06/02/23

SEMANTICA LOGICA CLASSICA

attribuire valore a $\underbrace{\text{variabili enunciative}}_{\text{insieme } \Phi}$. Stabiliamo 1 funzione

$I: \Phi \to \{0,1\}$ oppure $I \subseteq \{\Phi\}$

$\notin$ $\in$

useremo questa notaz.

Siamo in logica classica => ogni enunciato è necessariamente o VERO o FALSO

Def. $I \models A$ "A è vero rispetto a interpretazione I"

Def. $I \models p_i$ sse $p_i \in I$ o $I(p_i) = 1$

Def. $I \not\models \bot$

Def. $I \models \neg A$ sse $I \not\models A$

Def. $I \models A \cap B$ sse $I \models A \cap I \models B$

Def. $I \models A \cup B$ sse $I \models A \cup I \models B$

Def. $I \models A \Rightarrow B$ sse $I \not\models A \cup I \models B$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \cup B)$

Scansionato con CamScanner

TEOREMA: se $I(p_i) = I'(p_i) \quad \forall p_i \in A$

allora $I \models A$ sse $I' \models A$

dim: per induzione strutturale su A.

CASO p_i:

devo dimostrare $I \models p_i$ sse $I' \models p_i$

ovvero $I(p_i) = 1$ sse $I'(p_i) = 1$. OVVIO

CASO $\bot$:

devo dimostrare $I \models \bot$ sse $I' \models \bot$. OVVIO

CASO $\neg B$:

devo dimostrare $I \models \neg B$ sse $I' \models \neg B$

sse $\underset{I(B)=0}{I \not\models B}$ $\underset{\text{sse}}{\text{sse}}$ $\underset{I'(B)=0}{I' \not\models B}$. OVVIO

CASO $C \wedge B$:

devo dimostrare $I \models (C \wedge B)$ sse $I' \models (C \wedge B)$

sse $I(C \wedge B) = 1$ sse $I' \models (C \wedge B)$

sse $I(C) = 1 \cap I(B) = 1$ sse $I'(C) = 1 \cap I'(B) = 1$

OVVIO

CASO $B \cup C$

devo dimostrare $I \models (B \cup C)$ sse $I' \models (B \cup C)$

sse $I \models B \cup I \models C$ sse $I' \models B \cup I' \models C$.

OVVIO.

CASO $B \rightarrow C$

devo dimostrare $I \models (B \rightarrow C)$ sse $I' \models (B \rightarrow C)$

sse $I \not\models B \cup I \models C$ sse $I' \not\models B \cup I' \models C$

OVVIO.

ES $I \models A$ sse $I \models \neg^{2k} A$

Dimostrazione per induzione strutturale su K

CASO $K = 0$

d.d. $I \models A$ sse $I \models A$ OVVIO

CASO $K = n+1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

d.d. $I \models A$ sse $I \models \neg^{2(n+1)} A$

per induzione so che

$I \models A$ sse $I \models \neg^{2n} A$

$I \models \neg^{2(n+1)} A$ sse $I \models \neg^{2n+2} A$ sse $I \models \neg\neg(\neg^{2n}) A$

sse $I \not\models \neg(\neg^{2n}) A$ sse $I \models \neg^{2n} A$ OVVIO

ES

$\models (\neg A \cup \neg B) \longleftrightarrow \neg(A \cap B)$

1) $I \models (\neg A \cup \neg B)$ sse $I \models \neg A$ oppure $I \models \neg B$

$\left.\begin{array}{l} I \models A \text{ sse } I \not\models A \\ I \models B \text{ sse } I \not\models B \end{array}\right\}$

2) $I \models \neg(A \cap B)$ sse $I \not\models A \cap B$ sse $\overbrace{I \not\models A \text{ e } I \not\models B}$

Def. A è *soddisfatta* da I se $I \models A$

Def. A è *NON soddisfatta* da I se $I \not\models A$

Def. A è *soddisfacibile* se $\exists I.(I \models A)$

Def. A è *valida* se $\forall I.(I \models A)$ $\qquad \models A$

Def. A è *conseguenza logica* di Γ dove $\Gamma \subseteq Fm_\Phi$

sse $\forall I.(I \models \Gamma$ allora $I \models A)$ $\qquad \Gamma \models A$

TEOREMA di DEDUZIONE:

$\Gamma, A \models B$ sse $\Gamma \models A \to B$

dim.

=> assumo $\Gamma, A \models B$ ovvero $I \models \Gamma, A$ allora $\underbrace{I \models B}$

d.d. $\boxed{I \models \Gamma \text{ allora } I \models A \to B}$

$$I' \models \Gamma \begin{cases} I' \models A & I' \models A \to B \\ \underbrace{I' \not\models A} & I' \models A \to B \end{cases}$$

<=

assumo $\Gamma \models A \to B$ ovvero $\forall I\,(I \models F$ allora $I \models A \to B)$

ovvero $\forall I\,(I \models \Gamma$ allora $(I \not\models A$ oppure $I \models B))$

d.d. $\forall I.\boxed{(I \models \Gamma, A \text{ allora } I \models B)}$

$\forall I.(I' \models \Gamma, A$ allora $I' \models B)$ sse $\Gamma \models A \to B$

perché non può rendere falso A

08/02/23

ES $\models (A \cap B) \to A$

VIA DIRETTA: assumo antecedente e dimostro conseguente

Sia I t.c. $I \models A \cap B$, mostro che $I \models A$

$I \models A \cap B$ sse $I \models A$ e $I \models B$ OVVIO

PER ASSURDO: assumo per assurdo $\exists I (I \not\models (A \cap B) \to A)$

ovvero $I \models A \cap B$ e $I \not\models A$

Ma $I \models A \cap B$ sse $I \models A$ e $I \models B$ ASSURDO

TEOREMA: $\Gamma \models A$ sse $\Gamma, \neg A$ è insoddisfacibile

($\Rightarrow$) $\forall I (I \models \Gamma$ allora $I \models A)$!antecedente ① o vero conseg. ②

① $\exists B \in \Gamma$ t.c. $I \not\models B \leadsto \Gamma, \neg A$ è insoddisf. da I

② $I \models A \leadsto \Gamma, \neg A$ è insodd. da I

($\Leftarrow$) $\forall I (I \not\models \Gamma, \neg A)$

d.d. $\Gamma \models A$ ovvero $\forall I (I \models \Gamma$ allora $I \models A)$

09/02/23

LOGICA MODALE PROPOSIZIONALE

Alfabeto: $\Phi = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ variabili enunciative

$\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box, \Diamond$ operatori

$(\ )$ simboli ausiliari

Linguaggio definito così:

1) se $p_i \in \Phi$ allora $p_i \in Fm$
2) $\bot \in Fm$
3) se $A \in Fm$ allora $\neg A, \Box A, \Diamond A \in Fm$
4) se $A, B \in Fm$ allora $(A \cap B), (A \cup B), (A \rightarrow B) \in Fm$
5) nient'altro $\in Fm$

$\top \equiv \bot \rightarrow \bot$ $\qquad$ $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Definire **lunghezza** formule

- $lg(p_i) = lg(\bot) = 0$
- $lg(\neg A) = lg(\Box A) = lg(\Diamond A) = lg(A) + 1$
- $lg(A \cap B) = lg(A \cup B) = lg(A \rightarrow B) = lg(A) + lg(B) + 1$

