LOGICHE NON CLASSICHE

Un'introduzione

Dario Palladino
Claudia Palladino

Carocci

Indice

Prefazione

La logica è una disciplina che si è notevolmente sviluppata negli ultimi decenni. Nata nell'antichità, a partire dalla seconda metà dell'Ottocento ha subìto una profonda trasformazione che ha condotto, nella prima metà del Novecento, all'elaborazione dei sistemi della *logica classica*, i quali governano il nucleo più fondamentale dell'attività deduttiva: la logica delle proposizioni e le logiche dei predicati del primo e del secondo ordine costituiscono l'impalcatura formale delle dimostrazioni matematiche. Elementi di logica classica vengono insegnati nei sempre più numerosi corsi universitari delle facoltà umanistiche e scientifiche, e sono presenti anche nei programmi della scuola secondaria. Ad essa sono dedicati molti manuali di carattere introduttivo o specialistico, in grado di soddisfare le esigenze sia di docenti e studenti, sia di lettori interessati a documentarsi su una disciplina la cui conoscenza è divenuta indispensabile per le sue applicazioni in quasi tutti i settori delle scienze, dall'informatica e l'Intelligenza Artificiale alla linguistica, dalla matematica e la fisica alla psicologia, dal diritto all'economia.

La logica classica, nonostante il suo ruolo centrale nell'attività deduttiva, si fonda su alcuni presupposti che ne circoscrivono l'ambito di applicazione, il quale, seppur così ampio da comprendere la quasi totalità della matematica, copre un settore limitato del complesso dei ragionamenti umani. Nel secolo scorso, per sopperire a tali limitazioni della logica classica, sono stati elaborati numerosi sistemi logici con lo scopo di fornire una rigorosa analisi formale dei molteplici ambiti dell'attività inferenziale. Attualmente la logica si articola in un largo spettro di settori e, date le valenze applicative che la disciplina ha ricevuto in ambito scientifico e informatico, ciascuno di essi è coltivato da numerosi studiosi. Pertanto, il panorama delle ricerche logiche è enormemente cresciuto e ai suoi molteplici sviluppi sono dedicate numerose pubblicazioni, riviste e volumi anche ponderosi.

Questo breve manuale di introduzione alle logiche non classiche ha lo scopo di fornire ad un lettore che ha già acquisito una certa conoscenza dei capitoli introduttivi della logica classica una panoramica di alcuni dei più significativi settori in cui oggi si articolano le ricerche logiche, con l'intento di spiegare le motivazioni che sono alla loro origine e illustrare alcuni loro contenuti più basilari. È doveroso segnalare che più logiche si trattano, meno si approfondiscono, e quindi non abbiamo inteso predisporre un testo da utilizzare didatticamente per svolgere lezioni su un settore specifico: esso può servire a integrare i corsi di logica con alcune ore dedicate a illustrare le principali vie per superare i limiti della logica classica oppure per svolgere moduli panoramici sulle logiche non classiche. Il nostro obiettivo, pertanto, è stato la compilazione di un testo di "cultura logica" di ampio respiro, che può servire a dare un'idea non superficiale della presenza di molte diramazioni della logica e delle loro principali caratteristiche. La sua lettura può costituire un'utile premessa per affrontare con maggiore consapevolezza l'approfondimento dello studio della logica.

Il filo conduttore di questo agevole volume è esaminare, da un lato, come si superano i limiti della logica classica ampliandone il linguaggio e l'apparato deduttivo e, dall'altro, esaminare situazioni in cui leggi fondamentali della logica classica non sono valide.

Si osservi che i titoli dei capitoli sono generalmente al plurale: in ciascun settore sono presenti molteplici calcoli, accomunati da un obiettivo comune, ma spesso in alternativa fra loro. Inoltre, con l'intento di mantenere il più possibile il carattere introduttivo della trattazione, la maggior parte delle nostre considerazioni sarà svolta nel primo e più semplice livello dell'indagine logica, ossia il livello proposizionale. Solo occasionalmente faremo qualche incursione al livello predicativo e, in ogni caso, non affronteremo le questioni tecniche che rendono impegnativa la lettura dei manuali più avanzati. Ciò non significa che la lettura di questo testo sia semplice. La logica è una disciplina nella quale si procede adottando procedimenti tipici della matematica: rigore nelle definizioni e precisazione dei princìpi che si assumono. Il fatto che la logica sia una disciplina formale comporta il pervasivo impiego di formule simili a quelle matematiche, e quindi occorre abituarsi a interpretare correttamente le scritture simboliche che si impiegano.

Nel CAP. 1, di carattere introduttivo e la cui lettura può essere tralasciata dal lettore già a conoscenza della logica classica, faremo un breve richiamo al linguaggio e ai princìpi della logica classica, per rendere almeno in parte autonoma la lettura di questo volume e introdurre le notazioni che utilizzeremo nella successiva esposizione. I quindici capitoli sono divisi in tre parti, all'inizio delle quali proponiamo una breve presentazione a commento dei contenuti e per illustrare le motivazioni delle scelte operate.

La prima parte, comprendente i CAPP. 2-7, è dedicata alle logiche estensioni della logica classica. La seconda parte, comprendente i CAPP. 8-12 riguarda sistemi logici alternativi alla logica classica. La terza parte, infine, comprendente i CAPP. 13-15, tratta alcune logiche che si sono sviluppate di recente nell'ambito dell'Intelligenza Artificiale.

Va segnalato che la suddivisione in parti e capitoli ha un valore puramente espositivo: i vari settori in cui si articolano le ricerche logiche non sono affatto disgiunti fra loro, ma interagiscono in modo articolato. Anzi, molte ricerche recenti nascono dalla sovrapposizione di più rami dell'indagine logica. Ed è proprio questo uno degli aspetti che, rendendo sempre più specialistici gli sviluppi della disciplina, rende didatticamente utile un'esposizione come quella di questo volume, che, pur mantenendosi a un livello introduttivo, consente di farsi un'idea dei problemi di ciascun settore e di come sono stati affrontati, senza considerare né sottili problemi tecnici, né delicate questioni filosofiche ed ermeneutiche. Per questo motivo ciascun capitolo inizia con un paragrafo nel quale sono esposte nel modo più semplice possibile e attraverso esempi le caratteristiche dei sistemi logici in esso trattati.

Data l'ampiezza di ciascuno dei settori in cui si articolano le ricerche nelle logiche non classiche, la scelta e le modalità di svolgimento dei diversi argomenti sono state guidate, oltre che dalle nostre competenze e preferenze, soprattutto dall'esigenza di mantenere la trattazione in limiti contenuti e al livello più semplice possibile. Tra l'altro, l'esclusione di interi potenziali capitoli è stata determinata, oltre che dall'opportunità di dare al testo una dimensione non troppo ampia, dal fatto che, per varie logiche, non è sufficiente un numero contenuto di pagine per introdurre le nozioni tecniche indispensabili per dare alla trattazione la precisione che deve in ogni caso accompagnare la presentazione di una disciplina scientifica.

Dato che abbiamo cercato di limitare il più possibile gli aspetti tecnici concentrandoci sui sistemi logici più spesso richiamati nella letteratura, anziché con un indice analitico, si è corredato il volume con un indice dei simboli e dei sistemi logici considerati, il quale consente di seguire lo sviluppo della trattazione.

Abbiamo infine fornito una relativamente ampia bibliografia, comprendente sia testi introduttivi alla logica classica, sia testi di approfondimento delle varie logiche trattate nel testo. In essa abbiamo privilegiato alcuni volumi che possono essere considerati "classici" di ciascun settore, affiancandoli con quelli che ci hanno maggiormente ispirato nel corso del nostro lavoro.

DARIO PALLADINO
CLAUDIA PALLADINO

I

Richiami di logica classica

Introduzione

La logica studia le inferenze, ovvero i procedimenti mediante i quali, date alcune proposizioni assunte come *premesse*, si ottiene come *conclusione* una nuova proposizione. L'obiettivo primario è quello di individuare quelle logicamente corrette: un'inferenza è *corretta* quando la conclusione è *conseguenza logica* delle premesse, ossia quando la verità delle premesse comporta la verità della conclusione. Si può dire, in sintesi, che la logica è lo studio della "trasmissione della verità" e della relazione di conseguenza logica: la definizione precisa di tale nozione è stata decisiva per l'elaborazione dei calcoli della logica classica. Dato che sono possibili varie definizioni del nesso di conseguenza logica si sono sviluppati molti altri sistemi logici, estensioni o alternativi a quelli della logica classica. Una loro caratteristica comune è la natura *formale*: la correttezza delle inferenze non dipende dai particolari contenuti delle proposizioni coinvolte, ma dalla loro struttura sintattica. Ogni sistema logico è caratterizzato da un *linguaggio* e da un *apparato deduttivo*: mediante il linguaggio si formalizzano le proposizioni e, mediante l'apparato deduttivo, si svolgono le inferenze. Il loro studio si articola in due momenti: nella *sintassi* si studiano le proprietà delle formule della teoria prescindendo dalle loro interpretazioni; nella *semantica* si interpreta il linguaggio della teoria e si definisce il nesso di conseguenza logica. In questo capitolo introduttivo esponiamo molto schematicamente alcuni elementi della logica proposizionale classica per richiamare la terminologia e le notazioni che impiegheremo nel seguito [1].

La sintassi della logica proposizionale classica

Il linguaggio. Nella logica proposizionale classica **PC** si usano *lettere proposizionali* p, q, r,... per indicare proposizioni semplici del linguaggio comune o scientifico. Indichiamo con U il loro insieme, che può essere finito o infinito. Mediante le lettere di U si costruiscono le *forme proposizionali* (fp) le quali formalizzano proposizioni composte, ossia le proposizioni costituite da proposizioni semplici collegate da connettivi logici. In logica proposizionale classica si assumono come primitivi alcuni connettivi, i più comuni dei quali sono la *negazione* ($\neg$), la *congiunzione* ($\wedge$), la *disgiunzione non esclusiva* ($\vee$), il *condizionale* (*materiale*) ($\rightarrow$) e il *bicondizionale* ($\leftrightarrow$). Il linguaggio $\mathbf{L}_0$ di **PC** è costituito dall'*alfabeto* comprendente le lettere proposizionali, i connettivi e le parentesi, e dall'*insieme delle forme proposizionali*, il quale è definito induttivamente mediante le seguenti quattro clausole:

(a) le lettere proposizionali sono fp
(b) se A è una fp, allora $(\neg A)$ è una fp
(c) se A e B sono fp, allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sono fp
(d) nient'altro è una fp

Le lettere A, B, C,..., dette *variabili metateoriche*, indicano fp qualsiasi.

Sono esempi di fp: $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$, $\neg\neg p \leftrightarrow p$, $\neg(p \vee (q \rightarrow r))$.

Quasi sempre in logica si trattano *schemi* di formule, ossia scritture del tipo $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$, $\neg\neg C \leftrightarrow C$, in cui figurano variabili metateoriche: ciascuno schema sta per le infinite fp che si ottengono sostituendo le variabili metateoriche A, B, C,... con fp qualsiasi. Nel seguito, per brevità, diremo quasi sempre "formula" anziché "schema di formule".

L'apparato deduttivo. L'apparato deduttivo di **PC** può essere presentato in varie forme, riconducibili a quattro tipi fondamentali: calcoli assiomatici, calcoli della deduzione naturale, calcoli dei sequenti e metodi dei *tableaux* o degli alberi semantici.

Nei calcoli assiomatici si assumono come assiomi alcuni schemi di forme proposizionali, ossia tutte le (infinite) fp che hanno una certa struttura sintattica, e si introducono regole per derivarne altre a partire da quelle già ricavate. Lo spirito che solitamente guida la scelta degli assiomi è quello tipico del metodo assiomatico: ottenere quanto auspicato a partire da un numero minimo di assunzioni. Sono possibili svariate assiomatizzazioni alternative, tutte tra loro equivalenti.

Un sistema assiomatico (di Hilbert-Bernays) assume come primitivi i cinque connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, i seguenti quindici schemi di assiomi:

(1) $A \to (B \to A)$
(2) $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
(3) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
(4) $A \wedge B \to A$
(5) $A \wedge B \to B$
(6) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
(7) $A \to A \vee B$
(8) $B \to A \vee B$
(9) $(A \to B) \to ((C \to B) \to (A \vee C \to B))$
(10) $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$
(11) $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$
(12) $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$
(13) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
(14) $A \to \neg\neg A$
(15) $\neg\neg A \to A$

e come unica regola il *modus ponens* (MP): se si sono ottenute le fp $A \to B$ e A (*premesse*) si può ottenere B (*conclusione*):

$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

Mediante l'apparato deduttivo si possono eseguire le derivazioni.

DEFINIZIONE 1. Una *derivazione* è una sequenza finita di fp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tale che ogni A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) è o un assioma, o è ottenuta da due fp che la precedono mediante un'applicazione della regola MP.

DEFINIZIONE 2. Si dice *derivabile* una fp A (e si scrive $\vdash A$) se e solo se esiste una derivazione di cui A è l'ultima fp.

Nel seguito useremo le lettere $X, Y, Z, \ldots$ per indicare insiemi di fp.

DEFINIZIONE 3. Dato un insieme X di fp, si dice *derivazione della fp A dall'insieme X* una sequenza finita di fp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tale che $A_n = A$ e ogni A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) è o un assioma, o è un elemento di X, o è ottenuta da due fp che la precedono mediante l'applicazione della regola MP.

DEFINIZIONE 4. Si dice che la fp A *è derivabile da* X, e si scrive $X \vdash A$, se e solo se esiste una derivazione di A da X.

Nel caso in cui l'insieme X è finito, ossia $X = \{A_1, A_2,..., A_n\}$, anziché $\{A_1, A_2,..., A_n\} \vdash A$, si scrive più brevemente $A_1, A_2,..., A_n \vdash A$.

Gli elementi di X sono detti *ipotesi*. Alla base delle precedenti definizioni vi è uno degli obiettivi principali dell'indagine logica, ossia ricondurre a "calcolo" l'attività deduttiva: da un insieme X di fp assunte come ipotesi si ottengono mediante gli assiomi e le regole dell'apparato deduttivo le fp derivabili da X, ossia le formule che seguono da X.

Utilizzando il simbolo $\vdash$ una regola quale il *modus ponens* si può scrivere nel modo seguente:

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

Nel seguito passeremo spesso dalla formulazione di un assioma (un'unica fp, ad esempio $A \wedge B \rightarrow A$) a quella di una regola (ad esempio $A \wedge B \vdash A$).

La semantica della logica proposizionale classica

Nella logica classica si assume il *principio di bivalenza*: ogni proposizione assume uno ed uno solo dei due *valori di verità*, il vero (**V**) o il falso (**F**). In essa si considerano poi solo connettivi *vero-funzionali*: un connettivo è vero-funzionale se e solo se il valore di verità della proposizione composta mediante quel connettivo dipende unicamente dai valori di verità delle proposizioni componenti. I principali connettivi vero-funzionali sono, come si è detto, la negazione $\neg$ ("non"), la congiunzione $\wedge$ ("e"), la disgiunzione non esclusiva $\vee$ ("o" nel senso di *vel*), il condizionale $\rightarrow$ ("se..., allora...", o anche "solo se") e il bicondizionale $\leftrightarrow$ ("se e solo se") e, a livello semantico, sono caratterizzati dalle seguenti tavole di verità:

A	$\neg A$
V	**F**
F	**V**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

I concetti semantici fondamentali sono definiti nel modo seguente.

DEFINIZIONE 5. Si dice *valutazione* l'attribuzione di un valore di verità, **V** o **F**, a tutte le lettere proposizionali p, q, r,... di U.

Data una qualsiasi valutazione v delle lettere proposizionali, a ciascuna fp A resta associato uno ed un solo valore di verità: se $v(A) = \mathbf{V}$ (v rende vera A), si dice che *v è modello di A*, e si scrive $v \models A$; in caso contrario, se $v(A) = \mathbf{F}$, *v non è modello* di A, e si scrive $v \not\models A$. Il calcolo del valore di verità di A si può eseguire mediante la compilazione della tavola di verità di A.

Inoltre, se X è un insieme di fp, $v \models X$ se e solo se $v \models A$ per ogni A appartenente a X (v è modello di tutte le fp appartenenti ad X).

DEFINIZIONE 6. Si dice che una fp A è una *tautologia*, e si scrive $\models A$, se e solo se assume sempre valore **V**:

$$\models A \text{ se e solo se, per ogni } v,\ v \models A$$

DEFINIZIONE 7. Si dice che una fp A è *conseguenza logica della fp* B, e si scrive $B \models A$, se e solo se ogni volta che B è vera, lo è anche A:

$$B \models A \text{ se e solo se, per ogni } v, \text{ se } v \models B, \text{ allora } v \models A$$

DEFINIZIONE 8. Si dice che due fp A e B sono *logicamente equivalenti*, e si scrive $A \cong B$, se e solo se ciascuna è conseguenza logica dell'altra:

$$A \cong B \text{ se e solo se } B \models A \text{ e } A \models B$$

DEFINIZIONE 9. Dati una fp A e un insieme X di fp, si dice che A è *conseguenza logica di* X, e si scrive $X \models A$, se e solo se A è vera ogni volta che sono vere le fp di X:

$X \models A$ se e solo se, per ogni v, se $v \models X$, allora $v \models A$.

Le tautologie costituiscono le *leggi della logica proposizionale classica.*

Principali leggi e regole logiche

Riportiamo, per comodità del lettore, un elenco di tautologie (leggi o principi logici) che menzioneremo spesso nel seguito del volume e che integra l'elenco dei precedenti assiomi:

(1) legge del terzo escluso:
$A \vee \neg A$
(2) legge di non contraddizione:
$\neg (A \wedge \neg A)$
(3) legge della doppia negazione intuizionista:
$A \rightarrow \neg \neg A$
(4) legge della doppia negazione classica:
$\neg \neg A \rightarrow A$
(5) proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione:
$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(6) proprietà distributiva della disgiunzione rispetto alla congiunzione:
$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(7) prima legge di De Morgan:
$A \wedge B \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$
(8) seconda legge di De Morgan:
$A \vee B \leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$
(9) legge di concatenazione:
$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
(10) legge di negazione classica:
$(\neg A \rightarrow B \wedge \neg B) \rightarrow A$
(11) legge di Scoto:
$A \wedge \neg A \rightarrow B$
(12) legge di negazione minimale:
$(A \rightarrow B \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
(13) legge di affermazione del conseguente:
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(14) legge di negazione dell'antecedente:
$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

(15) legge di contrapposizione:
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

(16) legge di Filone Megarico:
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$

(17) legge di Crisippo:
$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (A \wedge \neg B)$

(18) definizione della congiunzione mediante condizionale e negazione:
$A \wedge B \leftrightarrow \neg (A \rightarrow \neg B)$

(19) definizione della disgiunzione mediante condizionale e negazione:
$A \vee B \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

(20) legge del sillogismo disgiuntivo
$\neg A \wedge (A \vee B) \rightarrow B$

È opportuno tenere concettualmente distinte le "leggi" dalle "regole logiche", anche se, salvo casi eccezionali che vanno evidenziati, si può passare dalle une alle altre.

Ad esempio $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$ è una tautologia che esprime la *legge del modus ponens*, mentre la *regola del modus ponens* prima enunciata è costituita da due premesse e una conclusione.

Così, alle *leggi della doppia negazione intuizionista* e *classica* $A \rightarrow \neg\neg A$ e $\neg\neg A \rightarrow A$ corrispondono le due regole che possiamo scrivere:

$$A \vdash \neg\neg A \qquad \neg\neg A \vdash A$$

In generale, gli assiomi e le tautologie possono essere trasformati in regole e viceversa, anche se in ogni calcolo logico devono essere presenti regole per eseguire le derivazioni.

