), contrariamente al fatto che $\Delta^* + \langle v_i, \Box \neg A \rangle \vdash_L \perp$. \square

Nota In tutti i casi considerati in questo lemma, non solo il diagramma ottenuto aggiungendo una data coppia, diciamo, $\langle w, B \rangle$ al diagramma Δ è L-coerente, ma ogni estensione L-coerente di Δ non potrà contenere $\langle w, \neg B \rangle$. Useremo talvolta l'espressione 'B deve essere necessariamente

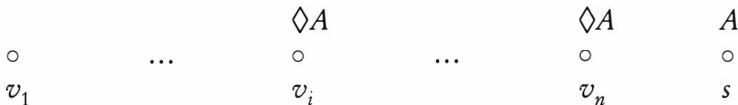
aggiunta al punto w' oppure ' B è necessariamente vera in w' ' proprio per indicare che $\langle w, B \rangle$ è elemento di qualsiasi estensione L -coerente di Δ .

LEMMA 8.8 Sia Δ un diagramma L -coerente e finito e sia $w \in \text{Supp}(\Delta)$.

Se $\langle w, \Diamond A \rangle \in \Delta$, allora per qualche $s \in \mathbb{Q}_0^+, s > w$, $\Delta + \langle s, A \rangle$ è L -coerente.

Dimostrazione Sia $\text{Supp}(\Delta) = \langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_n \rangle$ e sia $w = v_i$.

Caso 1. $\forall k (i \leq k \leq n) (\Delta + \langle v_k, \Box \neg A \rangle$ non è L -coerente). Allora in particolare $\Delta + \langle v_n, \Box \neg A \rangle$ non è L -coerente, quindi per 8.6 (b), $\Delta^* = \Delta + \langle v_n, \Diamond A \rangle$ è L -coerente. Si consideri un numero razionale $s > v_n$, facciamo vedere che $\Gamma = \Delta + \langle v_n, \Diamond A \rangle + \langle s, A \rangle$ è L -coerente.



Supponiamo che non lo sia e quindi che

$$\vdash_L [\Delta_1 \rightarrow \Box[\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box[\Delta_n \wedge \Diamond A \rightarrow \Box[A \rightarrow \perp]] \dots]]$$

Allora

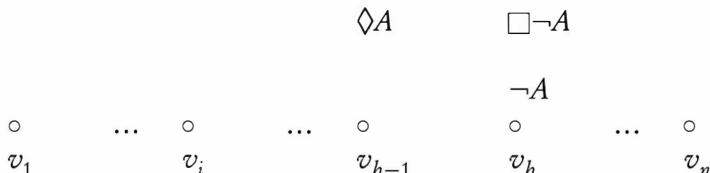
$$\vdash_L [\Delta_1 \rightarrow \Box[\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box[\Delta_n \wedge \Diamond A \rightarrow \Box \neg A] \dots]]$$

quindi

$$\vdash_L [\Delta_1 \rightarrow \Box[\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box[\Delta_n \wedge \Diamond A \rightarrow \perp] \dots]]$$

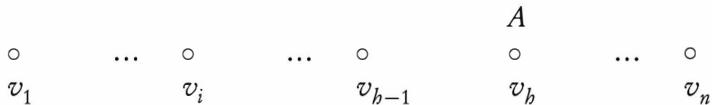
contrariamente alla L -coerenza di Δ^* . Quindi Γ è L -coerente e dunque anche $\Delta + \langle s, A \rangle$ è L -coerente per il Lemma 8.4b).

Caso 2. $\exists k (i \leq k \leq n) (\Delta + \langle v_k, \Box \neg A \rangle$ è L -coerente).



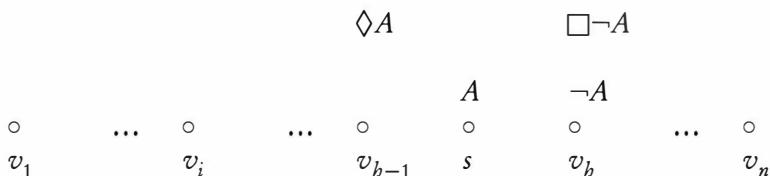
- Se $\Delta + \langle v_{b-1}, \Diamond A \rangle + \langle v_b, \Box \neg A \rangle + \langle v_b, A \rangle$ è L -coerente, allora il teorema è dimostrato e $s = v_b$.

$$\Diamond A \qquad \Box \neg A$$



- Se così non è, allora $\Delta^* = (\Delta + \langle v_{b-1}, \Diamond A \rangle + \langle v_b, \Box \neg A \rangle + \langle v_b, \neg A \rangle)$ è L -coerente.

Si prenda un numero razionale s tale che $v_{b-1} < s < v_b$. Mostriamo che $\Delta^* + \langle s, A \rangle$ è L -coerente.



Supponiamo che non lo sia, quindi

$$\vdash_L [\Delta_1 \rightarrow \Box[\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box[(\Delta_{b-1} \wedge \Diamond A) \rightarrow \Box[A \rightarrow \Box(\Delta_b \wedge \Box \neg A \wedge \neg A) \rightarrow \dots \rightarrow \Box[\Delta_n \rightarrow \perp]]] \dots]].$$

Ma è teorema di K4.3 che

$$\vdash_L \Box[A \rightarrow \Box(B \wedge \Box \neg A \wedge \neg A \rightarrow C)] \rightarrow [\Diamond A \rightarrow \Box(B \wedge \Box \neg A \wedge \neg A \rightarrow C)],$$

quindi

$$\vdash_L [\Delta_1 \rightarrow \Box[\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box[(\Delta_{b-1} \wedge \Diamond A) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Box[(\Delta_b \wedge \Box \neg A \wedge \neg A \rightarrow \dots \rightarrow \Box[\Delta_n \rightarrow \perp] \dots])]] \dots]]$$

da cui

$$\vdash_L [\Delta_1 \rightarrow \Box[\Delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Box[(\Delta_{b-1} \wedge \Diamond A) \rightarrow \Box[(\Delta_b \wedge \Box \neg A \wedge \neg A) \rightarrow \dots \rightarrow \Box[\Delta_n \rightarrow \perp] \dots]]] \dots]]$$

contrariamente alla L -coerenza di Δ^* . Quindi Δ^* è L -coerente e per il Lemma 8.4(b), $\Delta + \langle s, A \rangle$ è L -coerente.

LEMMA 8.9 Sia Δ un diagramma L -coerente e finito con supporto $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

a) Se $K4.3.X \subseteq L$, allora per ogni $w \in \mathbb{Q}_0^+, v_1 < w < v_n, \Delta + \langle w, \top \rangle$ è L -coerente.

b) Se $K4.3.D \subseteq L$, allora per ogni $w \in \mathbb{Q}_0^+, v_n < w, \Delta + \langle w, \top \rangle$ è L -coerente.

LEMMA 8.10 Sia $L \supseteq K4.3$. Se G è una formula L -consistente, allora esiste un diagramma L -saturo Δ il cui supporto è un sottoinsieme di \mathbb{Q}_0^+ e tale che $\langle w, G \rangle \in \Delta$, per qualche $w \in \text{Supp}(\Delta)$.

Dimostrazione Sia $\langle v_1, A_1 \rangle, \langle v_2, A_2 \rangle, \langle v_3, A_3 \rangle, \dots, \langle v_{k-1}, A_{k-1} \rangle, \langle v_k, A_k \rangle$... una enumerazione di $(\mathbb{Q}_0^+ \times Fm^\Phi)$.

Definiamo la seguente catena di diagrammi:

- $\Delta_0 = \{\langle 0, G \rangle\}$
- Sia $k \geq 1$, si consideri $\langle v_k, A_k \rangle$
- Se $\Delta_{k-1} + \langle v_k, \top \rangle$ non è L -coerente, poniamo

$$\Delta_k = \Delta_{k-1}$$

- Se $\Delta_{k-1} + \langle v_k, \top \rangle$ è L -coerente, poniamo

$$\Delta_k^* = \begin{cases} \Delta_{k-1} + \langle v_k, A_k \rangle & \text{se } \Delta_{k-1} + \langle v_k, A_k \rangle \text{ è } L\text{-coerente} \\ \Delta_{k-1} + \langle v_k, \neg A_k \rangle & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta_k^* + \langle s, B \rangle & \text{per qualche } s > v_k \text{ se } A_k = \Diamond B \\ & \text{per qualche } B \text{ e } \langle v_k, A_k \rangle \in \Delta_k^* \\ \Delta_k^* & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $\Delta = \bigcup_{k \in N} \Delta_k$
- Si mostra facilmente che Δ è L -saturo.

□

DEFINIZIONE 8.11 Sia Δ un diagramma L -saturo. Si definisca il seguente modello indotto da Δ : $\mathcal{M}^\Delta = \langle \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$:

- $\mathcal{M} = \text{Supp}(\Delta)$
- $w \mathcal{R} v$ sse $w < v$
- $\mathcal{I}(p) = \{k : \langle k, p \rangle \in \Delta\}$

LEMMA 8.12 Sia Δ un diagramma L -saturo.

Per ogni formula A ,

$$\langle k, A \rangle \in \Delta \quad \text{sse} \quad \mathcal{M}^\Delta \vDash_k A$$

□

Dimostrazione Esercizio.

LEMMA 8.13

K4.3 è completa rispetto alla classe di strutture $\{\langle \mathcal{W}, < \rangle : \mathcal{W} \subseteq \mathbb{Q}_0^+\}$.

K4.3.D.X è completa rispetto alla struttura $\langle \mathbb{Q}_0^+, < \rangle$.

S4.3 è completa rispetto alla struttura $\langle \mathbb{Q}_0^+, \leqslant \rangle$.

8.1

Diagrammi finiti per estensioni di K4.3

8.1.1. LEMMI GENERALI

Convenzione notazionale. Con la scrittura $\Delta \cup \{\langle v, X \rangle\}$, ove X è un insieme di formule intendiamo il diagramma $\Delta \cup \{\langle v, A \rangle : A \in X\}$.

DEFINIZIONE 8.14 Un diagramma Π è detto una *variante alfabetica* del diagramma Δ sse esiste una corrispondenza biunivoca $f : \text{Supp}(\Pi) \rightarrow \text{Supp}(\Delta)$ che conserva l'ordine ed inoltre $\Pi(w) = \Delta(f(w))$ per ogni $w \in \text{Supp}(\Pi)$.

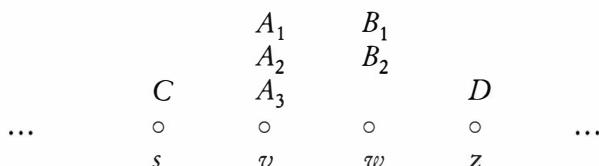
I diagrammi Π e Δ sono l'uno variante alfabetica dell'altro sse differiscono solo per i nomi degli elementi dei rispettivi supporti.

LEMMA 8.15 Se un diagramma Π è variante alfabetica del diagramma Δ , Π è L -coerente sse Δ lo è.

Due punti v e w del $\text{Supp}(\Delta)$ sono detti consecutivi (in Δ) sse non esiste uno $z \in \text{Supp}(\Delta)$ tale che $v < z < w$ oppure $w < z < v$.

LEMMA 8.16 Sia Δ un diagramma L -coerente. Siano v e w due punti consecutivi del $\text{Supp}(\Delta)$. Allora $\Gamma = (\Delta - (\{\langle w, A \rangle : w \in \text{Supp}(\Delta)\}) \cup \{\langle v, A \rangle : v \in \text{Supp}(\Delta)\})) \cup \{\langle w, A \rangle : \langle v, A \rangle \in \Delta\}$ è L -coerente.

Dimostrazione Immediata. Diamo un esempio. Sia Δ il seguente diagramma:



Quindi $\Delta - \{\langle w, A \rangle : w \in \text{Supp}(\Delta)\}$ è

		A_1		
		A_2		
C		A_3	D	
...	○	○	○	...
s		v	z	

e Γ è

		A_1		
		A_2		
C		A_3	D	
...	○	○	○	...
s		w	z	

□

Questo lemma consente di eliminare un punto w del supporto di un diagramma dato insieme a tutte le formule ad esso associate e di rinominare il punto v con w , purché v e w siano punti consecutivi.

LEMMA 8.17

$$\vdash_L (\Diamond A_1 \wedge \Diamond A_2) \rightarrow \Diamond(A_1 \wedge \Diamond A_2) \vee \Diamond(\Diamond A_1 \wedge A_2) \vee \Diamond(A_1 \wedge A_2)$$

Grazie a questo lemma, se $\langle v, \Diamond A_1 \rangle, \langle v, \Diamond A_2 \rangle$ sono elementi di un diagramma Δ , allora per il Lemma 8.4(a) $\Delta + \langle v, \Diamond(A_1 \wedge \Diamond A_2) \vee \Diamond(\Diamond A_1 \wedge A_2) \vee \Diamond(A_1 \wedge A_2) \rangle$ è L -coerente e per il Lemma 8.6(b)

$$\Delta + \langle v, \Diamond(A_1 \wedge \Diamond A_2) \rangle \text{ è } L\text{-coerente}$$

oppure

$$\Delta + \langle v, \Diamond(\Diamond A_1 \wedge A_2) \rangle \text{ è } L\text{-coerente}$$

oppure

$$\Delta + \langle v, \Diamond(A_1 \wedge A_2) \rangle \text{ è } L\text{-coerente}$$

Ognuno dei tre disgiunti ci dice in quale ordine devono essere instanziate le formule $\Diamond A_1$ e $\Diamond A_2$: prima A_1 e poi A_2 , prima A_2 e poi A_1 , oppure A_1 e A_2 insieme. In generale, se $\langle v, \Diamond A_1 \rangle, \dots, \langle v, \Diamond A_k \rangle$ sono elementi di un diagramma Δ , attraverso reiterate applicazioni del lemma, possiamo aggiungere al punto v una congiunzione che ci dice in quale ordine devono essere instanziate le formule A_1, \dots, A_k e se due o più di esse devono essere instanziate simultaneamente.

Ecco una dimostrazione del lemma.

1. $\square(\square(\square\neg B \wedge \neg B) \wedge (\square\neg B \wedge \neg B) \rightarrow (\square\neg A \wedge \neg A)) \vee \square(\square(\square\neg A \wedge \neg A) \wedge (\square\neg A \wedge \neg A) \rightarrow (\square\neg B \wedge \neg B))$ Ax. 3
2. $\square\neg B \rightarrow \square(\square\neg B \wedge \neg B)$ da K4
3. $\square\neg A \rightarrow \square(\square\neg A \wedge \neg A)$ da K4
4. $\square(\square\neg B \wedge \neg B \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A) \vee \square(\square\neg A \wedge \neg A \rightarrow \square\neg B \wedge \neg B)$ da 1, 2 e 3
5. $\square(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\square(\square\neg B \wedge \neg B \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A) \rightarrow \square(\square\neg B \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A))$ da K4
6. $\square(B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\square(\square\neg A \wedge \neg A \rightarrow \square\neg B \wedge \neg B) \rightarrow \square(\square\neg A \rightarrow \square\neg B \wedge \neg B))$ da K4
7. $\square(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \square(\square\neg B \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A) \vee \square(\square\neg A \rightarrow \square\neg B \wedge \neg B)$ da 4, 5 e 6
8. $\square(\square\neg B \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A) \rightarrow (\square(A \rightarrow \square\neg B) \rightarrow \square(A \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A))$ taut
9. $\square(A \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A) \rightarrow \square\neg A$
10. $\square((\square\neg B \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A) \rightarrow (\square(A \rightarrow \square\neg B) \rightarrow \square(A \rightarrow \square\neg A \wedge \neg A)))$ per transitività da 8 e 9
11. $\square((\square\neg A \rightarrow \square\neg B \wedge \neg B) \rightarrow (\square(B \rightarrow \square\neg A) \rightarrow \square\neg B))$ analogamente alle righe 8, 9 e 10
12. $\square(A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\square(A \rightarrow \square\neg B) \rightarrow \square\neg A) \vee (\square(B \rightarrow \square\neg A) \rightarrow \square\neg B))$ per transitività da 7, 10 e 11
13. $\square(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\square(A \rightarrow \square\neg B) \wedge \square(B \rightarrow \square\neg A)) \rightarrow (\square\neg A \vee \square\neg B)$ da 12
14. $\square(A \rightarrow \neg B) \wedge \square(A \rightarrow \square\neg B) \wedge \square(B \rightarrow \square\neg A) \rightarrow (\square\neg A \vee \square\neg B)$ da 13
15. $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B) \vee \Diamond(A \wedge \Diamond B) \vee \Diamond(B \wedge \Diamond A)$ da 14

DEFINIZIONE 8.18 Sia Δ un diagramma ed N un insieme di formule.

1. Δ è N -massimale sse per ogni $v \in \text{Supp}(\Delta)$ e formula $A \in N$, $\langle v, A \rangle \in \Delta$ oppure $\langle v, \neg A \rangle \in \Delta$.
2. Δ è N -ricco sse se $\Diamond A \in N$ e $\langle v, \Diamond A \rangle \in \Delta$, allora esiste un $w \in \text{Supp}(\Delta)$, $w > v$ e $\langle w, A \rangle \in \Delta$.
3. Δ è L - N -saturo sse Δ è L -coerente, N -massimale e N -ricco.

8.1.2. COSTRUZIONE INIZIALE

Sia G una formula L -consistente. Se h è la lunghezza di G , indichiamo con $\Sigma(G)$ l'insieme degli enunciati di lunghezza $h + 2$ costruiti a partire dalle lettere proposizionali di G più \top e \perp . Sia $\Sigma^\square(G) = \{\square A : \square A \in \Sigma(G)\}$. Si noti che $\square\neg G, \square\Diamond\top \in \Sigma^\square(G)$.

Vogliamo costruire un diagramma Δ che sia L - $\Sigma(G)$ -saturo, che contenga la coppia $\langle v, G \rangle$, per qualche $v \in \text{Supp}(\Delta)$ e da cui sia possibile costruire un modello per G basato su una struttura per L .

Dato l'insieme $\Sigma^\square(G)$, si consideri l'insieme

$$\{\square(\square A \rightarrow \square B) : \square A, \square B \in \Sigma^\square(G)\}$$

e lo si enumera:

$$\square(\square A \rightarrow \square B)_1, \square(\square A \rightarrow \square B)_2, \dots, \square(\square A \rightarrow \square B)_s$$

Si costruisca la seguente catena di insiemi: M_0, M_1, \dots, M_s , dove:

$$M_0 = \{G\}.$$

Sia $0 < k \leq s$, allora

$$M_k = \begin{cases} M_{k-1} + \square(\square A \rightarrow \square B)_k & \text{se } M_{k-1} + \square(\square A \rightarrow \square B)_k \text{ è } L\text{-consistente} \\ M_{k-1} + \Diamond(\square A \wedge \Diamond\neg B)_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

M_s è L -consistente per costruzione.

Poniamo infine

$$M = \begin{cases} M_s + \Diamond\square\perp & \text{se } M_s + \Diamond\square\perp \text{ è } L\text{-consistente} \\ M_s + \square\Diamond\top & \text{altrimenti}^1 \end{cases}$$

Sulla base di M , l'insieme $\Sigma^\square(G)$ può essere ripartito in classi di equivalenza ponendo:

$$\square A \equiv \square B \quad \text{sse} \quad \square(\square A \rightarrow \square B) \in M \text{ e } \square(\square B \rightarrow \square A) \in M$$

1. I due casi sono entrambi possibili. Se, ad esempio, $\square(\square\top \rightarrow \square\perp) \notin M_s$, allora $\Diamond(\square\top \wedge \Diamond\top) \in M_s$, da cui $M_s \vdash_L \Diamond\Diamond\top$ e per l'assioma 4, $M_s \vdash_L \Diamond\top$. Dunque (primo caso) se $L \vdash W$, allora $\vdash_L \Diamond\top \rightarrow \Diamond\square\perp$, da cui $M_s \vdash_L \Diamond\square\perp$; (secondo caso) se $\vdash_L D$, allora $M_s \vdash_L \square\Diamond\top$.

Siano $[\square D_1], \dots, [\square D_{n+1}]$ le classi di equivalenza di $\Sigma^\square(G)/\equiv$ e siano $\square D_1, \dots, \square D_{n+1}$ i rappresentanti di tali classi.

Poiché $\vdash_L \square(\square D_k \rightarrow \square D_j) \vee \square(\square D_j \rightarrow \square D_k)$, le formule $\square D_1, \dots, \square D_{n+1}$ risultano linearmente ordinate dalla seguente relazione di precedenza $<$:

$$\square D_k < \square D_j \quad \text{sse} \quad \square(\square D_j \rightarrow \square D_k) \in M \ \& \ \Diamond(\square D_k \wedge \Diamond \neg D_j) \in M$$

Assumiamo senza perdita di generalità che

$$\square D_1 < \square D_2 < \dots < \square D_n < \square D_{n+1}$$

Ovviamente $\square T \in [\square D_1]$ e $\square \perp \in [\square D_{n+1}]$. Qualora risulti utile scriveremo $[\square T]$ e $[\square \perp]$ invece di $[\square D_1]$ e $[\square D_{n+1}]$. Si noti subito che

LEMMA 8.19 *Per ogni formula $\square A \in [\square D_1]$, $M \vdash_L \square \square A$.*

Dimostrazione Se $\square A \in [\square D_1]$, allora $\square(\square A \leftrightarrow \square T)$, da cui $M \vdash_L \square \square A \leftrightarrow \square \square T$ e così $M \vdash_L \square \square A$. \square

Grazie al Lemma 8.4(a), il diagramma $\Theta_0 = \{\langle 0, D \rangle : D \in M\}$ è L-coerente.