Dimostrazione per induzione:

1. BASE $P(\bot)$, $P(p_i)$
2. PASSO ASSUMO $P(A)$, $P(B)$

   MOSTRO $\left[\begin{array}{l} P(\neg A) \\ P(A \wedge B), P(A \vee B), P(A \rightarrow B) \end{array}\right.$

   $P(\Box A)$, $P(\Diamond A)$
3. CONCLUDO

   $\forall A \in Fm\, (P(A))$

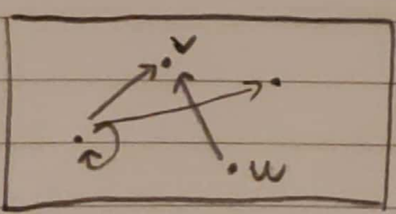
SEMANTICA di Kripke

STRUTTURA (RELAZIONALE) o FRAME

$\boxed{\mathcal{F} = \langle W, R \rangle}$

- W è insieme NON vuoto di mondi/punti
- $R \subseteq W \times W$ è la RELAZIONE di ACCESSIBILITÀ
- usiamo w v, u per i mondi
- wRv significa "v è accessibile da w" o "w vede v"

$\mathcal{F}$



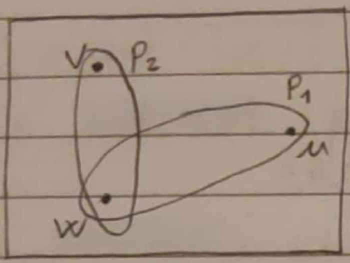
wRv

insieme punti ↓ — coppie punti ↓ — interpretazione ↙

Definiamo un **MODELLO** $M = \langle W, R, I \rangle$

$\boxed{I : \Phi \to \mathcal{P}(W)}$ ovvero $\boxed{I(p_i) \subseteq W}$

ovvero $I : W \to (V : \Phi \to \{0,1\})$



M è basato su F se

$$M = \langle M, R, I \rangle \quad e \quad F = \langle W, R \rangle$$

$V \equiv I$

Definiamo **VERITÀ** di A in un punto w di M

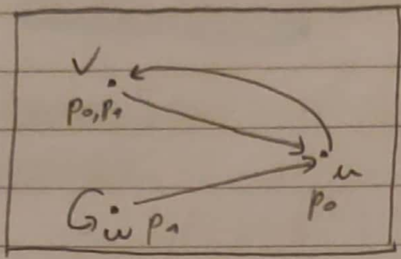
$$\models_w^M A \qquad (\models_w A)$$

- $\models_w p_i$ sse $w \in I(p_i)$
- $\not\models_w \perp$
- $\models_w \neg A$ sse $\not\models_w A$
- $\models_w A \cap B$ sse $\models_w A \cap \models_w B$
- $\models_w A \cup B$ sse $\models_w A \cup \models_w B$
- $\models_w A \to B$ sse $\not\models_w A \cup \models_w B$

- $\models_w \Box A$ sse $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A)$
- $\models_w \Diamond A$ sse $\exists v \in W (wRv$ e $\models_v A)$

esempio:

$F = \langle \{w, v, u\}, \{\langle w,w\rangle, \langle u,v\rangle, \langle v,u\rangle, \langle w,u\rangle\}\rangle$



$I(p_0) = \{v, u\}$

$I(p_1) = \{w, v\}$

$\models_w \Box p_0$ sse $\forall x \in W(wRx \supset \models_x p_0)$

sse $\cancel{\models_w p_0}$ e $\models_u p_0$ FALSO

$\models_v \Box p_0$ sse $\models_u p_0$ VERO

tutto ciò che vede v

$\models_u \Box \bot$ sse $\cancel{\models_v \bot}$ FALSO

vero solo se u non vede nulla

VALIDITÀ

W è insieme mondi di M
$w \in W$ dove

A è VERA in M ($\models^M A$) sse A è vera in ogni $w \in M$

A è VALIDA in un frame $\mathcal{F}$ sse $\forall M$ basato su $\mathcal{F}$ ($\models^M A$)

A è VALIDA ($\models A$) sse $\forall \mathcal{F} (\mathcal{F} \models A)$

A è VALIDA in una classe C di frame sse $\forall \mathcal{F} \in C (\mathcal{F} \models A)$

CONSEGUENZA LOGICA

$\boxed{\Gamma \models_C A}$ sse $\forall w \in M$ dove M è basato su $\mathcal{F} \in C$,

$\models^M_w \Gamma$ allora $\models^M_w A$

riepilogo

VERITÀ $\models^M_w A$, $\models^M A$ vero in 1 o + mondi

VALIDITÀ $\mathcal{F} \models A$ valida in 1 frame

$C \models A$ " " classe di frame

$\models A$ " tutti i frame

ES | x CASA

1) $\models \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$

2) $\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Sia $F = \langle W, R \rangle$ e $M = \langle W, R, I \rangle$, $w \in W$

1) so che $\models^M_w \Box(A \wedge B)$ ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models_v A \wedge B$)

d.d.

$\models_w \Box A \wedge \Box B$ ovvero $\models_w \Box A$ e $\models_w \Box B$

Dimostro $\models_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models_v A$)

OVVIO

Dimostro $\models_w \Box B$ " $\forall v \in W$ (wRv implica $\models_v B$)

OVVIO

ipotesi ci dice che $\models_v A \wedge B$ ovvero $\models_v A$ e $\models_v B$ $\forall v \in W$

2) so che $\models^M_w \Box(A \to B)$ ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models_v A \to B$)

d.d.

$\models^M_w \Box A \to \Box B$

so che $\models^M_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models_v A$)

d.d.

$\models^M_w \Box B$ ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models_v B$)

per ipotesi so che $\forall v \in W$ ($\models_v A \to B$)

ovvero $\not\models_v A$ oppure $\models_v B$

ma so che $\forall v \in W$ $\models_v A$ quindi $\models_v B$

13/02/2023

es. in classe

$\models \Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$

assumo $\models^M_w \Box A \wedge \Box B$ ovvero $\models^M_w \Box A$ e $\models^M_w \Box B$

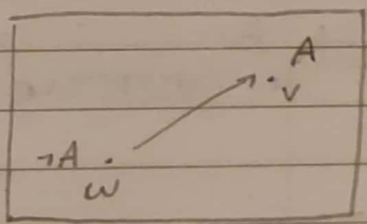
ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models^M_v A)$ e
$\forall v \in W (wRv$ implica $\models^M_v B)$

d.d. $\models^M_w \Box(A \wedge B)$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models^M_v A \wedge B)$

ovvero $\forall v \in W (\models^M_v A$ e $\models^M_v B)$ ovvio

$\not\models \Box A \to A$ farne altri sul libro è utile

controesempio:



assumo $\models^M_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models^M_v A)$
quindi non possiamo affermare che è sempre vero in tutti i $v \in W$