Teoremi di correttezza e completezza

I concetti sintattici di derivabilità e di derivabilità da un insieme X sono legati ai concetti semantici di tautologia e di conseguenza logica dai seguenti:

TEOREMA DI CORRETTEZZA DEBOLE	$\vdash A \Rightarrow \models A$
TEOREMA DI CORRETTEZZA FORTE	$X \vdash A \Rightarrow X \models A$
TEOREMA DI COMPLETEZZA DEBOLE	$\models A \Rightarrow \vdash A$
TEOREMA DI COMPLETEZZA FORTE	$X \models A \Rightarrow X \vdash A$

Il teorema di correttezza debole stabilisce che le fp derivabili sono tautologie, quello di correttezza forte stabilisce che le fp derivabili da un insieme X di ipotesi sono loro conseguenza logica. I teoremi di completezza sono gli inversi dei teoremi di correttezza. I primi costituiscono un requisito minimale dei calcoli logici e la loro dimostrazione è in genere alquanto semplice, i secondi stabiliscono un requisito massimale e la loro dimostrazione è spesso molto complessa. I quattro teoremi sanciscono la perfetta adeguatezza del calcolo alla sua semantica.

Parte prima
Logiche estensioni della logica classica

La logica proposizionale classica è una logica dichiarativa, si occupa cioè della verità delle proposizioni in rapporto a uno stato di cose del mondo reale, e concerne quindi la modalità dell'attualità. Nell'analisi del linguaggio naturale essa considera le proposizioni dichiarative, quasi sempre al modo indicativo, per fare asserzioni su un certo stato di cose. In essa si assume che una proposizione possa assumere uno ed uno solo dei due valori di verità, il vero (**V**) o il falso (**F**) (*principio di bivalenza*) e si considerano solo connettivi *vero-funzionali* (un connettivo è vero-funzionale se e solo se il valore di verità della proposizione composta mediante quel connettivo dipende unicamente dai valori di verità delle proposizioni componenti). In questa parte esaminiamo alcune logiche che *conservano il principio di bivalenza*, ma in cui si formalizza il comportamento logico di *connettivi non vero-funzionali*. Esse si presentano quindi come "estensioni della logica classica" in quanto in esse si amplia il linguaggio $\mathbf{L_0}$ di **PC** con l'aggiunta di nuovi connettivi.

Vi sono molte proposizioni del linguaggio naturale che, pur essendo di tipo dichiarativo, non sono verificabili prendendo in considerazione solo il contesto attuale di realtà. Ad esempio, possiamo ritenere vera la proposizione "È possibile che piova" anche se è una bellissima giornata e non c'è ombra di nuvole: non piove ma potrebbe piovere, ossia non vi è alcuna legge fisica che precluda il fatto che oggi avrebbe potuto piovere. Ma anche se questa legge ci fosse, ossia ci trovassimo in una particolare zona desertica la cui conformazione preclude il formarsi di nubi e le precipitazioni atmosferiche, non potremmo lo stesso dichiarare falsa la nostra proposizione: rimarrebbe la possibilità logica (che supera il concetto di possibilità fisica) dell'accadere del fatto che è dichiarato possibile. Se pronunciamo la proposizione "Necessariamente piove", non siamo portati a ritenerla vera anche se sta in realtà piovendo [1]: si possono facilmente concepire situazioni controfattuali nelle quali "Piove" è falsa. D'altra parte, a proposizioni del tipo "$2+2=4$" oppure "Piove o non piove" siamo propensi ad attribuire qualcosa di più della semplice verità. In altre parole, siamo disposti a ritenere vere "È necessario che (necessariamente) $2+2=4$" e "Necessariamente piove o non piove", in quanto non si danno situazioni controfattuali in cui le proposizioni "$2+2=4$" oppure "Piove o non piove" possono risultare false [2].

Quando un legislatore emana una norma che rende obbligatoria una data azione, ad esempio bere solo acqua minerale, oppure ne consente un'altra, ad esempio fumare a scuola, si immagina uno stato di cose, diverso da quello attuale, in cui tutti bevono acqua minerale oppure uno in cui si fuma anche a scuola.

Analogamente, può essere vera la proposizione "Massimo crede che la capitale d'Italia sia Milano" anche se è falsa la proposizione "La capitale d'Italia è Milano". La verità o falsità della proposizione "Massimo crede che la capitale d'Italia sia Milano" dipende non dallo stato attuale delle cose, ma dal complesso delle credenze di Massimo. D'altra parte, è da considerare falsa la proposizione "Massimo sa che la capitale d'Italia è Milano" poiché, ciò che si "sa", deve essere attualmente vero.

La logica proposizionale classica non contiene al suo interno strumenti linguistici adeguati per formalizzare proposizioni del tipo "È possibile che piova" , "Necessariamente piove o non piove", "È obbligatorio bere acqua minerale", "È permesso fumare a scuola", "Massimo crede che la capitale d'Italia sia Milano", "Massimo sa che la capitale d'Italia è Milano" se non trattandole come proposizioni semplici. Si può allora ampliare l'alfabeto della logica proposizionale con nuovi elementi che formalizzano gli operatori [3] che compaiono negli esempi precedenti:

- "È necessario che" e "È possibile che" sono operatori *modali aletici*;
- "È obbligatorio che" e "È permesso che" sono *operatori deontici*;
- "Un soggetto crede che" e "Un soggetto sa che" sono *operatori epistemici*.

L'analisi del comportamento logico di questi operatori ha dato origine a tre settori dell'indagine logica: le *logiche modali aletiche*, le *logiche deontiche* e le *logiche epistemiche*. In generale, si qualificano *intensionali* le logiche in cui si studia il comportamento logico di operatori e connettivi non vero-funzionali. Il loro studio ha radici remote, ma si è consolidato solo nella seconda metà del secolo scorso, quando gli sviluppi sintattici di tali sistemi sono stati affiancati da un'adeguata semantica, detta *semantica di Kripke* o *semantica dei mondi possibili*. Le proposizioni degli esempi precedenti, pur contenendo operatori diversi, hanno in comune la caratteristica che la loro verità o falsità richiede la considerazione di stati di cose che possono essere diversi da quello attuale, ossia, come è divenuto abituale dire, "mondi possibili". Ai nostri fini non è necessario entrare nel complesso problema di chiarire la natura del mondo attuale e dei mondi ad esso alternativi. Onde evitare fraintendimenti, osserviamo che il termine "mondo possibile" viene usato in senso metaforico e non allude a mondi extraterrestri o fantascientifici. Per gli scopi dell'indagine logica possiamo intendere un "mondo" alla maniera del primo Wittgenstein, come l'insieme delle proposizioni vere in una data situazione. Se una proposizione è vera in una situazione ed è falsa in un'altra, allora esse appartengono a due mondi diversi. Quando in logica classica si definisce una valutazione delle lettere proposizionali di U si crea un mondo e, a differenti valutazioni, corrispondono mondi diversi. Ad esempio, se in una valutazione $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(q) = \mathbf{F}$, al mondo appartengono le fp p, $\neg q$, $p \wedge \neg q$, $p \vee q$, $q \rightarrow p$, e in generale tutte le fp A tali che $v \models A$. Le righe che compongono le tavole di verità delle fp corrispondono quindi ad altrettanti "mondi possibili" e, in quest'ottica, si può dire che le tautologie sono le fp vere in tutti i mondi possibili.

La semantica dei mondi possibili riveste un ruolo fondamentale nell'analisi della gran parte dei sistemi di logica non classica e su di essa ci soffermiamo nel prossimo capitolo. Nei successivi capitoli di questa parte esamineremo successivamente alcune logiche modali aletiche, deontiche ed epistemiche e concluderemo esaminando varie logiche temporali.

2
La semantica di Kripke

Introduzione

In questo capitolo esponiamo la *semantica dei mondi possibili* (o *semantica di Kripke*). Essa è in grado di chiarire il significato degli operatori intensionali che analizzeremo nei prossimi capitoli. Da un punto di vista tecnico, la semantica dei mondi possibili è una semantica formale con caratteristiche non dissimili da quella sviluppata per i calcoli della logica classica. Proprio per questo essa ha una notevole flessibilità, che consente di adattarla a situazioni concettualmente assai dissimili fra loro. Il termine "mondi possibili" è usato per la sua suggestività: in sostanza ciò che accomuna il comportamento logico di molti operatori intensionali è, come si è detto, la necessità di considerare stati di cose alternativi a quello del mondo attuale.

La semantica dei mondi possibili, per quanto non particolarmente difficile sul piano tecnico, sfrutta tuttavia proprietà di natura algebrica delle relazioni. Riteniamo utile separare la parte più astratta della trattazione dalle sue applicazioni. Inizialmente, quindi, procederemo ad introdurre le parti tecniche rimandando i commenti esplicativi ai prossimi capitoli.

Nella semantica dei mondi possibili, come vedremo nel seguito del capitolo, un modello M è costituito da tre componenti, e quindi è una terna ordinata M = (W, R, I) costituita da un insieme non vuoto W di mondi, da una relazione binaria R di accessibilità tra i mondi e da una interpretazione I che associa in ciascun mondo di W il valore di verità **V** o **F** alle lettere proposizionali di $U = \{p, q, r, ...\}$. Quando è dato un modello, ogni formula A della logica intensionale ottenuta ampliando il linguaggio della logica proposizionale classica con due nuovi operatori ad un argomento L e M, assume in ciascun mondo di W uno ed uno solo dei due valori di verità. Continua pertanto a valere il principio di bivalenza. La lettura dei nuovi operatori L e M varia a seconda della logica che si considera: nelle *logiche modali aletiche* L e M si leggono "È necessario" e "È possibile", nelle *logiche deontiche* L e M si leggono "È obbligatorio" e "È permesso" (e per questo useremo O e P al posto di L e M) e nelle *logiche epistemiche* i nuovi operatori di "sapere" e di "credere" saranno indicati con S e C. Le considerazioni che svilupperemo in questo capitolo sono comuni a tutti e tre i tipi di sistemi logici, e continueremo ad usare L e M che il lettore può leggere "È necessario" e "È possibile". In queste logiche nelle formule compaiono i due nuovi operatori L e M per cui l'insieme delle formule si ottiene aggiungendo una nuova clausola alla definizione delle fp di $\mathbf{L_0}$:

Se A è una formula, allora LA e MA sono formule.

Pertanto, oltre a quelle della logica proposizionale classica **PC**, vi sono formule quali Lp, MLq, $Lp \wedge \neg Mq$, $L(p \rightarrow Mp)$, dette *formule modalizzate* in quanto in ciascuna di esse figura almeno uno dei due nuovi operatori.

Strutture (*Frames*)

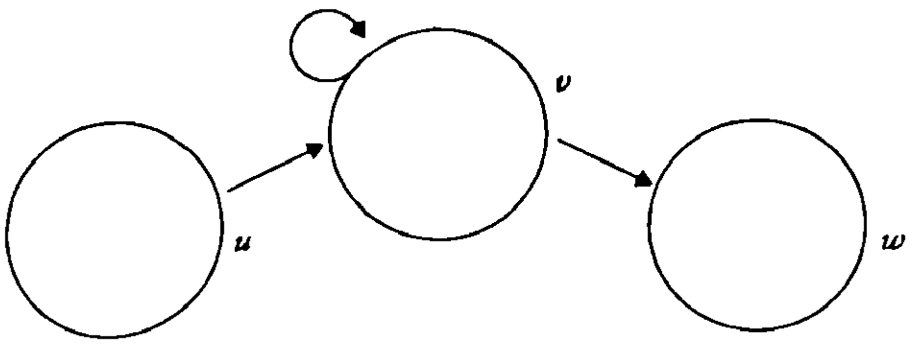
Si definisce *struttura* (o *frame*) una coppia ordinata (W, R), in cui W è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti *mondi possibili* (o più semplicemente *mondi*), e che indichiamo con le lettere $u, v, w, \ldots$ e R è una relazione binaria in W, ossia un sottoinsieme del prodotto cartesiano $W \times W$ (l'insieme di tutte le coppie ordinate aventi primo e secondo elemento in W). R viene detta *relazione di accessibilità*. Anziché $(u, v) \in R$ scriveremo spesso, come è abituale nella pratica matematica, uRv e diremo "da u si accede a v", "da u si vede v", "v è accessibile da u", "v è visto da u". L'idea, infatti, è che, se uRv, ciò che vale nel mondo v può influenzare cosa è vero e cosa è falso nel mondo u.

Vediamo due esempi di strutture con la rappresentazione grafica che utilizzeremo nel seguito.

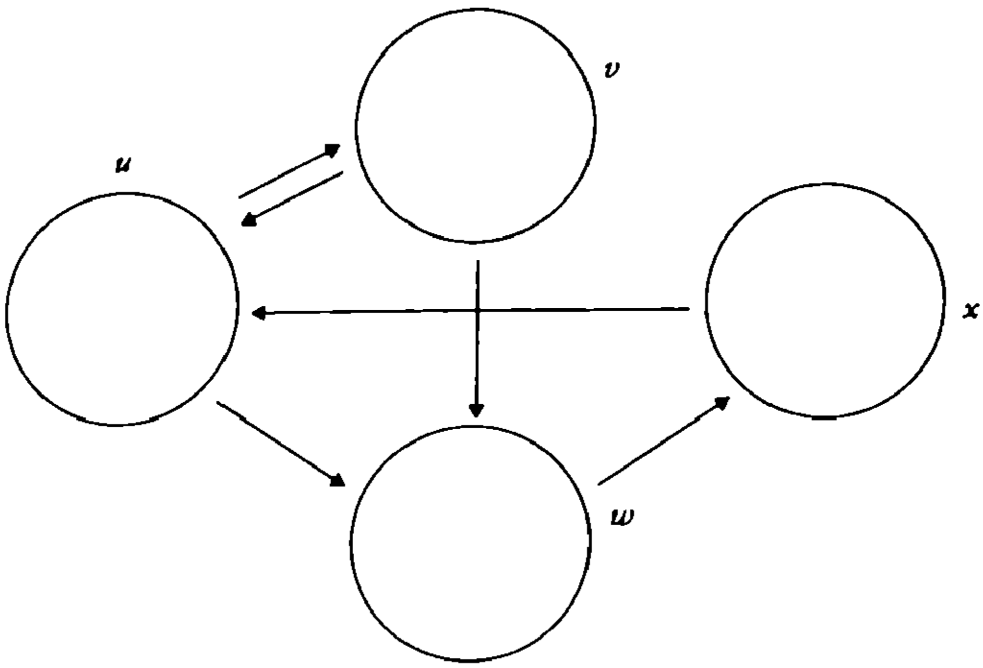
ESEMPIO 1. $W = \{u, v, w\}$; $R = \{(u, v), (v, v), (v, w)\}$

I tre mondi di W si rappresentano con diagrammi nei quali più avanti inseriremo le proposizioni vere nel mondo. I tre elementi di R sono rappresentati da frecce che visualizzano il fatto che, in questa struttura, da u

si accede a v, e da v si accede a v (e si dice anche che v *vede se stesso*) e a w, e nient'altro, ossia da u non si accede né a u, né a w, da v non si accede a u e da w non si accede ad alcun mondo, né a se stesso, né agli altri due (si dice anche che w è un mondo *cieco*).



ESEMPIO 2. $W = \{u, v, w, x\}$
$R = \{(u, v), (u, w), (v, u), (v, w), (w, x), (x, u)\}$



In questo esempio i mondi della struttura sono quattro e le frecce sono sei.

Si può notare che in questa struttura nessun mondo vede se stesso. Questa circostanza si può esprimere affermando che la relazione R è *irriflessiva*. Inoltre, nessun mondo è cieco: da ciascun mondo si accede ad almeno un altro. Questa circostanza si esprime dicendo che la relazione R è *seriale*.

In sostanza, per dare una struttura, basta disegnare un insieme qualsiasi di mondi e collegarli con frecce nel modo che si vuole. Nel seguito assumeranno rilevanza le strutture in cui la relazione R possiede determinate caratteristiche, quali ad esempio l'irriflessività o la serialità.

Interpretazioni e verità in strutture: modelli

Nella logica proposizionale classica, per attribuire uno dei due valori di verità (**V** o **F**) alle formule, si associa, mediante una valutazione, un valore di verità alle lettere proposizionali di U. In tal modo, tramite le tavole di verità che definiscono i connettivi vero-funzionali, si può calcolare il valore di verità di una qualsiasi fp. Tecnicamente, nella logica proposizionale classica una valutazione è una funzione di dominio U e codominio $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ che si estende ad una funzione dall'insieme di tutte le formule proposizionali nell'insieme dei valori di verità $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$.

Nelle logiche intensionali, ottenute con l'aggiunta dei due operatori L e M, l'assegnazione di valori di verità, detta *interpretazione* e indicata con I, viene riferita a una struttura (W, R). Più precisamente si associa un valore di verità alle lettere proposizionali di U in corrispondenza di ogni mondo di W (e l'associazione può variare da mondo a mondo). Tecnicamente, I è una funzione a due argomenti, avente come dominio l'insieme prodotto cartesiano $U \times W$ e come codominio $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$.

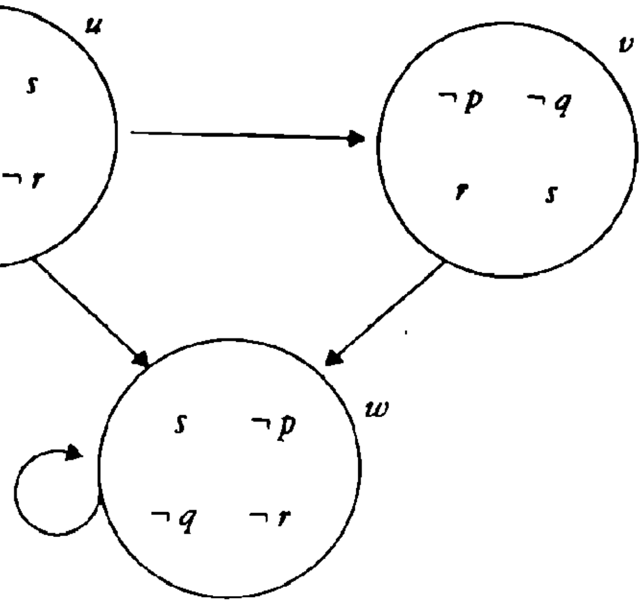
Così, ad esempio $I(p, u) = \mathbf{V}$ significa "p è vera nel mondo u", $I(q, w) = \mathbf{F}$ significa "q è falsa nel mondo w".

ESEMPIO 3. Sia data la struttura (W, R) con insieme di mondi $W = \{u, v, w\}$ e relazione di accessibilità $R = \{(u, v), (u, w), (v, w), (w, w)\}$. Una interpretazione I può essere definita come segue:

$I(p, u) = \mathbf{V}$	$I(p, v) = \mathbf{F}$	$I(p, w) = \mathbf{F}$
$I(q, u) = \mathbf{F}$	$I(q, v) = \mathbf{F}$	$I(q, w) = \mathbf{F}$
$I(r, u) = \mathbf{F}$	$I(r, v) = \mathbf{V}$	$I(r, w) = \mathbf{F}$
$I(s, u) = \mathbf{V}$	$I(s, v) = \mathbf{V}$	$I(s, w) = \mathbf{V}$

(cambiando a piacere i valori **V** e **F** si ottengono interpretazioni diverse).

Possiamo rappresentare in modo suggestivo i tre ingredienti introdotti perfezionando le figure precedenti inserendo in ciascun mondo le lettere alle quali I associa il valore **V** e le lettere precedute dalla negazione se I associa ad esse in quel mondo il valore **F**. Si ottiene il seguente diagramma:



Una struttura (W, R) con una interpretazione I ad essa relativa, che indichiamo con la terna ordinata (W, R, I), costituisce un *modello* $M = (W, R, I)$.