M

\circ
0

Sulla base del Lemma 8.8 possiamo estendere il diagramma Θ_0 instanziando le seguenti formule di M :

$\Diamond(\square D_1 \wedge \Diamond \neg D_2), \Diamond(\square D_2 \wedge \Diamond \neg D_3), \dots, \Diamond(\square D_n \wedge \Diamond \neg D_{n+1})$ e $\Diamond \square D_{n+1}$ se $\Diamond \square D_{n+1} \in M$.

Se $\Diamond \square D_{n+1} \notin M$, otteniamo un diagramma $\Theta \supseteq \Theta_0$ avente come supporto i numeri naturali $0, 1, \dots, n$ ordinati dalla relazione di minore.

M	$[\square D_1]$	$[\square D_2]$	\dots	$[\square D_i]$	$[\square D_{i+1}]$	\dots	$[\square D_n]$
\circ	$[\Diamond \neg D_2]$	$[\Diamond \neg D_3]$	\dots	$[\Diamond \neg D_{i+1}]$	$[\Diamond \neg D_{i+2}]$	\dots	$[\Diamond \neg D_{n+1}]$
0	1	2	\dots	i	$i+1$	\dots	n

Se $\Diamond \square D_{n+1} \in M$, otteniamo un diagramma $\Theta \supseteq \Theta_0$ avente come supporto i numeri naturali $0, 1, \dots, n, n+1$ ordinati dalla relazione di minore.

M	$[\Box D_1]$	$[\Box D_2]$	\dots	$[\Box D_i]$	$[\Box D_{i+1}]$	\dots	$[\Box D_n]$	$[\Box D_{n+1}]$
\circ	$[\Diamond \neg D_2]$	$[\Diamond \neg D_3]$	\dots	$[\Diamond \neg D_{i+1}]$	$[\Diamond \neg D_{i+2}]$	\dots	$[\Diamond \neg D_{n+1}]$	
0	1	2		i	$i+1$		n	$n+1$

In ambedue i casi Θ è detto *diagramma iniziale* e per i Lemmi 8.8 e 8.7, Θ è L -coerente. I punti $0, 1, \dots, n, n+1$ sono detti *punti base*.

Sia i un punto base maggiore di 0. Sulla base del Teorema 8.7 *ogni* estensione L -corente e massimale Π di Θ è tale per cui $\langle i, [D_1] \cup \dots \cup [D_i] \cup [\Diamond \neg D_{i+1}] \cup \dots \cup [\Diamond \neg D_{n+1}] \rangle \subseteq \Pi$, $1 \leq i \leq n+1$, quando ciò è il caso diremo che i *ripartisce le formule di* $\Sigma^\Box(G)$.

Per quanto riguarda il punto base 0, ci possono essere estensioni Π in cui $\langle 0, [\Box D_1] \rangle \subseteq \Pi$, ed altre no. Prenderemo cura di questa situazione nella costruzione del diagramma di base Γ_0 del prossimo paragrafo.

8.1.3. COSTRUZIONE DEI DIAGRAMMI DI BASE $\Gamma_0, \Gamma_1 \dots \Gamma_n$

Sulla base di Θ definiamo una successione di diagrammi $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$, $\Theta \subseteq \Gamma_0 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_n$, detti *diagrammi di base*, tali che Γ_i instanzia le formule di $[\Diamond \neg D_{i+1}]$ e questo avviene o aggiungendo formule al punto $i+1$ oppure aggiungendo nuovi punti fra i e $i+1$ con opportune formule ad essi associate.

Nel corso della costruzione dei diagrammi $\Gamma_0, \Gamma_1 \dots \Gamma_n$ classificheremo i punti base come singolari o come oziosi. Un punto base i sarà detto *singolare* se instanzia qualche formula di $[\Diamond \neg D_i]$, quindi esiste almeno una formula $\neg A \in [\Diamond \neg D_i]$ tale che $\neg A$ e $\Box A$ sono associate ad i . i è detto *ozioso* se non instanzia alcuna formula di $[\Diamond \neg D_i]$.

Definizione di Γ_i per induzione su i , $0 \leq i \leq n$.

Caso A. $i = 0$, abbiamo due sottocasi:

- Θ contiene un solo punto base: 0, quindi $\Theta = \Theta_0$. Allora $\Diamond \Box \perp \notin M$ e dunque $\Box \Diamond T \in M$. Inoltre $\Box(\Box T \leftrightarrow \Box \perp) \in M$ da cui $M \vdash \Box \Box \perp$. Ma $\vdash_L \Box \Diamond T \wedge \Box \Box \perp \rightarrow \Box \perp$, infatti
 - $\vdash_L \Diamond T \wedge \neg \Diamond T \rightarrow \perp$,
 - $\vdash_L \Diamond T \wedge \Box \perp \rightarrow \perp$,
 - $\vdash_L \Box \Diamond T \wedge \Box \Box \perp \rightarrow \Box \perp$
 per cui $M \vdash_L \Box \perp$.

Poniamo $\Gamma_0 = \Theta \cup \langle 0, \Box \perp \rangle$, Γ_0 è L -coerente e 0 ripartisce le formule di $\Sigma^\Box(G)$.

- Θ contiene almeno due punti base. Nuovamente, due casi sono possibili:

(A.1) Tutte le formule della classe $[\Box D_1]$ possono essere L-coerentemente aggiunte al punto 0:

Diagramma A1

<i>M</i>				
	$[\Box D_1]$	$[\Box D_1]$...
		$[\Diamond \neg D_2]$...
○	○	○		...
0	1	2		

Poniamo $\Gamma_0 = \Theta \cup \{\langle 0, [\Box D_1] \rangle\}$. 0 ripartisce tutte le formule di $\Sigma^\Box(G)$. Il punto base 1 è detto *ozioso*.

(A.2) Non tutte le formule della classe $[\Box D_1]$ possono essere L-coerentemente aggiunte al punto 0.

Sia $[\Box D_1] = \{\Box A_1, \dots, \Box A_k\}$. Senza perdita di generalità assumiamo che solo le formule $\Box A_1$ e $\Box A_2$ non possono essere L-coerentemente aggiunte al punto 0.

Definiamo $\Gamma_0 = \Theta \cup \{\langle 0, \Diamond \neg A_1 \rangle, \langle 0, \Diamond \neg A_2 \rangle, \langle 0, \Box A_3 \rangle, \dots, \langle 0, \Box A_k \rangle, \langle 1, \neg A_1 \rangle, \langle 1, \neg A_2 \rangle\}$. Il punto base 1 è detto *singolare*. 0 ripartisce tutte le formule di $\Sigma^\Box(G)$.

Diagramma Γ_0

<i>M</i>				
	$\Box A_3, \dots, \Box A_k$	$[\Box D_1]$...
	$\Diamond \neg A_1, \Diamond \neg A_2$	$[\Diamond \neg D_2]$...
○		$\neg A_1, \neg A_2$	○	...
0		1	2	...

Mostriamo che Γ_0 è L-coerente.

Per il Lemma 8.7 (a) e il Lemma 8.19 il seguente diagramma è L-coerente:

Diagramma A2

<i>M</i>				
	$\Box A_3, \dots, \Box A_k$	$[\Box D_1]$...
	$\Diamond \neg A_1, \Diamond \neg A_2$	$[\Diamond \neg D_2]$...
○	$\Box \Box A_1, \Box \Box A_2$	○	○	...
0		1	2	...

Le formule $\Diamond\neg A_1, \Diamond\neg A_2$ non possono essere instanziate in due punti distinti, diciamo 0_1 e 0_2 , $0 < 0_1 < 0_2 < 1$, poiché grazie al Lemma 8.7(b) si otterrebbe il seguente diagramma in cui l'insieme delle formule associate al punto 0_2 è L-inconsistente.

*Diagramma A3**M*

$\Box A_3, \dots, \Box A_j$			$[\Box D_1]$	\dots
$\Diamond\neg A_1, \Diamond\neg A_2$	$\neg A_1$	$\neg A_2$		
$\Box\Box A_1, \Box\Box A_2$	$\Box A_2$	A_2	$[\Diamond\neg D_2]$	
\circ	\circ	\circ	\circ	\dots
0	0_1	0_2	1	

Quindi dovranno essere instanziate in un sol punto. Se questo punto è 1, la tesi è dimostrata e Γ_0 è L-coerente. Se invece vengono instanziate in un punto intermedio fra 0 e 1, allora il seguente diagramma è L-coerente:

*Diagramma A4**M*

$\Box A_3, \dots, \Box A_j$	$[\Box D_1]$	$[\Box D_1]$	\dots
$\Diamond\neg A_1, \Diamond\neg A_2$	$\neg A_1, \neg A_2$		\dots
$\Box\Box A_1, \Box\Box A_2$	$[\Diamond\neg D_2]$	$[\Diamond\neg D_2]$	\dots
\circ	\circ	\circ	
0	0_1	1	

Per il Lemma 8.16, possiamo eliminare il punto 1 e rinominare il punto 0_1 con 1, il diagramma così ottenuto è L-coerente ed è un sopradiagramma di Γ_0 , dunque Γ_0 è L-coerente.

Caso B. $0 < i < n$.

Sia dato il diagramma Γ_{i-1} , costruiamo il diagramma Γ_i instanziando le formule di $[\Diamond\neg D_{i+1}] = \{\Diamond\neg A_1, \dots, \Diamond\neg A_k\}$.

Si consideri una partizione di $[\Diamond\neg D_{i+1}]$ (non è unica!) in due sottinsiemi disgiunti $\{\Diamond\neg A_1, \dots, \Diamond\neg A_b\}$ e $\{\Diamond\neg A_{b+1}, \dots, \Diamond\neg A_k\}$ tali che tutte le formule dell'insieme $Y = \{\neg A_{b+1}, \dots, \neg A_k\}$ possono essere aggiunte L-coerentemente al punto base $i + 1$, mentre nessuna delle formule dell'insieme $X = \{\neg A_1, \dots, \neg A_b\}$ può essere aggiunta al punto base $i + 1$ (cui già sono state aggiunte le formule di Y) pena la L-coerenza del diagramma. Ovviamente sia X che Y possono essere l'insieme vuoto, ma non entrambi.

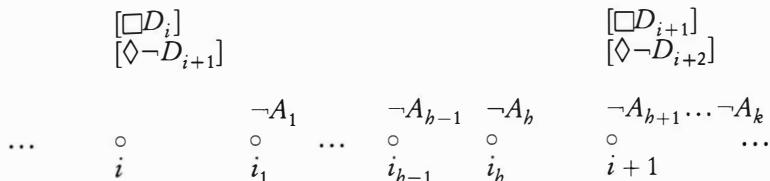
(B.1) Sia $X = \emptyset$. Poniamo $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\langle i+1, \{\neg A_1, \dots, \neg A_k\} \rangle\}$.
 $i+1$ è un punto *singolare*.

(B.2) Sia $X \neq \emptyset$

(B.2.1) Sia $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$.

Per il Lemma 8.8 esistono al massimo b punti tali che il seguente diagramma è L -coerente ove $i < i_1 < \dots < i_b < i+1$

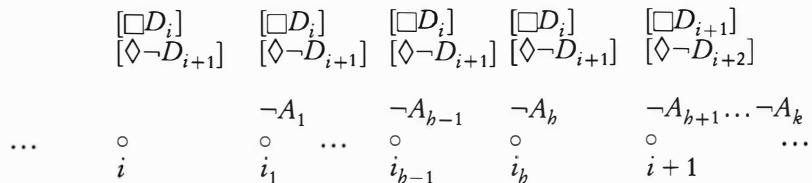
Diagramma B1



i_1, \dots, i_b sono detti costituire l'*i-segmento*.

Allora $i+1$ è un punto *singolare* e per il Lemma 8.7 l'insieme $[\diamond\neg D_{i+1}]$ può essere aggiunto a tutti i punti minori di $i+1$. Quindi tutti i punti dell'*i-segmento* ripartiscono le formule di $\Sigma^\square(G)$ nello stesso modo.

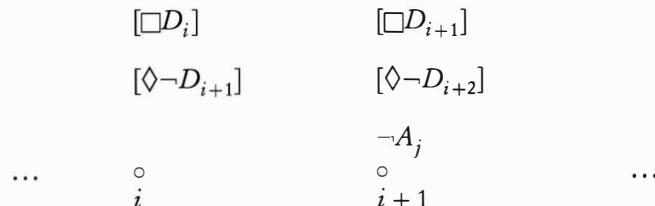
Diagramma B2



(B.2.2) Sia $X \neq \emptyset$ e $Y = \emptyset$.

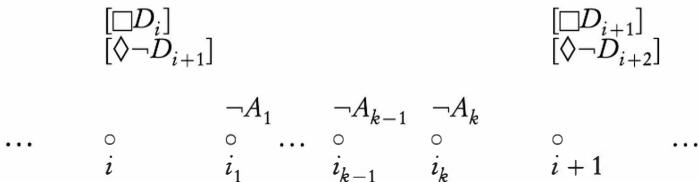
Poiché $Y = \emptyset$, allora $b = k$ e per ogni $j, 1 \leq j \leq k$, il diagramma $\Pi = \Gamma_{i-1} \cup \{\langle i+1, \neg A_j \rangle\}$ non è L -coerente.

Diagramma II



Come per il caso (B.2.1) il seguente diagramma è L-coerente:

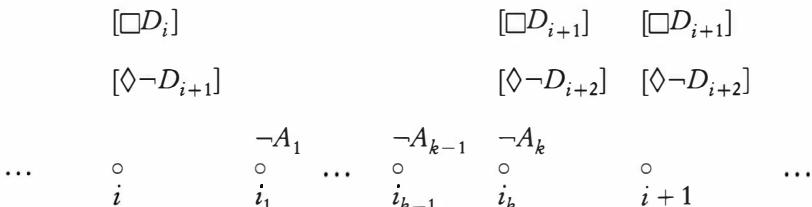
Diagramma B3



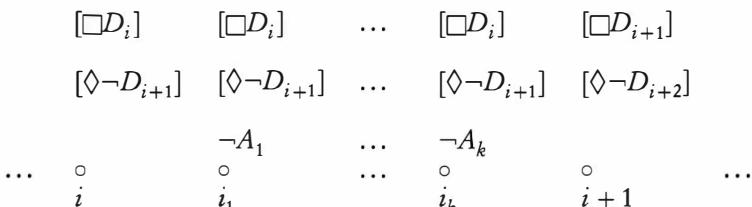
Mostriamo che anche in questo caso l'insieme $[\Diamond \neg D_{i+1}]$ può essere aggiunto a i_k e quindi a tutti i punti dell' i -segmento $i_1 < \dots < i_{k-1} < i_k$.

Se così non fosse, $[\Box D_{i+1}]$ potrebbe essere aggiunto al punto i_k del diagramma B3 conservando la L-coerenza, quindi il seguente diagramma B4 dovrebbe essere L-coerente:

Diagramma B4



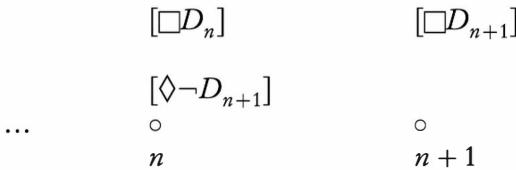
$[\Diamond \neg D_{i+2}]$ va necessariamente aggiunto a i_k per il Lemma 8.7. Ma B4 contiene il sottodiagramma $\Gamma_{i-1} + \langle i_k, \neg A_k \rangle + \langle i_k, [\Diamond \neg D_{i+2}] \rangle + \langle i_k, [\Box D_{i+1}] \rangle$ che essendo una variante alfabetica di Π non è L-coerente. Quindi $[\Diamond \neg D_{i+1}]$ deve essere aggiunto a i_k . Sia Γ_i il seguente diagramma:



$i+1$ è un punto *ozioso* e tutti i punti $i_1 < \dots < i_k$ dell' i -segmento ripartiscono le formule di $\Sigma^\Box(G)$ nello stesso modo.

Caso C. $i = n$. Si consideri il diagramma Γ_{n-1} , abbiamo due casi.

(C.1) $\Diamond \Box \perp \in M$. Allora $\langle n+1, \Box \perp \rangle \in \Theta$.

Diagramma C1

Si proceda ad esaminare le formule di $[\Diamond \neg D_{n+1}]$ come per il caso (B). Sia Γ_n il diagramma che ne risulta. Anche nel caso (B.2.2) $n+1$ è un punto singolare poiché $\Box \perp$ e (banalmente) \top sono ad esso associati e ripartisce tutte le formule di $\Sigma^\Box(G)$.

(C.2) $\Box \Diamond \top \in M$. Sia $[\Diamond \neg D_{n+1}] = \{\Diamond \neg A_1, \dots, \Diamond \neg A_k\}$.

Si proceda ad esaminare le formule di $[\Diamond \neg D_{n+1}]$ come per il caso (B.2.2) dando luogo all' n -segmento $n_1 < \dots < n_s$. Poiché $\Box \Diamond \top \in M$, $\Diamond \top$ e quindi $[\Diamond \neg D_{n+1}]$ deve essere aggiunto ad ognuno dei punti $n_1 < \dots < n_s$. Sia Γ_n il diagramma che ne risulta. I punti $n_1 \dots n_s$ partiscono le formule di $\Sigma^\Box(G)$ nello stesso modo. Il punto $n+1$ non fa parte del supporto di Γ_n .

LEMMA 8.20 (Proprietà di Γ_n) *Sia $\Diamond B \in [\Diamond \neg D_{i+1}]$, per qualche i , $0 \leq i \leq n$. Allora*

- a) *esiste un v che fa parte dell' i -segmento e $\langle v, B \rangle \in \Gamma_n$, oppure*
- b) *$\langle i+1, B \rangle \in \Gamma_n$ e $i+1$ è un punto singolare.*

Dimostrazione Per costruzione di Γ_i le formule di $[\Diamond \neg D_{i+1}]$ sono instanziate nei vari punti dell' i -segmento oppure al punto $i+1$. In questo secondo caso $i+1$ è un punto singolare. Il lemma segue poiché $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$. \square

DEFINIZIONE 8.21 Sia Γ' il sottodiagramma di Γ_n ottenuto eliminando tutti i punti oziosi.

LEMMA 8.22 *Sia $\Diamond B \in \Sigma(G)$. Se $\langle w, \Diamond B \rangle \in \Gamma'$, allora esiste un v , tale che*

- a) *$\langle v, B \rangle \in \Gamma'$ ed inoltre*
- b1) *w e v appartengono allo stesso i -segmento, per qualche i , $1 \leq i \leq n$, oppure*
- b2) *w e v non appartengono allo stesso i -segmento, per alcun i , $1 \leq i \leq n$, e $w < v$.*

Dimostrazione Se $\Diamond B \in \Sigma(G)$, allora $\Diamond B \in [\Diamond \neg D_{i+1}]$ per qualche $i, 0 \leq i \leq n$. Certamente $w < i + 1$, poiché $\langle i + 1, [\Box D_{i+1}] \rangle \subseteq \Gamma_n^2$.

Per il Lemma 8.20, due sono i casi:

- a) esiste un v che fa parte dell' i -segmento e $\langle v, B \rangle \in \Gamma_n$.
- a1) Se $i \leq w < i + 1$, allora w fa parte dell' i -segmento. Quindi w e v fanno parte dello stesso i -segmento.
- a2) Se $w < i$, allora w e v non fanno parte dello stesso i -segmento e $w < v$.
- b) $\langle i + 1, B \rangle \in \Gamma_n$. In questo caso $v = i + 1$, w e v non fanno parte dello stesso i -segmento e $w < v$.

□

DEFINIZIONE 8.23 Sia Γ^* una estensione $\mathcal{L}\text{-}\Sigma(G)$ -satura di Γ' tale che $Supp(\Gamma^*) = Supp(\Gamma')$.

Tale estensione $\mathcal{L}\text{-}\Sigma(G)$ -satura esiste poiché tutte le diamond-formule di $\Sigma(G)$ sono già instanziate in Γ' .

DEFINIZIONE 8.24 (Origine di Γ^*) Consideriamo la formula $\Box \neg G$. Ovviamente $\Box \neg G \in [\Box D_k]$ per qualche $k, 1 \leq k \leq n + 1$.

1. $k = 1$ e $\Box \neg G \in [\Box D_1]$. Nella costruzione di Γ_0 , due sono i casi:
 - $\langle 0, \Box \neg G \rangle \in \Gamma_0$. Allora 0 è punto singolare poiché anche $\langle 0, G \rangle \in \Gamma_0$, in questo caso 0 è detto *origine* di Γ^* . Oppure
 - $\langle 0, \Diamond G \rangle \in \Gamma_0$. Allora $\langle 1, G \rangle \in \Gamma_0$ e, come già sappiamo, 1 è un punto singolare. In questo caso 1 è detto *origine* di Γ^* .
2. $k = i + 1$ per qualche $i, 1 \leq i \leq n$ e $\Box \neg G \in [\Box D_{i+1}]$. Allora $\Diamond G \in [\Diamond \neg D_{i+1}]$. Per il Lemma 8.22 segue che per qualche $w, i < w \leq i + 1$, $\langle w, G \rangle \in \Gamma'$, da cui si ha che $\langle w, G \rangle \in \Gamma^*$.
 - w è un elemento dell' i -segmento: $i_1 \dots i_s$. In questo caso i_1 è detto *origine* di Γ^* .
 - $w = i + 1$. In questo caso $i + 1$ è detto *origine* di Γ^* .

DEFINIZIONE 8.25 (Diagramma canonico per G) Sia Γ il sottodiagramma di Γ^* ottenuto eliminando tutti i punti minori dell'origine di Γ^* . Γ è detto *diagramma canonico* per G .

