

SEMANTICA LOGICA CLASSICA

attribuire valore a variabili enunciative. Stabiliamo 1 funzione insieme Φ

$$I: \Phi \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{oppure} \quad I \subseteq \{\Phi\}$$

$\downarrow x \quad \downarrow e$

usceremo questa notaz.

Siamo in logico classico \Rightarrow ogni enunciata è necessariamente o VERO o FALSO

Def. $I \models A$ "A è vero rispetto a interpretazione I"

Def. $I \models p_i$ sse $p_i \in I \wedge I(p_i) = 1$

Def. $I \not\models \perp$

Def. $I \models \neg A$ sse $I \not\models A$

Def. $I \models A \wedge B$ sse $I \models A \wedge I \models B$

Def. $I \models A \vee B$ sse $I \models A \vee I \models B$

Def. $I \models A \Rightarrow B$ sse $I \not\models A \vee I \models B$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

TEOREMA: se $I(p_i) = I'(p_i)$ $\forall p_i \in A$

allora $I \models A$ sse $I' \models A$

dim: per induzione strutturale su A.

CASO p_i :

devo dimostrare $I \models p_i$ sse $I' \models p_i$

ovvero $I(p_i) = 1$ sse $I'(p_i) = 1$. ovvio

CASO \perp :

devo dimostrare $I \models \perp$ sse $I' \models \perp$. ovvio

CASO $\neg B$:

devo dimostrare $I \models \neg B$ sse $I' \models \neg B$

sse $I(\neg B) = 0$ sse $I'(\neg B) = 0$, ovvio

CASO $C \wedge B$:

devo dimostrare $I \models (C \wedge B)$ sse $I' \models (C \wedge B)$

sse $I(C \wedge B) = 1$ sse $I'(C \wedge B) = 1$

sse $I(C) = 1 \wedge I(B) = 1$ sse $I'(C) = 1 \wedge I'(B) = 1$
ovvio

CASO $B \vee C$

devo dimostrare $I \models (B \vee C)$ sse $I' \models (B \vee C)$

sse $I \models B \vee I \models C$ sse $I' \models B \vee I' \models C$.

ovvio.

CASO $B \rightarrow C$

devo dimostrare $I \models (B \rightarrow C)$ sse $I' \models (B \rightarrow C)$

sse $I \not\models B \vee I \models C$ sse $I' \not\models B \vee I' \models C$

ovvio.

ESI $\models A$ sse $\models \neg^{2^k} A$

Dimostrazione per induzione strutturale su K

CASO $K=0$

d.d. $\models A$ sse $\models A$ **OVVIO**

CASO $K=n+1 \quad \forall n \in N$

d.d. $\models A$ sse $\models \neg^{2(n+1)} A$

per induzione si che

$\models A$ sse $\models \neg^{2^n} A$

$\models \neg^{2(n+1)} A$ sse $\models \neg^{2n+2} A$ sse $\models \neg \neg (\neg^{2^n} A)$

sse $\models \neg (\neg^{2^n} A)$ sse $\models \neg^{2^n} A$ **OVVIO**

ESI

$\models (\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg (A \wedge B)$

1) $\models (\neg A \vee \neg B)$ sse $\models \neg A$ oppure $\models \neg B$

$\models A$ sse $\models A$
 $\models B$ sse $\models B$

2) $\models \neg (A \wedge B)$ sse $\models \neg A \wedge \models \neg B$ sse $\models \neg A$ e $\models \neg B$

Def. A è soddisfatta da I se $I \models A$

Def. A è NON soddisfatta da I se $I \not\models A$

Def. A è soddisfacibile se $\exists I. (I \models A)$

Def. A è valida se $\forall I. (I \models A)$ FA

Def. A è conseguenza logico di Γ dove $\Gamma \subseteq F_m \Phi$

sse $\forall I. (I \models \Gamma \text{ allora } I \models A)$ $\Gamma \models A$

TEOREMA di DEDUZIONE:

$\Gamma, A \models B$ sse $\Gamma \models A \rightarrow B$

dim.

\Rightarrow assumo $\Gamma, A \models B$ ovvero $I \models \Gamma, A$ allora $I \models B$

d.d. $I \models \Gamma \text{ allora } I \models A \rightarrow B$

$$I \models \Gamma \left\{ \begin{array}{l} I \models A \quad I \models A \rightarrow B \\ I \not\models A \quad I \models A \rightarrow B \end{array} \right.$$

\Leftarrow

assumo $\Gamma \models A \rightarrow B$ ovvero $\forall I. (I \models \Gamma \text{ allora } I \models A \rightarrow B)$
ovvero $\forall I. (I \models \Gamma \text{ allora } (I \not\models A \text{ oppure } I \models B))$

d.d. $\forall I. (I \models \Gamma, A \text{ allora } I \models B)$

$\forall I. (I \models \Gamma, A \text{ allora } I \models B) \text{ sse } \Gamma \models A \rightarrow B$

perché
non può
rendere falso A

ES] $\models (A \wedge B) \rightarrow A$

VIA DIRETTA: assumo antecedente e dimostro conseguente

Sia I t.c. $I \models A \wedge B$, mostro che $I \models A$

$I \models A \wedge B$ sse $I \models A$ e $I \models B$ **(ovvio)**

PER ASSURDO: assumo per assurdo $\exists I (I \not\models (A \wedge B) \rightarrow A)$
ovvero $I \not\models A \wedge B$ e $I \not\models A$

Ma $I \not\models A \wedge B$ sse $I \not\models A$ e $I \not\models B$ **(ASSURDO)**

TEOREMA: $\Gamma \models A$ sse $\Gamma, \neg A$ è insoddisfacibile

(\Rightarrow) $\forall I (I \models \Gamma \text{ allora } I \models A)$!antecedente ①
e
new conseg. ②

① $\exists B \in \Gamma$ t.c. $I \not\models B \rightsquigarrow \Gamma, \neg A$ è insoddisf. da I

② $I \not\models A \rightsquigarrow \Gamma, \neg A$ è insoddisf. da I

(\Leftarrow) $\forall I (I \not\models \Gamma, \neg A)$

d.d. $\Gamma \models A$ ovvero $\forall I (I \models \Gamma \text{ allora } I \models A)$

LOGICA MODALE PROPOZIZIONALE

Alfabeto: $\Phi = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ variabili enunciative

$\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond$ operatori

() simboli ausiliari

linguaggio definito così:

- 1) se $p_i \in \Phi$ allora $p_i \in Fm$
- 2) $\perp \in Fm$
- 3) se $A \in Fm$ allora $\neg A, \Box A, \Diamond A \in Fm$
- 4) se $A, B \in Fm$ allora $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in Fm$
- 5) nient'altro $\in Fm$

$$T \equiv \perp \rightarrow \perp \quad (A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Definire **lunghezza** formule

- $lg(p_i) = lg(\perp) = 0$
- $lg(\neg A) = lg(\Box A) = lg(\Diamond A) = lg(A) + 1$
- $lg(A \wedge B) = lg(A \vee B) = lg(A \rightarrow B) = lg(A) + lg(B) + 1$

Dimostrazione per induzione:

① BASE $P(\perp), P(p_i)$

② PASSO ASSUMO $P(A), P(B)$

MOSTRO $\begin{bmatrix} P(\neg A) \\ P(A \wedge B), P(A \cup B), P(A \rightarrow B) \\ P(\Box A), P(\Diamond A) \end{bmatrix}$