Mediante la definizione di modello siamo in grado di definire il fondamentale concetto semantico di *verità di una formula A in un mondo u*, che indichiamo con $(W, R, I), u \models A$ o, più brevemente, $M, u \models A$ che si legge: "A è vera nel mondo u in base a I nella struttura (W, R)" oppure "A è vera nel mondo u del modello M". $(W, R, I), u \not\models A$ oppure $M, u \not\models A$ stanno per "non $(W, R, I), u \models A$" oppure non $M, u \models A$.

La definizione, come usuale in logica, è per induzione sull'altezza (numero dei simboli logici) di A [1].

(1) $A = p$

$$M, u \models p \Leftrightarrow I(p, u) = \mathbf{V}$$

(2) $A = \neg B$

$$M, u \models A \Leftrightarrow M, u \not\models B$$

(3) $A = B \wedge C$

$$M, u \models A \Leftrightarrow M, u \models B \text{ e } M, u \models C$$

(4) $A = B \vee C$

$$M, u \models A \Leftrightarrow M, u \models B \text{ o } M, u \models C$$

(5) $A = B \rightarrow C$

$$M, u \models A \Leftrightarrow M, u \not\models B \text{ o } M, u \models C$$

(6) $A = LB$

$$M, u \models A \Leftrightarrow \text{per ogni } v \in W, \text{ se } uRv, \text{ allora } M, v \models B$$

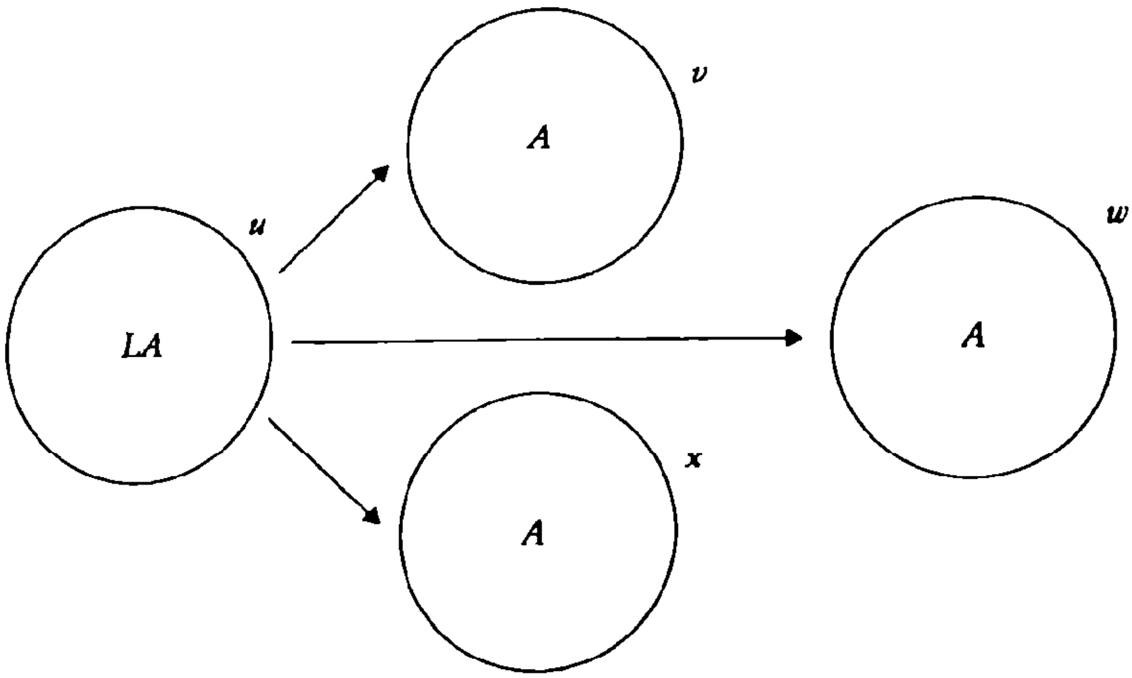
(7) $A = MB$

$$M, u \models A \Leftrightarrow \text{esiste } v \in W \text{ tale che } uRv \text{ e } M, v \models B$$

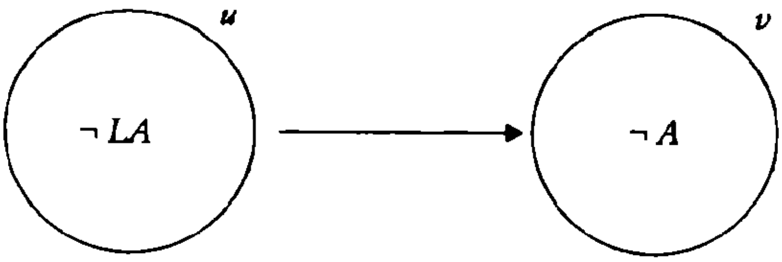
Le clausole (1)-(5) coincidono con quelle della logica proposizionale classica e (2)-(5) corrispondono alle tavole di verità dei connettivi vero-funzionali $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ (quella del bicondizionale $\leftrightarrow$, che abbiamo omesso per brevità, viene ricondotta nel modo usuale a quelle di $\wedge$ e $\rightarrow$). Pertanto, il valore di verità di una formula del linguaggio della logica proposizionale classica in un mondo *u* si calcola come nella logica classica, facendo riferimento al valore di verità assunto in quel mondo dalle lettere proposizionali (ossia, per valutarle in un mondo, non occorre "uscire" dal mondo stesso). La struttura interviene nella valutazione delle formule modalizzate. In base alla (6) la formula *LB* va dichiarata vera nel mondo *u* se e solo se *B* è vera in tutti i mondi di *W* accessibili da *u*. In base alla (7) la formula *MB* va dichiarata vera nel mondo *u* se e solo se *B* è vera in almeno un mondo di *W* accessibile da *u*.

In definitiva, la definizione di "*A* è vera nel mondo *u* del modello M" è tale che il valore di verità in *u* di una formula non contenente i due nuovi operatori dipende unicamente dal valore di verità che *I* associa in quel mondo alle lettere proposizionali di *A*. La struttura interviene per valutare in *u* le formule modalizzate.

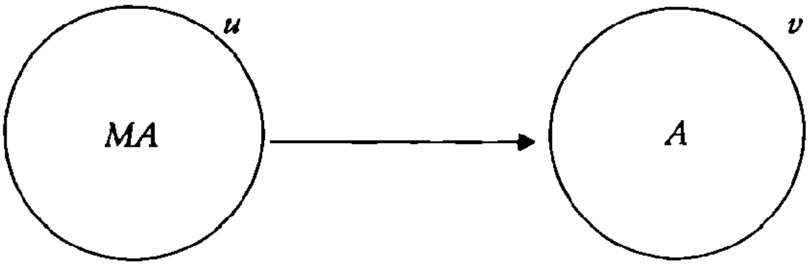
In base alla (6), *LA* è vera nel mondo *u* se e solo se *A* è vera in tutti i mondi di *W* accessibili da *u*:



Si noti che, in un mondo cieco *u*, tutte le formule modalizzate del tipo *LA* sono vere (affinché *LA* sia falsa in *u* occorre che vi sia almeno un mondo accessibile da *u* in cui *A* è falsa):



In base alla (7), MA è vera nel mondo u se e solo se A è vera in almeno un mondo di W accessibile da u:



Si noti che, in un mondo cieco u, tutte le formule modalizzate del tipo MA sono false (affinché MA sia vera in u occorre che vi sia almeno un mondo accessibile da u in cui A è vera).

ESEMPIO 3 (*continuazione*). Se consideriamo il modello dell'esempio 1 precedente, in base alla definizione induttiva possiamo stabilire la verità o falsità in u (o in uno qualsiasi degli altri due mondi v e w) di una qualsiasi formula. Ad esempio:

M, $u \models L \neg p$ poiché in tutti i mondi accessibili da u è vera $\neg p$
Analogamente valgono M, $u \models L \neg q$ e M, $u \models Ls$

M, $u \not\models Lr$ poiché nel mondo w accessibile da u non è vera r

M, $u \not\models L \neg r$ poiché nel mondo v accessibile da u non è vera $\neg r$

M, $u \models Mr$ poiché nel mondo v accessibile da u è vera r

M, $u \models M \neg r$ poiché nel mondo w accessibile da u è vera $\neg r$

In questo modello, in v sono vere tutte le formule LA con A vera in w, poiché w è l'unico mondo accessibile da v. Quindi, ad esempio:

M, $v \models Ls$ M, $v \models L\neg p$ M, $v \models L\neg q$ M, $v \models L\neg r$

M, $v \models L(s \vee p)$ M, $v \models L(p \rightarrow q)$ M, $v \models L(\neg p \wedge \neg r)$

Anche in w sono vere tutte le formule LB con B vera in w poiché w accede solo a se stesso. Inoltre:

$$\mathrm{M}, w \models \neg Mr \quad \mathrm{M}, w \models \neg M(q \wedge s) \quad \mathrm{M}, w \models \neg M(s \rightarrow p)$$

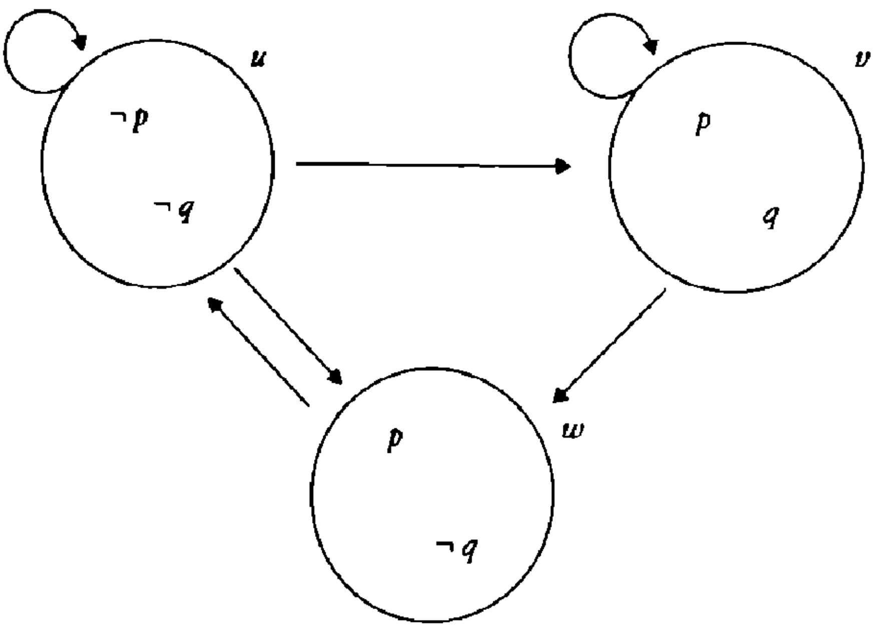
In base alla definizione proposta, comunque dato un modello $\mathrm{M} = (W, R, I)$ e un mondo u di W, per una qualsiasi formula della logica proposizionale modale vale $\mathrm{M}, u \models A$ oppure $\mathrm{M}, u \not\models A$, ossia A è vera o falsa nel mondo u del modello. Pertanto continua a valere il *principio di bivalenza*.

Data la centralità del concetto di verità di una formula in un mondo di un modello vediamo un ulteriore esempio.

ESEMPIO 4. Siano:

$W = \{u, v, w\}$
$R = \{(u, u), (u, v), (u, w), (v, v), (v, w), (w, u)\}$
$U = \{p, q\}$
$I(p, u) = \mathbf{F}; \quad I(p, v) = \mathbf{V}; \quad I(p, w) = \mathbf{V}$
$I(q, u) = \mathbf{F}; \quad I(q, v) = \mathbf{V}; \quad I(q, w) = \mathbf{F}$

La rappresentazione grafica è la seguente:



Valutiamo in tutti e tre i mondi di W alcune formule modalizzate e riportiamo nella seguente tabella i risultati ottenuti, invitando il lettore a determinarli da sé:

Formula	u	v	w
Lp	**F**	**V**	**F**
Lq	**F**	**F**	**F**
Mp	**V**	**V**	**F**
Mq	**V**	**V**	**F**
$L\neg p$	**F**	**F**	**V**
$L(p \vee q)$	**F**	**V**	**F**
$M(p \wedge q)$	**V**	**V**	**F**
$L(p \rightarrow q)$	**F**	**F**	**V**
MMp	**V**	**V**	**V**
$Lp \rightarrow Mq$	**V**	**V**	**V**

Dato che il valore assunto da una formula della logica proposizionale classica si calcola in ciascun mondo senza far riferimento a ciò che accade negli altri mondi, le tautologie continueranno ad essere sempre vere in ogni mondo: ciò che vale in logica classica continua a valere in ogni mondo di una struttura per qualsiasi interpretazione. Pertanto, le logiche che si basano sulla semantica di Kripke conservano le tautologie e le regole della logica classica. In sostanza, come si è detto, la nuova semantica interviene per valutare le formule contenenti i nuovi operatori.

Ogni formula del nuovo linguaggio assume in ciascun mondo uno ed uno solo dei due valori di verità **V** o **F** (vale il principio di bivalenza) e il concetto di verità è relativizzato ai mondi e vi è la possibilità di variare non solo le interpretazioni, ma anche la struttura, e quindi l'insieme W e la relazione R. Pertanto, la considerazione delle strutture e dei relativi modelli si è rivelato uno strumento molto flessibile, in grado di caratterizzare la semantica di molti sistemi logici intensionali.

Concetti semantici

In generale, al variare del mondo, cambia il valore di verità di una formula. Si può verificare il caso in cui una formula abbia lo stesso valore in tutti i mondi. Questa circostanza, unitamente alla presenza nella semantica di tre parametri (W, R e I) consente di introdurre varie definizioni.

(a) Una formula A è *valida in un modello* $\mathrm{M} = (W, R, I)$, e si scrive $\mathrm{M} \models A$ ($(W, R, I) \models A$) se e solo se A è vera in tutti i mondi di W. In formula:

$$\mathrm{M} \models A \quad \Leftrightarrow \quad \text{per ogni } u \text{ in } W, \mathrm{M}, u \models A$$

Ad esempio, se M è il modello dell'esempio 4, MMp, $Lp \rightarrow Mq$ e $\neg Lq$ sono valide in M ($\mathrm{M} \models MMp$; $\mathrm{M} \models Lp \rightarrow Mq$; $\mathrm{M} \models \neg Lq$).

(b) Una formula A *è valida in una struttura* (W, R), e si scrive $(W, R) \models A$, se e solo se, per ogni I, A è valida in (W, R, I). In formula:

$$(W, R) \models A \quad \Leftrightarrow \quad \text{per ogni } I, (W, R, I) \models A$$

ESEMPIO 5. Consideriamo la struttura dell'esempio 4 precedente (senza far riferimento all'interpretazione prima definita) e dimostriamo che $Lp \rightarrow Mp$ è valida nella struttura.

Per ottenere quanto richiesto, in questo caso in cui U è finito, potremmo passare in rassegna tutte le possibili interpretazioni (cambiando in tutti i mondi di W in tutti i modi possibili i valori assegnati a p e q) [2]. Possiamo tuttavia ragionare come segue. Affinché una interpretazione I renda falsa la formula $Lp \rightarrow Mp$ in un mondo x di W, occorre che Lp sia vera e Mp falsa. Affinché Lp sia vera, p deve essere vera in tutti i mondi accessibili da x. Affinché Mp sia falsa occorre che p sia falsa in tutti i mondi accessibili da x. Le due condizioni sono entrambe verificate solo se x è un mondo cieco. Dato che nella struttura considerata non vi sono mondi ciechi (da ogni mondo si accede ad almeno un altro), ossia R è seriale, non esiste alcuna I per cui la formula $Lp \rightarrow Mp$ sia falsa. Ciò significa che $(W, R) \models Lp \rightarrow Mp$.

Nel seguito avremo modo di considerare strutture in cui R gode di una determinata proprietà, ad esempio di essere seriale, oppure di essere simmetrica e transitiva. Indichiamo con R... il fatto che R goda della proprietà...

Ciò conduce alla seguente definizione:

(c) Una formula A *è valida in tutte le strutture* (W, R) *con* R... e si scrive $R... \models A$, se e solo se, per ogni I, A è valida in (W, R, I). In formula:

$$R... \models A \quad \Leftrightarrow \quad \text{per ogni } (W, R) \text{ con } R... \ (W, R) \models A$$

Il ragionamento eseguito nell'esempio 5 consente di stabilire che:

$$R \textit{ seriale} \models Lp \rightarrow Mp$$

La definizione più ampia di validità è la seguente:

(d) Una formula A è *valida*, e si scrive $\models A$, se e solo se è valida in tutte le strutture. In formula:

$$\models A \Leftrightarrow \quad \text{per ogni } (W, R), (W, R) \models A$$

Il concetto di validità per i calcoli logici intensionali è quindi alquanto articolato. Alla base vi è il concetto di verità in un mondo u di un dato modello $\mathrm{M} = (W, R, I)$. Se si fa variare u si ha il concetto di validità in M; se si fa variare I si ha il concetto di validità in una struttura (W, R); se si fa variare la struttura in quelle di una classe R..., si ha il concetto di validità per le strutture con R...; infine, se si fa variare la struttura in tutti i modi possibili, si ha la validità più generale: le formule valide A ($\models A$) sono nelle logiche modali le corrispettive delle tautologie della logica classica, ed è per questo che si impiega lo stesso simbolo $\models$.

Tali concetti si estendono in modo ovvio agli insiemi X di formule richiedendo che la condizione sia verificata per ogni formula A dell'insieme X. Ad esempio:

$$(W, R, I), u \models X \quad \Leftrightarrow \quad \text{per ogni } A \text{ in } X, (W, R, I), u \models A$$

Dai quattro concetti di validità illustrati, si ottengono altrettanti concetti di *conseguenza logica di una formula A da un insieme X* di formule:

(a′) *Conseguenza logica in un modello* $\mathrm{M} = (W, R, I)$:

$$\mathrm{M}, X \models A \Leftrightarrow \text{per ogni } u \text{ in } W, \text{ se } \mathrm{M}, u \models X, \text{ allora } \mathrm{M}, u \models A$$

(b′) *Conseguenza logica in una struttura* (W, R):

$$(W, R), X \models A \Leftrightarrow \text{per ogni } I, (W, R, I), X \models A$$

(c′) *Conseguenza logica in una classe di strutture* (con R...):

$$X \models A \text{ (con } R...) \Leftrightarrow \text{per ogni } (W, R) \text{ con } R... , (W, R), X \models A$$

(d′) *Conseguenza logica in tutte le strutture*:

$$X \models A \Leftrightarrow \text{per ogni } (W, R), \text{ se } (W, R) \models X, \text{ allora } (W, R) \models A$$
$$\Leftrightarrow \text{per ogni } (W, R), (W, R), X \models A$$

Come per la semantica della logica proposizionale classica si possono introdurre concetti di soddisfacibilità di formule e di insiemi, ma, dato che non ci addentreremo in particolari questioni tecniche, non abbiamo bisogno di proporre qui una loro definizione esplicita.

Numerose applicazioni dei concetti di validità ora definiti saranno illustrate nei prossimi capitoli. Nella semantica di Kripke ogni formula riceve in ciascun mondo di un modello uno ed uno solo dei due valori di verità **V** o **F**. Pertanto essa è in grado di fornire lo sfondo per le logiche che, pur estendendo la logica classica, mantengono il principio di bivalenza. Il suo "successo" nei settori esaminati in questa parte del testo giustifica la necessità di capire con chiarezza gli aspetti tecnici su cui ci siamo soffermati e che sfrutteremo ampiamente nel seguito. Tra l'altro, anche molte logiche in cui si rifiuta il principio di bivalenza, e che esamineremo nella seconda parte, sfruttano la flessibilità della semantica di Kripke considerando, ad esempio, mondi incompleti (in cui non ogni formula riceve un valore di verità) o mondi contraddittori (in cui sono presenti contraddizioni) e altre varianti. La valutazione delle formule nella semantica di Kripke, pertanto, riveste una notevole importanza per quasi ogni settore della logica ed è, per le logiche che esamineremo, corrispettiva della compilazione della tavola di verità per le formule della logica classica. Per inciso, essa consente in molti casi di decidere in un numero finito di passi il valore di verità delle formule nei mondi: molte logiche che incontreremo nel seguito sono *decidibili* come la logica proposizionale classica [3].