2. Il punto $i + 1$ potrebbe essere ozioso e quindi non far parte del supporto di Γ' , in ogni caso $w < i + 1$.

Sia G una formula L -consistente e Γ un diagramma canonico per G . Allora il modello indotto da Γ , $\mathcal{M}^\Gamma = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$, è così definito:

- $\mathcal{W} = \text{Supp}(\Gamma)$;
- $w \mathcal{R} v$ sse $w < v$ oppure w e v appartengono allo stesso i -segmento per qualche i , $1 \leq i \leq n$;
- $\mathcal{I}(p) = \{w : \langle w, p \rangle \in \Gamma\}$.

LEMMA 8.26 *Il modello \mathcal{M}^Γ è tale che:*

1. *Per ogni $A \in \Sigma(G)$,*

$$\langle w, A \rangle \in \Gamma \quad \text{sse} \quad \mathcal{M}^\Gamma \vDash_w A$$

2. *\mathcal{M}^Γ è un modello per G .*

Dimostrazione Esercizio. □

8.1.4. GROVIGLI

Sia $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ una struttura transitiva.

DEFINIZIONE 8.27 $V \subseteq \mathcal{W}$ è detto un \mathcal{R} -groviglio sse per ogni $w, v \in V$ si ha che $w = v \vee (w \mathcal{R} v \wedge v \mathcal{R} w)$.

Tipi di grovigli:

- *degenero*: un groviglio degenero consiste di un sol punto non riflessivo, cioè $\mathfrak{C} = \{w\}$ e non $(w \mathcal{R} w)$;
- *proprio*: un groviglio proprio \mathfrak{C} contiene uno o più elementi distinti. I grovigli propri si dividono in:
 - *multiplo*: un groviglio multiplo \mathfrak{C} contiene almeno due elementi distinti. In questo caso ognuno di essi è riflessivo. Infatti $w \neq v$ allora $w \mathcal{R} v \wedge v \mathcal{R} w$, quindi per la transitività $w \mathcal{R} w$;
 - *semplice*: un groviglio semplice consiste in un sol punto riflessivo, cioè $\mathfrak{C} = \{w\}$ e $w \mathcal{R} w$.

LEMMA 8.28 *Ogni i -segmento di Γ diviene in \mathcal{M}^Γ un \mathcal{R} -groviglio proprio. Ogni punto singolare di Γ diviene in \mathcal{M}^Γ un \mathcal{R} -groviglio degenero.*

Sia \mathfrak{C}_i il groviglio determinato dall' i -segmento e \mathfrak{C}_j il groviglio determinato dal j -segmento. Diciamo che \mathfrak{C}_i precede \mathfrak{C}_j , $\mathfrak{C}_i < \mathfrak{C}_j$ sse $i < j$.

La relazione $<$ è transitiva e asimmetrica. Diciamo che $\mathfrak{C}_i \leq \mathfrak{C}_j$ sse $i < j \vee i = j$. La relazione \leq è transitiva e antisimmetrica, ovvero se

$\mathfrak{C}_i \leq \mathfrak{C}_j$ e $\mathfrak{C}_j \leq \mathfrak{C}_i$ allora $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_j$. Infatti se $(i < j \vee i = j)$ e $(j < i \vee i = j)$ allora $(i < j \wedge j < i) \vee i = j$, dunque $i = j$ da cui $\mathfrak{C}_i = \mathfrak{C}_j$.

Nella TAB. 8.1 sono elencati alcuni ordini con le loro definizioni.

TABELLA 8.1
Classificazione degli ordini

Nome ordine	Proprietà che soddisfa
Ordine	transitiva
Ordine parziale	antisimmetrica
Ordine parziale stretto	transitiva riflessiva
Ordine lineare	antisimmetrica (da cui asimmetrica)
Ordine lineare stretto	transitiva riflessiva connessa
Ordine ben fondato	ordini parziali stretti limitato inferiormente
Ordine dualmente ben fondato	ordini parziali stretti limitato superiormente
Buon ordine	ordini lineari stretti ogni sottoinsieme è limitato inferiormente

8.2

Completezza per alcune estensioni di K4.3

TEOREMA 8.29 K4.3 è completo rispetto alle successioni finite di grovigli finiti propri o degeneri.

Dimostrazione Sia G una formula K4.3-consistente e sia Γ un diagramma canonico per G . Allora \mathcal{M}^Γ è basato su una successione finita di grovigli finiti propri o degeneri. \square

TEOREMA 8.30 K4.3.D è completo rispetto alle successioni finite di grovigli finiti propri o degeneri di cui l'ultimo è proprio.

Dimostrazione Sia G una formula K4.3.D-consistente e sia Γ un diagramma canonico per G . Allora \mathcal{M}^Γ è basato su una successione finita di grovigli finiti propri o degeneri di cui l'ultimo è proprio in virtù dell'assioma D . Infatti $\vdash_{K4.3.D} \square\Diamond\top$, quindi nella costruzione del diagramma Γ_n si applica il sottocaso (C.2). \square

TEOREMA 8.31

- a) K4.3.D.Z è completo rispetto alle successioni finite di grovigli degeneri eccetto l'ultimo che è proprio.
- b) K4.3.D.Z è completo rispetto alla struttura $\langle \omega, < \rangle$.

Dimostrazione

- a) $Z : \square(\square A \rightarrow A) \rightarrow (\Diamond\square A \rightarrow \square A)$, o equivalentemente
 $Z : (\Diamond\square A \wedge \Diamond\neg A) \rightarrow \Diamond(\square A \wedge \neg A)$

Caso A. $i = 0$. Come per il caso generale.

Caso B. $0 < i < n$. Mostriamo che solo il caso (B.1) ha luogo. Sia dato il diagramma Γ_{i-1} :

$$\begin{array}{ccc} [\square D_i] & & [\square D_{i+1}] \\ \dots & [\Diamond\neg D_{i+1}] & [\Diamond\neg D_{i+2}] \\ & \circ & \circ \\ & i & i+1 \end{array} \quad \dots$$

Siano $\Diamond\neg B_1, \dots, \Diamond\neg B_k$ le formule di $[\Diamond\neg D_{i+1}]$. Poniamo $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\langle i+1, \neg B_1 \rangle, \dots, \langle i+1, \neg B_k \rangle\}$. Dunque Γ_i è il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} [\square D_i] & & [\square D_{i+1}] \\ \dots & [\Diamond\neg D_{i+1}] & [\Diamond\neg D_{i+2}] \\ & \circ & \circ \\ & i & i+1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg B_1, \dots, \neg B_k \\ \dots \end{array}$$

$i+1$ è un punto singolare. Mostriamo che Γ_i , così definito, è K4.3.D.Z-coerente. Senza perdita di generalità assumiamo che $k = 2$, quindi $[\Diamond\neg D_{i+1}] = \{\Diamond\neg B_1, \Diamond\neg B_2\}$ e $[\square D_{i+1}] = \{\square B_1, \square B_2\}$. Grazie

al Lemma 8.7 e all'assioma Z abbiamo che il seguente diagramma è K4.3.D.Z-coerente:

Diagramma Z1

$[\Box D_i]$	$\Box B_1, \Box B_2$
$\Diamond \neg B_1, \Diamond \neg B_2$	$[\Diamond \neg D_{i+2}]$
$\Diamond \Box B_1, \Diamond \Box B_2$	
$\Diamond(\Box B_1 \wedge \neg B_1)$	
$\Diamond(\Box B_2 \wedge \neg B_2)$	
...	...
$\overset{\circ}{i}$	$\overset{\circ}{i+1}$

Le formule $\Diamond(\Box B_1 \wedge \neg B_1)$ e $\Diamond(\Box B_k \wedge \neg B_k)$ non possono essere instanziate in due punti distinti, diciamo, $i_1, i_2, i < i_1 < i_2 \leq i + 1$, come ben si vede dal seguente diagramma in cui l'insieme delle formule associate a i_2 è K4.3.D.Z-inconsistente:

Diagramma Z2

$[\Box D_i]$	$\Box B_1, \Box B_2$
$\Diamond \neg B_1, \Diamond \neg B_2$	$[\Diamond \neg D_{i+2}]$
$\Diamond \Box B_1, \Diamond \Box B_2$	
$\Diamond(\Box B_1 \wedge \neg B_1)$	
$\Diamond(\Box B_2 \wedge \neg B_2)$	$\Box B_1 \wedge \neg B_1$
	$\Box B_2 \wedge \neg B_2$
	$\Box B_2$
	B_2
...	...
$\overset{\circ}{i}$	$\overset{\circ}{i_1}$
	$\overset{\circ}{i_2}$
	$\overset{\circ}{i+1}$

$\Box B_2$ è necessariamente vera al punto i_1 poiché appartiene alla stessa classe di equivalenza di $\Box B_1$ e dunque B_2 è necessariamente vera al punto i_2 . Ma l'insieme di formule associate al punto i_2 è inconsistente. Dunque le formule $\Diamond(\Box B_1 \wedge \neg B_1)$ e $\Diamond(\Box B_k \wedge \neg B_2)$ devono essere instanziate in un sol punto $i_1, i < i_1 \leq i + 1$. Se $i_1 = i + 1$, allora la tesi è dimostrata, se $i < i_1 < i + 1$ allora il seguente diagramma è K4.3.D.Z-coerente:

Diagramma Z3

$[\Box D_i]$	$\Box B_1, \Box B_2$
$\Diamond \neg B_1, \Diamond \neg B_2$	$[\Diamond \neg D_{i+2}]$
$\Diamond \Box B_1, \Diamond \Box B_2$	
$\Diamond(\Box B_1 \wedge \neg B_1)$	$\Box B_1 \wedge \neg B_1$
$\Diamond(\Box B_2 \wedge \neg B_2)$	$\Box B_2 \wedge \neg B_2$
...	...
$\overset{\circ}{i}$	$\overset{\circ}{i_1}$
	$\overset{\circ}{i+1}$

Per i Lemmi 8.7(a), 8.7(d) e 8.4(b) il seguente diagramma è K4.3.D.Z-coerente.

Diagramma Z4

$[\Box D_i]$	$\Box B_1, \Box B_2$	$\Box B_1, \Box B_2$
$\Diamond \neg B_1, \Diamond \neg B_2$	$[\Diamond \neg D_{i+2}]$	$[\Diamond \neg D_{i+2}]$
	$\neg B_1, \neg B_2$	
...
$\overset{\circ}{i}$	$\overset{\circ}{i_1}$	$\overset{\circ}{i+1}$

Allora per il Lemma 8.16 il diagramma Γ_i è K4.3.D.Z-coerente.

Caso C. $i = n$

Grazie all'assioma D , si applica il caso (C.2) e dunque il punto n sarà seguito dai punti dell' n -segmento.

Sia G una formula K4.3.D.Z-consistente. Sia Γ il diagramma canonico per G . Allora il modello \mathcal{M}^Γ è basato su una successione finita di grovigli degeneri eccetto l'ultimo che è proprio. Quindi (a) è dimostrato.
 b) Chiamiamo *aquilone stretto* una struttura composta da una successione finita di grovigli degeneri seguita da un groviglio proprio. Un aquilone stretto è immagine p-morfa di $\langle \omega, < \rangle$. Esercizio. \square

TEOREMA 8.32 K4.3.W è completo rispetto alle successioni finite di grovigli degeneri. K4.3.W è completo rispetto agli ordini lineari stretti finiti.

Dimostrazione $W: \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$ oppure equivalentemente

$$\Diamond \neg A \rightarrow \Diamond(\Box A \wedge \neg A)$$

Per i casi A e B, si procede come per K4.3.D.Z, poiché $\vdash_{K4.3.W} Z$.

Caso C. Consideriamo ora la classe $[\Diamond \neg D_{n+1}] = [\Diamond \neg \perp] = [\Diamond \top]$.

Allora $\langle n, \Diamond \top \rangle \in \Gamma_{n-1}$, quindi $\langle n, \Diamond \Box \perp \rangle$ è in ogni estensione di Γ_{n-1} poiché $\vdash_{\text{KW}} \Diamond \top \rightarrow \Diamond \Box \perp$. Si aggiunga al diagramma finora ottenuto la coppia $\langle n+1, \Box \perp \rangle$ e si proceda come nel caso B per K4.3.D.Z. Le formule di $[\Diamond \top]$ vengono instanziate al punto $n+1$. $n+1$ è chiaramente un punto singolare.

Sia G una formula K4.3.W-consistente e Γ un modello canonico per G . Allora \mathcal{M}^Γ è basato su una successione finita di grovigli degeneri. \square

8.2.1. K4.3.Z

TEOREMA 8.33 K4.3.Z è completo rispetto alle successioni finite di grovigli degeneri oppure alle successioni finite di grovigli degeneri eccetto l'ultimo.

Dimostrazione Sia G una formula K4.3.Z-consistente e Γ un modello canonico per G . Allora \mathcal{M}^Γ è basato su una successione finita di grovigli degeneri oppure su una successione finita di grovigli degeneri eccetto l'ultimo. L'alternativa dipende se $\Diamond \Box \perp \in M$ oppure $\Box \Diamond \top \in M$. \square

8.3

Sulle estensioni di K4.3 che dimostrano T

In presenza del principio T , la costruzione dei diagrammi di base si semplifica notevolmente. Elenchiamo alcuni fatti rilevanti.

1. $\Box \Diamond \top \in M$. Infatti $\vdash_T \Box \Diamond \top$.
2. Il diagramma iniziale Θ non contiene il punto $n+1$ cui è associata la classe $[\Box \perp] = [\Box D_{n+1}]$.
3. Tutte le formule $\Box A \in [\Box D_1]$ possono essere L-coerentemente aggiunte al punto 0 del diagramma iniziale Θ . Infatti per il Lemma 8.19 $M \vdash_L \Box \Box A$, e grazie al principio T , $M \vdash_L \Box A$. Ne segue che nella costruzione del diagramma di base Γ_0 , 1 è sempre un punto ozioso.
4. $\Box \neg G \notin [\Box D_1]$. Infatti se $\Box \neg G \in [\Box D_1]$, allora per il Lemma 8.19 $M \vdash_L \Box \Box \neg G$, e grazie al principio T , $M \vdash_L \neg G$, contrariamente alla L-consistenza di M .
5. $\Diamond G \in [\Diamond \neg D_i]$, $2 \leq i \leq n+1$. Segue da 4.
6. Nella costruzione dei diagrammi di base, $\langle w, G \rangle \in \Gamma_i$ per qualche $w > i \geq 1$.
7. Il punto 0 non fa parte del supporto di alcun diagramma canonico Γ .

8. Tutti i punti base di Θ sono dichiarati oziosi nella costruzione dei diagrammi di base.

Ne segue che nella costruzione dei diagrammi di base per le estensioni di S4.3, occorre solo considerare i casi (B) e (C). Non solo, ma di questi, solo i sottocasi (B.2.2) e (C.2) sono possibili.

TEOREMA 8.34

- a) S4.3 è completo rispetto alle successioni finite di grovigli finiti propri.
- b) S4.3 è completo rispetto alla classe $\langle \{n \times \omega, \leq\} : 1 \leq n \rangle$

Dimostrazione

- a) Sia G una formula S4.3-consistente e Γ il diagramma canonico per G . Allora \mathcal{M}^Γ è basato su una successione finita di grovigli propri finiti.
- b) Siano n i grovigli che compongono la successione su cui è basato il modello \mathcal{M}^Γ . Allora tale successione è immagine p-morfa di $\langle n \times \omega, \leq \rangle$. \square

TEOREMA 8.35

- a) S4.3.Dum è completo rispetto alle successioni finite di grovigli semplici eccetto l'ultimo che è proprio e finito.
- b) S4.3.Dum è completo rispetto alla struttura $\langle \omega, \leq \rangle$.

Dimostrazione

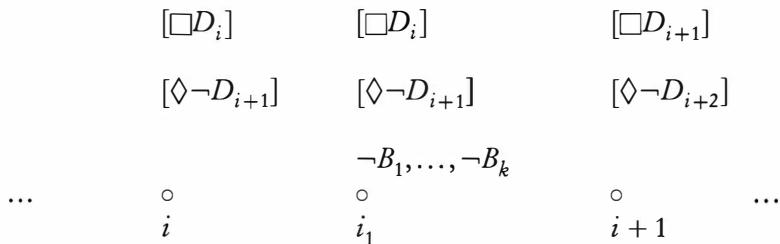
- a) Dum: $\Box(\Box(A \rightarrow \Box A) \rightarrow A) \rightarrow (\Diamond \Box A \rightarrow A)$, o equivalentemente rispetto a S4.3

$$(\Diamond \Box A \wedge \Diamond \neg A) \rightarrow \Diamond(\Box(\Diamond \neg A \rightarrow \neg A) \wedge \neg A)$$

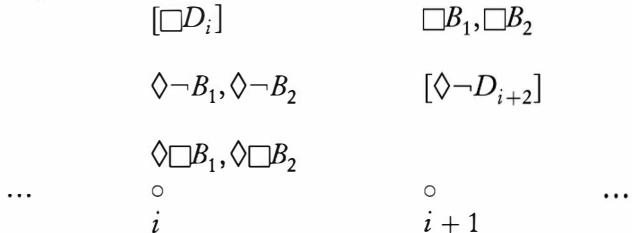
Caso B. $1 < i < n$.

Sia $[\Diamond \neg D_{i+1}] = \{\Diamond \neg B_1, \dots, \Diamond \neg B_k\}$. Sia i_1 un numero razionale tale che $i < i_1 < i + 1$. Poniamo $\Gamma_i = \Gamma_{i-1} \cup \{\langle i_1, \neg B_1 \rangle, \dots, \langle i_1, \neg B_k \rangle\} \cup \{\langle i_1, [\Diamond \neg D_{i+1}] \rangle\}$. i_1 è un i -segmento unitario e $i + 1$ è un punto ozioso. i_1 ripartisce tutte le formule di $\Sigma^\Box(G)$.

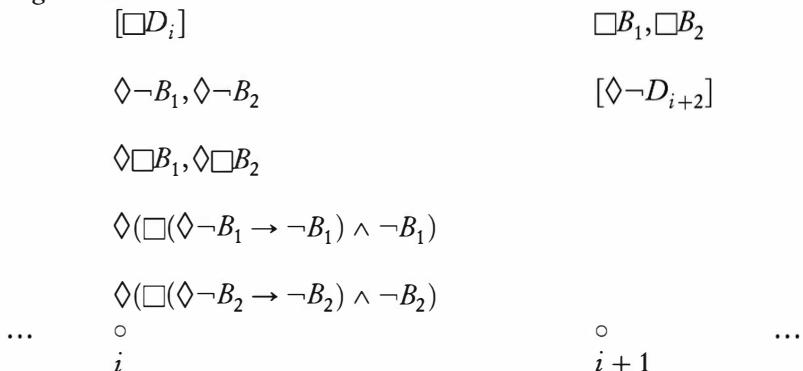
Γ_i è dunque il diagramma:



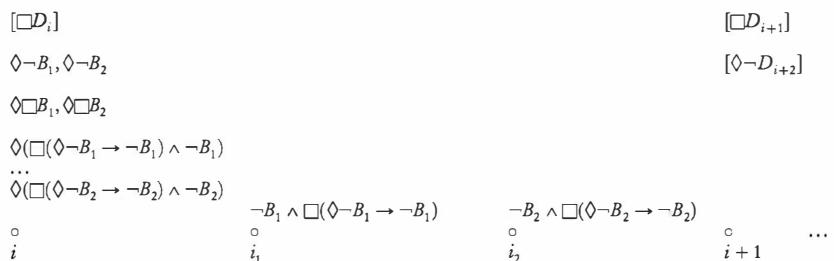
Mostriamo che Γ_i è S4.3.Dum-coerente. Senza perdita di generalità, assumiamo che $k = 2$, quindi $[\Diamond\neg D_{i+1}] = \{\Diamond\neg B_1, \Diamond\neg B_2\}$ e $[\Box D_{i+1}] = \{\Box B_1, \Box B_2\}$. Per il Lemma 8.7 il seguente diagramma è S4.3.Dum-coerente.

Diagramma Dum 1

Grazie all'assioma *Dum*, il seguente diagramma è S4.3.Dum-coerente:

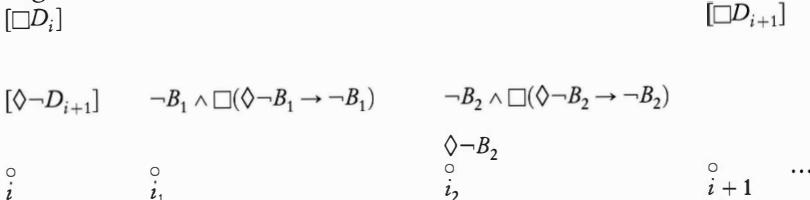
Diagramma Dum 2

Supponiamo che le formule $\Diamond(\Box(B_1 \rightarrow \Box B_1) \wedge \neg B_1), \Diamond(\Box(B_2 \rightarrow \Box B_2) \wedge \neg B_2)$ possano essere instanziate in due punti distinti $i_1, i_2, i < i_1 < i_2 < i + 1$.