MODUS PONENS

$$\boxed{\frac{\models A \qquad \models A \to B}{\models B}}$$

$\not\Downarrow \qquad \Uparrow$

$$\frac{\models_w A \qquad \models_w A \to B}{\models_w B}$$

caso di 1 MODELLO
(tutti i mondi di 1 MODELLO)

$$\frac{\models_w A \text{ e } (\not\models_w A \text{ oppure } \models_w B)}{\models_w B}$$

non può essere $\not\models_w A$ e $\models_w$

REGOLA di NECESSITAZIONE

$$\boxed{\frac{\models^M A}{\models^M \Box A}}$$

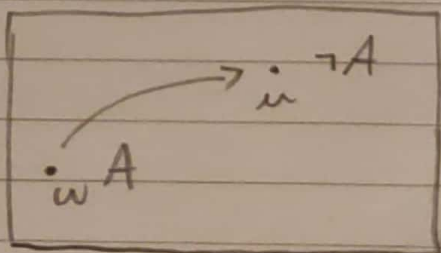
si preserva sul MODELLO

$\forall_v \in W \, (\models_v A)$

$\forall_v \in W \, (\models_v \Box A)$

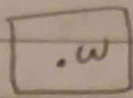
NON si preserva su 1 mondo

$$\cancel{\frac{\models^M_w A}{\models^M_w \Box A}}$$

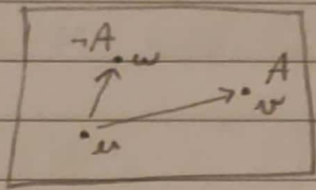


es. 1.2 pag 24 libro

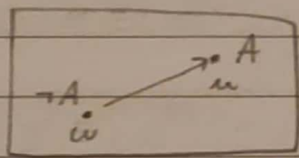
$(1) \nvDash \Diamond \top$



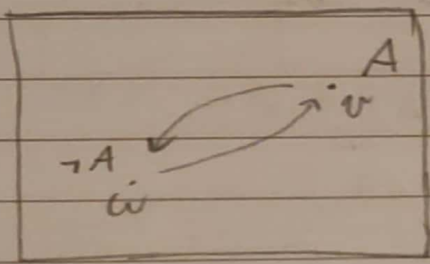
$(2) \nvDash \Diamond A \to \Box A$



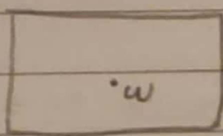
A $(3) \nvDash \Box A \to A$



$(4) \nvDash \Box A \to \Box\Box A$



??? $(5) \nvDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Diamond B)$



??? $(6) \nvDash \Box(\Box A \to B) \vee (\Box B \to A)$

$(7) \nvDash \Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Box B)$

$(8) \nvDash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

15/02/23

regola SOSTITUZIONE

$A[B/p]$ A con B al posto di p

CASI:

- $q[B/p] \equiv \begin{cases} q & \text{se } q \not\equiv p \\ B & \text{se } q \equiv p \end{cases}$
- $\bot[B/p] \equiv \bot$
- $* \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$, $*C[B/p] \equiv *(C[B/p])$
- $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, $(C \circ D)[B/p] \equiv C[B/p] \circ D[B/p]$

TR: la validità su $\mathcal{F}$ (generica struttura) è chiusa sotto sostituzione uniforme

$$\frac{\mathcal{F} \models A}{\mathcal{F} \models A[B/p]}$$

NON vero in un modello: è possibile $M \models A$ e $M \not\models A[B/p]$

Assumiamo $M \models p$ ma $M \not\models \bot$

$M \not\models p[\bot/p]$

$$(\alpha \to \beta) \longleftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$$

DIMOSTRAZIONE: PER CONTRAPPOSIZIONE

assumo $\nvDash A[B/p]$ mostro $\nvDash A$

$\nvDash^M_w A[B/p]$ dove $M = \langle W, R, I \rangle$

$\Gamma_B = \{ v$ t.c. $v \in W$ e $\vDash^M_v B \}$

$M' = \langle W, R, I' \rangle \qquad I'(q) = \begin{cases} I(q) & \text{se } q \not\equiv p \\ \Gamma(B) & \text{se } q \equiv p \end{cases}$

$\forall C \in Fm, \forall k \in W \qquad \vDash^M_k C[B/p]$ sse $\vDash^{M'}_k C$

Dimostro per induzione su C:

CASO BASE: $\vDash^M_k q = \begin{cases} q \equiv p & \vDash^M_k B \text{ sse } \vDash^{M'}_k q \\ q \not\equiv p & \vDash^{M'}_k q \qquad k \in I(q) \text{ sse } k \in I'(q) \end{cases}$

CASO $\wedge$: $\vDash^M_k (D \wedge E)[B/p] \overset{?}{\text{sse}} \vDash^{M'}_k D \wedge E$

sse

$\vDash^M_k D[B/p] \wedge E[B/p]$

sse

$\vDash^M_k D[B/p]$ e $\vDash^M_k E[B/p]$

sse

$\vDash^{M'}_k D$ e $\vDash^{M'}_k E$ (per ip. ind.)

sse

$\vDash^{M'}_k D \wedge E$

IDEM per $\vee$ e $\to$ e $\neg$ continua...

$\models_{x}^{M} (\Box D)[B/p]$ sse $\models_{x}^{M'} \Box D$

sse

$\models_{x}^{M} \Box(D[B/p])$

sse

$\forall u\ (xRu \supset \models_{u}^{M} D[B/p])$

sse

$\forall u\ (xRu \supset \models_{u}^{M'} D)$

sse

$\models_{x}^{M'} \Box D$

IDEM per $\Diamond$ qed

Definizione di LOGICA

LOGICHE MODALI NORMALI

$\Gamma \subseteq Fm$

1. $TAUT \in \Gamma$

2. $K \in \Gamma$, $K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

3. Γ chiuso sotto MP $\dfrac{A \in \Gamma \quad A \to B \in \Gamma}{B \in \Gamma}$

4. Γ chiuso sotto regola necessitazione $\dfrac{A \in \Gamma}{\Box A \in \Gamma}$

(5. Γ chiuso sotto sostituzione uniforme $\dfrac{A \in \Gamma}{A[B/p] \in \Gamma}$)

ridondante

ASSIOMI: $\vdash TAUT \qquad \vdash K$

REGOLE: $\dfrac{\vdash A \quad \vdash A \to B}{\vdash B}$ modus ponens

$\dfrac{\emptyset \vdash A}{\emptyset \vdash \Box A}$ necessitazione

16/02/23

dimostrazione

$K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

assumo $\models^M_w \Box(A \to B)$ ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v A \to B$)

ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v \neg A \vee B$)
ovvero $\forall v \in W$ (wRv " $\models^M_v \neg A$ o $\models^M_v B$)

d.d. $\models^M_w \Box A \to \Box B$ assumo $\models^M_w \Box A$ ovvero
$\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v A$)

quindi so $\forall v \in W$

$$\frac{\models^M_v A \qquad \models^M_v A \to B}{\models^M_v B} \text{ per MP}$$

NOTAZIONE

$F \rhd P$ F gode di P

Def. CORRISPONDENZA

$A \in Fm$ corrisponde a una proprietà P (di R)
sse

$$\forall F (F \vDash A \text{ sse } F \rhd P)$$

$\uparrow$
A è valido in F

$T := \Box A \to A$ corrisponde a RIFLESSIVITÀ

$$\forall F (F \vDash \Box A \to A \quad \text{sse} \quad \forall w \in F \ (wRw))$$