3
La logica modale minimale

Introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo enunciato la definizione di *validità* di una formula nella semantica di Kripke: una formula A è *valida* se e solo se, comunque dati l'insieme di mondi possibili W, la relazione di accessibilità R, l'interpretazione I e il mondo u di W, A è vera nel mondo u del modello $M=(W, R, I)$. Nonostante la presenza di quattro elementi di variabilità, vi sono molte formule valide (vere in ogni mondo di ogni modello). Il loro insieme costituisce la cosiddetta *logica intensionale minimale*, che viene abitualmente indicata con **K** (da Kripke) nella letteratura: le formule valide in essa sono valide in quasi tutte le logiche intensionali che considereremo nei prossimi capitoli, e quindi dedichiamo interamente ad esse questo capitolo. Ricordiamo il fatto che le *tautologie* della logica proposizionale classica sono vere in ogni mondo di ogni modello. Per questo motivo **PC** è contenuto in **K**.

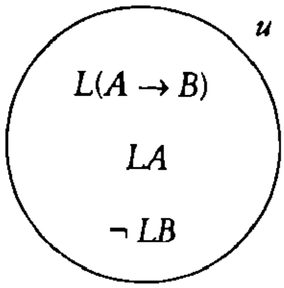
Formule valide

ESEMPIO 1. Dimostriamo che è valida la formula [1]:

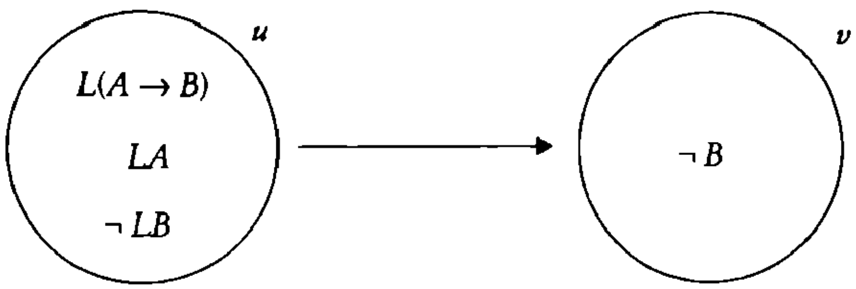
$$L(A \to B) \to (LA \to LB)$$

Si deve dimostrare che, qualsiasi sia il modello M e il mondo u di W, essa è vera in u. La dimostrazione di un risultato di questo tipo si può ottenere ragionando per assurdo. In questo primo esempio illustriamo tutti i passaggi in quanto riteniamo importante acquisire familiarità con questo procedimento abituale nello studio delle logiche intensionali.

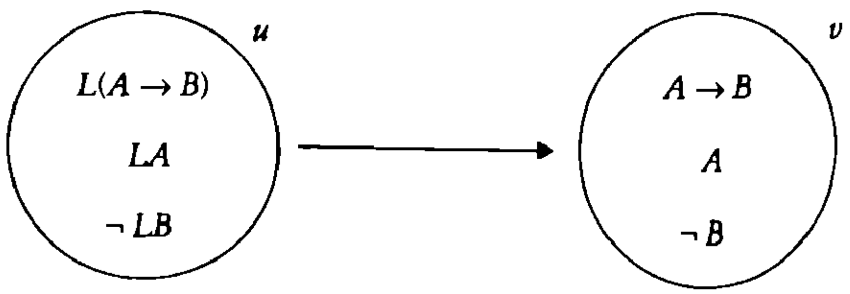
Supponiamo, per assurdo, che la formula $L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$ non sia valida: in base alla definizione di validità deve esistere almeno un modello $M = (W, R, I)$ e un mondo u di W in cui essa è falsa. Trattandosi di un condizionale, in u l'antecedente risulta vero e il conseguente falso, ossia in u è vera $L(A \rightarrow B)$ e falsa $LA \rightarrow LB$. Poiché in u è falso $LA \rightarrow LB$, in u deve essere vera LA e falsa LB (ossia vera $\neg LB$). Rappresentiamo tutte queste informazioni su u nel seguente diagramma:



Delle tre formule vere in u la più informativa è l'ultima: se in u è falsa LB, deve esistere un mondo v di W accessibile da u in cui è falsa B (se in tutti i mondi accessibili da u fosse vera B, allora in u sarebbe vera LB), ossia vera $\neg B$. Il diagramma si sviluppa allora nel modo seguente:



D'altra parte, poiché in u sono vere $L(A \rightarrow B)$ e LA, le formule $A \rightarrow B$ e A devono essere vere in ogni mondo accessibile da u, e quindi anche in v. Si ottiene allora:

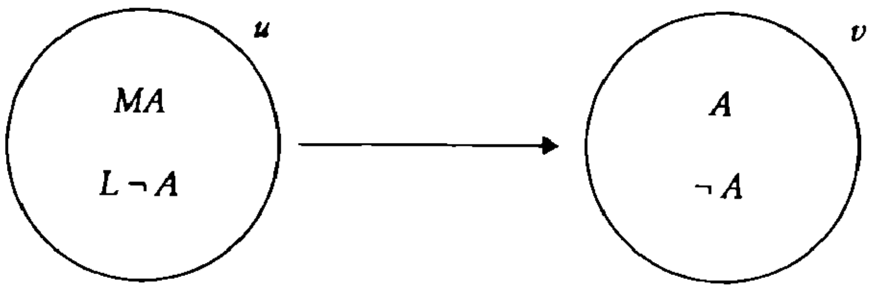


La situazione che si è venuta a stabilire in v è assurda poiché in un mondo non possono essere vere $A \to B$ e A, e falsa B. L'assurdo trovato prova il risultato voluto.

Abbiamo così dimostrato la validità della formula che, leggendo L come "È necessario", esprime la seguente proprietà: "Se è necessario che da A segue B, allora, se A è necessaria, ne segue che è necessaria B", che siamo tutti disposti ad accettare in base al significato intuitivo di "È necessario" [2].

ESEMPIO 2. Dimostriamo che è valido il condizionale $MA \to \neg L \neg A$.

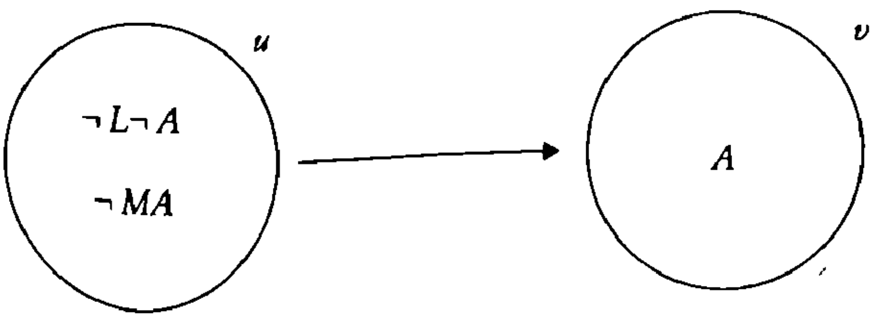
Ragionando come nell'esempio precedente, se il condizionale non fosse valido, vi sarebbe un mondo u di un modello M in cui è falso, ossia in cui è vera MA e falsa $\neg L \neg A$, ossia vera $L \neg A$:



Dato che in u risulta vera MA, deve esistere in W un mondo v accessibile da u in cui è vera A. D'altra parte, poiché in u è vera $L \neg A$, $\neg A$ è vera in tutti i mondi accessibili da u, e quindi è vera anche in v. Si perviene a un assurdo poiché in v risultano vere sia A che $\neg A$, e ciò è impossibile.

ESEMPIO 3. Dimostriamo che è valido il condizionale $\neg L \neg A \to MA$.

Se $\neg L \neg A \to MA$ non fosse valido vi sarebbe un mondo u di un modello M in cui è vera $\neg L \neg A$ e falsa MA. Se è vera $\neg L \neg A$, ossia falsa $L \neg A$, vi deve essere in W un mondo v accessibile da u in cui $\neg A$ è falsa, ossia A è vera:



Ma se A è vera in v, dato che v è accessibile da u, in u deve essere vera MA, e ciò è assurdo poiché in u è vera $\neg MA$.

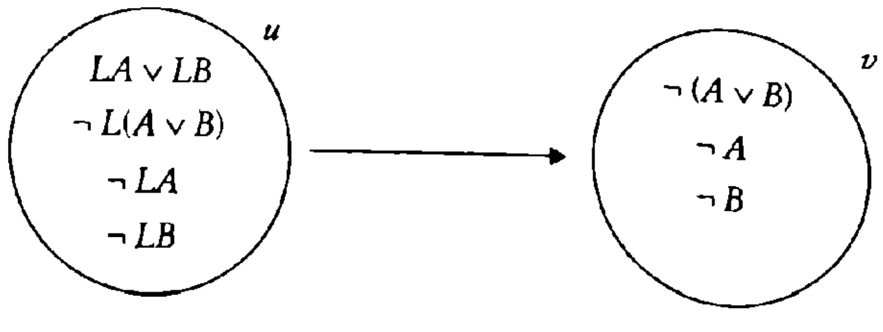
Dalla validità di $MA \rightarrow \neg L \neg A$ e di $\neg L \neg A \rightarrow MA$ segue quella del bicondizionale $MA \leftrightarrow \neg L \neg A$, ossia l'equivalenza logica di MA e $\neg L \neg A$. Ciò significa che, in base alla nuova nozione di validità, l'operatore M si può definire a partire da L.

Vale anche il viceversa: mediante la validità del bicondizionale $LA \leftrightarrow \neg M \neg A$, che invitiamo il lettore a dimostrare da sé, si stabilisce che L si può definire a partire da M: sono valide le formule che formalizzano le seguenti proprietà intuitivamente verificate dagli operatori di possibilità e necessità: "A è possibile se e solo se non è necessaria non A" e "A è necessaria se e solo se non è possibile non A". Per inciso, notiamo che la situazione è analoga a quanto avviene per i quantificatori esistenziale e universale della logica dei predicati classica: "Esiste" equivale a "Non per ogni non" e "Per ogni" equivale a "Non esiste non".

ESEMPIO 4. La dimostrazione della validità della formula:

$$LA \vee LB \rightarrow L(A \vee B)$$

conduce al seguente diagramma:

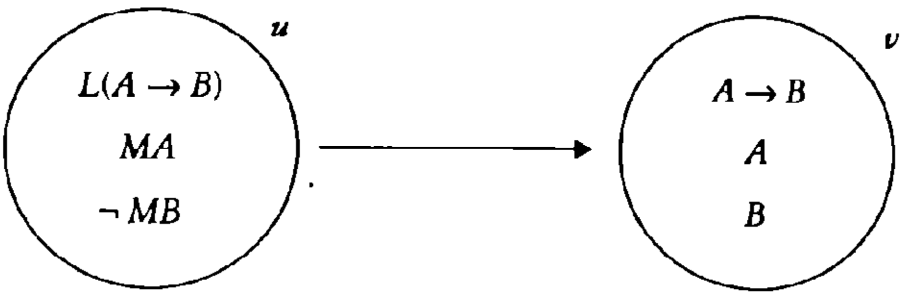


Poiché in u risulta falsa $L(A \vee B)$, vi deve essere un mondo v accessibile da u in cui è falsa $A \vee B$, e quindi in cui sono false sia A che B. Ma allora in u risulterebbero false sia LA che LB, in contraddizione con l'ipotesi che in u è vera $LA \vee LB$.

ESEMPIO 5. La dimostrazione della validità della formula:

$$L(A \rightarrow B) \rightarrow (MA \rightarrow MB)$$

conduce al seguente diagramma:



Lasciamo come esercizio individuare l'assurdo che si cela in esso.

Proponiamo ora un elenco di formule valide e invitiamo il lettore a esercitarsi dimostrandone la validità:

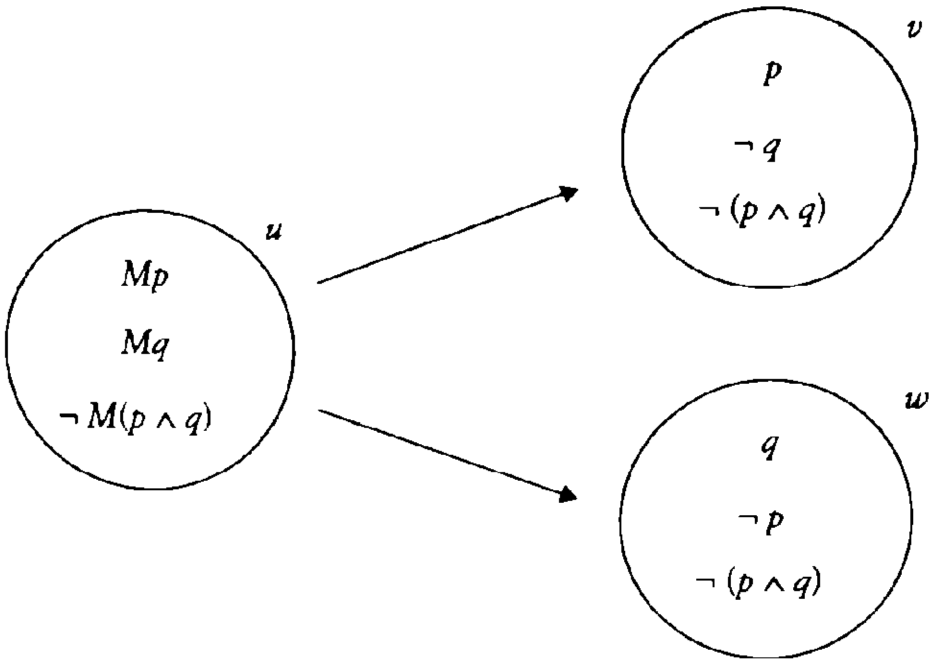
(a)	$L(A \wedge B) \leftrightarrow LA \wedge LB$	(b)	$\neg LA \leftrightarrow M \neg A$
(c)	$\neg MA \leftrightarrow L \neg A$	(d)	$LM \neg A \leftrightarrow \neg MLA$
(e)	$ML \neg A \leftrightarrow \neg LMA$	(f)	$\neg LLA \leftrightarrow MM \neg A$
(g)	$\neg MMA \leftrightarrow LL \neg A$	(h)	$M(A \wedge B) \to MA \wedge MB$
(i)	$M(A \vee B) \leftrightarrow MA \vee MB$	(l)	$LA \to (MB \to M(A \wedge B))$

Queste formule esprimono proprietà che sono intuitivamente verificate dagli operatori di "È necessario" e "È possibile", ma che, come si è detto, mantengono la loro validità anche con altre interpretazioni diverse di L e M.

Formule non valide

Ovviamente, con lo stesso procedimento finora impiegato si può dimostrare che una formula *non* è valida: in tal caso si ottiene un diagramma che non contiene contraddizioni e che rappresenta un modello in cui la formula è falsa in almeno un mondo.

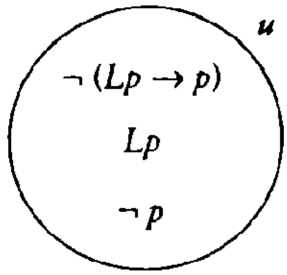
ESEMPIO 6. Verifichiamo che la formula $Mp \wedge Mq \to M(p \wedge q)$ non è valida. Se in un mondo u è vera $Mp \wedge Mq$, ossia sono vere le formule Mp e Mq, ed è falsa $M(p \wedge q)$, si può dedurre che vi è un mondo v accessibile da u in cui è vera p e un mondo w accessibile da u in cui è vera q. Se in v si pone falsa q e in w si pone falsa p, in entrambi è falsa $p \wedge q$ e non si ha alcuna contraddizione col fatto che in u è falsa $M(p \wedge q)$:



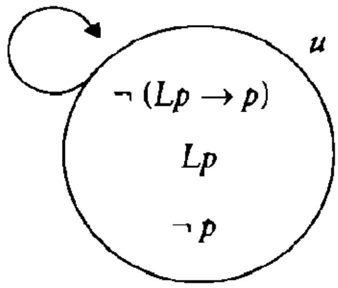
La figura rappresenta un modello con tre mondi in cui la formula è falsa in u e si è così stabilito che non è valida una formula che esprime una proprietà sicuramente non accettabile dal punto di vista intuitivo rispetto all'operatore di possibilità: due proposizioni possono essere possibili senza che lo sia la loro congiunzione. Ad esempio sono vere "È possibile che Angelo sia siciliano" e "È possibile che Angelo sia sardo", ma non è vera "È possibile che Angelo sia siciliano e sardo".

Dalla non validità della formula $Mp \wedge Mq \rightarrow M(p \wedge q)$ segue, a maggior ragione, quella dello schema $MA \wedge MB \rightarrow M(A \wedge B)$. In generale in logica i risultati di validità riguardano schemi di formule, ossia si possono estendere da formule a schemi (ad esempio, dall'essere tautologia $p \vee \neg p$ segue che sono tautologie tutte le formule del tipo $A \vee \neg A$). I risultati di *non* validità si estendono dalle formule agli schemi nel senso che, se una formula non è valida, non lo è, a maggior ragione, il corrispondente schema. Tuttavia nello schema possono rientrare anche formule valide. Ad esempio $\neg p \rightarrow p$ non è una tautologia, e quindi $\neg A \rightarrow A$ non è uno schema di tautologie, anche se, ad esempio, la fp $\neg(p \vee \neg p) \rightarrow (p \vee \neg p)$ è una tautologia.

ESEMPIO 7. Consideriamo ora la formula $Lp \rightarrow p$. Essa esprime una proprietà dell'operatore di necessità che appare completamente ovvia dal punto di vista intuitivo: "Se la proposizione p è necessariamente vera, allora è vera". Tuttavia la formula non è valida. Infatti, se essa è falsa in un mondo u di un modello M, allora in u è vera Lp e falsa p:



Ebbene, il modello con un unico mondo illustrato nel diagramma non contiene alcuna contraddizione. Il fatto che in u sia vera Lp comporta che p sia vera in tutti i mondi accessibili da u, ma non è detto che u veda se stesso in cui p è falsa. Come vedremo nel prossimo capitolo, dedicato alla logica modale aletica, dovremo fare in modo non solo che la formula $Lp \rightarrow p$ sia valida, ma che lo sia il corrispondente schema $LA \rightarrow A$ poiché esprime una proprietà basilare dell'operatore di necessità. In questo caso la soluzione è semplice: basta imporre che la relazione R di accessibilità sia riflessiva, ossia che ogni mondo veda se stesso. In tal modo il diagramma diviene:



e si ha la contraddizione che in u vale Lp e in un mondo accessibile a u, cioè u stesso, p è falsa. Quindi $Lp \rightarrow p$ non può essere vera in u.