Diagramma Dum 3

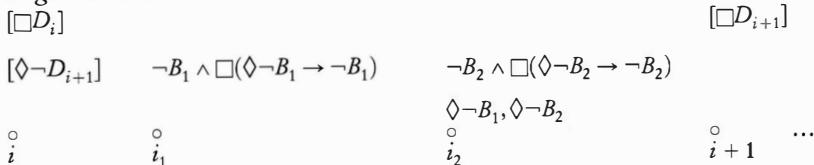
Allora il seguente diagramma è S4.3.Dum-coerente grazie all'assioma T :

Diagramma Dum 4



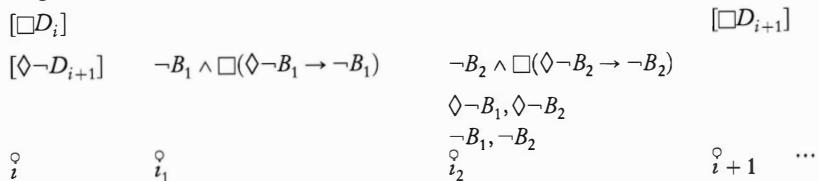
Ma $\Diamond \neg B_1, \Diamond \neg B_2$ appartengono alla stessa classe di equivalenza quindi il seguente diagramma è S4.3.Dum-coerente:

Diagramma Dum 5



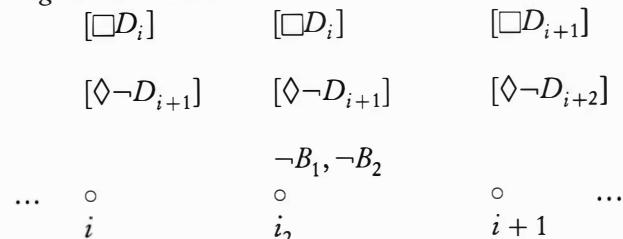
Grazie alla formula $\square(\Diamond \neg B_1 \rightarrow \neg B_1)$ associata al punto i_1 , il seguente diagramma è S4.3.Dum-coerente

Diagramma Dum 6



Allora il seguente sottodiagramma è S4.3.Dum-coerente:

Diagramma Dum 7



Dunque Γ_i è S4.3.Dum-coerente essendo una variante alfabetica del diagramma *Dum 7*.

Caso C. $i = n$. Solo il caso (C.2) è possibile e dunque il punto n sarà seguito dai punti dell' n -segmento.

Sia G una formula S4.3.Dum-consistente e Γ il diagramma canonico per G . Allora il modello \mathcal{M}^Γ è basato su una successione di grovigli semplici eccetto l'ultimo che è proprio. Quindi (a) è dimostrato.

b) Chiamiamo *aquilone* una struttura composta da una successione finita di grovigli semplici seguita da un groviglio proprio. Per dimostrare (b) basta mostrare che un aquilone è immagine p-morfa di $\langle \omega, \leq \rangle$. Esercizio.

□

TEOREMA 8.36

- a) S4.3.Grz è completo rispetto alle successioni finite di grovigli semplici.
- b) S4.3.Grz è completo rispetto agli ordini lineari finiti.

Dimostrazione

- a) Grz: $\square(\square(A \rightarrow \square A) \rightarrow A) \rightarrow \square A$, o equivalentemente
 $\Diamond \neg A \rightarrow \Diamond(\square(\Diamond \neg A \rightarrow \neg A) \wedge \neg A)$.

Caso (B.2.2) come per S4.3.Dum, essendo l'assioma *Dum* teorema di S4.3.Grz.

Caso C. Le formule di $[\Diamond \neg D_{n+1}]$ possono essere tutte instanziate al punto n_1 , $n < n_1$, come per il caso (B.2.2).

Se G è S4.3.Grz-consistente, allora il modello \mathcal{M}^Γ per G è basato su una successione finita di grovigli semplici.

- b) Una successione finita di grovigli semplici è un ordine lineare finito.

□

TEOREMA 8.37 S4.3.C $_m^\circ$ è completo rispetto alle successioni composte al massimo da m grovigli finiti propri.

Dimostrazione $C_m^\circ : B_1 \vee \square(\square B_1 \rightarrow B_2) \vee \square(\square B_2 \rightarrow B_3) \vee \dots \vee \square(\square B_m \rightarrow \perp)$

Consideriamo la logica S4.3.C $_3^\circ$.

$$C_3^\circ : B_1 \vee \square(\square B_1 \rightarrow B_2) \vee \square(\square B_2 \rightarrow B_3) \vee \square(\square B_3 \rightarrow \perp)$$

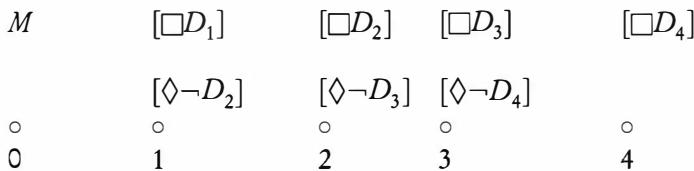
$$\vdash_{S4.3.C_3^\circ} \square D_2 \vee \square(\square \square D_2 \rightarrow \square D_3) \vee \square(\square \square D_3 \rightarrow \square D_4) \vee \square(\square \square D_4 \rightarrow \perp)$$

$$\vdash_{S4.3.C_3^\circ} \square D_2 \vee \square(\square D_2 \rightarrow \square D_3) \vee \square(\square D_3 \rightarrow \square D_4) \vee \square(\square D_4 \rightarrow \perp)$$

$$\vdash_{S4.3.C_3^\circ} \square D_2 \vee \square[(\square D_2 \rightarrow \square D_3) \vee \square[(\square D_3 \rightarrow \square D_4) \vee \square(\square D_4 \rightarrow \perp)]]$$

$$\vdash_{S4.3.C_3^\circ} \Diamond \neg D_2 \rightarrow \square[(\square D_2 \wedge \Diamond \neg D_3) \rightarrow \square[(\square D_3 \wedge \Diamond \neg D_4) \rightarrow \square(\square D_4 \rightarrow \perp)]]$$

Si consideri un diagramma con 4 punti base:



Ma $\Diamond \neg D_2 \rightarrow \Box[(\Box D_2 \wedge \Diamond \neg D_3) \rightarrow \Box[(\Box D_3 \wedge \Diamond \neg D_4) \rightarrow \Box(\Box D_4 \rightarrow \perp)]]$ è teorema di C_3° , quindi il diagramma con 4 punti base non è C_3° -coerente.

Sia G una formula S4.3 $_m^\circ$ -consistente e Γ il diagramma canonico per G . Allora il modello \mathcal{M}^Γ è basato su una successione composta al massimo da m grovigli finiti propri. \square

TEOREMA 8.38 S5 è completo rispetto ai grovigli propri finiti.

Dimostrazione Mostriamo prima di tutto che $\vdash_{S5} \Box(\Box A \leftrightarrow \Box \top) \vee \Box(\Box A \leftrightarrow \Box \perp)$

- (I) $\Box A \vee \neg \Box A$
- (II) $\Box \Box A \vee \Diamond \neg A$
- (III) $\Box \Box A \vee \Box \Diamond \neg A$
- (IV) $\Box \Box A \vee \Box \neg \Box A$
- (V) $\Box(\Box A \vee \neg \Box \top) \vee \Box(\neg \Box A \vee \neg \Diamond \top)$
- (VI) $\Box(\Box A \rightarrow \Box \top) \vee \Box(\Box A \rightarrow \Box \perp)$
- (VII) $\Box(\Box A \leftrightarrow \Box \top) \vee \Box(\Box A \leftrightarrow \Box \perp)$

Ne segue che le classi di equivalenza generate da M sono due $[\Box \top]$ e $[\Diamond \top]$ e che il diagramma iniziale Θ contiene due punti base 0 e 1 :



$\square\neg G \in [\square\perp]$, quindi $\Diamond G \in [\Diamond\top]$,



Nella costruzione del diagramma di base Γ_1 si genera l'1-segmento contenente un punto che instanzia G . Il diagramma canonico Γ per G contiene solo l'1-segmento e dunque \mathcal{M}^Γ è basato su un singolo groviglio finito e proprio. \square

TEOREMA 8.39 S5.Alt _{n} è completo rispetto ai grovigli composti da al massimo n punti.

Dimostrazione Al $t_n : \square B_1 \vee \square(B_1 \rightarrow B_2) \vee \square(B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_3) \vee \cdots \vee \square(B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \rightarrow \perp)$. Sia G una formula S5.Alt _{n} -consistente e Γ il diagramma canonico per G . Allora Γ è basato su un singolo segmento contenente al massimo n punti. Esercizio. Ne segue che \mathcal{M}^Γ è basato su un groviglio composto da al massimo da n punti. \square

Sequenti etichettati

Nel CAP. 1 abbiamo introdotto il concetto astratto-insiemistico di logica modale normale e nel CAP. 3 abbiamo fornito una presentazione assiomatica in stile hilbertiano di talune logiche modali normali. Se l'insieme Γ di formule è una logica modale normale, e L è una sua presentazione assiomatica, allora

$$A \in \Gamma \quad \text{sse} \quad \vdash_L A$$

In questo capitolo introduciamo una presentazione tutt'affatto diversa di varie logiche modali normali avvalendoci del concetto di *sequente* e basandoci su una generalizzazione del calcolo dei sequenti nello stile di Gentzen.

Se l'insieme Γ di formule è una logica modale normale, e L è una sua presentazione in un calcolo di sequenti, allora

$$A \in \Gamma \quad \text{sse} \quad L \vdash \Rightarrow A$$

ove $\Rightarrow A$ è un particolare sequente. Come vedremo, un sequente è un oggetto sintattico del tipo

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

ove $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ sono formule e $n, m \geq 0$. I sequenti si prestano alla seguente lettura:

La disgiunzione delle formule a destra di \Rightarrow è derivabile a partire dalle formule alla sua sinistra (o, equivalentemente, dalla loro congiunzione).

Assumiamo che il lettore abbia una conoscenza di base dei calcoli di sequenti per la logica classica, per un'introduzione rimandiamo a Troeslstra (2000); Negri, von Plato (2011).

9.1

Nozioni introduttive

I calcoli etichettati (Negri, 2005; Negri, von Plato, 2011) differiscono dagli ordinari calcoli di sequenti per le logiche modali poiché permettono di internalizzare nel calcolo la semantica relazionale. Grazie a questa internalizzazione, i calcoli etichettati consentono di trattare in modo modulare e uniforme una vasta classe di logiche modali. Per fare questo dobbiamo innanzitutto estendere il linguaggio aggiungendo un insieme di *etichette* w, v, u che svolgono il ruolo di controparti sintattiche dei mondi di un modello relazionale. Mediante le etichette possiamo definire *formule etichettate* del tipo $w : A$ il cui significato intuitivo è che ‘ A è vera in w ’. Inoltre, possiamo definire *formule atomiche relazionali* del tipo wRv il cui significato intuitivo è che ‘ v è accessibile a partire da w ’.

Nel linguaggio etichettato siamo in grado di formulare regole di derivazione che simulano le clausole semantiche di verità per gli operatori logici. Ad esempio, consideriamo la clausola di verità per l'operatore \square :

$$\models_w \square A \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{W}, \text{ se } wRv \text{ allora } \models_v A$$

La freccia da destra a sinistra di tale clausola può essere riscritta nel linguaggio etichettato come:

Se, per un arbitrario v , $v : A$ è derivabile dall'ipotesi che wRv , allora $w : \square A$ è derivabile.

Ciò dà luogo alla seguente regola di derivazione:

$$\frac{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \square A} R\square \quad \text{ove } v \text{ non occorre nella conclusione.}$$

Il requisito che v sia arbitraria viene catturato dalla condizione che v non occorra nella conclusione di tale regola (per brevità, diremo che v è l'*eigenvariable* di tale regola).

La freccia da sinistra verso destra, invece, nel linguaggio etichettato diventa:

$$\text{Per ciascun } w \text{ e } v, \text{ se } w : \square A \text{ e } wRv, \text{ allora } v : A$$

Ciò dà luogo a una regola di derivazione il cui significato inteso emerge se viene letta dal basso verso l'alto, dalla conclusione alla premessa:

$$\frac{v : A, wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\square$$

La lettura dal basso verso l'alto è tipica per tutte le regole che operano a sinistra di \Rightarrow .

DEFINIZIONE 9.1 (Linguaggio etichettato)

1. L'*alfabeto* del linguaggio etichettato è composto da:
 - l'alfabeto di \mathcal{L}^Φ ;
 - un insieme infinito di *etichette* \mathcal{E} (per cui useremo le metavariabili w, v, u);
 - il predicato binario R .
2. Il *linguaggio etichettato* è così definito:
 - $w : A$, dove $w \in \mathcal{E}$ e $A \in \mathcal{L}^\Phi$ ($w : A$ è chiamata *formula etichettata*);
 - $w R v$, dove $w, v \in \mathcal{E}$ ($w R v$ è chiamato *atomo relazionale*);
 - nient'altro è nel linguaggio etichettato.

DEFINIZIONE 9.2 Un *sequente* è un'espressione:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

dove:

- Γ è un multinsieme (ovvero un insieme finito con ripetizioni) di formule etichettate ($w : A$) e di atomi relazionali ($w R v$), Γ è l'*antecedente* di $\Gamma \Rightarrow \Delta$;
- Δ è un multinsieme di formule etichettate ($w : A$), Δ è il *succedente* di $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

DEFINIZIONE 9.3 Una derivazione di $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in un calcolo di sequenti è un albero di sequenti

- la cui radice è $\Gamma \Rightarrow \Delta$;
- le cui foglie sono sequenti iniziali o istanze di regole 0-arie;
- in cui ogni nodo è ottenuto dai nodi che lo precedono applicando una regola di tale calcolo.

9.2

Il calcolo G3.K

Il calcolo di sequenti G3.K è determinato dai sequenti iniziali e dalle regole di derivazione presentati nella TAB. 9.1¹.

1. Il nome dipende dal fatto che tale calcolo fa parte della famiglia di calcoli chiamata G3 in Troelstra (2000); Negri, von Plato (2011). Tali calcoli sono caratterizzati dall'invertibilità di tutte le regole primitive e dall'ammissibilità delle regole strutturali.

TABELLA 9.1

Calcolo di sequenti G3.K.

Sequenti iniziali:

$$w : p, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : p \quad w : \perp, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

dove p è un \mathcal{L}^Φ -atomo

Regole logiche:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A}{w : \neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\neg \quad \frac{w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \neg A} R\neg$$

$$\frac{w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad w : B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w : A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\vee \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A, w : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \vee B} R\vee$$

$$\frac{w : A, w : B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w : A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\wedge \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, w : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \wedge B} R\wedge$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \quad w : B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w : A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\rightarrow \quad \frac{w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \rightarrow B} R\rightarrow$$

$$\frac{u : A, w : \square A, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w : \square A, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\square \quad \frac{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \square A} R\square \quad (*)$$

$$\frac{v : A, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w : \Diamond A, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\Diamond \quad (*) \quad \frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Diamond A, u : A}{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Diamond A} R\Diamond$$

(*) v non nella conclusione di $R\square$ e $L\Diamond$

Diamo ora alcuni esempi di derivazione in G3.K. Nelle derivazioni di questo e del seguente paragrafo, ci avvaliamo del Lemma 9.6 sulla base del quale il sequente $w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A$ è derivabile con A \mathcal{L}^Φ -formula arbitraria.

1. G3.K $\vdash \Rightarrow w : \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$

$$\frac{v : A, w R v, \Gamma \Rightarrow v : B, v : A \quad v : B, v : A, w R v, \Gamma \Rightarrow v : B}{\frac{v : A \rightarrow B, v : A, w R v, \Gamma \Rightarrow v : B}{\frac{v : A, w R v, w : \square(A \rightarrow B), w : \square A \Rightarrow v : B}{\frac{w R v, w : \square(A \rightarrow B), w : \square A \Rightarrow v : B}{\frac{w : \square(A \rightarrow B), w : \square A \Rightarrow w : \square B}{\frac{w : \square(A \rightarrow B) \Rightarrow w : \square A \rightarrow \square B}{\frac{\Rightarrow w : \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)}{R \rightarrow}}}}}}{L \rightarrow} \\ L \square \\ R \square \\ R \rightarrow \\ R \rightarrow$$

dove $\Gamma = w : \square(A \rightarrow B), w : \square A$.

2. G3.K $\vdash \Rightarrow w : \Diamond A \rightarrow \neg \square \neg A$

$$\frac{w : \square \neg A, w R v, v : A \Rightarrow v : A}{\frac{v : \neg A, w : \square \neg A, w R v, v : A \Rightarrow}{\frac{w : \square \neg A, w R v, v : A \Rightarrow}{\frac{w R v, v : A \Rightarrow w : \neg \square \neg A}{\frac{w : \Diamond A \Rightarrow w : \neg \square \neg A}{\frac{\Rightarrow w : \Diamond A \rightarrow \neg \square \neg A}{R \rightarrow}}}}}}{L \neg} \\ L \square \\ R \neg \\ L \Diamond \\ R \rightarrow$$

3. G3.K $\vdash \Rightarrow w : \square A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$

$$\frac{v : A, \dots \Rightarrow \dots, v : A \quad v : B, \dots \Rightarrow \dots, v : B}{\frac{v : A, w R v, v : B, w : \square A \Rightarrow w : \Diamond(A \wedge B), v : A \wedge B}{\frac{v : A, w R v, v : B, w : \square A \Rightarrow w : \Diamond(A \wedge B)}{\frac{w R v, v : B, w : \square A \Rightarrow w : \Diamond(A \wedge B)}{\frac{w : \square A, w : \Diamond B \Rightarrow w : \Diamond(A \wedge B)}{\frac{w : \square A \wedge \Diamond B \Rightarrow w : \Diamond(A \wedge B)}{\frac{\Rightarrow w : \square A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)}{R \rightarrow}}}}}}{R \wedge} \\ R \Diamond \\ L \square \\ L \Diamond \\ L \wedge \\ R \rightarrow$$

Esercizio 9.1 Deriva i sequenti che seguono nel calcolo G3.K:

1. $\Rightarrow w : \neg \square \neg A \rightarrow \Diamond A$
2. $\Rightarrow w : \square(A \wedge B) \leftrightarrow (\square A \wedge \square B)$
3. $\Rightarrow w : \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

Osservazione 7 (Lettura refutativa) È possibile anche dare una lettura puramente refutativa del calcolo G3.K. Ovvero possiamo leggere le formule a sinistra di \Rightarrow come formule poste vere e quelle a destra come formule poste false. In questo modo, se leggiamo le regole dal basso verso

l'alto, otteniamo un calcolo di alberi semantici (*tableaux*) atto a costruire un contromodello per un sequente $\Rightarrow w : A$. Un ramo la cui foglia sia un sequente iniziale rappresenta un tentativo fallito di costruire tale contromodello (dato che una stessa formula dovrebbe essere sia vera che falsa in un medesimo punto del modello). Se otteniamo un albero le cui foglie siano tutte sequenti iniziali, possiamo concludere che non esiste un modello che falsifichi la formula A ; tale formula è valida.

9.3 Alcune estensioni di G3.K

Passiamo ora a introdurre i calcoli etichettati per alcune estensioni di G3.K. Tali calcoli sono ottenuti aggiungendo a G3.K delle *regole non-logiche* che operano su atomi relazionali a sinistra di \Rightarrow^2 . Infatti, dato che gli atomi relazionali rappresentano nel calcolo la relazione di accessibilità tra i punti di una struttura, possiamo trasformare in regole non-logiche del calcolo etichettato le condizioni semantiche che definiscono la classe di strutture su cui sono valide tutte e sole le formule di una logica modale L. In particolare, le proprietà di \mathcal{R} che sono esprimibili al primo ordine possono essere trasformate in regole che operano a sinistra di \Rightarrow .

È conveniente dividere tali regole non-logiche in due sottoclassi:

- le regole *universali* sono regole che rappresentano proprietà di \mathcal{R} in cui occorrono solo quantificatori universali;
- le regole *esistenziali* sono regole che rappresentano proprietà di \mathcal{R} in cui occorrono anche quantificatori esistenziali.

Ecco alcune estensioni di G3.K ottenute tramite regole universali.

- Il calcolo G3.T è ottenuto estendendo G3.K con la seguente regola:

$$\frac{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Rif}$$

- Il calcolo G3.K4 è ottenuto estendendo G3.K con la seguente regola:

$$\frac{wRu, wRv, vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Trans}$$

2. Tali regole rispettano il metodo per trasformare assiomi in regole di inferenza descritto in Negri, von Plato (2011) e, perciò, permettono di preservare le buone proprietà strutturali del calcolo di base.

- Il calcolo G3.B è ottenuto estendendo G3.K con la seguente regola:

$$\frac{vRw, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ sim}$$

- Il calcolo G3.K5 è ottenuto estendendo G3.K con le seguenti regole:

$$\frac{vRu, wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Euclid} \quad \frac{vRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Euclid}^c$$

Si noti che la regola Euclid^c può essere vista come un caso particolare di Euclid in cui v e u sono la stessa etichetta e le due occorrenze di wRv e wRu sono ridotte a una.