$\supset$ assumo $F \vDash \Box A \to A$ e mostro $\forall w \in F (wRw)$

$$\frac{\vDash^M_u \Box p \to p \qquad I \text{ t.c. } \vDash_u \Box p \ , \ I(p) = \{v \in W : uRv\}}{\vDash^M_u p}$$

quindi uRu

$\subset$ assumo $\forall w (wRw)$ e mostro $F \vDash \Box A \to A$

$\vDash_u \Box A$ mostro $\vDash_u A$

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x \in W (uRx \supset \vDash_x A) \\ uRu \supset \vDash_u A \qquad uRu\end{array}}{\vDash_u A}$$

per contrapposizione

$\supset$ ASSUMO F NON riflessivo e MOSTRO $F \not\models \Box A \to A$

ovvero $\exists x \exists M (\not\models^{M}_{x} \Box p \to p)$

$\exists u (\neg uRu)$

$\models_x \Box p \quad \not\models_x p$

$\neg (vRv) \quad I(p) : \{z \in W, vRz\}$

per assurdo assumo $\forall w (wRw)$

$\subset \quad \models_u \Box A \quad \not\models_u A$

w

$\Box A, \neg A \lightning A$

$D := \Box A \to \Diamond A$ corrisponde a SERIALITÀ

$\forall w \exists u (wRu)$

$F \models \Box A \to \Diamond A \longleftarrow$ sse

$\supset$ assumo $\models_w \Box p \to \Diamond p \quad I(p) = \{v \in W \text{ t.c. } wRv\}$

$$\frac{\models_w \Box p \to \Diamond p \qquad \models_w \Box p}{\models_w \Diamond p}$$

ovvero $\exists u \in W (wRu \text{ e } \models_u p)$

quindi $\exists u \in W (wRu)$

$\subset$ assumo $\forall w \exists u (wRu)$

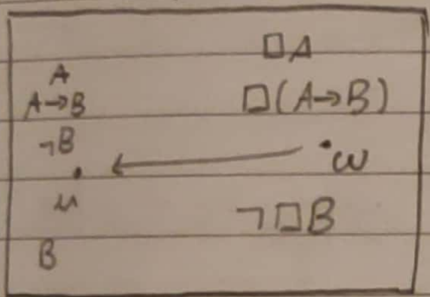
mostro $F \models_w \Box A \to \Diamond A$

assumo $\models_w \Box A$ e mostro $\models_w \Diamond A$

$\forall v \in W (wRv \supset \models_v A)$

quindi $\exists u \in W (wRu \text{ e } \models_u A)$

$K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$



$\not\models_w (\Box(A \to B) \cap \Box A) \to \Box B$

ES x CASA

4: $\Box A \to \Box\Box A$, $F \models 4$ sse $\forall x,y,z(xRy \text{ e } yRz \supset xRz)$

$\supset$ assumo $\models_w \Box p \to \Box\Box p$ $\quad I(p) = \{v \in W \mid wRv\}$

$$\frac{\models_w \Box p \to \Box\Box p \qquad \models_w \Box p}{\Box\Box p}$$

ovvero $\forall v \in W(wRv$ implica $\models_v \Box p)$

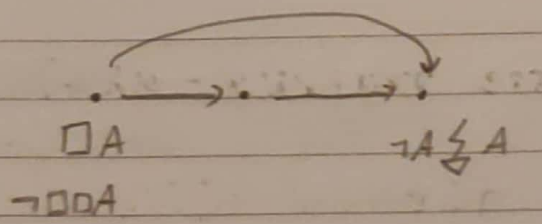
ovvero $\forall v \in W(wRv$ implica $\forall x \in W$ t.c. vRx implica $\models_x p)$

$\subset$ assumo $\forall x,y,z(xRy \text{ e } yRz \supset xRz)$

mostro $F \models_w \Box A \to \Box\Box A$. Assumo $\models_w \Box A$ e mostro $\models_w \Box\Box A$

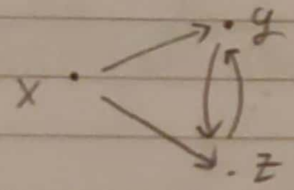
20/02/23

⊂ x ASSURDO

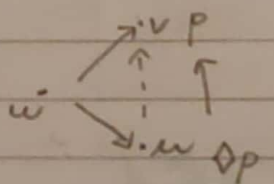


5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ prop. euclidea
B: $A \to \Box\Diamond A$ prop. simmetrica

5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xyz\ (xRy \text{ e } xRz \supset yRz)$



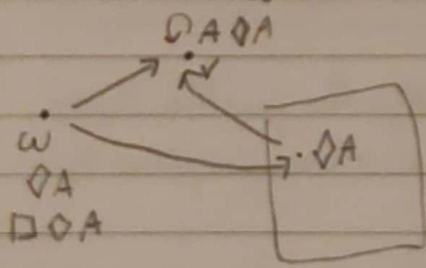
⊃ assumo $F \models \Diamond p \to \Box\Diamond p$



$\models_w \Diamond p$ $I(p) = \{v\}$

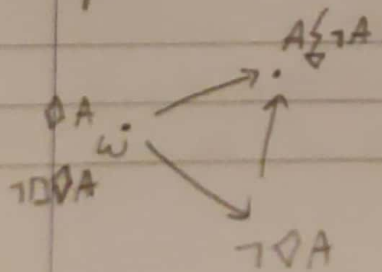
$\models_w \Box\Diamond p$ per MP

⊂ assumo $\forall xyz (xRy \text{ e } xRz \supset yRz)$ e mostro $\models \Diamond A \to \Box\Diamond A$
assumo $\models_w \Diamond A$



insieme di altri eventuali mondi visti da w

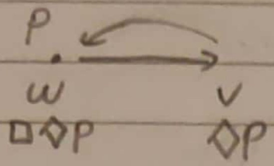
⊂ per ASSURDO. Assumo $\models_w \Diamond A$ e $\not\models_w \Box\Diamond A$



B: $A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xy(xRy \supset yRx)$

$\supset$ assumo $\nvDash p \to \Box\Diamond p$

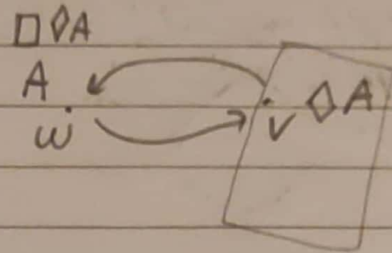
$I(p) = \{w\}$



dato che p è vero solo in w

$\subset$ assumo $\forall x,y(xRy \supset yRx)$

mostro $\vDash A \to \Box\Diamond A$



$\vDash_w A$ e mostro $\vDash_w \Box\Diamond A$

NOZIONI:

$\Box^n A$ $\quad \Box^0 A \equiv A \quad , \quad \Box^{n+1} A \equiv \Box(\Box^n A)$

$wR^n v$ $\quad wR^0 v$ sse $w = v$

$wR^{n+1} v$ sse $\exists x(wR^n x$ e $xRv)$

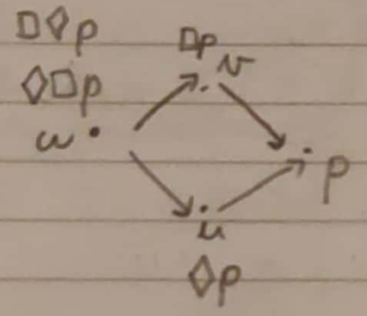
idem per $\Diamond^n A$

CONVERGENZA DEBOLE

2: $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xyz(xRy \text{ e } xRz \supset \exists t(yRt \text{ e } zRt))$