Il lettore verifichi che non sono valide le formule:

(m) $Lp \rightarrow Mp$
(n) $L(p \vee q) \rightarrow (Lp \vee Lq)$
(o) $Lp \rightarrow LLp$

Il calcolo **K** della logica modale minimale

Finora abbiamo caratterizzato **K** dal punto di vista semantico, ossia come l'insieme delle formule valide in tutti i mondi di tutti i modelli. La presentazione di **K** come calcolo logico assiomatico si ottiene estendendo un qualsiasi calcolo logico assiomatico per la logica proposizionale classica. Ampliamo il linguaggio $\mathbf{L_0}$ di **PC** con l'operatore L e definiamo M in funzione di L:

$$MA =_{\mathrm{df}} \neg L \neg A$$

Ampliamo l'apparato deduttivo di **PC** con l'assioma relativo all'operatore L:

$$L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB) \qquad (\textit{assioma di distribuzione})$$

e con la nuova regola di derivazione, detta *regola di necessitazione*:

se si è derivato A, allora si può derivare LA
(se $\vdash A$, allora $\vdash LA$)

Si noti che questa regola non afferma che da A segue LA (ossia che si assume $A \rightarrow LA$), ma che, "se si è derivata" A, allora si può derivare LA. Vedremo tra breve che le formule derivabili sono valide (vere in ogni mondo di ogni modello) e quindi sono anche "necessariamente vere".

A titolo di esempio vediamo come si può derivare in **K** la formula:

$$L(A \wedge B) \rightarrow LA \wedge LB$$

Dato che **K** estende **PC**, in **K** sono derivabili tutte le tautologie della logica proposizionale classica, in particolare:

$$A \wedge B \rightarrow A$$

Dalla regola di necessitazione segue:

$$L(A \wedge B \rightarrow A)$$

Per l'assioma di distribuzione si ha:

$$L(A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (L(A \wedge B) \rightarrow LA)$$

e quindi, per la regola del *modus ponens*:

$$L(A \wedge B) \rightarrow LA$$

Con analoghi passaggi, dalla tautologia $A \wedge B \rightarrow B$ segue:

$$L(A \wedge B) \rightarrow LB$$

Da $L(A \wedge B) \rightarrow LA$ e $L(A \wedge B) \rightarrow LB$ segue $L(A \wedge B) \rightarrow LA \wedge LB$ sfruttando la tautologia $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$ che è derivabile in **K**.

Si può facilmente dimostrare che tutte le formule derivabili in **K** sono valide (*teorema di correttezza*). Infatti, sia le tautologie che l'assioma di distribuzione, come si è visto in precedenza nell'esempio 1, sono formule valide e la regola del *modus ponens* conserva la validità. Per stabilire il teorema di correttezza, basta allora dimostrare che la regola di necessitazione conserva la validità, ossia che, se A è valida, lo è anche LA. Infatti, se LA non fosse valida, vi sarebbe un mondo u di un modello M in cui LA è falsa. Ma allora dovrebbe esserci in W un mondo v accessibile da u in cui A è falsa. Ma ciò è assurdo poiché, per ipotesi, A è valida (ossia vera in tutti i mondi di tutti i modelli).

Si può dimostrare anche che *tutte le formule valide sono derivabili in* **K** (*teorema di completezza*). Come nel calcolo proposizionale classico sono derivabili tutte e sole le tautologie, così in **K** sono derivabili tutte e sole le formule valide. Come è noto, i teoremi di correttezza e completezza sanciscono l'adeguatezza del calcolo alla semantica proposta, ossia che il concetto semantico di validità è equivalente al concetto sintattico di derivabilità nel calcolo.

In particolare si possono derivare in **K** tutte le formule valide elencate a p. 43. Per svolgere più agevolmente derivazioni in **K** si può usare la seguente *regola di necessitazione generalizzata*:

$$\text{se } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A, \text{ allora } LA_1, LA_2, \ldots, LA_n \vdash LA$$

che, come si può facilmente verificare, equivale all'unione dell'assioma di distribuzione e della regola di necessitazione.

4
Logiche modali aletiche

Introduzione

Le logiche modali aletiche studiano il comportamento logico delle modalità del "necessario", del "possibile", dell'"impossibile" e del "contingente". Si amplia allora il linguaggio della logica proposizionale classica con due nuovi operatori L e M: LA si legge "È necessaria A" ("A è necessariamente vera"), MA si legge "È possibile A" [1].

Non è necessario introdurre simboli specifici per indicare l'"impossibile" e il "contingente", in quanto un'analisi linguistica rivela immediatamente che "È impossibile A" equivale a "Non è possibile A" e si può formalizzare con $\neg MA$, mentre "A è contingente" si può ritenere equivalente a "A è vera ma non necessariamente vera", e si può formalizzare con $A \wedge \neg LA$.

Inoltre, si può anche dire che "A è contingente" equivale a "A è vera, ma è possibile che sia falsa" e formalizzarla con $A \wedge M \neg A$.

Infatti, come visto nel capitolo precedente, si può assumere che i due operatori L e M siano interdefinibili: affermare "È necessaria A" equivale ad affermare "Non è possibile che A sia falsa" ("Non è possibile non A") e, viceversa, "È possibile A" equivale a "Non è necessariamente vero che A sia falsa" ("Non è necessaria non A"). In altre parole, in un qualsiasi calcolo modale aletico usualmente si assumono i seguenti bicondizionali:

$$LA \leftrightarrow \neg M \neg A \qquad\qquad MA \leftrightarrow \neg L \neg A$$

o, ancora meglio, si può introdurre uno solo dei due operatori e ritenere l'altro introdotto mediante una definizione. Se si assume come primitivo L, allora M sta per $\neg L \neg$, e viceversa, se si assume come primitivo M, L sta per $\neg M \neg$. Inoltre, la formula $L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$ è intuitivamente accettabile per l'operatore di necessità. Come il lettore avrà certamente riconosciuto, tutto quanto abbiamo assunto nella logica modale minimale **K**, compresa la regola di necessitazione, vale nella logica modale aletica, e pertanto la semantica di Kripke può essere considerata uno strumento adeguato per trattare gli operatori modali aletici. Tuttavia, come rilevato nel precedente capitolo, la formula $Lp \to p$, pur esprimendo una proprietà caratteristica dell'operatore di necessità ("Ciò che è necessariamente vero è vero"), non è valida (e quindi non è derivabile in **K**, in cui sono derivabili tutte e sole le formule valide).

La logica modale aletica minimale KT

La *logica modale aletica minimale* si indica con **KT**, e talvolta nella letteratura anche con **M** (minimale), e si ottiene aggiungendo a **K** come nuovo assioma lo schema

(T) $$LA \to A$$

Sono derivabili in **KT** tutte le formule derivabili in **K** (ossia tutte le formule valide nella semantica di Kripke) più altre nella cui derivazione si usa l'assioma T, ad esempio:

$\vdash A \to MA$ (ossia $\vdash A \to \neg L \neg A$)

Basta infatti applicare a $L \neg A \to \neg A$ (assioma T) la regola di contrapposizione per ottenere quanto richiesto.

Per ottenere una semantica adeguata a **KT** occorre modificare la nozione di validità della semantica di Kripke in modo che lo schema $LA \to A$ risulti valido. A tal fine si sfrutta la nozione di *validità in una struttura* (W, R):

una formula A è valida in (W, R) se e solo per ogni interpretazione I e per ogni mondo u di W, A è vera in u rispetto a $M = (W, R, I)$.

Il teorema che consente di pervenire a quanto si desidera è il seguente:

TEOREMA 1: *La formula $Lp \to p$ è valida in (W, R) se e solo se R è riflessiva.*

Equivalenze di questo tipo sono fondamentali nello studio delle logiche intensionali e quindi, almeno in questo primo semplice caso, ne proponiamo la dimostrazione.

Dimostriamo prima che, se $Lp \to p$ è valida in (W, R), allora R è riflessiva, ossia che, se u è un mondo qualsiasi di W, allora uRu. Sia allora u un mondo qualsiasi di W. Definiamo la seguente interpretazione I in (W, R):

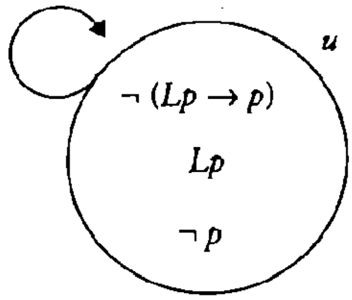
per ogni w di W, $I(p, w) = \mathbf{V}$ se e solo se uRw

In base a I, in u è vera Lp (in tutti i mondi accessibili da u è vera p).

Dato che, per ipotesi, $Lp \rightarrow p$ è valida in (W, R), essa è vera in tutti i mondi di W, e quindi anche in u; dalla verità in u di Lp e di $Lp \rightarrow p$ segue la verità di p, ossia che $I(p, u) = \mathbf{V}$. Dalla definizione di I si ottiene uRu.

Dimostriamo ora che, se R è riflessiva, allora $Lp \rightarrow p$ è valida in (W, R).

Se $Lp \rightarrow p$ non fosse valida in (W, R), vi sarebbero una interpretazione I e un mondo u di W in cui è falsa, e quindi Lp vera e p falsa (vera $\neg p$):



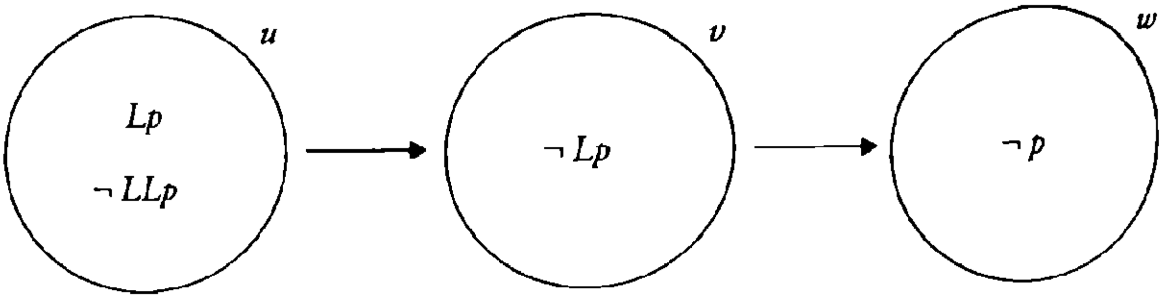
Dato che per ipotesi R è riflessiva, si ha l'assurdo che in u sarebbe vera Lp e in un mondo accessibile da u, ossia u stesso, sarebbe falsa p [2].

Ne seguono facilmente il *teorema di correttezza* per **KT** (ogni formula derivabile in **KT** è valida in tutte le strutture (W, R) con R riflessiva) e si può dimostrare anche il *teorema di completezza* (ogni formula valida in tutte le strutture (W, R) con R riflessiva è derivabile in **KT**), per cui il nuovo concetto di validità è equivalente alla derivabilità in **KT**.

Molti logici ritengono che il sistema **KT** sia troppo debole per fornire una formalizzazione adeguata della "necessità" e sono state proposte alcune sue estensioni.

· Il sistema **KT4** (S4)

Consideriamo la formula $Lp \rightarrow LLp$ ("Se p è necessaria, allora è necessariamente vero che p è necessaria") che è intuitivamente meno accettabile di quelle finora incontrate. La semantica dei mondi possibili consente di chiarire il suo *status* logico. Supponiamo che essa sia falsa in un mondo u di un modello M, ossia che in u sia vera Lp e falsa LLp (vera $\neg LLp$). Dalla falsità di LLp segue che deve esistere in W un mondo v accessibile da u in cui è falsa Lp (vera $\neg Lp$). Dalla falsità di Lp in v segue che deve esistere in W un mondo w accessibile da v in cui p è falsa. Si trova il seguente diagramma che rappresenta un modello in cui $Lp \to LLp$ è falsa in u. Quindi $Lp \to LLp$ non è valida, e non lo diviene anche se imponiamo che R sia riflessiva (ossia che i tre mondi u, v e w vedano se stessi).



Abbiamo ottenuto il seguente risultato: la formula $Lp \to LLp$ non è derivabile in **KT** e quindi si ottiene un sistema logico più ricco aggiungendo a **KT** l'assioma:

(4) $$LA \to LLA$$

che indicheremo con **KT4** e che è spesso indicato nella letteratura, per le ragioni che vedremo a p. 57, con **S4**. Per trovare la semantica adeguata a questo sistema occorre individuare una nuova nozione di validità in base alla quale $Lp \to LLp$ risulti valida. Il diagramma precedente suggerisce come procedere. Se il mondo w fosse accessibile da u, il modello precedente verrebbe a contenere l'assurdo che in u è vera Lp e nel mondo w accessibile da u, p è falsa. Pertanto, se si impone che la relazione R sia transitiva (da uRv e vRw segue uRw), allora $Lp \to LLp$ è valida. Più precisamente, si può dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 2: *La formula $Lp \to LLp$ è valida in (W, R) se e solo se R è transitiva*

mediante il quale si dimostra facilmente il *teorema di correttezza* per **KT4**:

ogni formula derivabile in **KT4** è valida in tutte le strutture (W, R) con R riflessiva e transitiva.

Si può poi dimostrare anche il *teorema di completezza*:

ogni formula valida in tutte le strutture (W, R) con R riflessiva e transitiva è derivabile in **KT4**.

Ecco quindi il ruolo svolto dalla semantica di Kripke: l'accettazione o meno della validità di una formula equivale ad una proprietà della relazione R di accessibilità. Se riteniamo che la struttura dei mondi debba avere una relazione R transitiva allora dobbiamo accettare $Lp \rightarrow LLp$, e viceversa.

La semantica di Kripke è una teoria matematica e, come tale, suscettibile di svariate interpretazioni. In essa non si prende alcuna posizione sulla "natura" dei mondi possibili e sul significato della relazione di accessibilità. Pertanto, si possono proporre numerose interpretazioni di tale semantica astratta che ne costituiscono altrettante applicazioni. In esse spesso si fa riferimento ad uno dei mondi possibili come al "mondo reale" e si è interessati solo ai mondi che hanno qualche riferimento (tramite la relazione di accessibilità) al mondo reale.

Ad esempio, Hughes e Creswell (1973 e 1990) propongono la seguente interpretazione: se u è il mondo reale, uRv significa "v è concepibile da chi vive in u". In un senso debole del concetto di "concepire" si assume per R la sola proprietà riflessiva se si ritiene che ciò che è concepibile è fortemente condizionato da quanto vale nel mondo reale. Ciò equivale ad assumere il sistema modale aletico minimale **KT**. In un senso più forte, concepire un mondo implica la completa conoscenza di ciò che significherebbe vivere in tale mondo. Ma allora, se in v si concepisce w, quest'ultimo è già concepibile da u. Si assume allora per R la proprietà transitiva e il calcolo adeguato è **KT4**.

Altre interessanti interpretazioni sono proposte, ad esempio, da Galvan (1991). In una di esse si interpreta mondo possibile con "situazione fisica caratterizzata da certe leggi naturali" e la relazione di accessibilità R con "relazione esistente tra una situazione fisica ed altre situazioni fisiche realizzabili a partire dalla prima in conformità con le leggi naturali". In tal caso è ovvia la riflessività della relazione R (le leggi naturali esercitano la loro normatività anche nella situazione fisica di partenza). Assumere la transitività significa considerare un processo evolutivo di crescita delle conoscenze di leggi naturali, e allora nuovamente **KT4** è il calcolo modale aletico adatto a descrivere tale processo.

Il sistema KT5 (S5)

Un ragionamento analogo a quello condotto nel paragrafo precedente si può condurre per la formula $Mp \to LMp$ ("Ciò che è possibile è necessario che sia possibile") e il corrispondente schema $MA \to LMA$. Il lettore può verificare che la formula $Mp \to LMp$ non è valida e non lo diviene anche se imponiamo che R sia riflessiva e transitiva. Ciò significa che essa non è derivabile in **KT4** e quindi esprime una proprietà non ancora contemplata dell'operatore di necessità. Il suo ruolo logico è nuovamente chiarito da un'equivalenza analoga alle precedenti:

TEOREMA 3: *La formula* $Mp \to LMp$ *è valida in* (W, R) *se e solo se* R *è euclidea*

dove la proprietà di essere euclidea è la seguente: R è *euclidea* se e solo se, per ogni u, v e w, se uRv e uRw, allora vRw e wRv (se da un mondo u si accede a due mondi, allora questi si vedono l'un l'altro). Si dimostra facilmente che, se R è riflessiva ed euclidea, allora è simmetrica e transitiva [3], ossia è una relazione di equivalenza.

Se si aggiunge lo schema:

$$(5) \qquad MA \to LMA$$

a **KT** si ottiene un sistema modale detto **KT5** (o **S5**), più ricco dei precedenti: le formule derivabili in **KT5** sono tutte e sole le formule valide nelle strutture (W, R) con R riflessiva ed euclidea, ossia con R relazione di equivalenza (*teoremi di correttezza e completezza* di **KT5**).

Lo schema (4) $LA \to LLA$ è derivabile in **KT5** e quindi **KT5** è un'estensione di **KT4**. Ciò si può stabilire direttamente mediante una derivazione in **KT5** di $LA \to LLA$, ma segue anche dai risultati appena enunciati: se $LA \to LLA$ è valida nelle strutture con R transitiva, lo è anche in quelle con R riflessiva ed euclidea, poiché la riflessività e l'euclideicità implicano la transitività. Lo schema che corrisponde alla proprietà simmetrica è (B) $A \to LMA$ [4] ("Ciò che è vero è necessario che sia possibile") ed è quindi anch'esso derivabile in **KT5**.

La possibilità e la necessità "metafisiche", ossia la possibilità e la necessità non legate alla struttura di un mondo particolare (come quello reale), si fanno risalire storicamente a Leibniz. Esse sono descritte proprio dal sistema **KT5** in cui R è riflessiva ed euclidea (o, equivalentemente, in cui R è riflessiva, simmetrica e transitiva, ossia R è una relazione di equivalenza). Infatti, in tal caso, in tutti i mondi accessibili da quello reale valgono le stesse formule necessitate e possibilitate (se LA o MA valgono in un mondo, allora LA e MA valgono in tutti i mondi ad esso equivalenti, e quindi le stesse LA e MA valgono in tutti mondi della classe di equivalenza del mondo reale).

KT, **KT4** (S4) e **KT5** (S5) sono i sistemi modali aletici più considerati nella letteratura e, anche se ne sono stati considerati numerosi altri, ai nostri fini è sufficiente limitarci a questi tre. Ad essi corrispondono tre diverse caratterizzazioni degli operatori di necessità e possibilità: **KT** (che estende la logica intensionale minimale **K** con lo schema (T) $LA \rightarrow A$) è la logica modale aletica minimale; in **KT4** si aggiunge lo schema (4) $LA \rightarrow LLA$ e in **KT5** si aggiunge lo schema (5) $MA \rightarrow LMA$. I modelli di **KT** sono quelli in cui R è riflessiva, in quelli di **KT4** R è riflessiva e transitiva e in quelli di **KT5** R è riflessiva, simmetrica e transitiva. Il collegamento tra i sistemi e i modelli consente di stabilire quale sistema è più adatto a concezioni diverse degli operatori modali.