- Il calcolo G3.Ver è ottenuto estendendo G3.K con la seguente regola:

$$\frac{}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Cieca}$$

Facciamo ora vedere che tali regole permettono di derivare la formula modale che corrisponde alla proprietà di \mathcal{R} espressa dalla regola del calcolo.

$$1. \quad \text{G3.T} \vdash \Rightarrow w : \square A \rightarrow A$$

$$\frac{\frac{w : A, wRw, w : \square A \Rightarrow w : A}{wRw, w : \square A \Rightarrow w : A} L\Box}{\frac{w : \square A \Rightarrow w : A}{\Rightarrow w : \square A \rightarrow A} R\rightarrow} Rif$$

$$2. \quad \text{G3.K4} \vdash \Rightarrow w : \square A \rightarrow \square\square A$$

$$\frac{\frac{\frac{u : A, wRu, vRu, wRv, w : \square A \Rightarrow u : A}{wRu, vRu, wRv, w : \square A \Rightarrow u : A} L\Box}{\frac{vRu, wRv, w : \square A \Rightarrow u : A}{wRv, w : \square A \Rightarrow v : \square A} Trans} R\Box}{\frac{w : \square A \Rightarrow w : \square\square A}{\Rightarrow w : \square A \rightarrow \square\square A} R\rightarrow} R\Box$$

$$3. \quad \text{G3.B} \vdash \Rightarrow w : A \rightarrow \square\Diamond A$$

$$\frac{\frac{\frac{vRw, wRv, w : A \Rightarrow v : \Diamond A, w : A}{vRw, wRv, w : A \Rightarrow v : \Diamond A} R\Diamond}{\frac{wRv, w : A \Rightarrow v : \Diamond A}{w : A \Rightarrow w : \square\Diamond A} Sim} R\Box}{\frac{w : A \Rightarrow w : \square\Diamond A}{\Rightarrow w : A \rightarrow \square\Diamond A} R\rightarrow} R\Box$$

4. G3.Ver $\vdash \Rightarrow w : \Box A$

$$\frac{wRv \Rightarrow v : A}{\Rightarrow w : \Box A} \text{ Cieca } R\Box$$

Esercizio 9.2 Mostra che G3.5 $\vdash \Rightarrow w : \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$

Osservazione 8 Presentiamo la derivazione del sequente

$$\Rightarrow w : \Box(\Box A \rightarrow A)$$

in G3.5 in cui si fa uso della regola *Euclid*^{c3}.

$$\frac{\begin{array}{c} v : A, vRv, v : \Box A, wRv \Rightarrow v : A \\ \hline vRv, v : \Box A, wRv \Rightarrow v : A \end{array}}{\frac{\begin{array}{c} v : \Box A, wRv \Rightarrow v : A \\ \hline wRv \Rightarrow v : \Box A \rightarrow A \end{array}}{\frac{wRv \Rightarrow v : \Box A \rightarrow A}{\Rightarrow w : \Box(\Box A \rightarrow A)}} R\Box} R\rightarrow \text{ Euclid}^c L\Box$$

Semanticamente è immediato vedere che lo schema $\Box(\Box A \rightarrow A)$ è valido sulle strutture euclidee grazie al caso particolare di tale proprietà ottenuto istanziando entrambe le variabili quantificate universalmente v e w su uno stesso mondo w' :

$$\forall w(wRw' \wedge wRw' \rightarrow w'Rw')$$

Ecco alcune estensioni di G3.K ottenute tramite regole esistenziali.

– Il calcolo G3.D è ottenuto estendendo G3.K con la seguente regola:

$$\frac{wRw', \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Ser} \quad w' \text{ non nella conclusione.}$$

– Il calcolo G3.X è ottenuto estendendo G3.K con la seguente regola:

$$\frac{wRw', w'Rv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ DensDeb} \quad w' \text{ non nella conclusione.}$$

3. Vedremo nel PAR. 9.6 che tale regola è necessaria per dimostrare l'ammissibilità della regola strutturale di contrazione e, per questo motivo, in letteratura viene chiamata *istanza contratta*.

- Il calcolo G3.K2 è ottenuto estendendo G3.K con le seguenti regole:

$$\frac{vRw', uRw', wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ConvDeb} \quad w' \text{ non nella conclusione}$$

$$\frac{vRw', wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ConvDeb}^c \quad w' \text{ non nella conclusione.}$$

Per ConvDeb^c vale quanto già detto per Euclid^c .

Seguono alcune derivazioni in tali calcoli.

1. G3.D $\vdash \Rightarrow w : \square A \rightarrow \Diamond A$

$$\frac{\frac{\frac{v : A, wRv, w : \square A \Rightarrow w : \Diamond A, v : A}{v : A, wRv, w : \square A \Rightarrow w : \Diamond A} R\Diamond}{wRv, w : \square A \Rightarrow w : \Diamond A} L\square}{\frac{w : \square A \Rightarrow w : \Diamond A}{\Rightarrow w : \square A \rightarrow \Diamond A} \text{Ser}} R\rightarrow$$

2. G3.X $\vdash \Rightarrow w : \square\square A \rightarrow \square A$

$$\frac{\frac{\frac{v : A, u : \square A, wRu, uRv, wRv, w : \square\square A \Rightarrow v : A}{u : \square A, wRu, uRv, wRv, w : \square\square A \Rightarrow v : A} L\square}{\frac{wRu, uRv, wRv, w : \square\square A \Rightarrow v : A}{wRv, w : \square\square A \Rightarrow v : A} DensDeb}{wRv, w : \square\square A \Rightarrow v : A} R\square}{\frac{w : \square\square A \Rightarrow w : \square A}{\Rightarrow w : \square\square A \rightarrow \square A} R\rightarrow}$$

3. G3.K2 $\vdash \Rightarrow w : \Diamond\square A \rightarrow \square\Diamond A$

$$\frac{\frac{\frac{w' : A, uRw', vRw', wRu, wRv, u : \square A \Rightarrow v : \Diamond A, w' : A}{uRw', vRw', wRu, wRv, u : \square A \Rightarrow v : \Diamond A, w' : A} L\square}{\frac{uRw', vRw', wRu, wRv, u : \square A \Rightarrow v : \Diamond A}{wRu, wRv, u : \square A \Rightarrow v : \Diamond A} \text{ConvDeb}}{\frac{wRv, w : \Diamond\square A \Rightarrow v : \Diamond A}{w : \Diamond\square A \Rightarrow w : \square\Diamond A} R\square}{\frac{w : \Diamond\square A \Rightarrow w : \square\Diamond A}{\Rightarrow w : \Diamond\square A \rightarrow \square\Diamond A} R\rightarrow}}$$

Esercizio 9.3 Si dimostri nel calcolo G3.K2 il seguente teorema (utilizzando ConvDeb^c):

$$\Rightarrow w : \square(\square A \rightarrow \Diamond A)$$

Ovviamente possiamo anche considerare i calcoli etichettati ottenibili grazie ad arbitrarie combinazioni delle regole universali ed esistenziali considerate. Ad esempio, il calcolo G3.S4 è ottenuto estendendo G3.K con le regole *Rif* e *Trans*. Con G3.L denoteremo un qualsiasi calcolo di sequenti così ottenuto. Per comodità, nelle TABB. 9.3 e 9.2 riportiamo, rispettivamente, le regole non-logiche fin qui considerate e gli assiomi modali a cui esse corrispondono.

TABELLA 9.2

Assiomi modali e regole corrispondenti

<i>T</i>	<i>Rif</i>
4	<i>Trans</i>
<i>D</i>	<i>Ser</i>
<i>X</i>	<i>DensDeb</i> e <i>DensDebf</i>
5	<i>Euclid</i> e <i>Euclid^c</i>
<i>B</i>	<i>Sim</i>
2	<i>ConvDeb</i>
<i>Ver</i>	<i>Cieca</i>

9.4 Elementi base di metateoria

DEFINIZIONE 9.4 Nelle regole delle TABB. 9.1 e 9.3 i multinsiemi Γ e Δ sono chiamati *contesti*; le formule che occorrono nella conclusione e non fanno parte di Γ , Δ sono chiamate *formule principali*; infine, le formule che occorrono nelle premesse, che non fanno parte di Γ , Δ e non occorrono nella conclusione sono chiamate *formule attive*.

DEFINIZIONE 9.5

1. La *lunghezza* (*lg*) di una formula etichettata è così definita: la lunghezza di un atomo relazionale wRv è 0 e la lunghezza di una formula etichettata $w : A$ è uguale alla lunghezza di A .
2. Data una derivazione di $\Gamma \Rightarrow \Delta$, la *profondità* (*h*) di tale derivazione è il numero di nodi del suo ramo più lungo meno uno.

TABELLA 9.3

Regole non-logiche

Regole universali:

$$\frac{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Rif}$$

$$\frac{wRu, wRv, vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Trans}$$

$$\frac{vRw, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Sim}$$

$$\frac{vRu, wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Euclid}$$

$$\frac{}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Cieca}$$

$$\frac{vRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Euclid}^c$$

Regole esistenziali: w' non nella conclusione

$$\frac{wRw', w'Rv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ DensDeb}$$

$$\frac{wRw', \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Ser}$$

$$\frac{vRw', uRw', wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ ConvDeb}$$

$$\frac{vRw', wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ ConvDeb}^c$$

3. Un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è *n-derivabile* in un calcolo, in simboli $\vdash^n \Gamma \Rightarrow \Delta$, se esiste una sua derivazione di profondità minore o uguale a *n* in tale calcolo.

4. Diremo che una regola è *ammissible* in un calcolo qualora la sua conclusione sia derivabile in tale calcolo a condizione che le sue premesse siano derivabili in tale calcolo.

5. Infine diremo che una regola è *ammissibile preservando la profondità* (abbreviato con *pp-ammissibile*) se la sua conclusione è *n*-derivabile qualora le sue premesse siano *n*-derivabili.

LEMMA 9.6 *Ogni sequente di forma $w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A$, ove $w : A$ è una formula etichettata arbitraria, è derivabile in G3.L.*

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza di $w : A$.

Se $\lg(w : A) = 0$, allora A è un atomo o \perp e il sequente $w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A$ è derivabile in quanto è un sequente iniziale.

Se $\lg(w : A) = n + 1$, allora dobbiamo ragionare per casi a seconda di quale sia l'operatore principale di A . Tutti i casi si dimostrano applicando a partire dalla radice le due regole per l'operatore principale di A e poi

utilizzando l'ipotesi di induzione (I.I.) alle foglie così ottenute (del tipo $v : B, \Gamma' \Rightarrow \Delta', v : B$ con B sottoformula propria di A). Ad esempio, nel caso in cui $A \equiv \Box B$ abbiamo la seguente derivazione:

$$\frac{\frac{v : B, w R v, w : \Box B, \Gamma \Rightarrow \Delta, v : B}{w R v, w : \Box B, \Gamma \Rightarrow \Delta, v : B} \text{ I.I.}}{w : \Box B, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Box B} \text{ L}\Box \quad \square$$

DEFINIZIONE 9.7 L'operazione di *sostituzione* di una etichetta u con una etichetta v , denotata da $[v/u]$, è così definita:

- $w[v/u] \equiv \begin{cases} v & \text{se } w \equiv u \\ w & \text{se } w \not\equiv u \end{cases}$
- $(w_1 R w_2)[v/u] \equiv w_1[v/u] R w_2[v/u]$
- $(w : A)[v/u] \equiv w[v/u] : A$

La sostituzione di etichette applicata ad un multinsieme effettua la sostituzione su tutte le formule che compongono tale multinsieme.

LEMMA 9.8 La seguente regola di sostituzione di etichette è pp-ammissibile in G3.L:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]} \text{ [v/u]}$$

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione sulla profondità h della derivazione di $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Se $h = 0$, allora $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è un sequente iniziale o una conclusione di una regola 0-aria di G3.L. È immediato vedere che anche $\Gamma[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]$ è un sequente iniziale o una conclusione di una regola 0-aria di G3.L.

Sia $h = n + 1$, allora ragioniamo per casi a seconda dell'ultima regola usata nella derivazione \mathcal{D} di $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Tra le regole logiche, consideriamo solo i casi delle regole $L\Box$ e $R\Box$ e lasciamo gli altri casi come *esercizio*. Se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è stato ottenuto applicando $L\Box$, allora $\Gamma \equiv w_1 : \Box A, w_1 R w_2, \Gamma'$ e \mathcal{D} è:

$$\frac{\vdots}{\frac{w_2 : A, w_1 : \Box A, w_1 R w_2, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{w_1 : \Box A, w_1 R w_2, \Gamma' \Rightarrow \Delta}} L\Box$$

In questo caso possiamo applicare l'ipotesi di induzione alla premessa e poi un'istanza di $L\Box$ per concludere $\Gamma[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]$. Ovvero trasformiamo \mathcal{D} nella seguente derivazione:

$$\frac{\frac{w_2 : A, w_1 : \Box A, w_1 R w_2, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{w_2[v/u] : A, w_1[v/u] : \Box A, w_1[v/u] R w_2[v/u], \Gamma'[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]} \text{ I.I.}}{w_1[v/u] : \Box A, w_1[v/u] R w_2[v/u], \Gamma'[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]} \text{ L}\Box$$

Se, invece, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è stato ottenuto applicando $R\Box$, allora $\Delta \equiv \Delta', w_1 : \Box A$ e \mathcal{D} è

$$\frac{w_1 R w_2, \Gamma \Rightarrow \Delta', w_2 : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta', w_1 : \Box A} \text{ R}\Box$$

dove w_2 è un'etichetta che non occorre in $\Gamma \Rightarrow \Delta', w_1 : \Box A$. Per evitare che l'etichetta u coincida con l'*eigenvariable* w_2 di $R\Box$, ovvero nel caso in cui $w_2[v/u] \equiv v$, applichiamo una prima volta l'ipotesi induttiva per rimpiazzare w_2 con un'etichetta nuova w_3 e poi una seconda volta per rimpiazzare u con v . A questo punto siamo certi di poter ottenere $\Gamma[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]$ applicando $R\Box$. Graficamente abbiamo:

$$\frac{\frac{\frac{w_1 R w_2, \Gamma \Rightarrow \Delta', w_2 : A}{w_1 R w_3, \Gamma \Rightarrow \Delta', w_3 : A} \text{ I.I.}}{w_1[v/u] R w_3, \Gamma[v/u] \Rightarrow \Delta'[v/u], w_3 : A} \text{ I.I.}}{\Gamma[v/u] \Rightarrow \Delta'[v/u], w_1[v/u] : \Box A} \text{ R}\Box$$

Si osservi che la sostituzione $[w_3/w_2]$ non ha alcun effetto su w_1 o sulle formule in Γ, Δ' dato che w_2 è l'*eigenvariable* dell'istanza di $R\Box$ considerata.

Se l'ultima regola applicata in \mathcal{D} è una regola non-logica universale (esistenziale) del calcolo G3.L, allora procediamo come per la regola $L\Box$ ($R\Box$). \square

9.5 Validità e completezza

Passiamo ora a mostrare che il calcolo G3.L è valido e completo rispetto alla classe di tutti i modelli basati su una struttura per la logica modale L. Per brevità, considereremo il frammento del linguaggio modale contenente i soli operatori \perp, \rightarrow e \Box . Si noti che in questo non c'è alcuna perdita di generalità dato che tutti gli altri operatori possono essere definiti a partire da essi.

9.5.1. VALIDITÀ

Per dimostrare che ogni sequente derivabile nel calcolo G3.L è L-valido, ovvero valido rispetto alle strutture per L, dobbiamo innanzitutto estendere la nozione semantica di verità alle formule del linguaggio etichettato. A questo scopo introduciamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 9.9

1. Datoun modello relazionale $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$, una \mathcal{M} -realizzazione è una funzione dall'insieme delle etichette \mathcal{E} all'insieme \mathcal{W} dei mondi di tale modello. Useremo le lettere σ, τ per riferirci a \mathcal{M} -realizzazioni.
2. La *verità* di una formula E del linguaggio etichettato in un modello \mathcal{M} rispetto a una \mathcal{M} -realizzazione σ , $\sigma \models E$, è così definita:
 1. $\sigma \models w R v \quad \text{sse} \quad \sigma(w) \mathcal{R} \sigma(v)$
 2. $\sigma \models w : A \quad \text{sse} \quad \mathcal{M} \vDash_{\sigma(w)} A$
 3. Un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è *verificato* da una \mathcal{M} -realizzazione σ ,

$$\begin{array}{c} \sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta \\ \text{sse} \end{array}$$

se $\sigma \models E$, per ogni $E \in \Gamma$, allora $\sigma \models F$, per qualche $F \in \Delta$

4. Un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è L-*valido*, $\mathcal{C}^L \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$, sse per ogni modello \mathcal{M} basato su una L-struttura e per ogni \mathcal{M} -realizzazione σ , $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta$

TEOREMA 9.10 (Validità) *Se un sequente è derivabile in un calcolo G3.L, allora esso è valido sulla classe di tutte le strutture relazionali per L, ovvero*

$$G3.L \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \text{implica} \quad \mathcal{C}^L \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$$

Dimostrazione Si tratta di mostrare che se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è derivabile in un calcolo G3.L, allora per ogni \mathcal{M} -realizzazione σ basata su una L-struttura, $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta$. La dimostrazione procede per induzione sulla profondità della derivazione \mathcal{D} di $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Sia $h(\mathcal{D}) = 0$; allora $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è un sequente iniziale oppure un'istanza della regola 0-aria *Cieca*, nel caso G3.L contenga tale regola. Dobbiamo mostrare che

per ogni σ basato su una L-struttura, $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta$

Quando $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è un sequente iniziale ciò vale banalmente dato che $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è della forma $w : p, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, $w : p \in w : p$ occorre sia nell'antecedente che nel conseguente, oppure $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è della forma $w : \perp, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ e nessuna \mathcal{M} -realizzazione verifica $w : \perp$. Se, invece, il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è la conclusione di un'istanza della regola *Cieca*, esso è della forma $w R v, \Gamma' \Rightarrow \Delta$

e dobbiamo considerare la classe dei modelli basati su strutture cieche. Ma nessuna \mathcal{M} -realizzazione basata su una struttura cieca verifica wRv .

Sia $h(\mathcal{D}) = n + 1$ e sia l'ultima regola Reg applicata in \mathcal{D} una regola logica. Allora $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è ottenuto dall'applicazione di una regola Reg del calcolo a un sequente $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ oppure ai sequenti $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$ e $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$ a seconda che Reg sia una regola a una o a due premesse. Le premesse della regola sono ovviamente derivabili con derivazioni di profondità al massimo n , quindi per ipotesi di induzione

$$\text{per ogni } \sigma, \sigma \models \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad \text{e} \quad \text{per ogni } \sigma, \sigma \models \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$$

Si tratta di mostrare che

$$\text{per ogni } \sigma, \sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta$$

Per le prime tre regole qui esaminate faremo vedere un risultato più forte, ovvero che

$$\text{per ogni } \sigma (\sigma \models \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \text{ e } \sigma \models \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \text{ allora } \sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta)$$

1. Supponiamo che Reg sia la seguente istanza di $L \rightarrow$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \quad w : B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w : A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L \rightarrow$$

Supponiamo che $\sigma \models w : A \rightarrow B$ e che $\sigma \models \Gamma$. Dobbiamo far vedere che

$$(\dagger) \qquad \qquad \qquad \sigma \models F \text{ per qualche } F \in \Delta$$

Consideriamo i seguenti due casi:

- $\sigma \models w : B$. (\dagger) segue immediatamente dall'ipotesi di induzione che $\sigma \models w : B, \Gamma \Rightarrow \Delta$;
- $\sigma \not\models w : B$. Dunque $\sigma \not\models w : A$ poiché abbiamo supposto che $\sigma \models w : A \rightarrow B$. Allora (\dagger) segue dall'ipotesi di induzione che $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A$.

2. Supponiamo che Reg sia la seguente istanza di $R \rightarrow$:

$$\frac{w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \rightarrow B} R \rightarrow$$

Supponiamo che $\sigma \models \Gamma$; dobbiamo far vedere che

$$(\dagger\dagger) \qquad \qquad \qquad \sigma \models F \text{ per qualche } F \in \Delta \text{ oppure } \sigma \models w : A \rightarrow B$$

Consideriamo i seguenti due casi:

- $\sigma \models w : A$. Allora dall'ipotesi di induzione, vale ($\dagger\dagger$) oppure $\sigma \models w : B$, ma da $\sigma \models w : B$ segue che $\sigma \models w : A \rightarrow B$. Quindi $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \rightarrow B$.
- $\sigma \not\models w : A$. Allora $\sigma \models w : A \rightarrow B$. Quindi $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \rightarrow B$.

3. Supponiamo che Reg sia la seguente istanza di $L\Box$:

$$\frac{v : A, w R v, w : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w R v, w : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\Box$$

Se $\sigma \models w R v$ e $\sigma \models w : \Box A$, allora $\sigma \models v : A$. Quindi dal fatto che $\sigma \models w R v, w : \Box A, \Gamma$ e dall'ipotesi di induzione segue che $\sigma \models F$, per qualche $F \in \Delta$.

4. Supponiamo che Reg sia la seguente istanza di $R\Box$:

$$\frac{w R u, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Box A} R\Box$$

ove u non occorre in $\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Box A$.

Sia $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ e sia σ una \mathcal{M} -realizzazione tale che $\sigma \models \Gamma$. Se $\sigma \models F$ per qualche $F \in \Delta$, allora $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Box A$ ed il lemma è dimostrato. Supponiamo dunque che ciò non sia, ovvero che

$$(\ddagger) \quad \sigma \not\models \Delta$$

Due sono i casi:

- Esiste $t \in \mathcal{W}$ tale che $\sigma(w)\mathcal{R}t$. Si consideri una \mathcal{M} -realizzazione σ' che si comporta come σ per ogni etichetta diversa da u e tale che $\sigma'(u) = t$. Allora $\sigma' \models w R u$ e $\sigma' \models \Gamma$. Per ipotesi di induzione $\sigma' \models F$ per qualche $F \in \Delta$ oppure $\sigma' \models u : A$.

Ma per la supposizione fatta, (\ddagger) , non vale che $\sigma' \models F$ per qualche $F \in \Delta$, quindi $\sigma' \models u : A$.

Essendo $\sigma'(u)$ un generico elemento di \mathcal{W} tale che $\sigma(w)\mathcal{R}\sigma'(u)$, segue che $\sigma \models w : \Box A$.

- Non esiste $t \in \mathcal{W}$ tale che $\sigma(w)\mathcal{R}t$. Banalmente $\sigma \models w : \Box A$.