$\supset$ assumo

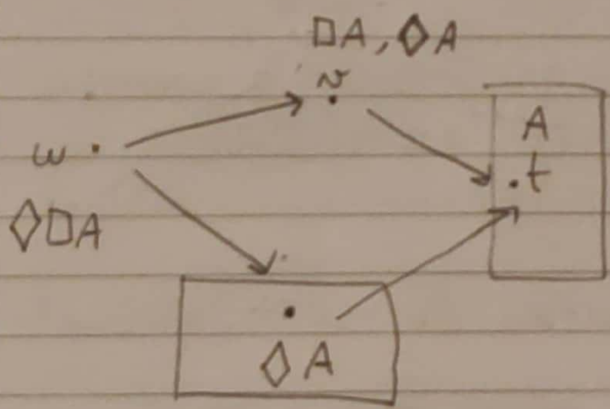
$$\frac{\models_w \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \qquad \models_w \Diamond\Box p}{\models_w \Box\Diamond p}$$



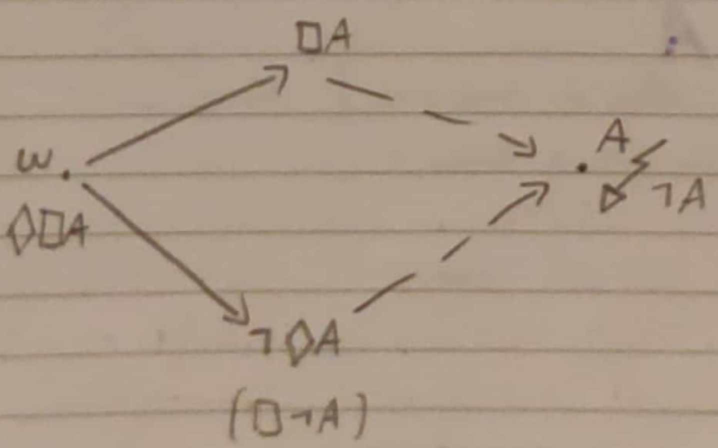
$I(p) = \{x \in W \mid vRx\}$

dato che p è vero solo in ciò che vede v

$\subset$ assumo $\models_w \Diamond\Box A$ mostro $\Box\Diamond A$



$\subset$ per ASSURDO $\models_w \Diamond\Box A$, $\not\models_w \Box\Diamond A$

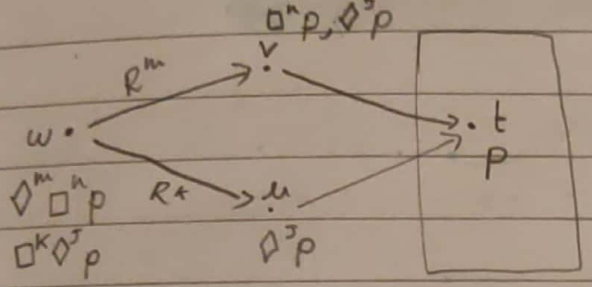


22/02/23

Lemmon

$F \models \Diamond^m \Box^n A \to \Box^k \Diamond^j A$ sse $\forall xyz(xR^m y$ e $xR^k z \supset \exists t(yR^n t$ e $zR^j t))$

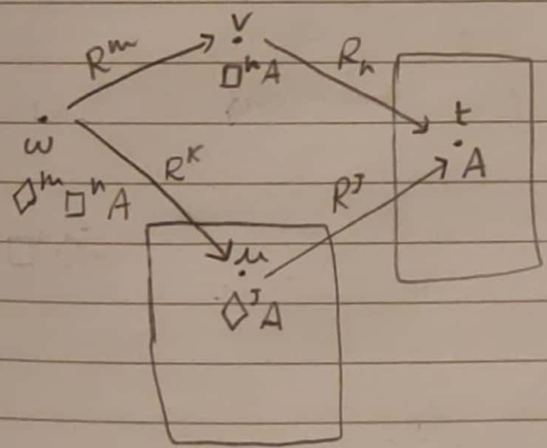
$\supset$ assumo $\models_w \Diamond^m \Box^n p \to \Box^k \Diamond^j p$ e mostro $\uparrow$



$I(p) = \{z \in W \mid vR^n z\}$

$\subset$ assumo $\forall x,y,z(xR^m y$ e $xR^k z \supset \exists t(yR^n t$ e $zR^j t))$
e mostro

$\models_w \Diamond^m \Box^n A \to \Box^k \Diamond^j A$, assumo $\models_w \Diamond^m \Box^n A$



Possiamo usare Lemmon per dimostrare un sacco di robe:

T: $\Box A \to A \equiv \Diamond^0 \Box^1 A \to \Box^0 \Diamond^0 A$

4: $\Box A \to \Box\Box A \equiv \Diamond^0 \Box^1 A \to \Box^2 \Diamond^0 A$

$\forall wvu(wR^0 v$ e $wR^1 u \supset \exists t(vR^0 t$ e $uR^0 t))$ ovvero
$\forall wvu(w=v$ e $wRu \supset \exists t(v=t$ e $u=t))$ ovvero
$\forall w(wRw)$ dato che $w=v=t=u$ FIGO!

Sottomodelli generati

[wR^*v sse $\exists n(wR^n v)$ con $n \in \mathbb{N}^+$ (stella di Kleene)]

Dato $M = \langle W, R, I \rangle$, il sottomodello generato da $x \in W$

$$M^x = \langle W^x, R^x, I^x \rangle \quad \text{dove} \quad W^x = \{y \mid xR^*y\}$$

$$R^x = R \cap (W^x \times W^x)$$

$$I^x(p) = I(p) \cap W^x$$

Lemma sottomodello generato

$\forall M, \forall x \in W^{y}$ $^{y \in W}$, $\forall A \in Fm^{\square}$ $\models^M_x A$ sse $\models^{M^y}_x A$

DIMOSTRAZIONE per INDUZIONE sulla struttura di A

- Sia $A \equiv p$ mostro $\models^M_x p$ sse $\models^{M^y}_x p$

$$\begin{array}{ccc} \models^M_x p & \text{sse} & \models^{M^y}_x p \\ \text{sse} & & \text{sse} \\ x \in I(p) & \text{sse} & x \in I^y(p) \end{array}$$

- Sia $A \equiv \bot$ mostro $\not\models^M_x \bot$ sse $\not\models^{M^y}_x \bot$

- Sia $A \equiv B \cap C$ mostro $\models^M_x B \wedge C$ sse $\models^{M^y}_x B \wedge C$

suppongo

$$\begin{array}{ccc} \models^M_x B \wedge C & \text{sse} & \models^{M^y}_x B \wedge C \\ \text{sse} & & \text{sse} \\ \models^M_x B & \overset{IH}{\text{sse}} & \models^{M^y}_x B \\ e & & e \\ \models^M_x C & \overset{IH}{\text{sse}} & \models^{M^y}_x C \end{array}$$