③ CONCLUDO

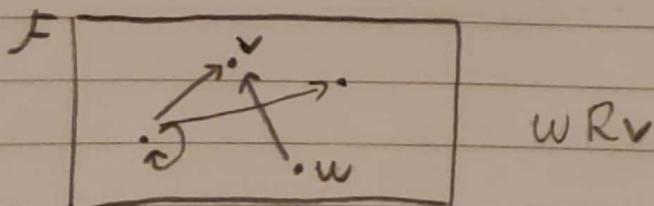
$\vdash A \in F_m (P(A))$

SEMANTICA di Kripke

STRUTTURA (RELAZIONALE) & FRAME

$$F = \langle W, R \rangle$$

- W è insieme NON vuoto di mondi/punti
- $R \subseteq W \times W$ è la RELAZIONE di ACCESSIBILITÀ
- usiamo w, v, u per i mondi
- wRv significa "v è accessibile da w"
o "w mette v"

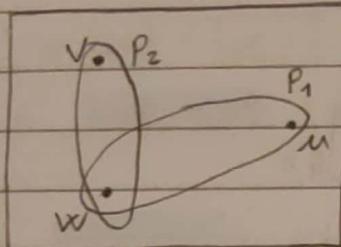


insieme
punti ↓ coppie punti
 ↓ interpretazione

Definiamo un MODELLO: $M = \langle W, R, I \rangle$

$$I: \Phi \rightarrow P(W) \quad \text{ovvero} \quad I(p_i) \subseteq W$$

$$\text{ovvero } I: W \rightarrow (V: \Phi \rightarrow \{0,1\})$$



M è basato su F se

$$M = \langle M, R, I \rangle \quad e \quad F = \langle W, R \rangle$$

$$V \equiv I$$

Definiamo VERITA' di A in un punto w di M

$$F_w^M A \quad (F_w A)$$

- $F_w p_i$ sse $w \in I(p_i)$

- $F_w \Box A$ sse $\forall v \in W (w R v \implies F_v A)$

- $\neg F_w A$

- $F_w \Diamond A$ sse

- $F_w \neg A$ sse $\neg F_w A$

- $\exists v \in W (w R v \wedge F_v A)$

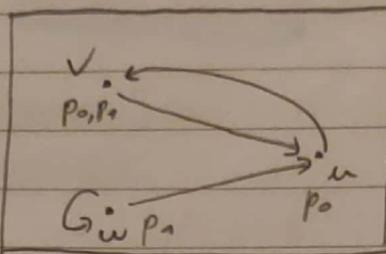
- $F_w A \wedge B$ sse $F_w A \wedge F_w B$

- $F_w A \vee B$ sse $F_w A \vee F_w B$

- $F_w A \rightarrow B$ sse $\neg F_w A \vee F_w B$

esempio:

$$F = \langle \{w, v, u\}, \{(w, w), (u, v), (v, u), (w, u)\} \rangle$$



$$I(p_0) = \{v, u\}$$

$$I(p_1) = \{w, v\}$$

$\models_w \Box p_0$ sse $\forall x \in W (w R_x \supset \models_x p_0)$
sse $\models_w p_0 \wedge \models_u p_0$ FALSO

$\models_v \Box p_0$ sse $\models_u p_0$ VERO

\nwarrow tutto ciò che vede v

$\models_u \Box \perp$ sse $\models_v \perp$ FALSO //

\searrow vero solo se u non vede nulla

VALIDITÀ

We insieme mondi
WE dove \uparrow di M

A è VERA in M ($F^M A$) sse A è vera in ogni $w \in M$

A è VALIDA in un frame F sse $\forall M$ basato su F ($F^M A$)

A è VALIDA ($\models A$) sse $\forall F (F \models A)$

A è VALIDA in una classe C di frame sse $\forall F \in C (F \models A)$

CONSEGUENZA LOGICA

$\Gamma \models_c A$ sse $\exists w \in M$ dove M è basato su $F \in C$,

$F_w \models \Gamma$ allora $F_w \models A$

Riassunto

VERITÀ $F_w^M A$, $F^M A$ vero in 1 o + mondi

VALIDITÀ $F \models A$ valida in 1 frame

$\models A$ " " classe di frame

$\models A$ " " tutti i frame

ESERCIZIO CASA

1) $\models \Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

2) $\models \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

Sia $F = \langle W, R \rangle$ e $M = \langle W, R, I \rangle$, $w \in W$

1) so che $\models_w \Box(A \wedge B)$ ovvero $\forall v \in W(w R v \text{ implica } F_v A \wedge B)$
d.d.

$F_w \Box A \wedge \Box B$ ovvero $F_w \Box A$ e $F_w \Box B$

{ Dimostro $F_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W(w R v \text{ implica } F_v A)$
ovvio

Dimostro $F_w \Box B$ " $\forall v \in W(w R v \text{ implica } F_v B)$
ovvio

ipotesi ci dà che $F_v A \wedge B$ ovvero $F_v A$ e $F_v B$ $\forall v \in W$

2) so che $\models_w \Box(A \rightarrow B)$ ovvero $\forall v \in W(w R v \text{ implica } F_v A \rightarrow B)$
d.d.

$F_w \Box A \rightarrow \Box B$

so che $\models_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W(w R v \text{ implica } F_v A)$
d.d.

$F_w \Box B$ ovvero $\forall v \in W(w R v \text{ implica } F_v B)$

per ipotesi so che $\forall v \in W(F_v A \rightarrow B)$
ovvero $\neg F_v A$ oppure $F_v B$

ma so che $\forall v \in W \neg F_v A$ quindi $F_v B$

es. in classe

$$\models \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$$

assumo $\models_w^M \Box A \wedge \Box B$ ovvero $\models_w^M \Box A$ e $\models_w^M \Box B$

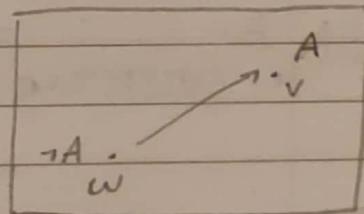
ovvero $\forall v \in W (w R v \text{ implica } \models_v^M A)$ e
 $\forall v \in W (w R v \text{ implica } \models_v^M B)$

d.d. $\models_w^M \Box(A \wedge B)$ ovvero $\forall v \in W (w R v \text{ implica } \models_v^M A \wedge B)$

ovvero $\forall v \in W (\models_v^M A \wedge \models_v^M B)$ ovvio

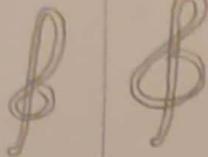
$\models \Box A \rightarrow A$ farne altri sul libro è utile

controesempio:



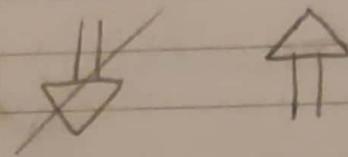
assumo $\models_w^M \Box A$ ovvero $\forall v \in W (w R v \text{ implica } \models_v^M A)$

quindi non possiamo affermare che è sempre
 vero in tutti i $v \in W$



MODUS PONENS

$$\frac{\models A \quad \models A \rightarrow B}{\models B}$$



$$\frac{\models_w A \quad \models_w A \rightarrow B}{\models_w B}$$

caso di 1 MODELLO
(tutti i mondi di 1 MODELLO)