Passiamo ora a mostrare che le regole non-logiche preservano la validità sui modelli basati sulle strutture appropriate. Consideriamo solo alcuni casi e lasciamo gli altri come esercizio.

5. Supponiamo che Reg sia la seguente istanza della regola universale $Trans$:

$$\frac{w R u, w R v, v R u, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w R v, v R u, \Gamma \Rightarrow \Delta} Trans$$

Sia \mathcal{M} un modello basato su una struttura transitiva e sia σ una \mathcal{M} -realizzazione che verifica tutte le formule in wRv, vRu, Γ . In particolare abbiamo che $\sigma(w)\mathcal{R}\sigma(v)$ e $\sigma(v)\mathcal{R}\sigma(u)$. Essendo \mathcal{R} una relazione di accessibilità transitiva, abbiamo che $\sigma(w)\mathcal{R}\sigma(u)$ e, dunque, $\sigma \models wRu$. Grazie all'ipotesi di induzione possiamo concludere che σ verifica qualche formula in Δ .

6. Supponiamo che Reg sia la seguente istanza della regola esistenziale $ConvDeb$:

$$\frac{vRw', uRw', wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} ConvDeb$$

ove w' non occorre in $wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Sia \mathcal{M} un modello basato su una struttura debolmente convergente e sia σ una \mathcal{M} -realizzazione che realizza tutte le formule in wRv, vRu, Γ . Dato che \mathcal{R} è debolmente convergente e dato che $\sigma(w)\mathcal{R}\sigma(v)$ e $\sigma(w)\mathcal{R}\sigma(u)$, abbiamo che esiste un $s \in \mathcal{W}$ tale che $\sigma(v)\mathcal{R}s$ e $\sigma(u)\mathcal{R}s$. Sia σ' una \mathcal{M} -realizzazione definita come σ salvo che $\sigma'(w') = s$. Dall'ipotesi induttiva segue che σ' verifica qualche formula in Δ e, dato che σ' e σ coincidono per le etichette che occorrono in wRv, vRu, Γ, Δ , lo stesso vale per σ . \square

9.5.2. COMPLETEZZA

Passiamo ora a dimostrare la completezza di G3.L, ovvero che

Se un sequente è valido sulla classe delle strutture per L allora esso è derivabile in G3.L.

Dimostreremo il teorema per contrapposizione, ovvero dimostreremo che è possibile definire una procedura tale che se il sequente in questione non è derivabile nel calcolo G3.L, allora permette di costruire un modello basato su una struttura per L che falsifica tale sequente. La dimostrazione si articolerà nei seguenti passaggi:

1. definiremo quando un tentativo di costruzione di un albero di derivazione per un sequente contenga un *ramo saturo* rispetto alle regole di G3.L (ovvero un ramo la cui foglia non è un sequente iniziale e nel quale ogni istanza applicabile di una regola di G3.L è stata applicata);
2. definiremo una procedura che permetta di ottenere una derivazione o un ramo saturo per un arbitrario sequente nel calcolo G3.L;
3. definiremo un modello relazionale a partire da un ramo saturo;

4. faremo vedere che tale modello falsifica il sequente alla radice dell'albero;
5. infine, faremo vedere che tale modello è basato su una struttura per L.

DEFINIZIONE 9.11 (Ramo L-saturo) Un ramo di un albero di sequenti etichettati è *L-saturo* se è tale che, se Γ e Δ sono rispettivamente l'unione di tutte le formule occorrenti nei suoi antecedenti e nei suoi succedenti (e w, v sono delle arbitrarie etichette),

1. nessuna formula etichettata atomica $w : p$ occorre sia in Γ che in Δ , $w : \perp$ non occorre in Γ e $w R v$ non occorre in Γ se la regola *Cieca* appartiene a G3.L;
2. se $w : A \rightarrow B$ occorre in Γ allora $w : A \in \Delta$ oppure $w : B \in \Gamma$;
3. se $w : A \rightarrow B$ occorre in Δ allora $w : A \in \Gamma$ e $w : B \in \Delta$;
4. se $w : \Box A$ e $w R v$ occorrono in Γ allora anche $v : A$ occorre in Γ ;
5. se $w : \Box A$ occorre in Δ allora, per qualche u , $w R u \in \Gamma$ e $u : A \in \Delta$; R_j se R_j è una regola non-logica di G3.L e le formule principali di una sua istanza occorrono in Γ , allora anche le sue formule attive occorrono in Γ^4 .

DEFINIZIONE 9.12 (Costruzione di un L-albero) Un L-albero per un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è definito dalla seguente procedura induttiva:

Passo 0. Costruiamo l'albero costituito da un solo nodo a cui è associato $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Passo n + 1. Abbiamo tre casi:

Caso 1: se la foglia di ciascun ramo dell'albero costruito al passo n è un sequente iniziale o un'istanza della regola 0-aria *Cieca* e tale regola appartiene a G3.L, allora la costruzione finisce e il sequente è derivabile; altrimenti

Caso 2: se a nessuna foglia dell'albero generato al passo n è applicabile qualche regola del calcolo G3.L, allora la costruzione finisce e l'albero contiene un ramo finito e L-saturo; altrimenti

Caso 3: costruiamo l'albero del passo $n + 1$ applicando ad ogni foglia che non soddisfa le condizioni dei casi 1 e 2 ogni istanza applicabile di ciascuna regola del calcolo G3.L. Se G3.L contiene k regole non-logiche non 0-arie, applichiamo a ciascun ramo estendibile la seguente procedu-

4. Per almeno una etichetta w' nel caso delle regole esistenziali. Inoltre, per le regole *Rif* e *Ser* è sufficiente che $w R w$ e $w R w'$ occorrono per ciascuna etichetta w che occorre nel ramo.

ra di $4 + k$ passi che, a ciascun passo, estende il ramo in esame applicando in parallelo ogni istanza applicabile della regola associata a tale passo.

1. Consideriamo tutte le istanze applicabili di $L \rightarrow$. Supponiamo che la foglia abbia la forma:

$$w_1 : A_1 \rightarrow B_1, \dots, w_n : A_n \rightarrow B_n, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

dove Γ non contiene alcuna formula etichettata implicativa. In questo caso aggiungiamo i seguenti 2^n nodi (distinti) al di sopra di tale foglia:

$$w_{i_1} : B_{i_1}, \dots, w_{i_m} : B_{i_m}, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_{j_{m+1}} : A_{j_{m+1}}, \dots, w_{j_n} : A_{j_n}$$

dove $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ e $j_{m+1}, \dots, j_n \in \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_m\}$. Si noti che questo è equivalente ad applicare in successione le n istanze della regola $L \rightarrow$ che sono applicabili alla foglia in questione.

2. Consideriamo tutte le istanze applicabili di $R \rightarrow$. Supponiamo la foglia abbia la forma:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta, w_1 : A_1 \rightarrow B_1, \dots, w_n : A_n \rightarrow B_n$$

dove Δ non contiene alcuna formula implicativa. Aggiungiamo il seguente nodo al di sopra di tale foglia:

$$w_1 : A_1, \dots, w_n : A_n, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_1 : B_1, \dots, w_n : B_n$$

3. Consideriamo tutte le istanze applicabili di $L\square$. Consideriamo ciascuna coppia di formule $w_i : \square A$ e $w_i R w_j$ che occorrono nell'antecedente della foglia e aggiungiamo al di sopra di tale foglia una copia di essa contenente anche le formule $w_j : B_j$.

4. Consideriamo tutte le istanze applicabili di $R\square$. Assumiamo la foglia abbia la forma:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta, w_1 : \square A_1, \dots, w_n : \square A_n$$

e in Δ non occorra alcuna formula il cui operatore principale sia \square . Consideriamo le etichette nuove w'_1, \dots, w'_n e aggiungiamo il seguente nodo al di sopra di tale foglia:

$$w_1 R w'_1, \dots, w_n R w'_n, \Gamma \Rightarrow \Delta, w'_1 : A_1, \dots, w'_n : A_n$$

5. Sia R_k una regola non-logica (diversa da *Cieca*) del calcolo G3.L. Allora applichiamo alla foglia in questione ogni istanza applicabile di tale regola. Nel caso delle regole *Rif* e *Ser* aggiungiamo, rispettivamente, $w_i \text{R} w_i$ e $w_i \text{R} w'_i$ per ogni etichetta w_i che occorre nella foglia in questione (ciascuna w'_i è un'etichetta nuova rispetto al ramo).

Si noti che tale procedura potrebbe non terminare in un numero finito di passi. Infatti, se un sequente non è G3.L-derivabile, due casi sono possibili:

- Dopo un numero finito m di passi non è più possibile estendere alcun ramo dell'albero dato che a nessuna foglia è applicabile una regola del calcolo G3.L. In questo caso almeno uno dei rami dell'albero è un ramo L-saturo e finito.
- A ciascun passo $m \in \mathbb{N}$ è possibile continuare a estendere l'albero applicando, dal basso verso l'alto, regole del calcolo G3.L. In questo caso al limite otterremmo un albero che, per il lemma di König⁵, ha almeno un ramo infinito. È immediato vedere che tale ramo è L-saturo.

DEFINIZIONE 9.13 (Modello da un ramo L-saturo) Sia $\Gamma (\Delta)$ l'unione di tutte le formule occorrenti negli antecedenti (succedenti) dei nodi di un ramo L-saturo. Il modello $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{I} \rangle$ è così definito:

- \mathcal{W} è l'insieme di tutte le etichette che occorrono in $\Gamma \cup \Delta$;
- \mathcal{R} è la relazione di accessibilità definita da: $w \mathcal{R} v$ se e solo se $w R v \in \Gamma$;
- \mathcal{I} è l'interpretazione definita da: $w \in \mathcal{I}(p)$ se e solo se $w : p \in \Gamma$.

LEMMA 9.14 *Siano Γ, Δ e \mathcal{M} come in Definizione 9.13, allora:*

1. *Se $w : A$ è in Γ , abbiamo che $\mathcal{M} \vDash_w A$;*
2. *Se $w : A$ è in Δ , abbiamo che $\mathcal{M} \not\vDash_w A$.*

Dimostrazione La dimostrazione (simultanea per le due proprietà) è per induzione sulla lunghezza della formula etichettata $w : A$.

Se $\lg(w : A) = 0$, allora A è un atomo oppure \perp . Nel primo caso entrambe le proprietà valgono per costruzione di \mathcal{I} e, grazie alla clausola di saturazione 9.11.1, siamo certi che $w : A$ non possa essere sia in Γ

5. Il lemma di König stabilisce che se un albero ha un numero infinito di nodi e ciascun nodo ha un numero finito di nodi immediatamente sopra esso, allora l'albero contiene un ramo infinito.

che in Δ . Nel secondo caso, invece, abbiamo che la prima proprietà è vacuamente soddisfatta dato che, sempre grazie a 9.11.1, l'antecedente è sempre falso; la seconda proprietà è soddisfatta dato che \perp è falso in ciascun punto di ciascun modello.

Se $\lg(w : A) = n + 1$ ragioniamo sull'operatore principale di A . Supponiamo che A sia $B \rightarrow C$. Se $w : A \in \Gamma$, allora, per la clausola di saturazione 9.11.2, sappiamo che $w : B \in \Delta$ o $w : C \in \Gamma$. Per ipotesi di induzione otteniamo che $\mathcal{M} \not\models_w B$ oppure $\mathcal{M} \models_w C$. In entrambi i casi possiamo concludere che $\mathcal{M} \models_w B \rightarrow C$.

Se $A \in \Delta$, allora dalla clausola 9.11.3 otteniamo che $w : B \in \Gamma$ e $w : C \in \Delta$. Per ipotesi d'induzione da questo segue che $\mathcal{M} \models_w B$ e $\mathcal{M} \not\models_w C$. Perciò possiamo concludere che $\mathcal{M} \not\models_w B \rightarrow C$.

Consideriamo ora il caso in cui A sia $\Box B$ e $w : \Box B \in \Gamma$. Per definizione di \mathcal{R} abbiamo che, per ciascuna etichetta v , $w\mathcal{R}v$ implica che $wRv \in \Gamma$. Da questo, per 9.11.4, otteniamo che $v : B \in \Gamma$ e, per ipotesi di induzione, $\mathcal{M} \models_v B$. Possiamo concludere che $\mathcal{M} \models_w \Box B$ dato che B è vera in ogni mondo accessibile a partire da w .

Infine se $w : \Box B \in \Delta$, sappiamo, per 9.11.5, che per almeno un'etichetta u abbiamo allo stesso tempo che $wRu \in \Gamma$ e $u : B \in \Delta$. Dal secondo fatto per induzione otteniamo che $\mathcal{M} \not\models_u B$ e, dal primo, otteniamo che wRu . Possiamo perciò concludere che $\mathcal{M} \not\models_w \Box B$. \square

TEOREMA 9.15 (Completezza) *Se un sequente è valido sulla classe delle strutture per L allora esso è derivabile in G3.L.*

Dimostrazione Sia $\Gamma \Rightarrow \Delta$ un sequente non derivabile in G3.L. Applicando la procedura di costruzione di un L-albero data in Definizione 9.12 otteniamo un albero contenente almeno un ramo L-saturo (altrimenti avremmo trovato una G3.L-derivazione di $\Gamma \Rightarrow \Delta$). Sia \mathcal{M} il modello costruito a partire da tale ramo L-saturo e sia σ^{id} la \mathcal{M} -realizzazione che mappa ogni etichetta su se stessa.

È immediato vedere che $\sigma^{id} \models wRv$ per ogni atomo relazionale wRv che occorre in Γ . Inoltre dal Lemma 9.14 segue che $\sigma^{id} \models w : A$ vale per tutte le formule in Γ e per nessuna formula in Δ . Dunque la \mathcal{M} -realizzazione σ^{id} falsifica il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Questo è sufficiente a dimostrare la completezza per G3.K dato che in questo caso \mathcal{M} può essere basato su una struttura arbitraria. Negli altri casi, per poter concludere che il sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ non sia L-valido, dobbiamo mostrare che \mathcal{M} è basato su una L-struttura. Ma questo segue

immediatamente dalla saturazione sotto le regole non-logiche di G3.L (9.11.5_k).

Ad esempio, se consideriamo il calcolo G3.K4, dobbiamo far vedere che \mathcal{M} è basato su una struttura transitiva. Siano w, v, u tre generici mondi di tale modello tali che $w\mathcal{R}v$ e $v\mathcal{R}u$. Per definizione di \mathcal{R} sappiamo che gli atomi relazionali $w\mathcal{R}v$ e $v\mathcal{R}u$ occorrono in Γ e, dunque, a partire dal j -esimo passo della costruzione dell'L-albero, occorreranno nell'antecedente di qualche nodo del ramo L-saturo. Per la proprietà di saturazione 9.11.5_{Trans} sappiamo che al passo $j + 1$ della costruzione dell'albero abbiamo aggiunto nell'antecedente del ramo in esame l'atomo relazionale $w\mathcal{R}u$ e, dunque, per definizione di \mathcal{R} , sappiamo che $w\mathcal{R}u$. Possiamo così concludere che \mathcal{M} è basato su una struttura transitiva.

Se, invece G3.L contiene la regola 0-aria *Cieca*,abbiamo che, se valesse $w\mathcal{R}v$ per qualche coppia di mondi, avremmo che $w\mathcal{R}v \in \Gamma$. Ma questo sarebbe in contraddizione con la proprietà di saturazione 9.11.1.

Per tutti gli altri calcoli si procede in modo analogo a quanto fatto per G3.K4. \square

9.6 Proprietà strutturali

Faremo ora vedere che le regole strutturali di *indebolimento*, *contrazione*, e *cesura* sono ammissibili in G3.L e che tutte le regole di tale calcolo sono *invertibili*. Per brevità, considereremo il frammento del linguaggio \mathcal{L}^Φ contenente i soli operatori \perp, \rightarrow , e \Box . I rimanenti casi sono lasciati al lettore come esercizio.

LEMMA 9.16 (Indebolimento) *Le seguenti regole di indebolimento sono pp-ammissibili in G3.L:*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{w\mathcal{R}v, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ LW} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ LW} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A} \text{ RW}$$

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione sulla profondità della derivazione \mathcal{D} della premessa $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Se $h(\mathcal{D}) = 0$, allora $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è un sequente iniziale o una conclusione della regola 0-aria *Cieca*, e lo stesso vale per il sequente ottenuto a partire da $\Gamma \Rightarrow \Delta$ applicando una delle tre regole di indebolimento.

Se $h(\mathcal{D}) = n + 1$, allora assumiamo per induzione (I.I.) che le tre regole siano ammissibili per derivazioni di profondità al più n e ragioniamo per casi a seconda dell'ultima regola Reg applicata in \mathcal{D} . Se Reg è $L \rightarrow$, allora \mathcal{D} è:

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta, v : B \quad v : C, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{v : B \rightarrow C, \Gamma' \Rightarrow \Delta} L \rightarrow$$

In questo caso è sufficiente applicare l'ipotesi induttiva alle premesse e poi un'istanza di $L \rightarrow$ per ottenere la conclusione della regola di indebolimento in esame. Ad esempio per RW abbiamo:

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta, v : B \quad v : C, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A, v : B \quad v : C, \Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A} \frac{v : C, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{v : B \rightarrow C, \Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A} I.I. \quad I.I. \quad L \rightarrow$$

Per le regole $R \rightarrow$ e $L \square$ possiamo procedere come per $L \rightarrow$ applicando l'ipotesi induttiva alle derivazioni della premessa e poi un'istanza della regola che stiamo considerando.

Se l'ultima regola applicata in \mathcal{D} è un'istanza di $R \square$, abbiamo:

$$\frac{v R u, \Gamma \Rightarrow \Delta', u : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta', v : \square B} R \square$$

In questo caso la formula introdotta per indebolimento potrebbe contenere l'etichetta u che non può occorrere nella conclusione dell'istanza di $R \square$ che stiamo considerando. Per evitare questo problema prima di applicare l'ipotesi di induzione dobbiamo applicare alla premessa di $R \square$ un'istanza della regola di sostituzione di etichette, pp-ammissibile grazie al Lemma 9.8, per rimpiazzare u con una etichetta nuova u' che sia diversa da ogni etichetta occorrente nella formula introdotta via indebolimento. Tale sostituzione non ha effetto su Γ, Δ' né su v dato che u non occorre in $\Gamma \Rightarrow \Delta', v : \square B$. A questo punto possiamo procedere come negli altri casi applicando l'ipotesi di induzione seguita da un'istanza di $R \square$. È importante notare che tale istanza di $R \square$ è sicuramente applicabile dato che abbiamo rinominato l'etichetta u con un'etichetta che non occorre nel sequente ottenibile via ipotesi di induzione. Ricapitolando, nel caso di RW trasformiamo \mathcal{D} nella seguente derivazione:

$$\frac{\frac{\frac{v R u, \Gamma \Rightarrow \Delta', u : B}{v R u', \Gamma \Rightarrow \Delta', u' : B} [u'/u]}{v R u', \Gamma \Rightarrow \Delta', w : A, u' : B} I.I.}{\Gamma \Rightarrow \Delta', w : A, v : \square B} R \square$$

Se l'ultima regola *Reg* applicata in \mathcal{D} è un'istanza di una regola non-logica universale (esistenziale, rispettivamente) di G3.L, allora procediamo come per $L \rightarrow (R\Box)$ applicando (una rinomina delle *eigenvariable* della regola esistenziale *Reg* seguita da) l'ipotesi di induzione e un'istanza della regola *Reg*. \square

COROLLARIO 9.17 *La regola di necessitazione è ammissibile in G3.L, ovvero*

$$G3.L \vdash \Rightarrow w : A \text{ implica } G3.L \vdash \Rightarrow w : \Box A$$

come mostrato dalla derivazione seguente:

$$\frac{\frac{\frac{\Rightarrow w : A}{\Rightarrow v : A} [v/w]}{w R v \Rightarrow v : A} LW}{\Rightarrow w : \Box A} R\Box$$

LEMMA 9.18 *Tutte le regole di G3.L sono invertibili preservando la profondità della derivazione, ovvero:*

1. *Se $G3.L \vdash^n w : A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta$, allora $G3.L \vdash^n \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A$ e $G3.L \vdash^n w : B, \Gamma \Rightarrow \Delta$*
2. *Se $G3.L \vdash^n \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \rightarrow B$, allora $G3.L \vdash^n w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : B$*
3. *Se $G3.L \vdash^n w : \Box A, w Ru, \Gamma \Rightarrow \Delta$, allora $G3.L \vdash^n u : A, w : \Box A, w Ru, \Gamma \Rightarrow \Delta$*
4. *Se $G3.L \vdash^n \Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Box A$, allora $G3.L \vdash^n w Ru, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : A$*
5. *Se $G3.L \vdash^n \Gamma \Rightarrow \Delta$ ed esiste un'istanza così fatta $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$ di una regola non-logica di G3.L, allora $G3.L \vdash^n \Gamma' \Rightarrow \Delta'$. Analogamente per una regola a più premesse.*

Dimostrazione Per ciascun caso la dimostrazione è per induzione sulla profondità della derivazione \mathcal{D} della premessa. I casi 3 e 5, ovvero i casi di $L\Box$ e delle regole non-logiche seguono immediatamente dal Lemma 9.16 di pp-ammissibilità delle regole di indebolimento dato che tutte le formule che occorrono nella conclusione di un'istanza di tali regole sono ripetute nella/e sua/e premessa/e (la regola *Cieca* è invertibile in senso lato dato che non ha premessa).