• Sia $A \equiv B \cup C$ mostro $\models^{M}_{x} B \cup C$ sse $\models^{M^y}_{x} B \cup C$

assumo

$$
\begin{array}{ccc}
\models^{M}_{x} B \cup C & \text{sse} & \models^{M^y}_{x} B \cup C \\
\text{sse} & & \text{sse} \\
\models^{M}_{x} B & \stackrel{IH}{\text{sse}} & \models_{x} B \\
\varnothing & & \varnothing \\
\models^{M}_{x} C & \stackrel{IH}{\text{sse}} & \models_{x} C
\end{array}
$$

• Sia $A \equiv B \to C$ mostro $\models^{M}_{x} B \to C$ sse $\models^{M^y}_{x} B \to C$

assumo

$$
\begin{array}{ccc}
\models^{M}_{x} B \to C & \text{sse} & \models^{M^y}_{x} B \to C \\
\text{sse} & & \text{sse} \\
\not\models^{M}_{x} B & \stackrel{IH}{\text{sse}} & \not\models^{M^y}_{x} B \\
\varnothing & & \varnothing \\
\models^{M}_{x} C & \stackrel{IH}{\text{sse}} & \models^{M}_{x} C
\end{array}
$$

• Sia $A \equiv \neg B$ mostro $\models^{M}_{x} \neg B$ sse $\models^{M^y}_{x} \neg B$

$$
\begin{array}{ccc}
\text{sse} & & \text{sse} \\
\not\models^{M}_{x} B & \stackrel{IH}{\text{sse}} & \not\models^{M^y}_{x} B \ldots
\end{array}
$$

• Sia $A \equiv \Box B$ assumo $\forall z \in W^y \models^{M}_{z} B$ sse $\models^{M^y}_{z} B$

d.d. $\models^{M}_{x} \Box B$ sse $\models^{M^y}_{x} \Box B$

$(\forall z \in W (xRz \supset \models^{M}_{x} B))$ sse $(\forall z \in W^y (xRz \supset \models^{M^y}_{x} A))$

$\supset$ sia $z \in W^y$ t.c. xRz d.d. $\models^{M^y}_{z} B$

Visto che xRz, allora $\models^{M}_{z} B$. Quindi per IH $\models^{M^y}_{z} B$

$\subset$ sia $z \in W$ t.c. xRz d.d. $\models^{M}_{z} B$. Visto che xRz, quindi xR^*z. Quindi, $z \in W^y$. Quindi dato che $xR^y z$ (per ipotesi) e $\models^{M^y}_{z} B$.

Quindi per IH $\models^{M^y}_{z} B$

• Sia $A \equiv \Diamond B$ $\forall z \in W \left(\models^M_z B \text{ sse } \models^{M^y}_z B \right)$ (IH)

d.d.

$$\models^M_x \Diamond B \text{ sse } \models^{M^y}_x \Diamond B$$

$\supset$ assumo $\models^M_x \Diamond B$ ovvero $\exists w \in W (xRw$ e $\models^M_w B)$

mostro $\models^{M^y}_x \Diamond B$

so che $w \in W^y$ e $\models^M_w B$

per IH ho $\models^{M^y}_w B$

$\subset$ assumo $\models^{M^y}_x \Diamond$ sse $\underbrace{\exists t \in W^y (xR^y t}$ e $\underbrace{\models^{M^y}_t B)}_{\downarrow \text{IH}}$

$$\exists t \in W (xRt \text{ e } \models^M_t B)$$

$$\text{sse}$$

$$\models^M_x \Diamond B$$

TR CONVERGENZA NON É ESPRIMIBILE

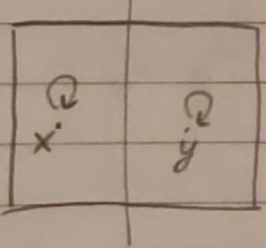
$\forall x,y \exists z (xRz$ e $yRz)$ $\nexists$ formula modale per esprimerla

DIM X ASSURDO

$\nexists A \in Fm$ t.c. $\forall F (F \models A$ sse F è convergente$)$

assumo $\exists A$ corrisponde a CONV

$F =$



$F \not\models A$ quindi ho 2 casi

$\exists M^x \not\models^{M^x}_x A$

$\exists M^y \not\models^{M^y}_y A$

ma dimostriamo che entrambi i casi creano una contraddizione

$\nvDash^{M}_{x} A$ sse $\nvDash^{M^x}_{x} A$ $\lightning$ assurdo

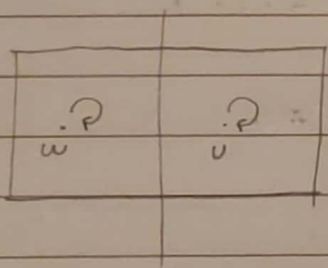
$F^x \vDash A \to \vDash^{M^x}_{x} A$ ← è così per entrambi i punti

TR CONNESSIONE NON É ESPRIMIBILE

$\forall w,v\,(wRv$ o vRw o $w=v)$ dim. x assurdo

$\nexists A \in Fm$ t.c. $\forall F\,(F \vDash A$ sse F è convergente$)$

$F =$



$F \nvDash A$

$\nvDash^{M}_{w} A$ sse $\nvDash^{M^w}_{w} A$ $\lightning$ ASSURDO

$F^w \vDash A \to \vDash^{M^w}_{w} A$

27/02/23

P-MORFISMO tra STRUTTURE

$F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$

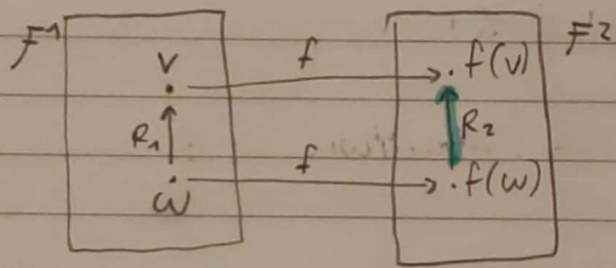
è una funzione $f: W_1 \rightarrow W_2$

$\forall x \in W_1 \, \exists! \, y \in W_2, \langle x, y \rangle$

Condizioni per P-Morfismo

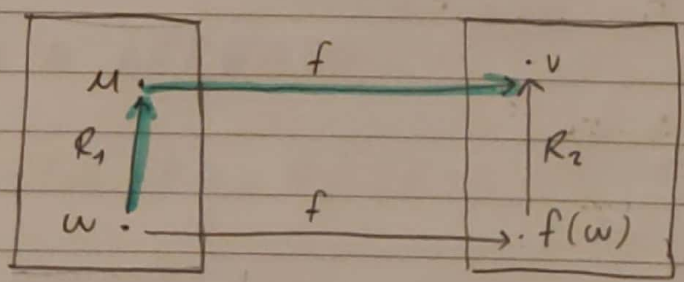
① FORTH CONDITION

$\forall w, v \in W_1 \, (wRv \supset f(w) R_2 f(v))$



② BACK CONDITION

$\forall w \in W_1, \forall v \in W_2 \, (f(w) R_2 v \supset \exists u \in W_1 (wR_1u \text{ e } f(u) = v))$



P-MORFISMO TRA MODELLI

M_1 $\quad\quad$ M_2

$f: W_1 \rightarrow W_2$ soddisfa prime 2 condizioni e in più

3 $\forall w \in W_1 \,(w \in I_1(p)$ sse $f(w) \in I_2(p))$

LEMMA Dato f P-MORFISMO tra M_1 e M_2

$$\forall x \in W_1 \,(\models_x^{M_1} A \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} A)$$

Dimostriamo per induzione strutturale su A.