$\models_w A$ e ($\models_w A$ oppure $\models_w B$)

$$\models_w B$$

non può essere $\models_w A$ e \models_w

$$\frac{\models^M A}{\models^M \Box A}$$

REGOLA di NECESSITAZIONE

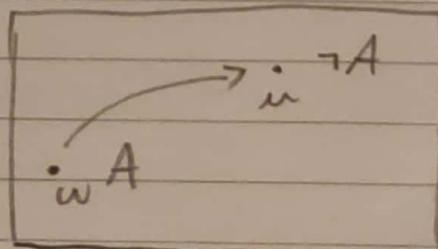
si preserva sul MODELLO

$\forall_v \in W (\models_v A)$

$\forall_v \in W (\models_v \Box A)$

NON si preserva su 1 mondo

$$\frac{\models_w^M A}{\models_w^M \Box A}$$

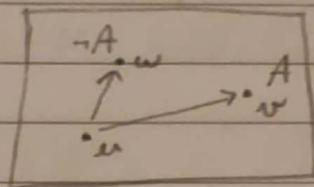


es. 1.2 pag 24 libro

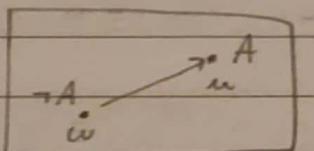
(1) $\models \Diamond T$

$\cdot w$

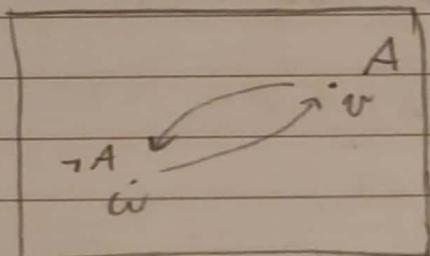
(2) $\models \Diamond A \rightarrow \Box A$



(3) $\models \Box A \rightarrow A$



(4) $\not\models \Box A \rightarrow \Box \Box A$



?? (5) $\not\models \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond B)$

$\cdot w$

?? (6) $\not\models \Box(\Box A \rightarrow B) \vee (\Box B \rightarrow A)$

(7) $\not\models \Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$

(8) $\not\models \Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

regola SOSTITUZIONE

$A[B/p]$ A con B al posto di p

CASI:

- $q[B/p] \equiv \begin{cases} q & \text{se } q \neq p \\ B & \text{se } q = p \end{cases}$

- $\perp[B/p] = \perp$

- $* \in \{\neg, \Box, \Diamond\}, *c[B/p] \equiv *(c[B/p])$

- $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}, (c \circ d)[B/p] \equiv c[B/p] \circ d[B/p]$

TR: la validità su \mathcal{F} (generica struttura) è chiusa sotto sostituzione uniforme

$$\frac{\mathcal{F} \models A}{\mathcal{F} \models A[B/p]}$$

NON vero in un modello: è possibile $M \models A$ e $M \not\models A[B/p]$

Assumiamo $M \models p$ ma $M \not\models \perp$

$$M \not\models p[\perp/p]$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$$

DIMOSTRAZIONE: PER CONTRAPPOSIZIONE
assumo $F \not\models A[B/p]$ mostro $F \not\models A$

$F^M_w A[B/p]$ dove $M = \langle W, R, I \rangle$

$$\Gamma_B = \{v \in t. \text{ c. } v \in W \text{ e } F_v B\}$$

$$M' = \langle W, R, I' \rangle \quad I'(q) = \begin{cases} I(q) & \text{se } q \neq p \\ \Gamma(B) & \text{se } q = p \end{cases}$$

$$\forall C \in F_m, \forall k \in W \quad F_k^M C[B/p] \text{ sse } F_k^{M'} C$$

Dimostrazione per induzione su C:

$$\text{CASO BASE: } F_k^M q = \begin{cases} q = p & F_k^M B \text{ sse } F_k^{M'} q \\ q \neq p & F_k^{M'} q \quad k \in I(q) \text{ sse } k \in I'(q) \end{cases}$$

$$\text{CASO 1: } F_k^M (D \wedge E)[B/p] \stackrel{?}{=} F_k^{M'} D \wedge E$$

sse

$$F_k^M D[B/p] \wedge F_k^M E[B/p]$$

sse

$$F_k^M D[B/p] \wedge F_k^M E[B/p]$$

sse

$$F_k^{M'} D \wedge F_k^{M'} E \quad (\text{per ip. ind.})$$

sse

$$F_k^{M'} D \wedge E$$

IDEM per \vee e \rightarrow

continua...

$\vdash_k^M (\Box D) [B/p] \text{ sse } \vdash_k^{M'} \Box D$

$\vdash_k^M \Box (D[B/p])$

$\vdash_k (kR\mu \rightarrow \vdash_k^{M'} D[B/p])$

$\vdash_k (kR\mu \rightarrow \vdash_k^{M'} D)$

$\vdash_k^{M'} \Box D$

IDEM nr \diamond qed

Definizione di LOGICA LOGICHE MODALI NORMALI

$\Gamma \subseteq Fm$

① TAUT $\in \Gamma$

② $K \in \Gamma$, $K := \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

③ Γ chiuso sotto MP $\frac{A \in \Gamma \quad A \rightarrow B \in \Gamma}{B \in \Gamma}$

④ Γ chiuso sotto regola necessitazione $\frac{A \in \Gamma}{\Box A \in \Gamma}$

⑤ Γ chiuso sotto sostituzione uniforme $\frac{A \in \Gamma}{A[B/\rho] \in \Gamma}$

ridondante

ASSIOMI : $\vdash \text{TAUT}$ $\vdash K$

REGOLE : $\frac{\vdash A \quad \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$ modus ponens

$\frac{\emptyset \vdash A}{\emptyset \vdash \Box A}$ necessitazione

dimostrazione

$$K := \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$$

assumo $\vdash_w \Box(A \rightarrow B)$ ovvero $\forall v \in W (w R v \text{ implica } \vdash_v^M A \rightarrow B)$

ovvero $\forall v \in W (wRv \text{ implica } F_v \neg A \vee B)$

ovvero $\forall v \in W (wRv \iff E_v^M \rightarrow A \wedge E_v^M B)$

d.d. $\models_w^m \Box A \rightarrow \Box B$ avremo $\models_w^m \Box A$ ovvero
 $\forall v \in W (w R v \text{ implica } \models_v^m A)$

quindi se $\forall v \in W$ $F_v^M A$ $F_v^M A \rightarrow B$

$F_v^m B$ — per MP

NOTAZIONE

$F \triangleright P$ F gode di P

Def. CORRISPONDENZA

$A \in Fm$ corrisponde a una proprietà P (di R)
sse

$$\forall F(F \models A \text{ sse } F \triangleright P)$$

\uparrow
 A è valida in F

$T := \Box A \rightarrow A$ corrisponde a RIFLESSIVITÀ

$$\forall F(F \models \Box A \rightarrow A \text{ sse } \forall w \in F (w R w))$$