Consideriamo ora il caso 4, ovvero la regola $R\Box$. Il caso in cui il seguente $\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Box$ ha una derivazione di profondità 0 vale dato che

sia la premessa che la conclusione dell'istanza di $R\Box$ in questione sono sequenti iniziali. Questo dipende dal fatto che la formula principale di un sequente iniziale è atomica e dunque non può essere modificata invertendo la regola.

Supponiamo, allora, che la profondità della derivazione di $\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \Box A$ sia $n + 1$. Se $w : \Box A$ è la formula principale dell'ultimo passo via Reg in \mathcal{D} , allora abbiamo già una derivazione di altezza n di $wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v : A$, per un qualche v diverso da w che non compare in Γ, Δ . Possiamo applicare il Lemma 9.8 per sostituire v con u e abbiamo finito.

Se, invece, $w : \Box A$ non è principale in Reg , allora Reg è una qualche regola a una o due premesse, $\Gamma' \Rightarrow \Delta', w : \Box A$ e $\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', \Box A$. Applichiamo l'ipotesi di induzione alle derivazioni di tali sequenti e otteniamo $wRv, \Gamma' \Rightarrow \Delta', v : A$ e $wRv, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'', v : A$, dove v è un'etichetta compatibile con eventuali condizioni sulle variabili di Reg . A questo punto possiamo applicare un'istanza di Reg per ottenere una derivazione di altezza $n + 1$ di $wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v : A$ e concludere utilizzando il Lemma 9.8 per sostituire v con u .

L'invertibilità delle regole per l'implicazione si dimostra in modo analogo al caso di $R\Box$, ma senza bisogno di ricorrere al lemma di sostituzione. \square

TEOREMA 9.19 (Contrazione) *Le seguenti regole di contrazione sono pp-ammissibili in G3.L:*

$$\frac{wRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ LC} \quad \frac{w : A, w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ LC} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A, w : A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A} \text{ RC}$$

Dimostrazione La dimostrazione, simultanea per le tre regole di contrazione, è per induzione sulla profondità della derivazione \mathcal{D} della premessa.

Se $h(\mathcal{D}) = 0$, sia la premessa che la conclusione di ciascuna regola di contrazione sono sequenti iniziali o conclusioni della regola 0-aria *Cieca*.

Se $h(\mathcal{D}) = n + 1$, assumiamo il teorema valga per le derivazioni di profondità al più n e consideriamo tre casi esaustivi:

1. nessuna, oppure
2. una, oppure
3. entrambe le istanze della formula che vogliamo contrarre sono principali nell'ultimo passo Reg applicato in \mathcal{D} .

Nel caso (1) possiamo semplicemente applicare l'ipotesi di induzione alla premessa di *Reg* e poi un'istanza di *Reg* per ottenere il sequente contratto.

Nel caso (2) abbiamo casi a seconda dell'ultima regola applicata in \mathcal{D} . Ad esempio, se tale regola è $R \rightarrow$, la derivazione \mathcal{D} è:

$$\frac{w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \rightarrow B, w : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \rightarrow B, w : A \rightarrow B} R \rightarrow$$

Grazie all'invertibilità di $R \rightarrow$, Lemma 9.18.2, dalla premessa otteniamo che

$$G3.L \vdash^n w : A, w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : B, w : B$$

A questo punto possiamo applicare l'ipotesi induttiva sulle regole *LC* e *RC* a tale sequente per ottenere

$$G3.L \vdash^n w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : B$$

e possiamo concludere

$$G3.L \vdash^{n+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \rightarrow B$$

applicando un'istanza di $R \rightarrow$.

Infine, nel caso (3) entrambe le occorrenze della formula che vogliamo contrarre sono principali. In questo caso *Reg* è per forza una regola non-logica tra *Trans*, *Euclid*, *ConvDeb* dato che queste sono le uniche regole che possono avere due occorrenze principali della stessa formula. Nel caso *Reg* sia un'istanza di *Euclid* o di *ConvDeb*, possiamo applicare l'ipotesi di induzione alla derivazione della premessa e poi concludere applicando un'istanza della regola *Reg*^c al posto dell'ultima regola *Reg* applicata nella derivazione originale⁶. Ad esempio, se *Reg* è *Euclid*, abbiamo la seguente derivazione

$$\frac{vRv, wRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} Euclid$$

6. In letteratura *Reg*^c è chiamata *istanza contratta* di *Reg* proprio perché serve a dimostrare l'ammissibilità della contrazione rispetto a tale regola, cfr. Negri, von Plato (2011).

che viene trasformata in:

$$\frac{vRv, wRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\frac{vRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}}_{Euclid^c} \text{ I.I.}$$

Nel caso di *Trans*, invece, possiamo mostrare la pp-ammissibilità della regola di contrazione applicando due volte l'ipotesi di induzione alla premessa di tale regola, ovvero trasformiamo

$$\frac{wRw, wRw, wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRw, wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}_{Trans} \text{ in } \frac{\frac{wRw, wRw, wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRw, wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ I.I.}$$

Perciò la regola *Trans*^c non è necessaria. \square

TEOREMA 9.20 (Cesura) *La seguente regola di cesura è ammissibile in G3.L:*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : A \quad w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \text{ Cut}$$

Dimostrazione Consideriamo un'istanza di cesura il cui sottoalbero di derivazione non contenga altre istanze di cesura e mostriamo che tale istanza di cesura è ammissibile. Questo è sufficiente per concludere che ogni istanza di tale regola è ammissibile.

Procediamo per induzione sulla lunghezza della formula di cesura $w : A$ con una induzione secondaria sulla somma della profondità delle derivazioni delle due premesse della cesura (profondità della cesura). La dimostrazione è organizzata in 5 casi esaustivi:

1. la premessa sinistra della cesura ha una derivazione di altezza 0;
2. la premessa destra della cesura ha una derivazione di altezza 0;
3. la formula di cesura non è principale nell'ultimo passo della derivazione della premessa sinistra;
4. la formula di cesura non è principale unicamente nell'ultimo passo della derivazione della premessa destra;
5. la formula di cesura è principale in entrambe gli ultimi passi.

Si noti che la formula di cesura non può essere un atomo relazionale in quanto questi non occorrono mai a destra del simbolo \Rightarrow e che le regole non-logiche sono escluse dagli ultimi due casi dato che esse non hanno mai formule principali occorrenti a destra del simbolo \Rightarrow .

Nel caso (1), la premessa sinistra è un'istanza della regola 0-aria Cieca, oppure è un sequente iniziale della forma $v : \perp, \Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A$, o della forma $v : p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', v : p$ e abbiamo due sottocasi: o la formula di cesura $w : A$ coincide con $v : p$ (e Δ' coincide con Δ), oppure essa è in Δ' . Nel primo sottocaso la conclusione dell'istanza di cesura è $v : p, \Pi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma$ ed è possibile ottenerla (senza usare la regola di cesura) a partire dalla premessa destra applicando le regole di indebolimento. Nel secondo sottocaso la conclusione della cesura è $v : p, \Pi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \Sigma, v : p$ e ha una derivazione senza cesura dato che è un sequente iniziale. Possiamo procedere analogamente a questo secondo sottocaso quando la premessa sinistra è un'istanza della regola 0-aria Cieca, o della forma $v : \perp, \Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A$.

Nel caso (2) procediamo in modo simile al caso (1).

Nel caso (3) ragioniamo a seconda di quale sia l'ultima regola applicata nella derivazione della premessa sinistra. Se essa è $L \rightarrow$ abbiamo:

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A, v : B \quad v : C, \Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A}{\frac{v : B \rightarrow C, \Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A}{v : B \rightarrow C, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}}_{L \rightarrow} \quad \frac{w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}_{Cut}$$

Possiamo trasformare tale derivazione permutando la cesura con l'istanza di $L \rightarrow$. In questo modo otteniamo una derivazione in cui abbiamo due istanze di cesura che sono ammissibili avendo una profondità della cesura inferiore:

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A, v : B \quad w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, v : B} \quad \frac{\frac{v : C, \Gamma' \Rightarrow \Delta, w : A \quad w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{v : C, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}}{v : B \rightarrow C, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}_{Cut} \quad \frac{v : C, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}{v : B \rightarrow C, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}_{L \rightarrow}$$

Se l'ultima regola è $R \rightarrow, L\Box$, o una regola non-logica universale possiamo procedere in modo analogo al caso di $L \rightarrow$. In tutti questi casi, infatti, permutando la cesura con l'ultima regola, otteniamo una derivazione con una cesura di minore profondità che è ammissibile per ipotesi di induzione.

Se l'ultima regola è $R\Box$, allora abbiamo:

$$\frac{\frac{vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta', w : A, u : B}{\Gamma \Rightarrow \Delta', w : A, v : \Box B} \quad w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, v : \Box B} \quad \frac{w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}_{Cut}$$

In questo caso prima di permutare la cesura con $R\Box$ dobbiamo sostituire l'etichetta u con una etichetta u' che non occorre né in $\Gamma \Rightarrow \Delta', w : A, v :$

$\square B$ né in $\Pi \Rightarrow \Sigma$. Ovvero trasformiamo la derivazione di partenza nella seguente derivazione:

$$\frac{\frac{\frac{vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta', u : B, w : A}{vRu', \Gamma \Rightarrow \Delta', u' : B, w : A}^{[u'/u]} \quad w : A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{vRu', \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, u' : B}^{R\square}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, v : \square B}^{Cut}$$

Si noti che la sostituzione $[u'/u]$ non può avere effetto su $\Gamma, \Delta', w : A$ (e neppure su v) dato che u non occorre in tale multinsieme e che essa non aumenta la profondità della derivazione dato che la regola di sostituzione è pp-ammissibile. Procediamo in modo analogo se l'ultima regola è una regola non-logica esistenziale.

Nel caso (4) procediamo in modo analogo al caso (3).

Infine, *nel caso (5)* la formula di cesura $w : A$ è principale in entrambe le premesse, dunque essa è o della forma $w : B \rightarrow C$ o della forma $w : \square B$. Nel primo caso abbiamo la seguente derivazione:

$$\frac{w : B, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : C \quad R\rightarrow \quad \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, w : B \quad w : C, \Pi \Rightarrow \Sigma \quad L\rightarrow}{w : B \rightarrow C, \Pi \Rightarrow \Sigma}^{Cut}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}^{Cut}$$

Possiamo trasformare tale derivazione nella seguente derivazione in cui abbiamo due cesure ammissibili su formule di minore lunghezza:

$$\frac{\frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, w : B \quad w : B, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : C \quad Cut}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, w : C} \quad w : C, \Pi \Rightarrow \Sigma \quad Cut}{\frac{\Gamma, \Pi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Sigma \quad LC, RC}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}}^{Cut}$$

Nel secondo caso la formula di cesura è $w : \square B$ e abbiamo la seguente derivazione:

$$\frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : B \quad R\square \quad \frac{v : B, w : \square B, wRv, \Pi' \Rightarrow \Sigma \quad L\square}{w : \square B, wRv, \Pi' \Rightarrow \Sigma}^{Cut}}{\Gamma, wRv, \Pi' \Rightarrow \Delta, \Sigma}^{Cut}$$

che possiamo trasformare nella seguente derivazione:

$$\frac{\frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : B \quad [v/u] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w : \square B \quad w : \square B, v : B, wRv, \Pi' \Rightarrow \Sigma}{v : B, \Gamma, wRv, \Pi' \Rightarrow \Delta, \Sigma}^{Cut}}{\Gamma, \Gamma, wRv, wRv, \Pi' \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma \quad LC, RC}}{\Gamma, wRv, \Pi' \Rightarrow \Delta, \Sigma}^{Cut}$$

In quest'ultima derivazione ci sono due istanze di cesura che sono entrambe ammissibili per ipotesi di induzione: la prima istanza (dall'alto) ha una minore profondità e la seconda ha una formula di cesura di minore lunghezza. \square

COROLLARIO 9.21 *La regola di Modus ponens è ammissibile in G3.L, ovvero:*

$$\frac{\Rightarrow w : A \quad \Rightarrow w : A \rightarrow B}{\Rightarrow w : B}$$

come mostrato dalla seguente derivazione:

$$\frac{\Rightarrow w : A \quad \frac{\Rightarrow w : A \rightarrow B}{w : A \rightarrow w : B} \text{ Lem.9.18.2}}{w : B} \text{ Cut}$$

COROLLARIO 9.22 (Completezza indiretta) *Se una \mathcal{L}^Φ -formula A è derivabile nel calcolo assiomatico per la logica L , allora la formula etichettata $w : A$, dove w è un'etichetta arbitraria, è derivabile nel calcolo di sequenti G3.L, ovvero*

$$\vdash_L A \quad \text{implica} \quad \text{G3.L} \vdash \Rightarrow w : A$$

Da questo e dal teorema di completezza per L segue immediatamente che G3.L è completo rispetto alla classe delle strutture per L .

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione sulla costruzione della dimostrazione di A nel calcolo assiomatico L . Se A è un assioma di L allora la derivabilità di $w : A$ in G3.L segue dagli esempi di derivazioni presentati nei PARR. 9.2 e 9.3. Altrimenti A è stata ottenuta a partire da formule che lo precedono nella derivazione attraverso una tra la regola di necessitazione e la regola di Modus ponens. In questo caso la derivabilità di $w : A$ in G3.L segue dall'ammissibilità di suddette regole nei calcoli di sequenti etichettati, ovvero dai Corollari 9.17 e 9.21. \square

9.7 Decidibilità

In generale la procedura di costruzione di un L -albero non è una procedura finitaria dato che in alcuni casi essa genererebbe un ramo L -saturo solamente dopo un numero infinito di passi. In particolare sono due i motivi per cui la procedura può andare avanti all'infinito:

1. se al passo m è possibile applicare, dal basso verso l'alto, la regola $L\Box$ a una coppia di formule wRv e $w : \Box A$, allora tale regola deve essere riapplicata anche al passo $m + 1$ (e ad ogni passo successivo) dato che tali formule vengono ripetute nella premessa⁷;
2. se un'istanza di una regola non-logica è applicabile a una foglia ottenuta al passo m , allora essa rimarrà applicabile su tale ramo ad ogni passo successivo dato che le formule principali vengono ripetute nelle premesse delle regole non-logiche (le regole *Rif* e *Ser* non hanno formule principali e, dunque, tali regole sono sempre applicabili).

Possiamo però mostrare, almeno in alcuni casi, che la procedura di costruzione di un L-albero può essere trasformata in una procedura di decisione per la derivabilità nella logica L. Ovvero possiamo modificare la procedura in maniera tale che essa termini necessariamente in un numero finito di passi. Per fare questo, mostreremo che se un sequente è derivabile, allora esiste una sua derivazione *minimale*, ovvero una derivazione di profondità minima in cui nessuna regola è applicata più di una volta alle stesse formule principali. Questo comporta che, per alcune logiche, sia possibile imporre nella costruzione di un L-albero che un'istanza di una regola sia applicabile a un ramo al passo m solo se essa non sia già stata applicata su quel ramo a un passo precedente.

DEFINIZIONE 9.23 (Derivazione minimale) Se un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è derivabile in G3.L, una sua *derivazione minimale* (in tale calcolo) è una sua derivazione di profondità minore o uguale ad ogni altra sua G3.L-derivazione.

Una proprietà fondamentale delle derivazioni minimali è la seguente.

LEMMA 9.24 (Proprietà del sottotermine) *Ogni etichetta che occorre in una derivazione minimale di un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in G3.L è un'etichetta che occorre in $\Gamma \Rightarrow \Delta$ oppure è l'eigenvariable di una regola usata in tale derivazione.*

Osservazione 9 Che valga la proprietà del sottotermine è banale per i calcoli che non contengono le regole *Rif* e *Ser*. Per quelli che le con-

7. Analogamente per $R\Diamond$, ma stiamo considerando il frammento del linguaggio contenente solo \perp , \rightarrow e \Box .

tengono, invece, dipende dal fatto che è possibile eliminare le istanze di tali regole con formula attiva, rispettivamente, wRw o wRw' se w è un'etichetta che né occorre nella conclusione di tale derivazione né è l'*eigenvariable* di qualche regola applicata in tale derivazione.

Dimostriamo ora che è possibile ottenere una procedura di decisione per G3.K. Per fare questo iniziamo mostrando che, se in un ramo di una derivazione la regola $L\Box$ è applicata due volte alle stesse formule principali, allora possiamo rendere queste due applicazioni di $L\Box$ consecutive. Questo, unito alla pp-ammissibilità della contrazione, ci permetterà di mostrare che in una G3.K-derivazione minimale $L\Box$ non viene mai applicata più di una volta con le stesse formule principali. Da questo seguirà immediatamente che possiamo dare una procedura di decisione per G3.K.

LEMMA 9.25 *È possibile permutare verso il basso un'istanza della regola $L\Box$ avente come atomo relazionale principale wRv rispetto ad ogni istanza delle regole $L \rightarrow$, $R \rightarrow$ e $L\Box$ e rispetto ad ogni istanza di $R\Box$ in cui l'atomo relazionale wRv non sia una formula attiva.*

Dimostrazione La permutazione è banale per le regole $R \rightarrow$, $L\Box$ e $R\Box$ (nel caso in cui la formula relazionale principale nell'istanza di $L\Box$ non sia la formula attiva dell'istanza di $R\Box$ in questione). Ad esempio, per $R\Box$ abbiamo:

$$\frac{v : A, w_2Ru, w_1Rv, w_1 : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : B}{\frac{w_2Ru, w_1Rv, w_1 : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : B}{w_1Rv, w_1 : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_2 : \Box B}} L\Box R\Box$$

e possiamo invertire l'ordine di applicazione di tali regole ottenendo:

$$\frac{w_2Ru, v : A, w_1Rv, w_1 : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : B}{\frac{v : A, w_1Rv, w_1 : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_2 : \Box B}{w_1Rv, w_1 : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_2 : \Box B}} R\Box L\Box$$

Nel caso della regola $L \rightarrow$ la permutazione è possibile grazie alla pp-ammissibilità della regola di indebolimento LW . Ad esempio, se abbiamo:

$$\frac{v : A, wRv, w : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : B}{\frac{wRv, w : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : B}{u : B \rightarrow C, wRv, w : \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}} L\Box L\rightarrow$$

prima di permutare le regole dobbiamo applicare LW alla premessa destra della derivazione originale per rendere uguali i contesti, come mostrato dalla seguente derivazione:

$$\frac{v : A, wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u : B \quad \frac{u : C, v : A, wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{v : A, u : B \rightarrow C, wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \underset{L\rightarrow}{LW}}{u : B \rightarrow C, wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \underset{L\square}{L\square}$$

COROLLARIO 9.26 *Se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è G3.K-derivabile, allora in una sua derivazione minimale ciascuna coppia di formule della forma wRv e $w : \square A$ è principale in un'unica istanza di $L\square$.*

Dimostrazione Supponiamo che $w : \square A$ e wRv siano le formule principali di due istanze differenti di $L\square$ in una G3.K-derivazione minimale di $\Pi \Rightarrow \Delta$ ovvero che una porzione della derivazione sia:

$$\frac{\begin{array}{c} wRv, w : \square A, v : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \\ \vdots \\ wRv, w : \square A, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \end{array}}{wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \underset{L\square}{L\square}$$

Per il Lemma 9.25 possiamo permutare verso il basso l'istanza superiore di $L\square$ fino a renderla immediatamente successiva all'altra istanza di $L\square$ in considerazione. Otteniamo in questo modo la seguente porzione di derivazione avente la stessa profondità:

$$\frac{\begin{array}{c} wRv, w : \square A, v : A, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \\ \vdots \\ v : A, v : A, wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta \\ v : A, wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{wRv, w : \square A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \underset{L\square}{L\square} \quad (\dagger)$$

A questo punto sarebbe possibile rimpiazzare l'istanza superiore di $L\square$ (quella segnata con \dagger) con un'istanza della regola di contrazione a sinistra LC ottenendo così una derivazione di profondità minore del sequente $\Pi \Rightarrow \Delta$, abbiamo infatti mostrato che la regola LC è pp-ammissibile nel Teorema 9.19. Ma questo è in contraddizione con l'ipotesi che la derivazione originale fosse minimale. Dunque in una derivazione minimale la regola $L\square$ non può mai essere applicata più di una volta con le stesse formule principali. \square

TEOREMA 9.27 *Il calcolo etichettato G3.K è decidibile.*

Dimostrazione È sufficiente mostrare come sia possibile rendere finita la procedura di costruzione di un K-albero imponendo la seguente restrizione nella procedura data nella Definizione 9.12:

- A ciascun passo n della procedura di costruzione di un K-albero un'istanza della regola $L\Box$ con formule principali $w : \Box A$ e $w Rv$ è applicabile solo se in nessun passo $m < n$ è stata applicata un'istanza di tale regola avente le stesse formule principali.

Che tale restrizione non interferisca con la dimostrazione del teorema di completezza segue dal lemma precedente. Infatti sappiamo che se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è derivabile, allora esso ha una derivazione minimale in cui la regola $L\Box$ non è mai applicata più di una volta con le stesse formule principali.

Che tale restrizione assicuri che nella procedura di costruzione di un K-albero non sia possibile generare un albero con rami infiniti segue dalle seguenti osservazioni:

- Le regole $L \rightarrow$, $R \rightarrow$ e $R\Box$, se lette dal basso verso l'alto, generano formule attive di lunghezza strettamente minore rispetto alla formula principale su cui lavorano.
- La regola $L\Box$ (oltre a generare una formula attiva di lunghezza inferiore) riscrive la formula principale $\Box A$. Però essa è principale un'unica volta rispetto a ciascun atomo relazionale $w Rv_i$ e il numero di tali atomi è limitato dal numero (finito) di atomi relazionali $w Rv_i$ che occorrono nella radice dell'albero e dal numero (finito) di atomi relazionali introdotti nel ramo da istanze della regola $R\Box$. Dunque, $w : \Box A$ è principale in un numero finito di istanze di $L\Box$.