- se $A \equiv p$: OVVIO per 3
- se $A \equiv \bot$: OVVIO (il $\bot$ è falso ovunque)
- se $A \equiv B \wedge C$: d.d. $\models_x^{M_1} B \wedge C$ sse $\models_{f(x)}^{M_2} B \wedge C$

per IH so $\begin{cases} \models_x^{M_1} B \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} B \\ \models_x^{M_1} C \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} C \end{cases}$

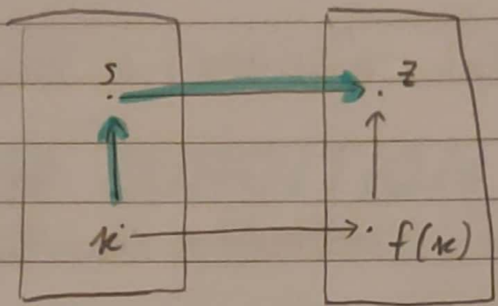
$$\models_x^{M_1} B \wedge C \text{ sse } \left\{ \begin{array}{l} \models_x^{M_1} B \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} B \\ \quad\quad\quad \text{IH} \\ \models_x^{M_1} C \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} C \end{array} \right\} \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} B \wedge C$$

idem per disgiunzione e implicazione

• se $A \equiv \Box B$

$\supset$ assumo* $\models^{M_1}_{x} \Box B$ sse $\forall y \in W_1 \, (x R_1 y \supset \models^{M_1}_{y} B)$

d.d. $\models^{M_2}_{f(x)} \Box B$, ovvero $\forall z \in W_2 \, (f(x) R_2 z \supset \models^{M_2}_{z} B)$



grazie a BACK CONDITION

so che $\models^{M_1}_{s} B \overset{IH}{\text{sse}} \models^{M_2}_{\underset{\hookrightarrow z}{f(s)}} B$

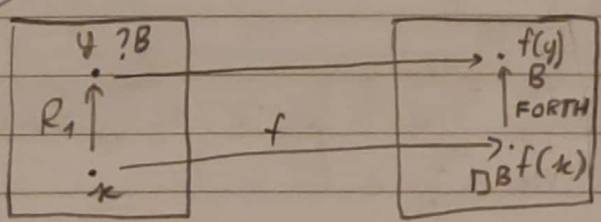
modo alternativo

$\supset$ d.d. $\models^{M_2}_{f(x)} \Box B$ sse $\forall z \in W_2 \, (f(x) R_2 z \supset \models^{M_2}_{z} B)$

per BC e assunzione * lo dimostro

↓ creo freccia ↓ so che $\Box B$ è vero in x

$\subset$ assumo $\models^{M_2}_{f(x)} \Box B$, d.d. $\models^{M_1}_{x} \Box B$ ovvero $\forall y \in W_1 \, (x R y \supset \models^{M_1}_{y} B)$

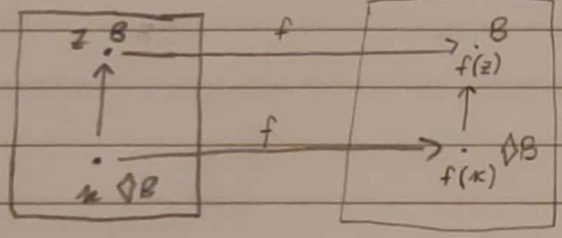


sse $\forall z \in W_2 \, (f(x) R_2 z \supset \models^{M_2}_{z} B)$

- se $A \equiv \Diamond B$

$\supset$ assumo $\models^{M_1}_{x} \Diamond B$ sse $\exists z \in W (x R_1 z \text{ e } \models^{M_1}_{z} B)$

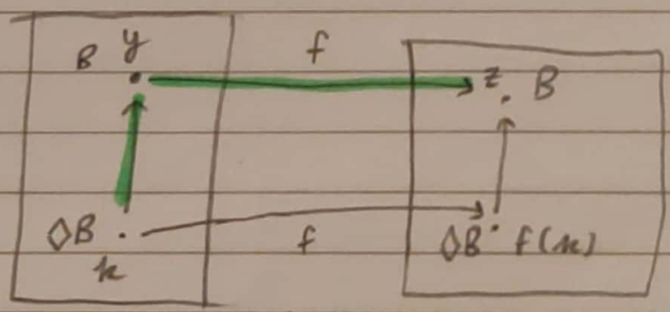
mostro $\models^{M_2}_{f(x)} \Diamond B$



per assunzione ho la freccia da x a z. per Forth Condition ho le altre 3 frecce. per IH ho $\models^{M_2}_{f(z)} B$ quindi ho $\models^{M_2}_{f(x)} \Diamond B$ fine

$\subset$ assumo $\models^{M_2}_{f(x)} \Diamond B$ sse $\exists z \in W (x R_2 z \text{ e } \models^{M_2}_{z} B)$

mostro $\models^{M_1}_{x} \Diamond B$



per BC

per IH so che $\models^{M_1}_{y} B$ dato che $z = f(y)$ e $\models^{M_2}_{z} B$

quindi sapendo $x R_1 y$ so che $\models^{M_1}_{x} \Diamond B$

01/03/23

RIPASSO FUNZIONI

$f: D \to C$ **INIETTIVA** se $\forall d_1, d_2 \in D \; d_1 \neq d_2 \supset f(d_1) \neq f(d_2)$

SURIETTIVA se $\forall c \in C \; \exists d \in D$ t.c. $f(d) = c$

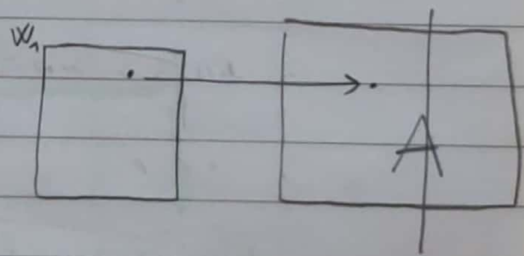
applicata ai p-morfismi:

$f: W_1 \to W_2$ se è suriettiva
$\forall x \in W_2 \; \exists y \in W_1 \; (x = f(y))$

Lemma P-MORF. SURIET. tra MODELLI

Se $f: W_1 \to W_2$ è p-morfismo suriettivo
ALLORA $\models^{M_1} A$ sse $\models^{M_2} A$

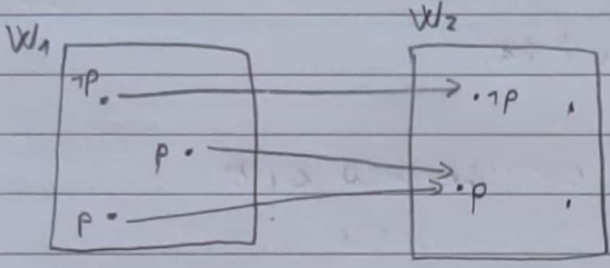
DIM $\models^{M_1} A \quad \forall x \in W_1 (\models^{M_1}_x A) \quad \forall z \in W_1 (\models^{M_1}_z A$ sse $\models^{M_2}_{f(z)} A)$



$W_2 = f(W_1) \quad \forall u \in W_2 (\models^{M_2}_u A)$

Lemma Dato f p-morfismo tra strutture F_1 e F_2

$\exists$ p-morfismo tra modelli per ciascun F_2-modello



(qui NON serve suriettività)

$$I_1(p) = \{x \in W_1 : f(x) \in I_2(p)\}$$

Lemma P-MORFISMO SURIET. tra STRUTT.