C) assumo $F \not\models \Box A \rightarrow A$ e mostro $\forall w \in F (w R w)$

$$\begin{array}{l} \underline{\mathbb{F}_u \Box p \rightarrow p} \quad \text{I.t.c. } \mathbb{F}_u \Box p, I(p) = \{v \in W : u R v\} \\ \underline{\mathbb{F}_u p} \end{array}$$

quindi $u R u$

C) assumo $\forall w (w R w)$ e mostro $F \not\models \Box A \rightarrow A$
 $\mathbb{F}_u \Box A$ mostro $\mathbb{F}_u A$

$$\forall w (w R w \rightarrow \mathbb{F}_u A)$$

$$\underline{u R u \rightarrow \mathbb{F}_u A} \quad \underline{u R u}$$

$$\mathbb{F}_u A$$

per contrapposizione

C ASSUMO F NON riflessivo e MOSTRO $F \nvdash \Box A \rightarrow A$
ovvero $\exists u \exists v (F_u \Box p \rightarrow p)$

$\exists u (\neg u R u)$

$\neg (v R v) \quad I(p) = \{z \in W, v R z\}$

$F_u \Box p \quad \nvdash u p$

per assurdo assumo $\forall w (w R w)$

C $\vdash_u \Box A \quad \nvdash_u A$

$\overset{\omega}{\vdash} \Box A, \neg A \not\vdash A$

$D := \Box A \rightarrow \Diamond A$ corrisponde a SERIALITÀ
 $\forall w \exists u (w R u)$

$F \vdash \Box A \rightarrow \Diamond A \leftarrow \text{sse} \rightarrow$

C assumo $\vdash_w \Box p \rightarrow \Diamond p \quad I(p) = \{v \in W \text{ t.c. } w R v\}$

$\vdash_w \Box p \rightarrow \Diamond p \quad \vdash_w \Box p$

$\vdash_w \Diamond p \quad \text{ovvero } \exists u \in W (w R u \text{ e } \vdash_u p)$

quindi $\exists u \in W (w R u)$

C assumo $\vdash_w \vdash_u (w R u)$

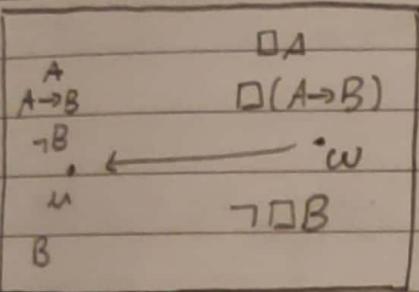
mostro $F \vdash_w \Box A \rightarrow \Diamond A$

assumo $\vdash_w \Box A$ e mostro $\vdash_w \Diamond A$

$\forall v \in W (w R v \rightarrow \vdash_v A)$

quindi $\exists u \in W (w R u \text{ e } \vdash_u A)$

$$K := \square(A \rightarrow B) \rightarrow (\square A \rightarrow \square B)$$



$$\vdash_w (\square(A \rightarrow B) \wedge \square A) \rightarrow \square B$$

ESERCIZIO CASA

4: $\square A \rightarrow \square \square A$, $\models \vdash 4$ sse $\forall x, y, z (x R y \wedge y R z \rightarrow x R z)$

assummo $\vdash_w \square p \rightarrow \square \square p$ $I(p) = \{v \in W \mid w R v\}$

$$\vdash_w \square p \rightarrow \square \square p \quad \vdash_w \square p$$

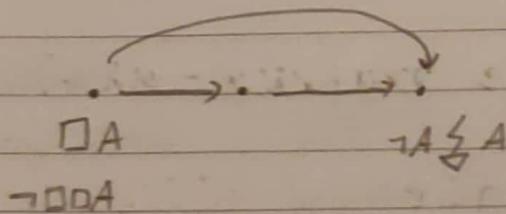
$\square \square p$ ovvero $\vdash_v \square p$ (ovvero $w R v$ implica $\vdash_v \square p$)

ovvero $\vdash_v \square p$ (ovvero $w R v$ implica $\forall x \in I(v). v R x$ implica $\vdash_x \square p$)

assummo $\forall x, y, z (x R y \wedge y R z \rightarrow x R z)$

mostro $\vdash_w \square A \rightarrow \square \square A$. Assummo $\vdash_w \square A$ e mostro $\vdash_w \square \square A$

C x ASSURDO



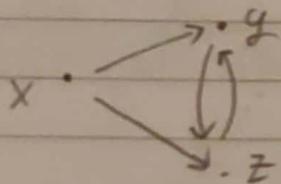
5: $\diamond A \rightarrow \square \diamond A$

prop. euclidea

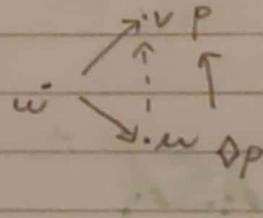
B: $A \rightarrow \square \diamond A$

prop. simmetrica

5: $\diamond A \rightarrow \square \diamond A$ sse $\vdash_{xyz} (xRy \wedge xRz \rightarrow yRz)$

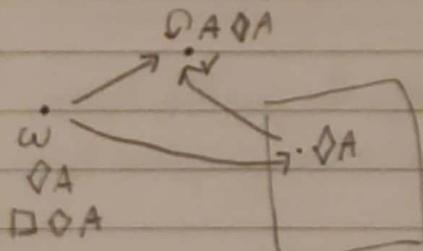


C assumo $\vdash \diamond p \rightarrow \square \diamond p$

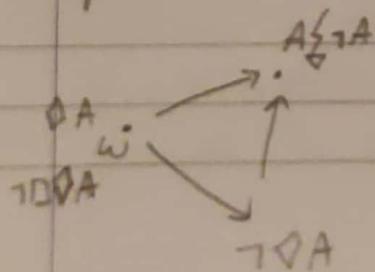


$\vdash_w \diamond p \quad I(p) = \{v\}$

$\vdash_w \square \diamond p$ per MP

C assumo $\vdash_{xyz} (xRy \wedge xRz \rightarrow yRz)$ e mostro $\vdash \diamond A \rightarrow \square \diamond A$ assumo $\vdash_w \diamond A$ 

insieme di altri eventuali mondi visti da w

C per ASSURDO. Assumo $\vdash_w \diamond A$ e $\vdash_w \square \diamond A$ 

B. L'IDEA DI PROBABILITÀ

B: $A \rightarrow \Box \Diamond A$ sse $\forall xy (xRy \supset yRx)$

assumo $\models p \rightarrow \Box \Diamond p$

p w
 $\Box \Diamond p$ v
 $\Diamond p$ v

dato che p è vero solo in w

$I(p) = \{w\}$

C assumo $\forall x, y (xRy \supset yRx)$

mostro $\models A \rightarrow \Box \Diamond A$

$\Box \Diamond A$
 A w
 $\Diamond A$ v

$F_w A$ e mostro $F_w \Box \Diamond A$

NOZIONI:

$$\Box^n A \quad \Box^0 A \equiv A \quad , \quad \Box^{n+1} A \equiv \Box(\Box^n A)$$

$$w R^n v \quad \text{sse } w=v$$

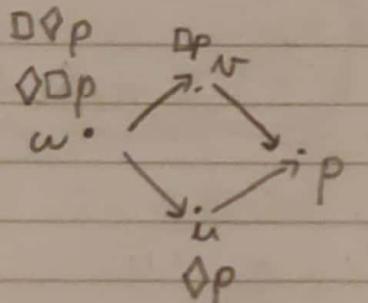
$$w R^{n+1} v \quad \text{sse } \exists x (w R^n x \wedge x R v)$$

idem per $\Diamond^n A$

CONVERGENZA DEBOLE

2: $\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$ sse $\forall x \forall z (x R y \wedge x R z \rightarrow \exists t (y R t \wedge z R t))$