Le modalità nei tre sistemi logici

I tre sistemi modali considerati, **KT**, **KT4** e **KT5**, si diversificano per il numero di modalità distinte in essi presenti. Più precisamente, definiamo *modalità* una qualsiasi stringa (eventualmente vuota) di operatori modali preceduta o meno dal segno di negazione. Indicando con – la stringa vuota, sono modalità, ad esempio, le seguenti:

$$LM \qquad - \qquad \neg L \qquad LMMLM \qquad \neg MML$$

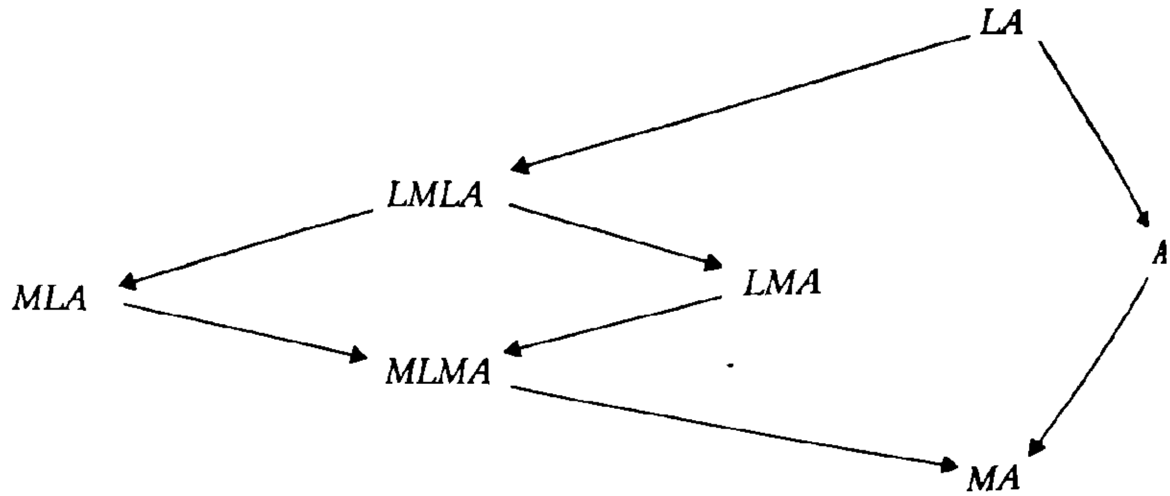
(a) Si può dimostrare che in **KT** vi sono infinite modalità non equivalenti. Più precisamente, in **KT** non si possono dimostrare formule bicondizionali del tipo $SA \leftrightarrow S'A$ dove S e S′ sono stringhe diverse di operatori modali.
(b) In **KT4** vi sono varie modalità equivalenti.
Ad esempio si dimostra che [5]:

$$\mathbf{KT4} \vdash MMA \leftrightarrow MA \qquad \mathbf{KT4} \vdash LLA \leftrightarrow LA$$
$$\mathbf{KT4} \vdash LMA \leftrightarrow LMLMA \qquad \mathbf{KT4} \vdash MLA \leftrightarrow MLMLA$$

Sfruttando queste quattro equivalenze, si dimostra facilmente che in **KT4** vi sono esattamente quattordici modalità distinte (nel senso che tutte le altre sono equivalenti ad una di esse), è cioè le sette seguenti:

$$- \qquad L \qquad M \qquad LM \qquad ML \qquad LML \qquad MLM$$

e le loro negazioni. Tra le prime sette di esse valgono le relazioni di implicazione illustrate nel seguente schema:



(c) In **KT5** si dimostrano i seguenti bicondizionali [6]:

$$\mathbf{KT5} \vdash MA \leftrightarrow LMA \qquad\qquad \mathbf{KT5} \vdash LA \leftrightarrow MLA$$

e le modalità distinte si riducono a 6, ossia a –, L, M e le loro negazioni.

Logiche modali e implicazione stretta

Terminiamo con alcune brevi considerazioni utili per il seguito. Quasi tutti i settori in cui si articolano le ricerche logiche hanno le loro radici nell'antichità [7]. Le prime indagini sugli operatori modali aletici sono dovute ad Aristotele (*De Interpretatione* e *Analitici Primi*) e ai filosofi megarici. La prima trattazione formale rigorosa dei concetti modali è dovuta a C. I. Lewis ed è stata motivata dall'esigenza di studiare un connettivo di implicazione più vicino all'uso comune di quanto non lo sia il connettivo $\rightarrow$ (il condizionale materiale) della logica proposizionale classica. Le due seguenti regole di **PC** che coinvolgono il condizionale:

$$A \vdash B \rightarrow A \qquad\qquad A \vdash \neg A \rightarrow B$$

sono dette *paradossi dell'implicazione materiale* (*paradosso positivo* e *paradosso negativo*) poiché hanno conseguenze controintuitive. Infatti, la prima regola ha come conseguenza che dalla verità di "2 + 2 = 4", segue quella di "Se la luna è di formaggio, allora

$2 + 2 = 4$" e di "Se la luna non è di formaggio, allora $2 + 2 = 4$"; la seconda che dalla verità di "$2 + 2 = 4$", segue quella di "Se $2 + 2 \neq 4$, allora i maiali volano" e di "Se $2 + 2 \neq 4$, allora i maiali non volano".

Il condizionale $A \rightarrow B$, infatti, essendo un connettivo vero-funzionale, fa riferimento solo ai valori di verità dell'antecedente A e del conseguente B e non presuppone alcun nesso fra i loro contenuti. Esso non consente di poter formalizzare adeguatamente la differenza tra le due seguenti proposizioni:

(1) "Se l'erba è verde, allora l'erba è colorata"
(2) "Se l'erba è verde, allora il limone è giallo"

Se formalizziamo entrambe con il connettivo $\rightarrow$ le mettiamo sullo stesso piano e non sottolineiamo che nella prima è presente un legame "più forte" tra l'antecedente e il conseguente: in essa, la verità dell'antecedente rende *impossibile* la falsità del conseguente [8].

Per non incorrere in questi paradossi, C. I. Lewis ha introdotto un connettivo di implicazione più forte di quello materiale, detto *implicazione stretta* (o *rigida*, in inglese *entailment*), in simboli $\supset$, per formalizzare proposizioni come la (1). Nelle attuali esposizioni delle logiche modali non si fa generalmente esplicito riferimento a questo connettivo, in quanto esso può essere definito mediante l'implicazione materiale e uno dei due operatori modali L e M. Un'analisi linguistica ci conduce immediatamente ad assumere uno dei due seguenti bicondizionali equivalenti fra loro:

$$A \supset B \leftrightarrow L(A \rightarrow B)$$
$$A \supset B \leftrightarrow \neg M(A \wedge \neg B)$$

per cui, in una logica modale qualsiasi, il connettivo di implicazione stretta si può introdurre mediante una definizione. Lewis e Langford (1932) hanno proposto cinque sistemi modali, indicati con **S1**, **S2**, **S3**, **S4** e **S5**.

Nel sistema **S1** (più debole di **KT**) si assumono i seguenti assiomi:

$(A \wedge B) \supset (B \wedge A)$ $\qquad$ $(A \wedge B) \supset A$
$A \supset (A \wedge A)$ $\qquad$ $((A \wedge B) \wedge C) \supset ((A \wedge B) \wedge C)$
$(A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$ $\qquad$ $A \wedge (A \supset B) \supset B$

e tre regole: $A, A \supset B \vdash B$; $A, B \vdash A \wedge B$ e la regola di sostituzione degli equivalenti stretti.

S2, S3, S4 e S5 si ottengono aggiungendo nell'ordine gli assiomi:

$$M(A \wedge B) \supset MA$$
$$(A \supset B) \supset (\neg MB \supset \neg MA)$$
$$LA \supset LLA$$
$$MA \supset LMA$$

I sistemi di Lewis e Langford S4 e S5 sono equivalenti ai sistemi KT4 e KT5 prima analizzati. I sistemi S1, S2, S3 hanno interesse puramente storico. Infatti, se nei sistemi di Lewis si evitano i paradossi dell'implicazione materiale, si ripresentano già in S1 analoghi paradossi per l'implicazione stretta:

$$LA \rightarrow (B \supset A)$$

(una proposizione necessariamente vera è implicata strettamente da qualsiasi proposizione)

$$L\neg A \rightarrow (A \supset B)$$

(una proposizione impossibile implica strettamente qualsiasi proposizione)

L'obiettivo di proporre un connettivo di implicazione più vicino a quello del linguaggio comune non è stato raggiunto con l'implicazione stretta di Lewis: esso è attualmente perseguito nell'ambito delle logiche rilevanti e condizionali, alle quali dedicheremo i CAPP. 9 e 10.

5
Logiche deontiche

Introduzione

Le logiche deontiche sono sistemi logici che si propongono di formalizzare il comportamento logico dei quattro operatori non vero-funzionali di "obbligatorio", "permesso", "vietato" e "indifferente". In linea con la prospettiva meramente introduttiva di questo manuale, il nostro obiettivo è abbastanza circoscritto: in primo luogo presentare tre sistemi di logica deontica, **KD**, **D4** e **D5**, analoghi ai sistemi **KT**, **KT4** e **KT5** della logica modale aletica esaminati nel precedente capitolo. In secondo luogo, esamineremo brevemente alcuni nessi tra le logiche deontiche e le logiche modali aletiche, e solo alla fine, nelle conclusioni, accenneremo a qualche problema connesso con la logica delle norme, le quali costituiscono il riferimento privilegiato dei sistemi deontici, siano esse norme giuridiche, etiche, sociali o di altra natura. Concluderemo con alcune considerazioni relative ai paradossi della logica deontica.

Per costruire un sistema di logica deontica si amplia il linguaggio della logica proposizionale classica con i due operatori O e P, dove OA sta per "È obbligatorio A" e PA sta per "È permesso A". Non si rivela necessario introdurre simboli specifici per indicare il "vietato" e l'"indifferente", in quanto, in analogia col caso modale aletico, un'analisi linguistica rivela immediatamente che "È vietato A" equivale a "Non è permesso A", e quindi si può formalizzare con $\neg PA$, mentre "A è indifferente" equivale a "Sono permesse sia A che $\neg A$", e si può formalizzare con $PA \wedge P\neg A$. Inoltre, si può anche affermare che "A è indifferente" equivale a "A non è né obbligatorio né vietato", che si può formalizzare con $\neg OA \wedge \neg O \neg A$. Si può infatti supporre che i due operatori O e P siano interdefinibili: "È obbligatorio A" equivale a "Non è permesso non A" e, analogamente, "È permesso A" equivale a "Non è obbligatorio non A". In altre parole, si può supporre che i due seguenti bicondizionali siano ritenuti validi in un qualsiasi sistema logico deontico [1]:

$$PA \leftrightarrow \neg O \neg A \qquad OA \leftrightarrow \neg P \neg A$$

Si può anche ritenere valido lo schema $O(A \rightarrow B) \rightarrow (OA \rightarrow OB)$ ("Se è obbligatorio che da A segua B, allora, se A è obbligatorio, lo è anche B").

A parte la diversa notazione (ossia O al posto di L e P al posto di M), il lettore avrà certamente notato che quanto finora esposto equivale a quanto viene assunto nella logica modale minimale **K**. I sistemi di logica deontica sono quindi, al pari di quelli modali aletici, estensioni sia di **PC**, sia di **K**: tutte le formule di **K**, sostituendo L e M con O e P, valgono nei sistemi di logica deontica qui considerati, ad esempio:

$$O(A \wedge B) \leftrightarrow OA \wedge OB$$
$$OA \vee OB \rightarrow O(A \vee B)$$
$$P(A \wedge B) \rightarrow PA \wedge PB$$
$$P(A \vee B) \leftrightarrow PA \vee PB$$

La principale differenza fra i calcoli modali aletici e quelli deontici si basa sulla considerazione dell'assioma T:

$$\text{(T)} \qquad LA \rightarrow A$$

il quale, come illustrato nel capitolo precedente, esprime una proprietà che riteniamo valida per l'operatore di necessità ("Se una proposizione è necessariamente vera, allora è vera"), ed è presente in tutti i calcoli modali aletici (aggiungendolo a **K** si ottiene la logica modale aletica minimale **KT**). Il suo corrispettivo deontico:

$$\text{(D)} \qquad OA \rightarrow A$$

invece, non è accettabile in alcun sistema ragionevole di logica deontica, in quanto, se si ritiene di rendere obbligatoria qualche cosa, è proprio perché essa di fatto può non essere vera, ed è una caratteristica degli obblighi che essi possano essere violati (o, in altri termini, appare inutile rendere obbligatorio ciò che è già realizzato).

La logica deontica minimale **KD**

Un requisito minimale dei sistemi di logica deontica è il seguente. È chiaro che un legislatore, ad esempio, può rendere obbligatorio A e un altro legislatore può invece proibirlo, rendendo obbligatorio $\neg A$. Però, se un unico legislatore rendesse la stessa cosa obbligatoria e proibita, richiederebbe evidentemente qualcosa che appare una contraddizione logica nel senso tradizionale del termine: le due formule OA e $O\neg A$ si contraddicono a vicenda: $\neg(OA \wedge O\neg A)$ si può ritenere una "verità della logica deontica". D'altra parte, per la tautologia $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ della logica classica, $\neg(OA \wedge O\neg A)$ si può scrivere in modo logicamente equivalente come $OA \rightarrow \neg O\neg A$, ossia $OA \rightarrow PA$.

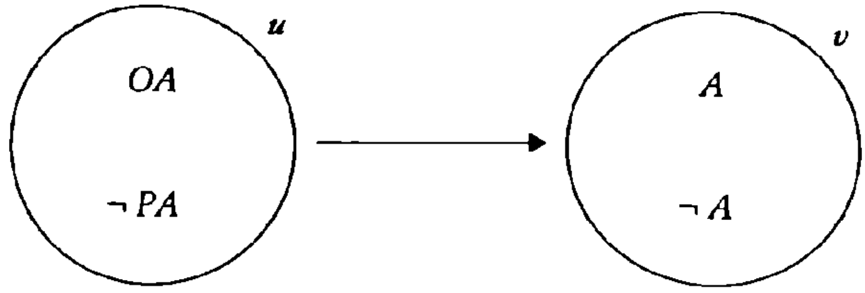
Pertanto, la *logica deontica minimale* si indica con **KD** poiché si ottiene aggiungendo al sistema di logica modale minimale **K** (in cui sostituiamo O e P al posto di L e M) l'assioma:

(D) $$OA \rightarrow PA$$

Le formule del tipo $OA \rightarrow PA$ non sono in generale valide, ossia non sono vere in tutti i mondi di tutti modelli $M = (W, R, I)$: basta ricordare che in una struttura vi può essere un *mondo cieco*, ossia che non accede ad alcun altro mondo (neppure a se stesso). Se u è un mondo cieco, in u tutte le formule del tipo PA sono false (si ricordi che PA è vera in u se e solo se A è vera in un mondo accessibile da u) e quelle del tipo OA sono vere (affinché OA sia falsa in u vi deve essere un mondo accessibile da u in cui A è falsa, e allora, non essendovi mondi accessibili da u, OA non può essere falsa, e quindi è vera), e quindi i condizionali $OA \rightarrow PA$ sono falsi. Queste considerazioni suggeriscono quale sia la modifica da apportare alla nozione di validità nella semantica di Kripke affinché $OA \rightarrow PA$ risulti valida. Bisogna limitarsi alle strutture (W, R) in cui non vi siano mondi ciechi, ossia assumere per la relazione di accessibilità R la proprietà, detta di *serialità*: per ogni u in W esiste v in W tale che uRv.

Tale condizione è non solo necessaria, ma anche sufficiente: vale che, se R è seriale, le formule del tipo $OA \rightarrow PA$ sono valide.

Infatti, se supponiamo, per assurdo, che esistano una struttura (W, R) con R seriale, una interpretazione I e un mondo u di W tali che, in u, $OA \rightarrow PA$ sia falsa, ossia vera OA e falsa PA (vera $\neg PA$), si avrebbe la situazione rappresentata nel seguente diagramma:



Nel mondo v a cui u accede per la serialità di R, A dovrebbe essere vera (poiché in u è vera OA) e falsa (poiché in u è falsa PA), e ciò è assurdo.

Si dimostrano allora sia il *teorema di correttezza*: ogni formula derivabile in **KD** è valida nelle strutture (W, R) con R seriale, sia il *teorema di completezza*: ogni formula valida nelle strutture (W, R) con R seriale è derivabile in **KD**.

Se si osserva che la riflessività di R implica la serialità (se R è riflessiva, u accede a se stesso, e quindi vi è sempre almeno un mondo accessibile da u) e si ricorda quanto ottenuto nel capitolo precedente, si ottiene che nel sistema modale aletico **KT** (e a maggior ragione in **KT4** e **KT5**) è derivabile la formula $LA \rightarrow MA$ e quindi che **KD** è un sottosistema di **KT** [2].

I sistemi D4 e D5

Se si aggiunge a **KD** lo schema:

(4) $$OA \rightarrow OOA$$

si ottiene il sistema deontico **D4** il quale estende **KD** e in cui vale che tutto ciò che è obbligatorio è obbligatorio che sia obbligatorio. Questo schema è il corrispettivo deontico dello schema modale $LA \rightarrow LLA$ (ciò che è necessario è necessariamente necessario) e, come già sappiamo dal capitolo precedente, sul piano semantico la sua validità corrisponde alla transitività della relazione di accessibilità R: le formule derivabili in **D4** sono tutte e sole le formule valide nelle strutture (W, R) con R seriale e transitiva.

Si considera poi il sistema **D5** che si ottiene ampliando **D4** assumendo come nuovo assioma l'assioma:

(5) $$PA \rightarrow OPA$$

(corrispettivo dell'assioma modale $MA \rightarrow LMA$). La proprietà della relazione di accessibilità R che corrisponde a (5) è l'euclideicità, e quindi le formule derivabili in **D5** sono tutte e sole le formule valide nelle strutture in cui R è seriale, transitiva ed euclidea [3].

Nei sistemi deontici **KD**, **D4** e **D5**, la relazione di accessibilità ha una interpretazione naturale nel senso di "perfezionamento": se uRv, allora in v valgono le formule che sono dichiarate obbligatorie in u (in v sono rispettati gli obblighi di u). È allora del tutto evidente la richiesta della serialità di R. Infatti, porre in un mondo OA significa supporre l'esistenza di (almeno) una situazione alternativa in cui si realizza quanto è richiesto come dovuto (ossia in cui A è vera), e l'eventuale presenza di più alternative è giustificata dal fatto che in ciascun mondo vi sono molte componenti irrilevanti da un punto di vista deontico. In altri termini, vi possono essere proposizioni A tali che sono permesse sia A sia la negazione di A, le quali si realizzano in mondi alternativi differenti (in uno stesso mondo non possono essere vere sia A, sia $\neg A$). Ecco perché la riflessività di R va evitata (ciò che deve essere può anche non essere) ossia non è valida $OA \rightarrow A$, mentre la formula $OA \rightarrow PA$ (che corrisponde alla serialità) esprime, come si è visto in precedenza, la coerenza degli obblighi, ritenuto dai più un requisito minimale di un sistema di norme giuridiche o etiche. In sostanza, si può interpretare uRv nel senso che v è "perfetto" rispetto agli obblighi presenti in u [4].

In questo contesto la transitività di R comporta la cumulabilità degli obblighi e le alternative deontiche caratterizzano così le tappe intermedie della realizzazione per gradi della costruzione di un sistema di norme. La serialità e la transitività corrispondono al sistema **D4**. Assumere l'assioma (5) comporta che R è seriale ed euclidea, e pertanto le alternative deontiche soddisfano i loro obblighi, sono deonticamente equivalenti (in ciascuna di esse sono veri gli stessi obblighi), ma in esse, in assenza della transitività, vi può essere una caduta degli obblighi rispetto al mondo di partenza. In **D5** vi è anche la transitività e quindi nelle alternative deontiche si mantengono ed eventualmente si arricchiscono gli obblighi del mondo iniziale: le alternative a u sono i "mondi migliori possibili rispetto a u" poiché in esse valgono gli stessi obblighi e questi sono realizzati.

Rapporti fra logiche aletiche e deontiche

Il logico A. R. Anderson ha proposto una "riduzione" della logica deontica a quella modale aletica ampliando semplicemente il linguaggio di quest'ultima con una costante proposizionale S il cui significato intuitivo è "sanzione" (o meglio l'affermazione di incorrere in un procedimento di sanzione). Se si amplia con S il linguaggio della logica modale aletica (con operatori di necessità L e possibilità M) gli operatori deontici possono, secondo Anderson, essere *definiti* in modo che non sia necessario considerare un apparato deduttivo diverso da quello della logica modale. Le definizioni sono le seguenti:

$$OA \leftrightarrow L(\neg A \rightarrow S)$$

(A è obbligatorio se e solo se il non realizzarsi di A implica necessariamente il provvedimento di sanzione)

$$PA \leftrightarrow M(A \wedge \neg S)$$

(A è permesso se e solo se è possibile che A sia vera e il provvedimento di sanzione falso)

Effettivamente, in tal modo, nei sistemi *modali aletici* così ampliati si possono dimostrare le proprietà degli operatori deontici. Per ragioni di comodità, negli studi dei sistemi modali deontici si è preferito introdurre la costante proposizionale Q, detta *costante di idealizzazione*, anziché quella di sanzione S (si tratta intuitivamente di considerare Q come equivalente a $\neg S$).