Dato f p-morfismo suriettivo tra strutture F_1 e F_2

se $F_1 \models A$ allora $F_2 \models A$

DIM x contrapposizione

assumo $F_2 \not\models A$, quindi $\exists M_2 \in F_2 \,(\not\models^{M_2} A) \Rightarrow \exists x \in W_2 \,(\not\models^{M_2}_x A)$
quindi per il lemma precedente

$\exists M_1 \in F_1 \,(\not\models^{M_1} A)$ dato che è suriettivo so che $x = f(y)$ per qualche $y \in W_1$

quindi $\not\models^{M_1}_y A$

[RICORDA:
$f: F_1 \to F_2$ è P-MORF. SUR. allora $F_1 \models A \supset F_2 \models A$

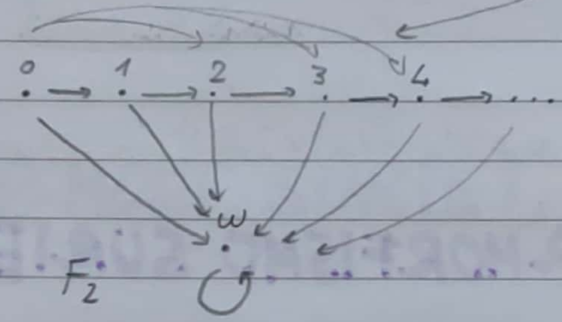
TR. IRRIFLESSIVITÀ è INESPRIMIBILE

$\forall w \, \neg(wRw)$ (*)

per ASSURDO
assumo che A corrisponda a (*)

ci sarebbero anche queste frecce transitive, MA non ci interessano

$F_1 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$



f è P-MORFISMO
$f(n) = w \; \forall n \in \mathbb{N}$

per ogni n, K t.c. $n < K$ $f(n) R f(K)$, vero $\forall n, K$ perché wRw

d.d. $\exists y \in W_1$ xRy e $w = f(y)$ (BACK CONDITION)

p-morfismo è suriettivo perché F_2 ha solo 1 mondo

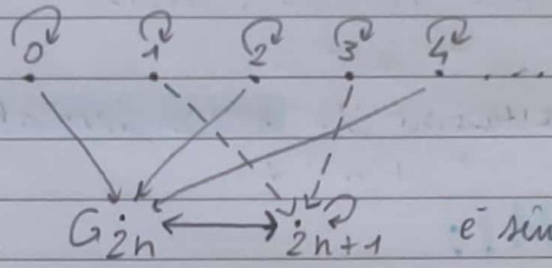
$$\frac{F_1 \models A}{F_2 \models A \;\lightning\; F_2 \not\models A}$$ ← per lemma P-M suriett. tra strutture

dato che wRw

$\forall w, v\ (wRv \text{ e } vRw \supset w = v)\ (\dagger)$

TR. ANTISIMMETRIA NON È ESPRIMIBILE

$F_1 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$



F_2 G è simmetrica

assumo che A corrisponda a $(\dagger)$, $\dfrac{F_1 \models A}{F_2 \models A \ ↯ \ F_2 \not\models A}$

CONCLUSA PARTE SULLA SEMANTICA

02/03/23

CALCOLO ASSIOMATICO

Unica regola: MODUS PONENS $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$

Assiomatizzeremo la logica modale K

ASSIOMI:

- TAUT : tutte le tautologie
- K : $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
- Def. $\Diamond$: $\Diamond A \longleftrightarrow \neg\Box\neg A$

REGOLE:

- necessitazione: $\dfrac{\emptyset \vdash A}{\emptyset \vdash \Box A}$ N
- modus ponens: $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$ MP

Introduciamo cos'è una derivazione

Scansionato con CamScanner

Def DERIVAZIONE

Una derivazione in L di A a partire da Γ ($\Gamma \vdash A$) è una successione FINITA di formule $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ t.c.:

$$\alpha_i \begin{cases} \bullet \text{ è assioma di } L \\ \bullet \in \Gamma \text{ (ipotesi)} \\ \bullet \text{ è ottenuto da } \alpha_j \text{ (e } \alpha_k) \\ \quad \text{per } j, k < i \text{ attraverso regole di } L \end{cases}$$

$\alpha_n = A$

Def ($\vdash_L A$)

diciamo che A è un teorema se A è derivabile da $\emptyset$ ($\emptyset \vdash_L A$, ovvero dimostrazione di A)

I teoremi fondamentali sono VALIDITÀ e COMPLETEZZA

$$\Gamma \vdash_k A \text{ sse } \Gamma \vdash A$$

VALIDITÀ

$\longrightarrow$

COMPLETEZZA

$\longleftarrow$

es. DERIVAZIONE $\vdash_K \Box\top$ $(\vdash \Box(\bot\to\bot))$

$$\frac{\vdash \bot\to\bot}{\vdash \Box(\bot\to\bot)}\, N$$

ripasso:

K $:= \Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$

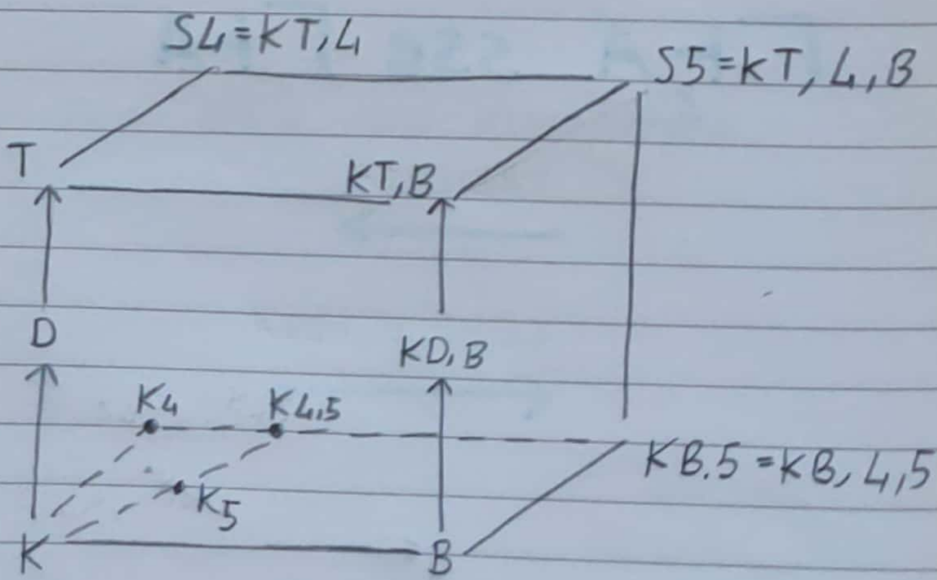
D $:= \Box A\to\Diamond A$ (logica D: logica K + assioma D)

T $:= \Box A\to A$

4 $:= \Box A\to\Box\Box A$

5 $:= \Diamond A\to\Box\Diamond A$

B $:= A\to\Box\Diamond A$



CUBO DELLE LOGICHE ASSIOMATIZZABILI CON D,T,4,5,B