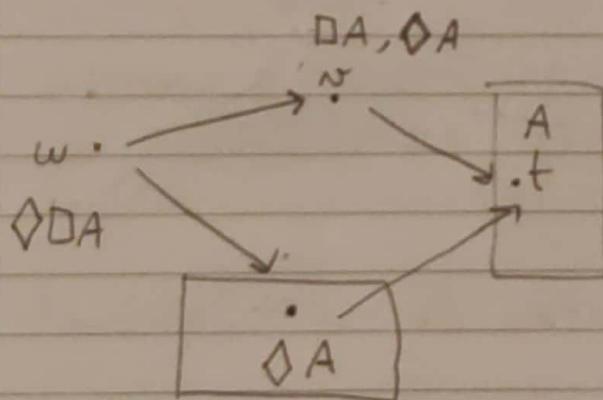
Assummo $\models_w \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ $\models_w \Diamond p$



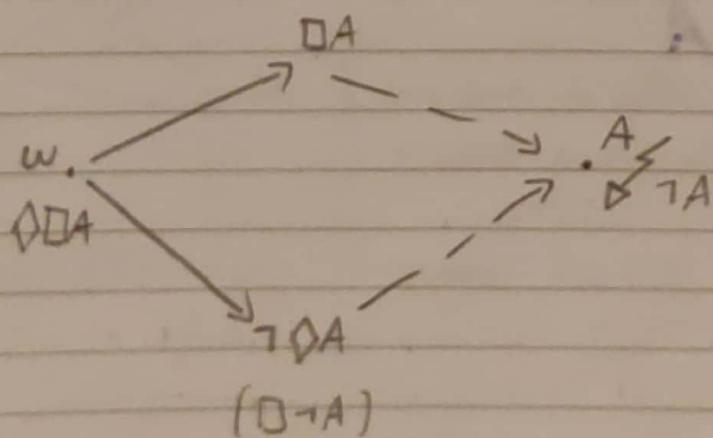
$$I(p) = \{x \in W \mid vRx\}$$

dato che p è vero solo
in ciò che vuole w

Assummo $\models_w \Diamond \Box A$ mostri $\Box \Diamond A$



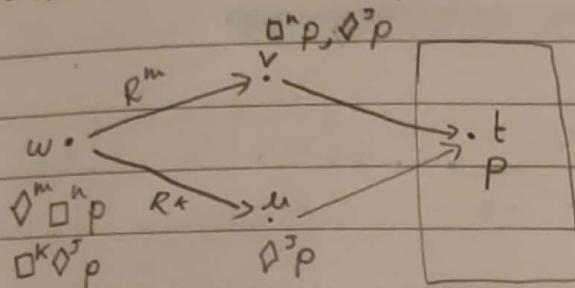
per ASSURDO $\models_w \Diamond \Box A$, $\not\models_w \Box \Diamond A$



Lemmon

$F \vdash \Diamond^m \Box^n A \rightarrow \Box^k \Diamond^j A$ sse $\vdash x, y, z (xR^m y \wedge xR^k z \rightarrow \exists t (yR^k t \wedge zR^j t))$

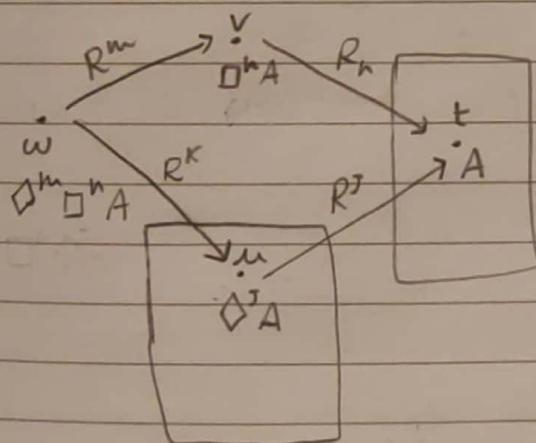
c) assumo $F_w \Diamond^m \Box^n p \rightarrow \Box^k \Diamond^j p$ e mostro \vdash



$$I(p) = \{z \in W \mid vR^k z\}$$

c) assumo $\vdash x, y, z (xR^m y \wedge xR^k z \rightarrow \exists t (yR^k t \wedge zR^j t))$
e mostro

$F_w \Diamond^m \Box^n A \rightarrow \Box^k \Diamond^j A$, assumo $F_w \Diamond^m \Box^n A$



Potremo usare Lemmon per dimostrare un bel po' di cose.

$$T: \Box A \rightarrow A \equiv \Diamond^\circ \Box^1 A \rightarrow \Box^\circ \Diamond^\circ A$$

$$4: \Box A \rightarrow \Box \Box A \equiv \Diamond^\circ \Box^1 A \rightarrow \Box^2 \Diamond^\circ A$$

$\vdash wv (wR^\circ v \wedge wR^1 v \rightarrow \exists t (vR^\circ t \wedge wR^1 t))$ ovvero

$\vdash wv (w=v \wedge wRv \rightarrow \exists t (v=t \wedge w=t))$ ovvero

$\vdash w (wRw)$ dato che $w=v=t=w$

FIGO!

Sottomodelli generati

$[wR^*v \text{ sse } \exists n (wR^n v) \text{ con } n \in \mathbb{N}^+ \text{ (stella di Kleene)}]$

Dato $M = \langle W, R, I \rangle$, il sottomodello generato da $x \in W$

$$M^x = \langle W^x, R^x, I^x \rangle \text{ dove } W^x = \{y \mid x R^* y\}$$

$$R^x = R \cap (W^x \times W^x)$$

$$I^x(p) = I(p) \cap W^x$$

Lemma sottomodello generato

$$\forall M, \forall x \in W^{\text{gen}}, \forall A \in F_M \models^M_x A \text{ sse } \models^{M^x}_x A$$

DIMOSTRAZIONE per induzione sulla struttura di A

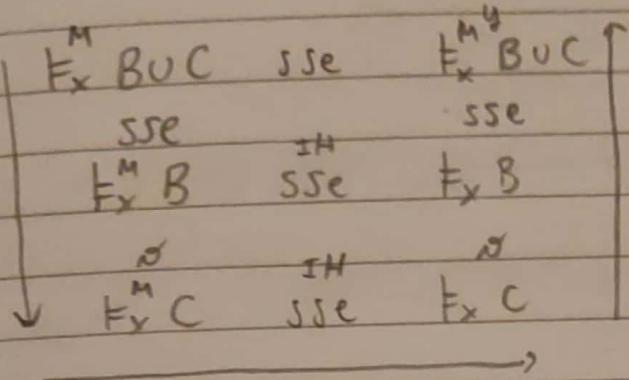
- Sia $A \equiv p$ mostro $\models^M_x p \text{ sse } \models^{M^x}_x p$
sse sse
 $x \in I(p) \text{ sse } x \in I^x(p)$

- Sia $A \equiv \perp$ mostro $\models^M_x \perp \text{ sse } \models^{M^x}_x \perp$