L'alfabeto del sistema **KQ** coincide con quello della logica modale aletica minimale **K** *con l'aggiunta della costante proposizionale di idealizzazione* Q e delle seguenti definizioni:

$$OA \leftrightarrow L(Q \rightarrow A)$$
$$PA \leftrightarrow \neg O \neg A$$

L'apparato deduttivo di **KQ** si ottiene estendendo quello di **K** con l'aggiunta del seguente assioma:

PQ (assioma Q)

(è possibile che si realizzi Q, ossia non incorrere nella sanzione)

Per adeguare la semantica di Kripke a **KQ** occorre considerare come modelli, anziché le terne (W, R, I), le quaterne (W, R, b, I) in cui I è una interpretazione sulla struttura (W, R, b) (che viene anche detta b-struttura) nella quale W è un qualsiasi insieme non vuoto di mondi, b è un sottoinsieme non vuoto di W, e R è una relazione di accessibilità b-seriale, ossia tale che per ogni u di W esiste v in b tale che uRv.

Il ruolo di b è consentire la definizione del concetto di verità per le formule che contengono la costante di idealizzazione Q. La definizione di verità di una formula A in un mondo u di W viene arricchita con la clausola:

$$(W, R, b, I), u \models Q \Leftrightarrow u \in b$$

Intuitivamente, i mondi di b sono i mondi "buoni" tra i mondi possibili. Infatti si ha:

$(W, R, b, I), u \models OA \Leftrightarrow (W, R, b, I), u \models L(Q \rightarrow A)$
$\Leftrightarrow$ per ogni v in W tale che uRv $(W, R, b, I), v \models Q \rightarrow A$

$\Leftrightarrow$ per ogni v in W tale che uRv, se $(W, R, b, I), v \models Q$, allora $(W, R, b, I), v \models A$

$\Leftrightarrow$ per ogni v in W tale che uRv, se $v \in b$, allora $(W, R, b, I), u \models A$

$\Leftrightarrow$ per ogni v in b tale che uRv si ha $(W, R, b, I), u \models A$

Quindi OA è vero in u se e solo se A è vero in tutti i mondi accessibili da u che sono "buoni". Ciò spiega la richiesta della b-serialità per la relazione R: se da un mondo u fossero accessibili solo mondi "non buoni", allora in u tutte le A sarebbero obbligatorie. La b-serialità garantisce la validità dell'assioma Q il quale rappresenta nei sistemi modali con costante Q l'assioma deontico D ($OA \rightarrow PA$). Questo discorso evidenzia l'interesse di questa proposta: i mondi possibili non sono solo le alternative deontiche al mondo reale, ma vi possono essere alternative "buone", in cui si realizzano gli obblighi veri nel mondo reale, e mondi in cui tali obblighi non sono realizzati.

Considerazioni sulle logiche deontiche

Molti studiosi hanno sollevato dubbi sulla stessa possibilità di costruire una logica delle norme o degli imperativi. Una prima obiezione all'impiego di strumenti logici in ambito giuridico ed etico deriva dal fatto che le nozioni della logica classica fanno riferimento unicamente a proposizioni che sono vere o false. Gli imperativi, invece, non sono né veri né falsi, e le norme (e i giudizi di valore) sono nella sostanza degli imperativi. Fu von Wright che, ispirandosi alla distinzione fra enunciati legali "genuini" e "spuri" del filosofo svedese I. Hedenius, ha distinto tra *norme* e *proposizioni normative*. Ad esempio, l'enunciato "È proibito rubare" può essere usato come formulazione normativa per proibire il furto, oppure può essere inteso affermare la proposizione asserente che vi è una norma in tal senso. E le *proposizioni normative* sono *vere* o *false* e non sorge alcun problema per il fatto che tra di esse vi possano essere relazioni logiche (ed è questa la linea che ha fatto da sfondo all'elaborazione dei calcoli logici). Von Wright ha proposto il seguente esempio per sottolineare che, a prescindere dalle difficoltà concettuali, la logica deontica è utile. Nei calcoli della logica deontica si dimostra la formula $O(A \rightarrow B) \wedge O \neg B \rightarrow O \neg A$: se è obbligatorio che se A allora B e B è proibito, allora anche A è proibito. Egli ha chiamato questa formula "teorema di Jefte" basandosi su un brano del Vecchio Testamento: Jefte promise di sacrificare a Jahvé il primo essere vivente che avrebbe incontrato dopo la battaglia se Jahvé gli avesse dato la vittoria. Jefte vinse la battaglia e il primo essere vivente che incontrò tornando a casa fu sua figlia. Dato che le promesse si devono mantenere, Jefte avrebbe dovuto uccidere la figlia. Siamo in presenza di un *dilemma morale* o *conflitto di doveri*. La logica deontica ci dice che una promessa che obbliga un soggetto a fare qualcosa di proibito è essa stessa proibita: quindi non si devono formulare promesse il cui adempimento può costringerci a violare altri doveri (morali o giuridici). Si può quindi sostenere che la logica deontica può aiutare ad agire nelle situazioni concrete che si verificano nella vita quotidiana e, quindi, che ha una sua piena legittimità teorica.

Un problema che sorge nei calcoli logici deontici è il seguente. Se T è una tautologia, allora LT è un teorema di tutti calcoli modali (T è vera in tutti i mondi possibili). L'analogo deontico risulta essere OT la cui lettura intuitiva "Una situazione tautologica ha l'obbligo di verificarsi" suona per lo meno curiosa. Per attenuare questo senso di "stranezza" si può ragionare come segue: se OT non fosse logicamente vera, allora la sua negazione $\neg OT$ sarebbe contingentemente vera e quindi lo sarebbe anche $P \neg T$. Dato che $P \neg T \rightarrow PA$ è una formula derivabile nei sistemi usuali di logica deontica, se fosse permesso uno stato di cose contraddittorio, sarebbe permesso un qualsiasi stato di cose [5].

La riduzione di Anderson della logica deontica alla logica modale con l'introduzione della costante S di sanzione è stata accusata di essere non realistica in quanto nella vita quotidiana l'inosservanza del dovere non porta necessariamente ad una punizione (molti trasgressori sfuggono alle sanzioni). A questo proposito von Wright ha sostituito la nozione di sanzione con quella di *responsabilità* (*liability*) e con la correlata nozione di *immunità* (*immunity*): il compiere il proprio dovere è condizione necessaria per l'immunità da punizioni legali. Ciò contribuisce ad attenuare l'accusa di "fallacia naturalistica". Se una persona è passibile di una punizione ciò dipende da quello che ha *fatto* nella realtà e dalle norme che vi *sono* effettivamente e pertanto è una proprietà "naturalistica" di un agente essere immune o passibile di una punizione. Nello schema di riduzione andersoniano (OA equivale a $L(A \rightarrow S)$) il riferimento è all'esistenza di doveri e in essa non è coinvolta alcuna circolarità. E all'obiezione che immunità, sanzione, responsabilità sono nozioni tipicamente legali mentre non tutte le norme sono di natura giuridica, si può rispondere che tali nozioni hanno come controparte nella sfera etica la disapprovazione, la vergogna e simili, e queste costituiscono "sanzioni morali" (il fatto che una persona sia immune o passibile di esse dipende sia dal suo comportamento, sia dal codice morale della comunità di cui è membro).

Un altro problema della filosofia del diritto riguarda le norme permissive. Al riguardo vi sono due posizioni: nella prima la "permissione" equivale all'assenza di una proibizione, nella seconda la "permissione" deve essere esplicitamente "aggiunta" all'assenza di proibizione. Solo nella prima posizione è valida l'interdefinibilità degli operatori deontici che è assunta nei calcoli logici deontici standard (e che corrisponde all'analoga interdefinibilità degli operatori modali). Anche la seconda posizione ha una sua legittimità e comporta che vi possano essere "lacune nella legge". Se il noto principio giuridico *nullum crimen sine lege* (o anche *nulla poena sine lege*) può essere interpretato come una *chiusura* deontica dei sistemi di norme che supporta la scelta dei calcoli standard prima proposti, anche la seconda posizione può essere sviluppata formalmente introducendo una differenza tra la permissione debole (assenza di proibizione) e permissione forte (stabilita esplicitamente). Se con P si indica la permissione forte, è naturale assumere l'implicazione $PA \rightarrow \neg O \neg A$ (se qualcosa è permesso, allora non è vietato), ma non l'implicazione inversa (e quindi O e P non sono interdefinibili). In tal caso gli assiomi del calcolo logico riguarderanno entrambi gli operatori [6].

Logica deontica e paradossi

Gran parte delle discussioni e delle dispute relative alla logica deontica sono state causate dall'insorgere di alcuni paradossi. D'altra parte, anche tradizionalmente, l'analisi dei paradossi e delle antinomie è stata una delle componenti degli studi logici nel senso più ampio del termine.

Il paradosso di Ross. Una prima anomalia è stata evidenziata nel 1941 dal giurista e filosofo del diritto danese Alf Ross, il quale l'ha impiegata per sostenere che non fosse possibile costruire una "logica delle norme". Il paradosso di Ross consiste nel fatto che la formula $OA \to O(A \vee B)$ è derivabile nei sistemi di logica deontica. Essa comporta, per usare il famoso esempio di Ross, che, se si deve verificare il caso che una lettera sia imbucata, allora si deve verificare il caso che la lettera sia imbucata o bruciata. Ci sembra che la "soluzione" proposta da von Wright sia in grado di eliminare quasi del tutto le possibili perplessità. Supponiamo che sia dato a qualcuno l'ordine di imbucare una lettera. Se questa persona disattende l'ordine non eseguendo A (ossia non imbuca la lettera) e obbedisce invece a $O(A \vee B)$ facendo B (in questo esempio bruciando la lettera) non può scusarsi sostenendo di aver eseguito un ordine implicato dal primo. Chi ha dato l'ordine di eseguire A può benissimo concordare sul fatto che il secondo ordine è implicato dal primo, ma ciò è irrilevante ai fini dell'ordine impartito che è stato disatteso. Può anche succedere che fare B sia qualcosa di vietato. In tal caso chi ha fatto B può essere sanzionato non solo per non aver eseguito A, ma anche per aver eseguito B. E non può appellarsi al fatto che, eseguendo B, aveva obbedito a un ordine implicato dal primo, in quanto egli era obbligato anche a obbedire al primo [7].

Il paradosso della libera scelta. Consideriamo le due proposizioni:

(a) "Carlo può andare a studiare in Spagna o in Francia"
(b) "Carlo può andare a studiare in Spagna e può andare a studiare in Francia"

Intuitivamente, (b) segue da (a): se a Carlo è permesso di andare in uno dei due paesi, allora gli è permesso andare in ciascuno dei due.

La loro naturale formalizzazione in logica deontica è:

(a′) $P(p \vee q)$
(b′) $Pp \wedge Pq$

D'altra parte, $P(p \vee q) \to Pp \wedge Pq$ non è una formula derivabile nei sistemi di logica deontica. Se fosse $\vdash P(p \vee q) \to Pp \wedge Pq$, dato che $p \to p \vee q$ è una tautologia e quindi $\vdash Pp \to P(p \vee q)$, per la regola di concatenazione si avrebbe $\vdash Pp \to Pp \wedge Pq$, da cui si otterrebbe

$\vdash Pp \rightarrow Pq$. Ma ciò è del tutto inaccettabile poiché comporta che, se qualcosa è permesso (Pp), allora è permessa qualsiasi q.

Il paradosso dell'obbligo derivato. Questo paradosso riguarda le formule $O(A \rightarrow B)$ o, equivalentemente, $\neg P(A \wedge \neg B)$. Dato che $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ è una tautologia, ne segue facilmente che $O\neg A \rightarrow O(A \rightarrow B)$ (se A è vietato allora è obbligatorio se A allora B) è un teorema dei sistemi di logica deontica. La sua paradossalità sta nel fatto che il compimento di un atto vietato impegna a compiere un qualsiasi altro atto. Esso è sostanzialmente analogo ai paradossi dell'implicazione materiale della logica classica e ai paradossi dell'implicazione stretta della logica modale [8]. Alcuni studiosi, tra cui A. N. Prior, ritengono che il paradosso sia imputabile alla non adeguatezza della formalizzazione degli obblighi derivati mediante formule del tipo $O(A \rightarrow B)$, mentre si dovrebbe invece far ricorso a formule del tipo $A \rightarrow OB$. Che però le cose siano più complesse è evidenziato dal seguente paradosso.

Il paradosso di Chisholm. Consideriamo le seguenti quattro proposizioni:

(a) "Deve essere che Carlo si astenga dal derubare Michele"
(b) "Carlo deruba Michele"
(c) "Se Carlo deruba Michele, allora Carlo deve essere punito per il furto"
(d) "Deve essere che, se Carlo si astiene dal derubare Michele, allora non deve essere punito per il furto"

Dal punto di vista intuitivo i quattro enunciati sono coerenti e indipendenti fra loro. Se li formalizziamo nel modo seguente:

(a′) $O\neg p$
(b′) p
(c′) $p \rightarrow OS$
(d′) $O(\neg p \rightarrow \neg S)$

essi non risultano coerenti. Infatti, da (b′) e (c′) segue OS e quindi $\neg O\neg S$ (PS), mentre da (a′) e (d′) si ottiene $O\neg S$. Se formalizziamo (d) in modo analogo a come abbiamo formalizzato (c), ossia con la formula $\neg p \rightarrow O\neg S$, si ha che (d′) segue logicamente da (b′) e quindi (d) non è più indipendente da (b). Se, viceversa, formalizziamo (c) in modo analogo a come abbiamo formalizzato (d), ossia con la formula $O(p \rightarrow S)$, si ha che (c′) segue logicamente da (a′), e quindi (c) non risulta più indipendente da (a).

Questa difficoltà insita nella formalizzazione degli obblighi derivati (detti da Chisholm *imperativi contrari al dovere*) ha condotto all'elaborazione di calcoli logici più sofisticati rispetto a quelli proposti in precedenza, i cosiddetti sistemi di logica deontica *diadica*, i quali si sono rivelati più idonei ad evitare i paradossi, ma anche essi sono stati oggetto di critiche per quanto riguarda la loro adeguatezza nei confronti della "logica delle norme". Diciamo che, con l'interpretazione semantica dei mondi possibili, la forza dei paradossi dell'obbligo derivato appare meno dirompente: se in un mondo u vale OA, allora A è vera in tutti i mondi "buoni" accessibili da u. Pertanto, in tali mondi è vera $B \rightarrow A$ e quindi in u vale $O(B \rightarrow A)$ ed anche la formula $OA \rightarrow O(B \rightarrow A)$. Analogamente, se in u vale $O \neg A$, vale anche $O(A \rightarrow B)$ e quindi vale la formula $O \neg A \rightarrow O(A \rightarrow B)$. I paradossi dell'obbligo derivato sono in ultima analisi ricondotti a casi particolari dei paradossi dell'implicazione materiale e quindi di scarso interesse per il logico deontico.

Il paradosso del buon samaritano. Nei sistemi modali standard vale la legge che esprime la proprietà transitiva dell'implicazione stretta:

$$L(A \rightarrow B) \rightarrow (L(B \rightarrow C) \rightarrow L(A \rightarrow C))$$

(ciò che è necessariamente implicato da ciò che è necessariamente implicato da A è necessariamente implicato da A).
Sostituendo C con la sanzione S si ha:

$$L(A \rightarrow B) \rightarrow (L(B \rightarrow S) \rightarrow L(A \rightarrow S))$$

Se ora poniamo:

A = "Il buon samaritano aiuta un uomo ferito"
B = "Vi è stato un ferimento"

la formula $L(A \rightarrow B)$ significa "Necessariamente se il buon samaritano aiuta un uomo ferito allora vi è stato un ferimento" (che è del tutto accettabile), la formula $L(B \rightarrow S)$ significa "Necessariamente se vi è stato un ferimento, allora viene applicata una sanzione" (anch'essa accettabile). Tuttavia la formula $L(A \rightarrow S)$ risulta "Necessariamente se il buon samaritano aiuta un uomo ferito, allora viene applicata una sanzione": una conseguenza paradossale segue da due premesse entrambe plausibili.

Da un punto di vista intuitivo la soluzione appare scontata, nel senso che la sanzione si applica a chi ha violato le norme e chi ha ferito l'uomo è una persona diversa dal buon samaritano. Dal punto di vista tecnico però occorre complicare il sistema logico "relativizzando" la sanzione *S* introducendo variabili per individui.

6
Logiche epistemiche

Introduzione

Le logiche epistemiche sono sistemi logici mediante i quali si intendono formalizzare le inferenze che coinvolgono il *credere* e il *sapere*. La differenza principale dal punto di vista logico tra l'operatore di credenza (che indichiamo C) e quello di sapere (che indichiamo S) o conoscere [1] si basa sulla considerazione che, mentre il credere qualcosa non implica che ciò che è creduto sia vero, sapere o conoscere qualcosa comporta la verità di ciò che è saputo o conosciuto.

La differenza fra i due operatori rispecchia la tradizionale distinzione fra la *doxa* (opinione) e l'*episteme* (conoscenza). Talvolta nella letteratura si chiamano *logiche doxastiche* quelle relative all'operatore C e *logiche epistemiche* quelle relative all'operatore S. Noi non opereremo tale distinzione terminologica e, conformemente all'uso più comune, qualificheremo *logiche epistemiche* entrambe le categorie di sistemi logici. Si possono poi operare ulteriori distinzioni, ad esempio fra la semplice *credenza* (ossia con un certo grado) e la *credenza fondata* (credenza al massimo grado), e fra il semplice *sapere* e il *sapere fondato* (basato su princìpi di qualche natura, ad esempio su princìpi fisici o su assiomi matematici). Gli operatori epistemici sono relativi ad un "soggetto epistemico" idealizzato e considerazioni interessanti, ma più complesse, si possono svolgere per studiare le interazioni fra le credenze o le conoscenze di più soggetti epistemici. Inizialmente consideriamo i casi più semplici, che si ottengono ampliando il linguaggio della logica classica rispettivamente con C e con S, in modo che CA significhi: "Il soggetto epistemico crede A" e SA: "Il soggetto epistemico sa (conosce) A". In tal modo i sistemi epistemici, come vedremo, ricevono una trattazione molto simile a quella esposta nei capitoli precedenti per le logiche modali aletiche e deontiche, e infatti, almeno inizialmente, non avremo bisogno di introdurre nuove nozioni tecniche. Una differenza con i sistemi modali aletici e deontici consiste nel fatto che in questi ultimi si introducono due operatori (rispettivamente di necessità e possibilità L e M, e di obbligatorietà e permissione O e P) che risultano interdefinibili, mentre nelle logiche epistemiche i due operatori C e S non hanno questa caratteristica (in altri termini, non si introduce un operatore specifico per $\neg S \neg$ e $\neg C \neg$ che si leggono "Il soggetto epistemico non sa non" e "Il soggetto epistemico non crede non").