Possiamo perciò concludere che la procedura di costruzione di un K-albero in un numero finito di passi genera o una derivazione o un contromodello finito per il sequente alla sua radice. \square

Passiamo ora a mostrare la decidibilità dei calcoli G3.T, G3.B e G3.D.

LEMMA 9.28 *È possibile permutare verso il basso un'istanza della regola $L\Box$ avente come atomo relazionale principale $w Rv$ rispetto a ogni istanza delle regole non-logiche Rif, Ser e Sim in cui l'atomo relazionale $w Rv$ non sia una formula attiva.*

Dimostrazione La dimostrazione è analoga a quella per la permutazione di $L\Box$ con $R\Box$ nel Lemma 9.25. \square

COROLLARIO 9.29 *Se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è derivabile in una delle estensioni di G3.K tramite le regole Rif, Ser e Sim, allora in una sua derivazione minimale ciascuna coppia di formule della forma wRv e $w : \Box A$ è principale in un'unica istanza di $L\Box$.*

Dimostrazione La dimostrazione è analoga a quella del Corollario 9.26: si fa vedere che se così non fosse, sarebbe possibile rendere le due istanze di $L\Box$ consecutive e rimpiazzare una delle due con un'istanza della regola di contrazione LC. Ma questo genererebbe una derivazione più corta, contro l'ipotesi che la derivazione originale fosse minimale. \square

LEMMA 9.30 *È possibile permutare verso il basso un'istanza di una qualsiasi tra le regole Rif, Ser e Sim rispetto a ciascuna regola che abbia una diversa formula attiva.*

Dimostrazione Vedi Lemma 9.28. \square

COROLLARIO 9.31 *Se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è derivabile in una delle estensioni di G3.K tramite le regolele regole Rif, Ser e Sim, allora in una sua derivazione minimale ciascun atomo relazionale è attivo in al più una istanza di una delle regole Rif, Ser e Sim.*

Dimostrazione Vedi Corollario 9.29. \square

TEOREMA 9.32 *I calcoli etichettati che estendono G3K tramite le regole Rif, Ser e Sim sono decidibili.*

Dimostrazione Come fatto nella dimostrazione del Teorema 9.27, mostriamo come rendere finita la procedura di costruzione di un L-albero. Per fare questo aggiungiamo le due seguenti restrizioni nella procedura data:

1. A ciascun passo n della procedura un'istanza della regola $L\Box$ con formule principali $w : \Box A$ e wRv è applicabile solo se in nessun passo $m < n$ è stata applicata un'istanza di tale regola avente le stesse formule principali.
2. A ciascun passo n della procedura un'istanza di una delle regole Rif, Ser e Sim è applicabile solo se la formula attiva di tale istanza non occorre già nella foglia in esame.

È immediato vedere che queste restrizioni non interferiscono con la dimostrazione del teorema di completezza (dati i Corollari 9.29 e 9.31).

Allo stesso tempo è facile vedere che, grazie a tali restrizioni, la procedura di costruzione di un L-albero termina in un numero finito di passi. Infatti, esse assicurano che al più un numero finito di istanze delle regole $L\Box$, Rif , Ser e Sim sia applicato dal basso verso l'alto. \square

Osservazione 10 Abbiamo presentato alcuni dei risultati di decidibilità per i calcoli etichettati presentati in Negri, von Plato (2011). Abbiamo considerato solo i casi più semplici, ovvero quelli in cui sia possibile direttamente rendere finita la procedura di costruzione di un L-albero. Non abbiamo considerato i casi di decidibilità in cui occorre, ad esempio, la regola *Trans* poiché essa assieme a $R\Box$ potrebbe generare catene infinite di nuove etichette rispetto alle quali sia applicabile la regola $L\Box$. Per questo problema e per la sua soluzione rimandiamo il lettore a Negri, von Plato (2011, pp. 208-9).

9.8

Identità e proprietà inesprimibili

9.8.1. IDENTITÀ

Alcuni dei risultati di corrispondenza presentati nel CAP. 2 fanno uso del predicato di identità tra mondi. Facciamo ora vedere come sia possibile estendere il linguaggio etichettato al fine di ottenere calcoli etichettati per logiche modali, quali PF, F, Triv e 3, che corrispondono a proprietà semantiche in cui occorre il predicato di identità.

Innanzitutto si estende il linguaggio etichettato aggiungendo atomi di identità tra etichette della forma:

$$w = v$$

e si impone che tali atomi possano occorrere nell'antecedente, ma non nel succedente, di un sequente.

Bisogna poi introdurre delle regole non-logiche che impongano che $=$ sia un predicato di identità tra mondi. Tali regole sono riportate qui di seguito:

$$\frac{w = w, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ } RifId$$

$$\frac{(u_1 = u_2)[v/u_i], w = v, (u_1 = u_2)[w/u_i], \Gamma \Rightarrow \Delta}{w = v, (u_1 = u_2)[w/u_i], \Gamma \Rightarrow \Delta} RepId$$

$$\frac{(u_1 R u_2)[v/u_i], w = v, (u_1 R u_2)[w/u_i], \Gamma \Rightarrow \Delta}{w = v, (u_1 R u_2)[w/u_i], \Gamma \Rightarrow \Delta} RepRel$$

$$\frac{v : p, w = v, w : p, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w = v, w : p, \Gamma \Rightarrow \Delta} RepAt$$

Mostriamo subito che le regole *RifId* e *RepId* rendono = una relazione di equivalenza (tra etichette) nei calcoli etichettati. Per fare questo, assumiamo di avere sequenti iniziali la cui formula principale sia un atomo di identità tra etichette e mostriamo che = è una relazione riflessiva, transitiva e simmetrica.

$$1. \vdash \Rightarrow w = w$$

$$\frac{w = w \Rightarrow w = w}{\Rightarrow w = w} RifId$$

$$2. \vdash \Rightarrow w = v \wedge v = u \rightarrow w = u$$

$$\frac{\begin{array}{c} (w = w_1)[u/w_1], (w = w_1)[v/w_1], v = u \Rightarrow w = u \\ \hline (w = w_1)[v/w_1], v = u \Rightarrow w = u \end{array}}{(w = w_1)[v/w_1] \wedge v = u \Rightarrow w = u} RepId$$

$$\frac{(w = w_1)[v/w_1] \wedge v = u \Rightarrow w = u}{\Rightarrow (w = w_1)[v/w_1] \wedge v = u \rightarrow w = u} L\wedge$$

$$\frac{}{R\rightarrow}$$

$$3. \vdash \Rightarrow w = v \rightarrow v = w$$

$$\frac{\begin{array}{c} (w_1 = w)[v/w_1], (w_1 = w)[w/w_1], w = v \Rightarrow v = w \\ \hline (w_1 = w)[w/w_1], w = v \Rightarrow v = w \end{array}}{\frac{\frac{w = v \Rightarrow v = w}{\Rightarrow w = v \rightarrow v = w} RifId}{\Rightarrow w = v \rightarrow v = w} R\rightarrow} RepId$$

Inoltre è possibile dimostrare che la regola di rimpiazzamento per formule etichettate di lunghezza arbitraria è ammissibile:

$$\frac{v : A, w = v, w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w = v, w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta} Rep$$

A questo punto possiamo introdurre i seguenti calcoli etichettati:

- Il calcolo G3.PF è ottenuto estendendo G3.K con la seguente regola:

$$\frac{v = u, w R v, w R u, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w R v, w R u, \Gamma \Rightarrow \Delta} FunPar$$

- Il calcolo G3.F è ottenuto estendendo G3.K con le regole *Ser* e *FunPar*.
- Il calcolo G3.Triv è ottenuto estendendo G3.K con le regole *Rif* e *FunPar*.
- Il calcolo G3.K3 è ottenuto estendendo G3.K con la seguente regola:

$$\frac{vRu, wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad uRv, wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad v = u, wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ Connl}$$

Facciamo ora vedere che tali regole sono sufficienti a derivare gli assiomi corrispondenti.

- G3.PF $\vdash \Rightarrow w : \Diamond A \rightarrow \Box A$

$$\frac{\begin{array}{c} v : A, u = v, wRu, wRv, u : A \Rightarrow v : A \\ \hline u = v, wRu, wRv, u : A \Rightarrow v : A \end{array}}{wRu, wRv, u : A \Rightarrow v : A} \text{ Rep} \\ \frac{wRu, wRv, u : A \Rightarrow v : A}{\begin{array}{c} wRv, w : \Diamond A \Rightarrow v : A \\ \hline w : \Diamond A \Rightarrow w : \Box A \end{array}} \text{ FunPar} \\ \frac{w : \Diamond A \Rightarrow w : \Box A}{\begin{array}{c} w : \Diamond A \Rightarrow w : \Box A \\ \hline \Rightarrow w : \Diamond A \rightarrow \Box A \end{array}} \text{ R}\Box \\ \frac{w : \Diamond A \Rightarrow w : \Box A}{\Rightarrow w : \Diamond A \rightarrow \Box A} \text{ R}\rightarrow$$

- G3.F $\vdash \Rightarrow w : \Diamond A \leftrightarrow \Box A$ Esercizio.
- G3.Triv $\vdash \Rightarrow w : \Box A \leftrightarrow A$

$$\frac{\begin{array}{c} v : A, w = v, wRw, wRv, w : A \Rightarrow v : A \\ \hline w = v, wRw, wRv, w : A \Rightarrow v : A \end{array}}{wRw, wRv, w : A \Rightarrow v : A} \text{ Rep} \\ \frac{w : A, wRw, w : \Box A \Rightarrow w : A}{\begin{array}{c} wRw, w : \Box A \Rightarrow w : A \\ \hline w : \Box A \Rightarrow w : A \end{array}} \text{ FunPar} \\ \frac{\begin{array}{c} wRw, w : \Box A \Rightarrow w : A \\ \hline w : \Box A \Rightarrow w : A \end{array}}{\begin{array}{c} w : \Box A \Rightarrow w : A \\ \hline \Rightarrow w : \Box A \rightarrow A \end{array}} \text{ Rif} \\ \frac{\begin{array}{c} w : \Box A \Rightarrow w : A \\ \hline \Rightarrow w : \Box A \rightarrow A \end{array}}{\begin{array}{c} w : \Box A \Rightarrow w : A \\ \hline \Rightarrow w : A \rightarrow \Box A \end{array}} \text{ R}\rightarrow \\ \frac{\begin{array}{c} w : \Box A \Rightarrow w : A \\ \hline \Rightarrow w : A \rightarrow \Box A \end{array}}{\Rightarrow w : (\Box A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow \Box A)} \text{ R}\wedge$$

- G3.K3 $\vdash \Rightarrow w : \Box(A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee \Box(B \wedge \Box B \rightarrow A)$ Esercizio.

Osservazione 11 È immediato estendere i teoremi di validità e completezza presentati nel PAR. 9.5 ai calcoli con identità tra etichette. L'unica novità è che nella definizione del modello basato su un ramo L-saturo (cfr. Definizione 9.13), l'insieme \mathcal{W} sarà costituito non dall'insieme di tutte le etichette occorrenti nel ramo, ma dalle classi di identità di tutte le etichette w, v tali che $w = v$ occorre nel ramo considerato.

Anche i risultati di ammissibilità delle regole strutturali presentati nel PAR. 9.6 si estendono facilmente ai calcoli con identità tra etichette⁸.

9.8.2. PROPRIETÀ INESPRIMIBILI

Faremo ora vedere come sia possibile utilizzare i calcoli etichettati per mostrare che alcune proprietà della relazione di accessibilità non sono modalmente esprimibili. Per fare questo sarà sufficiente mostrare che la regola che esprime tali proprietà può essere aggiunta a G3.K senza rendere alcun nuovo sequente del tipo $\Rightarrow w : A$ derivabile⁹. In particolare considereremo la regola per l'*irriflessività* della relazione di accessibilità:

$$\overline{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ } Irref$$

e la regola per l'*intransitività*:

$$\overline{wRu, wRv, vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ } Intrans$$

e faremo vedere che entrambe le regole sono ammissibili in G3.K. Da questo segue immediatamente l'inesprimibilità modale delle proprietà corrispondenti.

LEMMA 9.33 *L'irriflessività non è esprimibile.*

Dimostrazione Assumiamo che $\Rightarrow w : A$ sia derivabile in G3.K + {Irref}. Gli atomi relazionali che occorrono in tale derivazione sono tutti atomi introdotti, dal basso verso l'alto, da un'istanza della regola $R\Box$. Dunque essi saranno del tipo w_1Rw_2 con $w_1 \neq w_2$ e, perciò, non è possibile che in tale derivazione sia applicata la regola Irref. Dunque la derivazione di $\Rightarrow w : A$ è una derivazione anche in G3.K. \square

LEMMA 9.34 *L'intransitività non è esprimibile.*

Dimostrazione Assumiamo che $\Rightarrow w : A$ sia derivabile in G3.K + {Intrans}. Gli atomi relazionali che occorrono in tale derivazione sono

8. Per dimostrare la pp-ammissibilità della contrazione non serve aggiungere l'istanza contratta delle regole *RepId*, *FunPar* e *ConnDeb* (ovvero il caso in cui si elimina una delle due formule principali identiche) dato che la sua conclusione si può ottenere direttamente dalla premessa (destra nel caso di *ConnDeb*) applicando la regola *RifId*.

9. Ovvero mostreremo che tali regole sono *conservative* rispetto alla derivabilità di formule etichettate.

tutti atomi introdotti, dal basso verso l'alto, da un'istanza della regola $R\Box$. Dunque non è possibile che, in uno stesso nodo, due di essi siano della forma vRw_i e uRw_i , dato che questo vorrebbe dire che in uno dei due casi è violata la restrizione sulle etichette della regola $R\Box$. Perciò, non è possibile che in tale derivazione sia applicata la regola *Intrans*; la derivazione di $\Rightarrow w : A$ è una G3.K-derivazione. \square

Bibliografia

- BLACKBURN P., DE RIKJE M., VENEMA Y. (2001), *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.
- BOOLOS G. (1993), *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge.
- CRESSWELL M. J. (1979), B Seg *Has the Finite Model Property*, in “Bulletin of the Section of Logic”, 8, pp. 164-70.
- ID. (1983), *The Completeness of KW and K1.1*, in “Logique et Analyse”, 102, pp. 123-7.
- ID. (1987), *Magari's Theorem Via the Recession Frame* in “Journal of Philosophical Logic”, 16, pp. 13-5.
- CHAGROV A., ZAKHARYASCHEV M. (1997), *Modal Logic*, Oxford University Press, Oxford.
- GABBAY D. M. (1976), *Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics*, Reidel, Dordrecht-Boston.
- GOLDBLATT R. (1980), *Diodoran Modality in Minkowski Spacetime*, in “*Studia Logica*”, 39, pp. 219-36.
- ID. (1992), *Logics of Time and Computation*, CSLI, Stanford (2nd ed.).
- ID. (1993), *Mathematics of Modality*, CSLI, Stanford.
- HUGHES G. H., CRESSWELL M. J. (1968), *An Introduction to Modal Logic*, Methuen, London.
- ID. (1984), *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London.
- ID. (1996), *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London.
- NEGRI S. (2005), *Proof Analysis in Modal Logic*, in “*Journal of Philosophical Logic*”, 34, pp. 507-44.
- NEGRI S., VON PLATO J. (2011), *Proof Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- RESCHER N., URQUHART A. (1971), *Temporal Logic*, Springer, Berlin.
- SEGERBERG K. (1971), *An Essay in Classical Modal Logic*, in “Filosofiska Studier utgivna av Filosofiska Foreningen och Filosofiska Institutionen vid Uppsala Universitet”, 13.
- SMORYŃSKI C. (1985), *Self-Reference and Modal Logic*, Springer, Berlin.

- SOLOVAY R. M. (1976), *Provability Interpretations of Modal Logic*, in “Israel Journal of Mathematics”, 25, pp. 287-304.
- TROESLSTRA A. S., SCHWICHTENBERG H. (2000), *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (2nd ed).
- URQUHART A. (1981), *Decidability and the Finite Model Property*, in “Journal of Philosophical Logic”, 40, pp. 367-70.

Indice analitico

- alfabeto, 23
aritmetica di Peano, 112
- back condition*, 46
- calcolo di sequenti
 G3.B, 155
 G3.D, 156
 G3.F, 186
 G3.K, 151
 G3.K2, 157
 G3.K3, 186
 G3.K4, 154
 G3.K5, 155
 G3.L, 158
 G3.PF, 185
 G3.T, 154
 G3.Triv, 186
 G3.Ver, 155
 G3.X, 156
- cesura, 175
chiusura
 riflessiva, 33
 transitiva, 33
- completezza, 73
 B, 82
 D, 80
 G3.L, 169, 178
 K, 80
 K4, 81
 K4.3, 83, 125, 138
 K4.3.D, 139
 K4.3.D.X, 125
 K4.3.D.Z, 139
- K4.3.W, 141
K4.3.Z, 142
K5, 85
KW, 109
mnkj-Lemmon, 86
S4, 82
S4.2, 82
S4.3, 84, 125, 143
S4.3.C_m, 146
S4.3.Dum, 143
S4.3.Grz, 146
S5, 85, 147
S5.Alt_n, 148
T, 80
Triv, 85
Ver, 86
X, 81
- conseguenza semantica, 27
contrazione, 173
corrispondenza, 37
 risultati di, 39
- decidibilità, 96, 178
derivabilità
 in G3.L, 151
 in L, 57
- diagramma, 117
 canonico, 136
 iniziale, 130
 punti base di, 130
- L-coerente, 119
L-saturo, 120
massimale, 120
ricco, 120

- supporto di, 118
- dimostrazione
 - in L , 53
- filtrazioni, 97
- formula, 23
 - attiva, 158
 - etichettata, 151
 - principale, 158
 - sottoformula di, 24
- forth condition*, 46
- g -conseguenza semantica, 90
- incompletezza, 88
- indebolimento, 170
- interpretazione, 26
- invertibilità, 172
- L -massimale, 75
- lemma
 - box-lemma, 78
 - del modello canonico, 78
 - di Lindenbaum, 76
 - diamond-lemma, 78
- logica
 - B , 59
 - D , 59
 - $G3.L$, 169, 178
 - K , 53, 80
 - $K4$, 59
 - $K4.3$, 59
 - $K4.3.D$, 139
 - $K4.3.D.X$, 125
 - $K4.3.D.Z$, 139
 - $K4.3.W$, 141
 - $K4.3.Z$, 142
 - $K5$, 85
 - KGH , 93
 - KVB , 92
 - KW , 59, 105
 - $mnkj$ -Lemmon, 86
 - $S4$, 59
 - $S4.2$, 59
 - $S4.3$, 59
 - $S4.3.C_m^o$, 146
 - $S4.3.D_{\text{um}}$, 143
- $S4.3.\text{Grz}$, 146
- $S5$, 59
- $S5.\text{Alt}_n$, 148
- T , 80
- Triv , 59
- Ver , 59
- X , 59
- canonica, 74
- caratterizzata, 73
- completa, 73
- consistente, 75
- decidibile, 95
- finitamente assiomatizzabile, 95
- fortemente completa, 74
- incompleta, 88
- inconsistente, 75
- modale normale, 32
- lunghezza
 - di una formula, 24
 - di una formula etichettata, 158
- massimale
 - insieme, 75
- modalità, 65
- modello, 26
 - \mathcal{F} -modello, 26
 - \mathcal{M} -realizzazione, 162
 - canonico, 77
 - da un ramo L -saturo, 168
 - filtrato, 98
- p -morfismo, 45
- profondità
 - di una $G3.L$ -derivazione, 158
- proprietà di \mathcal{R}
 - cecità, 37
 - connessione, 37
 - connessione debole, 37
 - convergenza, 37
 - convergenza debole, 37
 - densità debole, 37
 - euclidea, 37
 - funzionalità, 37
 - funzionalità parziale, 37
 - isolamento, 37
 - $mnkj$ -Lemmon, 37

- non esprimibile, 49, 187
- ordine dualmente ben fondato, 105
- riflessività, 37
- serialità, 37
- simmetria, 37
- transitività, 37
- regola
 - RK_{\rightarrow} , 56
 - RK_{\wedge} , 56
 - RK_{def_0} , 56
 - RM , 55
 - SE , 58
 - ammissibile in G3.L, 159
 - ammissibile in L, 55
 - di G3.K, 152
 - modus ponens, 29
 - necessitazione, 30
 - per l'identità tra etichette, 184
 - pp-ammissibile in G3.L, 159
 - sostituzione di etichette, 160
 - sostituzione uniforme, 30
- relazione di accessibilità, 25
- saturazione, 166
- schema
 - 2, 38
 - 3, 38
 - 4, 38
 - 5, 38
 - Alt_n , 148
 - B , 38
 - C_m^o , 146
 - D , 38
 - Dum , 63, 143
- F , 38
- Grz , 146
- K , 28
- KW , 105
- Lemmon*, 38
- MV , 43
- PF , 38
- T , 38
- Triv*, 38
- Ver , 38
- X , 38
- W , 105
- Z , 63, 139
- sequente, 151
- sostituzione uniforme, 24
- sottomodello generato, 44
- struttura
 - generale, 89
 - per L, 63
 - relazionale, 25
- teorema
 - di L, 53
 - di Solovay, 115
- universo, 25
- validità
 - di G3.L, 162
 - su una classe di strutture, 27
 - su una struttura, 27
 - teorema di, 63
- verità
 - in un modello, 27
 - in un mondo, 26