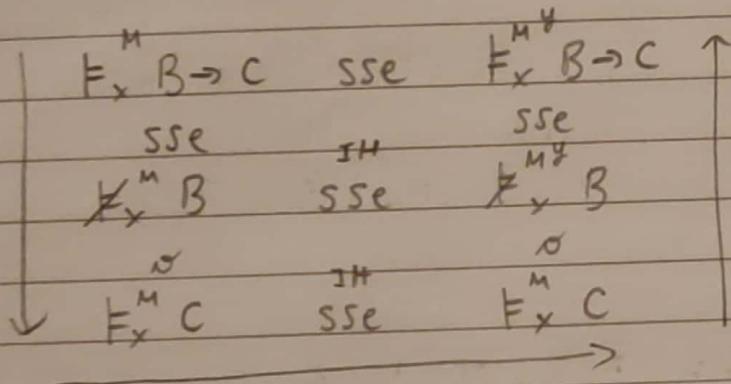
- Sia $A \equiv B \wedge C$ mostro $\models^M_x B \wedge C \text{ sse } \models^{M^x}_x B \wedge C$
suppongo

$$\begin{array}{ccc} \models^M_x B \wedge C & \text{sse} & \models^{M^x}_x B \wedge C \\ \downarrow & \text{IH} & \uparrow \\ \models^M_x B & \text{sse} & \models^{M^x}_x B \\ \text{e} & & \text{e} \\ \models^M_x C & \text{sse} & \models^{M^x}_x C \end{array}$$

- Sia $A \equiv B \cup C$ mostro $\vdash_x^M B \cup C$ sse $\vdash_x^{M^y} B \cup C$
assumo



- Sia $A \equiv B \rightarrow C$ mostro $\vdash_x^M B \rightarrow C$ sse $\vdash_x^{M^y} B \rightarrow C$
assumo



- Sia $A \equiv \neg B$ mostro $\vdash_x^M \neg B$ sse $\vdash_x^{M^y} \neg B$

$$\vdash_x^M B \stackrel{\text{IH}}{\text{sse}} \vdash_x^{M^y} B \dots$$

- Sia $A \equiv \Box B$ assumo $\forall z \in W^y \vdash_z^M B$ sse $\vdash_z^{M^y} B$
d.d. $\vdash_x^M \Box B$ sse $\vdash_x^{M^y} \Box B$
 $(\forall z \in W(xRz \supset \vdash_z^M B))$ sse $(\forall z \in W(xRz \supset \vdash_z^{M^y} B))$

D) sia $z \in W^y$ t.c. xRz d.d. $\vdash_z^{M^y} B$
Visto che xRz , allora $\vdash_z^M B$. Quindi per IH $\vdash_z^M B$

C) sia $z \in W$ t.c. xRz d.d. $\vdash_z^M B$. Visto che xRz , quindi xR^*z .
Quindi, $z \in W^y$. Quindi dato che xR^*z (per ipotesi) $\vdash_z^{M^y} B$.
Quindi per IH $\vdash_z^{M^y} B$

• Sia $A \equiv \Diamond B$ $\Leftrightarrow \exists w \in W (\vdash_z^M B \text{ sse } \vdash_z^{w*} B)$ (IH)
d. d.

$$\vdash_x^M \Diamond B \text{ sse } \vdash_x^{M^y} \Diamond B$$

• assumo $\vdash_x^M \Diamond B$ ovvero $\exists w \in W (x R w \text{ e } \vdash_w^M B)$
mostro $\vdash_x^{M^y} \Diamond B$
so che $w \in W^y$ e $\vdash_w^M B$
per IH ho $\vdash_w^{M^y} B$

• assumo $\vdash_x^{M^y} \Diamond$ sse $\exists t \in W^y (\underbrace{x R^y t}_{\downarrow} \text{ e } \underbrace{\vdash_t^{M^y} B}_{\downarrow \text{IH}})$
 $\exists t \in W (\downarrow x R t \text{ e } \vdash_t^M B)$
sse
 $\vdash_x^M \Diamond B$

TR CONVERGENZA NON È ESPRIMIBILE

$\forall x, y \exists z (x R z \text{ e } y R z)$ \nexists formula modale per esprimere

DIM X ASSURDO

• $\exists A \in F_m$ t.c. $\forall F (F \models A \text{ sse } F \text{ è convergente})$

assumo $\exists A$ corrisponde a CONV

$$F = \begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \times & \bullet \\ \hline \end{array}$$

$F \not\models A$ quindi ho 2 casi

$$\begin{array}{l} \exists M^x, \vdash_x^{M^y} A \\ \exists M^y, \vdash_y^{M^x} A \end{array}$$

ma dimostriamo che entrambi i casi creano una contraddizione

$\not\models^M A \text{ sse } \not\models^M A$ \Leftrightarrow assurdo
 $F \models A \rightarrow \models^M A$ \leftarrow i con per entrambi i punti

TR CONNESSIONE NON È ESPRIMIBILE

$\#_{w,v} (w R v \text{ o } v R w \text{ o } w = v)$ dim. x assurdo
 $\exists A \in F_m \text{ t.c. } \#F(F \models A \text{ sse } F \models \text{convergente})$

$F =$		$F \models A$
	$\begin{array}{ c c } \hline ? & ? \\ \hline w & v \\ \hline \end{array}$	

$\not\models^w A \text{ sse } \not\models^w A$ \Leftrightarrow ASSURDO
 $F^w \models A \rightarrow \models^w A$

P-MORFISMO tra STRUTTURE

$$F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$$

$$F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$$

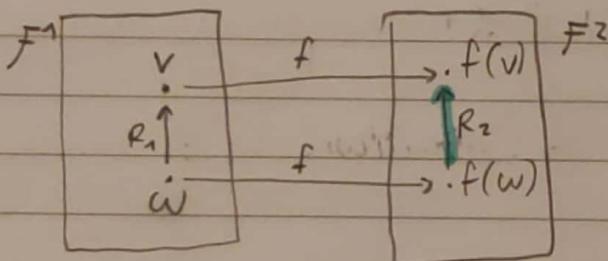
è una funzione $f: W_1 \rightarrow W_2$

$\forall x \in W_1 \exists ! y \in W_2, \langle x, y \rangle$

Condizioni per P-Morfismo:

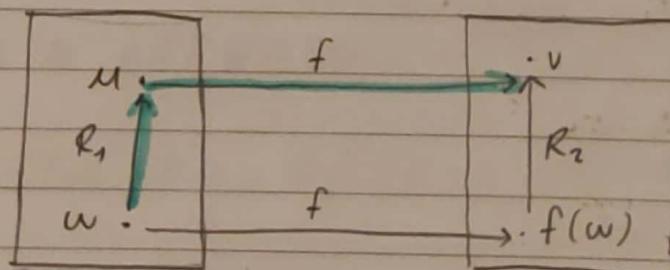
① FORTH CONDITION

$$\forall w, v \in W_1 (w R_1 v \Rightarrow f(w) R_2 f(v))$$



② BACK CONDITION

$$\forall w \in W_1, \forall v \in W_2 (f(w) R_2 v \Rightarrow \exists u \in W_1 (w R_1 u \text{ e } f(u) = v))$$



P-MORFISMO TRA MODELLI

M_1

M_2

$$f: W_1 \rightarrow W_2$$

soddisfa prime 2 condizioni
 e in più

③ $\forall w \in W_1 (w \in I_1(p) \iff f(w) \in I_2(p))$

LEMMA] Dato f : P-MORFISMO tra M_1 e M_2

$$\forall x \in W_1 (F_x^{M_1} A \iff F_{f(x)}^{M_2} A)$$

Dimostriamo per induzione strutturale su A .

- se $A \equiv p$: ovvio per ③
- se $A \equiv \perp$: ovvio (il \perp è falso ovunque)
- se $A \equiv B \wedge C$: d.d. $F_x^{M_1} B \wedge C \iff F_{f(x)}^{M_2} B \wedge C$

per IH su $\begin{cases} F_x^{M_1} B \iff F_{f(x)}^{M_2} B \\ F_x^{M_1} C \iff F_{f(x)}^{M_2} C \end{cases}$

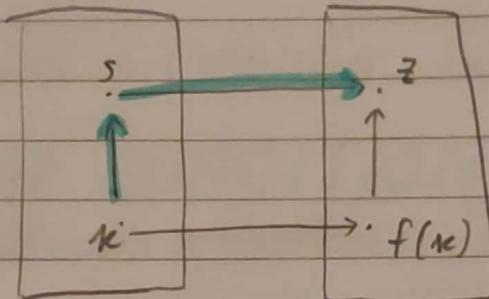
$$F_x^{M_1} B \wedge C \iff \left\{ \begin{array}{l} F_x^{M_1} B \iff F_{f(x)}^{M_2} B \\ \text{IH} \\ F_x^{M_1} C \iff F_{f(x)}^{M_2} C \end{array} \right\} \iff F_{f(x)}^{M_2} B \wedge C$$

idem per disgiunzione e implicazione

• se $A = \square B$

\Rightarrow assumo * $\models_{f_k}^{M_1} \square B$ sse $\forall y \in W_1 (\kappa R_1 y \supset F_y^{M_1} B)$

d.d. $\models_{f(\kappa)}^{M_2} \square B$, ovvero $\forall z \in W_2 (f(\kappa) R_2 z \supset F_z^{M_2} B)$



grazie a BACK CONDITION

so che $\models_s^{M_1} B$ sse $\models_{f(s)}^{M_2} B$

modo
alternativo

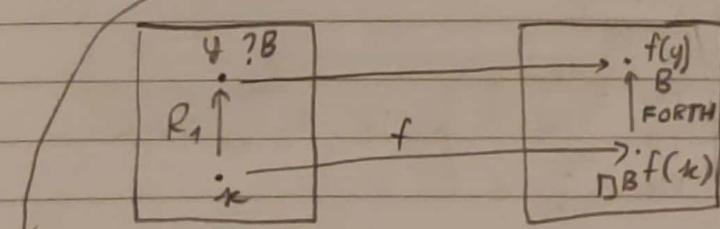
\Rightarrow d.d. $\models_{f(\kappa)}^{M_2} \square B$ sse $\forall z \in W_2 (f(x) R_2 z \supset F_z^{M_2} B)$

per BC e assunzione * lo dimostro

↓
creo fraca

↓ so che $\square B$ è vero in κ

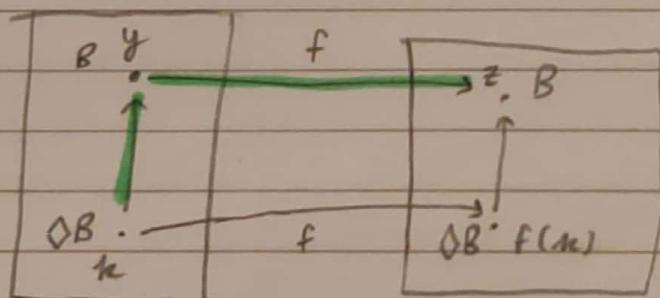
$\text{C} \Rightarrow$ assumo $\models_{f(\kappa)}^{M_2} \square B$, d.d. $\models_\kappa^{M_1} \square B$ ovvero $\forall y \in W_1 (\kappa R_1 y \supset F_y^{M_1} B)$



sse $\forall z \in W_2 (f(\kappa) R_2 z \supset F_z^{M_2} B)$

- se $A \equiv \Diamond B$
 - assumo $F_{\kappa}^{M_1} \Diamond B$ sse $\exists z \in W (\kappa R_1 z \wedge F_z^{M_1} B)$
- mostro $F_{f(\kappa)}^{M_2} \Diamond B$
-
- per assunzione ho la freccia da κ a z .
per Forth Condition ho le altre 3 frecce.
per IH ho $F_{f(z)}^{M_2} B$
quindi ho $F_{f(\kappa)}^{M_2} \Diamond B$ fine

- assumo $F_{f(\kappa)}^{M_2} \Diamond B$ sse $\exists z \in W (\kappa R_2 z \wedge F_z^{M_2} B)$
- mostro $F_{\kappa}^{M_1} \Diamond B$



per BC

per IH so che $F_y^{M_1} B$ dato che $z = f(y) \in F_z^{M_2} B$
quindi sapendo $\kappa R_1 y$ so che $F_{\kappa}^{M_1} \Diamond B$

RIPASSO FUNZIONI

$f: D \rightarrow C$

INIETTIVA se $\forall d_1, d_2 \in D \quad d_1 \neq d_2 \Rightarrow f(d_1) \neq f(d_2)$

SURIETTIVA se $\forall c \in C \exists d \in D \text{ t.c. } f(d) = c$

applicata ai p-morfismi:

$f: W_1 \rightarrow W_2$ se è suriettiva
 $\forall x \in W_2 \exists y \in W_1 (x = f(y))$

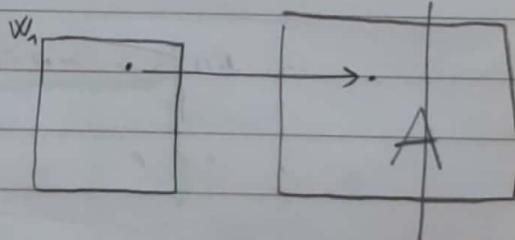
LEMMA P-MORF. SURIET, tra MODELLI

Se $f: W_1 \rightarrow W_2$ è p-morfismo suriettivo

ALLORA $F^{M_1} A$ sse $F^{M_2} A$

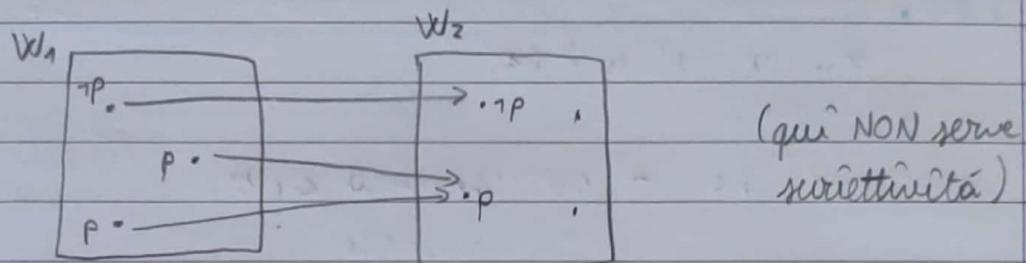
DIM] $F^{M_1} A \quad \forall x \in W_1 (F_x^{M_1} A) \quad \forall z \in W_1 (\vdash_z^{M_2} A \text{ sse } F_{f(z)}^{M_2} A)$

$W_2 = f(W_1) \quad \forall u \in W_2 (F_u^{M_2} A)$



Lemma] Dato f p -morfismo tra strutture F_1 e F_2

\exists p -morfismo tra modelli per ciascun F_2 -modello



$$I_1(p) = \{x \in W_1 : f(x) \in I_2(p)\}$$

Lemma P-MORFISMO SURIET. tra STRUTT.

Dato f p -morfismo suriettivo tra strutture F_1 e F_2

se $F_1 \models A$ allora $F_2 \models A$

DIM] \times contrapposizione

assumo $F_2 \not\models A$, quindi $\exists M_2 \in F_2 (\not\models^{M_2} A) \Rightarrow \exists x \in W_2 (\not\models_x^{M_2} A)$
quindi per il lemma precedente

$\exists M_1 \in F_1 (\not\models^{M_1} A)$ dato che è suriettivo so che $x = f(y)$
per qualche $y \in W_1$

quindi $\not\models_y^{M_1} A$

RICORDA:

$f: F_1 \rightarrow F_2$ è P-MORF. SUR. allora $F_1 \models A \supset F_2 \models A$

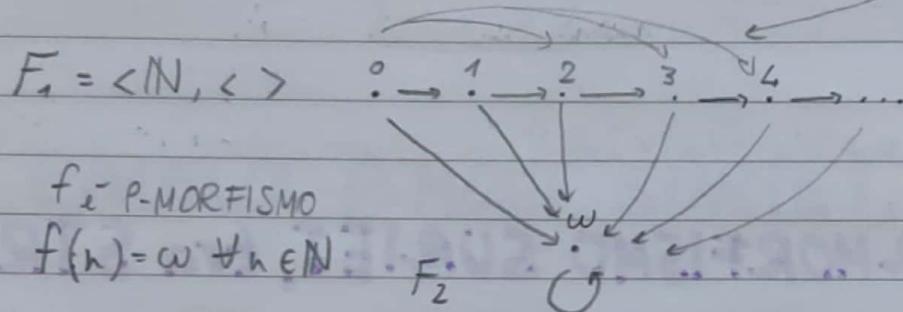
TR. IRRIFLESSIVITÀ è INESPRIMIBILE

$\nexists w \succ (wRw)$ (*)

per ASSURDO

assumo che A corrispondono a (*)

ci sarebbero anche queste frecce transitive,
MA non ci interessa



per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ c. $n < k \Rightarrow f(n) R f(k)$, vero $\forall n, k$ perché wRw

d.d. $\exists y \in \mathbb{N} \quad xRy \text{ e } w=f(y)$ (BACK CONDITION)

p-morfismo è vuiettivo perché F_2 ha solo 1 mondo

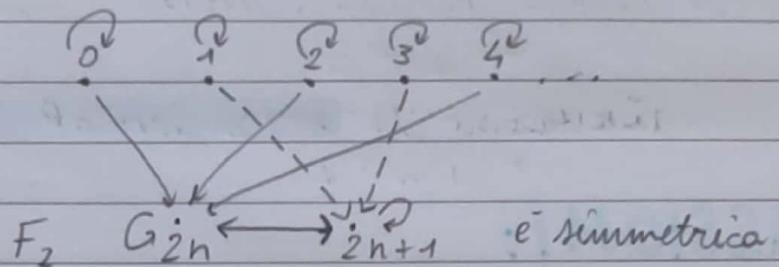
$F_1 \models A$ per lemma P-M vuiett. tra strutture

$F_2 \models A \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2 \not\models A \text{ dato che } wRw \end{array} \right.$

$\forall w, v (w R v \wedge v R w \Rightarrow w = v)$ (+)

TR. ANTISIMMETRIA NON È ESPRIMIBILE

$$F_1 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$$



assumo che A corrisponda a (+), $F_1 \models A$

$$F_2 \not\models A \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2 \not\models A \\ F_2 \not\models A \end{array} \right.$$

CONCLUSA PARTE SULLA SEMANTICA

CALCOLO ASSIOMATICO

Unica regola: MODUS PONENS

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

Axiomatizzzeremo la logica modale K

ASSIOMI:

- $\vdash A \vee T$: tutte le tautologie
- K: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
- Def. \Diamond : $\Diamond A \longleftrightarrow \neg \Box \neg A$

REGOLE:

• necessitazione: $\frac{\emptyset \vdash A}{\emptyset \vdash \Box A} N$

• modus ponens: $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} MP$

Introduciamo cos'è una derivazione

Def DERIVAZIONE

Una derivazione in L di A a partire da Γ ($\Gamma \vdash A$) è una successione FINITA di formule $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ t. c.:

- $\alpha_i \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{è assioma di } L \\ \cdot \in \Gamma \text{ (ipotesi)} \\ \cdot \text{è ottenuta da } \alpha_j \text{ (e } \alpha_k) \\ \text{per } j, k < i \text{ attraverso regole di } L \end{array} \right.$

$$\alpha_n = A$$

Def ($\vdash_L A$)

diciamo che A è un teorema se A è derivabile da \emptyset ($\emptyset \vdash_L A$, ovvero dimostrazione di A)

I teoremi fondamentali sono VALIDITÀ e COMPLETEZZA

$\Gamma \vdash_k A$ sse $\Gamma \vdash A$

VALIDITÀ



COMPLETENESSA



es. DERIVAZIONE $\vdash_k \Box T \quad (\vdash \Box(\perp \rightarrow \perp))$

$$\frac{\vdash \perp \rightarrow \perp}{\vdash \Box(\perp \rightarrow \perp)} \text{ N}$$

ripasso:

$$K := \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

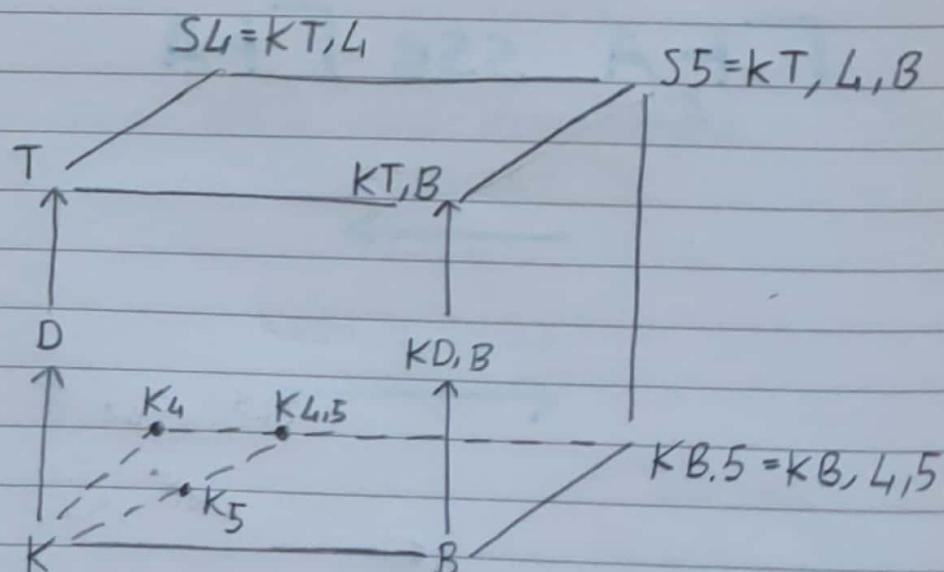
$$D := \Box A \rightarrow \Diamond A \quad (\text{logica D: logica K + axioma D})$$

$$T := \Box A \rightarrow A$$

$$4 := \Box A \rightarrow \Box \Box A$$

$$5 := \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$$

$$B := A \rightarrow \Box \Diamond A$$



CUBO DELLE LOGICHE ASSIOMATIZZABILI
CON $D, T, 4, 5, B$