La semantica delle logiche epistemiche più semplici è sempre la semantica dei mondi possibili di Kripke studiata nel CAP. 2. In questo nuovo contesto i mondi possibili possono essere intesi come le situazioni compatibili con le credenze (o le conoscenze) del soggetto epistemico. Ad esempio, se un soggetto epistemico crede che sia vera p = "La capitale dell'Italia è Milano", nei mondi v accessibili dal mondo reale u per il soggetto epistemico è vera p (e quindi i v sono diversi dal mondo reale u, in cui p è falsa). Se il soggetto epistemico non ha alcuna opinione su quale città sia la capitale della Svizzera, in alcuni mondi accessibili da u sarà vera "La capitale della Svizzera è Zurigo", in altri sarà vera "La capitale della Svizzera è Ginevra", in altri ancora "La capitale della Svizzera è Berna", e così via. La differenza principale fra C e S è che, se è vera SA, allora A deve essere vera nel mondo reale u (si può credere che "La capitale della Svizzera è Zurigo", ma non si può sapere che "La capitale della Svizzera è Zurigo", che è falsa nel mondo reale).

La logica del sapere

Sostituiamo nella logica modale minimale **K** l'operatore L con S[2] e quindi assumiamo come assioma, oltre a quelli di **PC**, lo schema:

$$S(A \to B) \to (SA \to SB) \qquad \textit{(assioma di distribuzione)}$$

e come regola di derivazione, oltre al *modus ponens*, la corrispettiva della *regola di necessitazione*:

se si è derivata A, allora si può derivare SA

Come già sappiamo, le formule derivabili in questa versione epistemica di **K** sono tutte e sole le formule valide, ossia vere in tutti i mondi di tutti i modelli M = (W, R, I) senza alcuna restrizione sulla relazione R di accessibilità.

Dato che, come argomentato in precedenza, riteniamo valido l'assioma:

(T) $SA \rightarrow A$ (ciò che si sa è vero)

lo dobbiamo assumere come nuovo assioma e il calcolo minimale che formalizza il comportamento logico dell'operatore S è **KT**, che coincide, a parte la diversa notazione degli operatori, con il sistema modale aletico minimale, e che pertanto indichiamo con $\mathbf{KT_S}$.

Pertanto, la nozione di validità rispetto alla quale questo calcolo è corretto e completo è quella di validità in tutte le strutture (W, R) con R riflessiva (se in un mondo u si sa A, ossia è vera SA, allora A deve essere vera in u, e ciò si ottiene se u vede se stesso).

Tra i teoremi di questo sistema figura la versione epistemica dell'assioma D:

$$SA \rightarrow \neg S \neg A$$

(se il soggetto epistemico sa A allora non sa la negazione di A), la quale equivale a:

$$\neg (SA \wedge S \neg A)$$

(il soggetto epistemico non può sapere due proposizioni che sono una la negazione dell'altra), che, a sua volta, equivale a:

$$\neg S(A \wedge \neg A)$$

Le proprietà dell'operatore S possono essere ulteriormente arricchite assumendo come nuovo assioma lo schema:

(4) $SA \rightarrow SSA$

che in questo contesto viene detto *schema di introspezione positiva*: se il soggetto epistemico sa A, allora sa di sapere A. Ciò comporta il passaggio da $\mathbf{KT_S}$ a $\mathbf{KT4_S}$, sistema che è corretto e completo rispetto alla nozione di validità in tutte le strutture (W, R) con R riflessiva e transitiva.

Analogamente, si può assumere come nuovo assioma lo schema:

(5) $\neg SA \rightarrow S \neg SA$

che viene detto *schema di introspezione negativa*: il soggetto epistemico sa di non sapere ciò che non sa. Ciò comporta il passaggio da $\mathbf{KT_S}$ a $\mathbf{KT5_S}$, sistema che è corretto e completo rispetto alla nozione di validità in tutte le strutture (W, R) con R riflessiva ed euclidea (o, equivalentemente, R riflessiva, simmetrica e transitiva [3]). Come già sappiamo, assumendo (5) si può derivare (4), per cui $\mathbf{KT4_S}$ è estensione di $\mathbf{KT5_S}$.

Nella letteratura sono stati studiati alcuni sistemi epistemici intermedi tra $\mathbf{KT4_S}$ e $\mathbf{KT5_S}$, ad esempio assumendo in $\mathbf{KT4_S}$ lo schema:

$$\neg S \neg SA \rightarrow S \neg S \neg A$$

oppure il più forte:

$$A \rightarrow (\neg S \neg SA \rightarrow SA)$$

La logica del credere e altri sistemi

Consideriamo ora l'operatore C di credenza. Come si è osservato, non si deve accettare l'assioma $CA \rightarrow A$, in quanto ciò che è creduto può risultare falso. Se si ritiene di assumere l'assioma $\neg C(A \wedge \neg A)$ (ossia che il soggetto epistemico non abbia credenze contraddittorie) ossia che è falso $C(A \wedge \neg A)$, il calcolo logico adeguato è allora $\mathbf{KD_C}$, che è corretto e completo rispetto alla nozione di validità nelle strutture (W, R) in cui la relazione R di accessibilità è seriale. L'assioma $\neg C(A \wedge \neg A)$ equivale infatti alla formula $\neg (CA \wedge C \neg A)$, ossia a $CA \rightarrow \neg C \neg A$ che corrisponde all'assioma D della logica deontica $(OA \rightarrow PA)$. Ribadiamo che, a differenza di quanto accade per i calcoli modali e deontici, si evidenzia un solo operatore, in questo caso C, e non si introduce un nome specifico per $\neg C \neg$.

Come nel paragrafo precedente si può aggiungere l'assioma di introspezione positiva rispetto alle credenze:

(4) $$CA \rightarrow CCA$$

(che corrisponde alla transitività della relazione R) e si passa allora a $\mathbf{D4_C}$, e l'assioma di introspezione negativa rispetto alle credenze:

(5) $$\neg CA \rightarrow C \neg CA$$

(che corrisponde alla euclideicità di R) e si passa allora a $\mathbf{D5_C}$.

Si possono considerare anche sistemi in cui sono presenti entrambi gli operatori S e C. In tal caso è naturale assumere, tra gli altri, come assiomi, oltre allo schema $SA \rightarrow A$, gli schemi

$$SA \rightarrow CA$$

(ciò che si sa è anche creduto [4]): e

$$A \rightarrow (CA \rightarrow SA)$$

(se A è vera e il soggetto epistemico crede A, allora sa A) e si perviene allora a dimostrare l'equivalenza tra il sapere e il credere qualcosa di vero, ossia

$$SA \leftrightarrow CA \wedge A$$

Rammentiamo inoltre che si possono introdurre ulteriori operatori, quale ad esempio C_F per *credere fondatamente*: C_FA formalizza "Il soggetto epistemico ha buone ragioni per ritenere vera A". Gli assiomi che caratterizzano il comportamento logico dell'operatore C_F sono, ad esempio, i seguenti:

$$\neg C_FA \rightarrow C_F \neg C_FA$$

(se non si crede fondatamente A, allora si crede fondatamente che non si crede fondatamente A);

$$C_F A \rightarrow C_F C_F A$$

(se si crede fondatamente A, allora si crede fondatamente di credere fondatamente A);

$$C_F (C_F A \rightarrow A)$$

(si crede fondatamente che, se si crede fondatamente A, allora A è vera).

Si possono poi formalizzare anche i rapporti fra il credere (C) e il credere fondatamente (C_F) con gli ulteriori seguenti schemi:

$$C_F A \rightarrow CA$$

(se si crede fondatamente A, allora si crede A)

$$CA \rightarrow C_F CA$$

(se si crede A, allora si crede fondatamente di credere A)

$$\neg CA \rightarrow C_F \neg CA$$

(se non si crede A, allora si crede fondatamente di non credere A)

$$CA \rightarrow CC_F A$$

(se si crede A, si crede di credere fondatamente A)

Nel sistema che si ottiene in tal modo si possono studiare le proprietà logiche dell'operatore di *sapere fondato* (S_F), che si può definire nel modo seguente:

$$S_F A =_{df} C_F A \wedge A$$

Il problema dell'onniscienza logica

Le ricerche nel settore delle logiche epistemiche, sollecitate soprattutto dagli sviluppi dell'Intelligenza Artificiale, si sono rivolte soprattutto ad affrontare il cosiddetto *problema dell'onniscienza logica*. Le logiche finora esposte fanno riferimento ad un soggetto epistemico altamente idealizzato e perfettamente razionale. Ad esempio, nei calcoli esaminati sono derivabili tutte le tautologie della logica proposizionale classica e, quindi, per la regola di necessitazione, il soggetto epistemico le crede (sa) tutte (e inoltre conosce tutte le conseguenze logiche di ciò che crede o che sa). Gli sforzi si sono concentrati nel costruire calcoli che rispecchiano ciò che credono o sanno soggetti epistemici con caratteristiche più simili a quelle dei normali esseri umani. Dedichiamo qualche cenno ad uno di essi, soprattutto per mostrare la flessibilità della semantica dei mondi possibili di Kripke.

Per cercare di ovviare, almeno in parte, al problema dell'onniscienza logica restando all'interno del paradigma della semantica dei mondi possibili si è considerata una sua variante, detta *semantica dei modelli minimali*, della quale proponiamo la versione più semplice considerando un sistema con l'operatore C e non considerando nella semantica la relazione di accessibilità R.

L'idea, in breve, è la seguente. Dato un modello M = $\langle W, I \rangle$, si può associare ad ogni formula A il sottoinsieme di W costituito dai mondi in cui A è vera. Indichiamo tale sottoinsieme con *int*(A), che si può leggere "intensione di A", ossia, in formula, con le notazioni introdotte in precedenza:

$$int(A) = \{u \in W\colon \mathrm{M}, u \models A\}$$

Introduciamo una funzione N di dominio W che associa a ciascun mondo u un insieme di sottoinsiemi di W. D'ora il poi il modello M, detto *modello di credenza* o *modello minimale*, è la terna ordinata $\mathrm{M} = (W, I, N)$. La definizione induttiva di formula vera in un mondo u di M non subisce variazioni per quanto riguarda i connettivi della logica proposizionale classica, ma viene così modificata per quanto riguarda la clausola relativa all'operatore di credenza:

$$\text{se } A = CB, \text{ allora } \mathrm{M}, u \models A \text{ se e solo se } int(B) \in N(u)$$

Essa afferma che la formula CB è vera in u (B è creduta in u dal soggetto epistemico) se e solo se l'intensione di B appartiene a $N(u)$.

Dato che non si è finora formulata alcuna ipotesi sulle proprietà della funzione N, la logica definita dalla classe dei modelli di credenza (l'insieme delle formule vere in tutti i mondi di ogni modello di credenza) non è chiusa rispetto alla conseguenza logica: anche se $A \rightarrow B$ è una tautologia e in un mondo u è creduta A non è detto che sia creduta B, e ciò accade se $int(A) \in N(u)$ e $int(B) \notin N(u)$. Se $W \notin N(u)$, il soggetto epistemico di u non crede alcuna tautologia (l'intensione di una qualsiasi tautologia è W poiché le tautologie sono vere in tutti i mondi). In questa semantica, dato che due formule logicamente equivalenti hanno la stessa intensione, se in un mondo è creduta una, allora è creduta anche l'altra. In particolare, se in un mondo il soggetto epistemico crede una tautologia, allora crede tutte le tautologie (le quali hanno tutte la stessa intensione W). Queste ultime caratteristiche della nuova semantica fanno sì che anch'essa si riferisca ad un soggetto epistemico troppo idealizzato, e quindi non risolva in modo soddisfacente il problema dell'onniscienza logica. Si osservi anche che non è corretta la regola di necessitazione poiché, evidentemente, in un mondo u può essere vera A senza che sia vera CA (basta che $int(A) \notin N(u)$). Inoltre, il soggetto epistemico può credere delle contraddizioni: dato che l'intensione di una contraddizione è l'insieme vuoto $\emptyset$, se $\emptyset \in N(u)$, allora in u sono credute tutte le contraddizioni. Possono anche essere credute due formule che si contraddicono a vicenda senza che sia creduta una contraddizione: se $int(A) \in N(u)$, $int(\neg A) \in N(u)$ e $\emptyset \notin N(u)$, valgono $\mathrm{M}, u \models CA$ e $\mathrm{M}, u \models C\neg A$ e non vale $\mathrm{M}, u \models C(A \wedge \neg A)$.

Non è valida neppure $C(A \rightarrow B) \rightarrow (CA \rightarrow CB)$ in quanto può capitare che $int(A \rightarrow B) \in N(u)$, $int(A) \in N(u)$ e $int(B) \notin N(u)$.

Infine, se $N(u) = \emptyset$, allora il soggetto epistemico non crede alcuna formula.

In sostanza, senza condizioni sulla funzione N, si ottiene una logica in cui le capacità inferenziali del soggetto epistemico sono praticamente nulle. Un calcolo logico $\mathbf{E_M}$ corretto e completo rispetto a questa semantica si ottiene aggiungendo al calcolo proposizionale classico la seguente regola:

se si è derivato $A \leftrightarrow B$, allora si può derivare $CA \leftrightarrow CB$

Si possono recuperare le proprietà delle logiche della credenza esposte nel paragrafo precedente imponendo condizioni sulla funzione N.

Se si assume la seguente proprietà, detta *di chiusura rispetto ai soprainsiemi*:

per ogni $u \in W$ e $X, Y \subset W$, se $X \subset Y$ e $X \in N(u)$, allora $Y \in N(u)$

che equivale a:

per ogni $u \in W$ e $X, Y \subset W$, se $X \cap Y \in N(u)$, allora $X \in N(u)$ e $Y \in N(u)$

allora:

(1) $$C(A \wedge B) \rightarrow CA \wedge CB$$

è valida e viceversa.

Se si aggiunge (1) a $\mathbf{E_M}$ si ha un calcolo corretto e completo rispetto ai modelli di credenza chiusi rispetto ai sottoinsiemi.

Analogamente, la seguente proprietà, detta *di chiusura rispetto all'intersezione*:

per ogni $u \in W$ e $X, Y \subset W$, se $X \in N(u)$ e $Y \in N(u)$, allora $X \cap Y \in N(u)$

equivale alla validità dell'assioma:

(2) $$CA \wedge CB \rightarrow C(A \wedge B)$$

e la proprietà, detta *di esistenza dell'unità*:

$$\text{per ogni } u \in W,\ W \in N(u)$$

equivale alla validità dell'assioma:

$$(3) \qquad C(A \vee \neg A)$$

Il sistema formale ottenuto aggiungendo (1), (2) e (3) a $\mathbf{E_M}$ è corretto e completo rispetto ai modelli di credenza chiusi rispetto ai soprainsiemi, rispetto all'intersezione e dotati di unità (che prendono il nome di *filtri*) e si dimostra che è equivalente alla logica modale minimale **K**. Si possono introdurre poi ulteriori condizioni sui filtri in modo da rendere validi gli schemi di non credenza delle contraddizioni e di introspezione positiva e negativa precedentemente considerati. La validità dell'assioma caratteristico del sapere:

$$(\mathrm{T}) \qquad SA \to A$$

equivale alla seguente condizione:

$$\text{per ogni } u \in W \text{ e } X \subset W, \text{ se } X \in N(u), \text{ allora } u \in X$$

(ossia, posto $X = int(A)$, se in u si sa A, allora A è vera in u poiché $u \in int(A)$).

In definitiva, si riottengono i sistemi di logica epistemica da una diversa impostazione che, seppur non consente di risolvere il problema dell'onniscienza logica, consente di contemplare situazioni più articolate di quelle precedentemente considerate.

Considerazioni sulle logiche epistemiche

Anche se il problema dell'onniscienza logica non è ancora stato risolto, sono state proposte strategie più soddisfacenti di quella esposta nel paragrafo precedente. Ad esempio, in alcuni sistemi si introducono due operatori di credenza detti di *credenza implicita* (C_i) e di *credenza esplicita* (C_e). Il primo è relativo a tutto ciò che è implicito nelle credenze del soggetto epistemico (e quindi è come l'operatore di credenza C considerato in precedenza). Il secondo, invece, si riferisce a quanto un soggetto epistemico crede di fatto. Si può supporre che un soggetto epistemico, oltre a credere esplicitamente che una proposizione sia vera o che sia falsa, possa non attribuire ad essa alcun valore di verità oppure possa attribuirle entrambi i valori (le credenze non sono complete o possono essere contraddittorie). Le ricerche in logica epistemica si intrecciano così con quelle delle *logiche polivalenti* (CAP. 8) e delle *logiche paracoerenti* (CAP. 12).

Altri sforzi, più complessi dal punto di vista tecnico, sono indirizzati allo studio di sistemi epistemici più complessi, in cui sono simultaneamente presenti più agenti epistemici (*sistemi multiagenti*) e in cui si introducono *n* operatori di "sapere" o di "credere" individuali e si possono studiare i rapporti fra la conoscenza e la credenza individuale e quella collettiva. In altri sistemi si introducono aspetti dinamici che consentono di trattare l'aumento, la diminuzione e la revisione delle conoscenze e delle credenze. Molte ricerche sono dedicate alla elaborazione di sistemi in cui sono presenti simultaneamente più operatori intensionali (*sistemi multimodali*). In sintesi, i problemi legati alla conoscenza e alla credenza sono centrali in molti sviluppi dell'Intelligenza Artificiale e dell'epistemologia, e quindi vengono affrontati con tutto il bagaglio tecnico elaborato nei più diversi settori della logica.

7
Logiche temporali

Introduzione

Le *logiche temporali* (intese nel senso di "logiche dei tempi verbali") sono estensioni dei sistemi logici classici elaborate al fine di rendere conto degli aspetti temporali che intervengono nei ragionamenti. Se consideriamo la seguente inferenza: "Massimo corre. Quindi Massimo avrà corso", si può facilmente convenire che essa è logicamente corretta: se ora Massimo sta correndo, sarà vero nel futuro che nel passato Massimo stava correndo. Così, intuitivamente, siamo disposti ad accettare che "Massimo corse" e "Massimo aveva corso" sono proposizioni con significato diverso, che da "Massimo correrà o Massimo salterà" segue logicamente "Massimo correrà o salterà", e che da "Massimo correrà" e "Massimo salterà" non segue "Massimo contemporaneamente correrà e salterà". Se già a partire da Aristotele molti logici hanno preso in considerazione la struttura delle inferenze temporali, i sistemi della logica classica, che sono stati elaborati avendo come modello privilegiato le dimostrazioni matematiche, formalizzano inferenze che coinvolgono soltanto proposizioni atemporali. In tempi recenti, a partire dalla pubblicazione di Prior (1967), le logiche temporali hanno avuto un enorme sviluppo e sono stati elaborati svariati sistemi adatti a trattare inferenze in cui intervengono operatori logici temporali. Grande impulso a questo settore è derivato dalle esigenze dell'Intelligenza Artificiale e dallo studio del problema della correttezza dei programmi per i calcolatori. In questo capitolo illustreremo alcuni sistemi di logica temporale proposizionale nei quali si introducono operatori il cui comportamento è per molti aspetti analogo a quello degli operatori intensionali esaminati nei precedenti capitoli. Potremo tra l'altro evidenziare il fondamentale ruolo della semantica di Kripke che proprio in questo ambito ha una delle sue applicazioni intuitivamente più convincenti. I "mondi possibili", infatti, corrispondono alle diverse situazioni in cui può trovarsi un unico mondo in evoluzione attraverso il tempo e la "relazione di accessibilità" tra mondi è la relazione d'ordine fra gli istanti di tempo.

Linguaggio e semantica della logica temporale

Ampliamo il linguaggio $\mathbf{L}_0$ della logica proposizionale classica con gli operatori monoargomentali F e P che hanno il seguente significato intuitivo:

> FA sta per "Sarà vero in almeno un istante futuro che A"
> (in breve: "Sarà il caso che A")
> PA sta per "È stato vero in almeno un istante passato che A"
> (in breve: "È stato il caso che A")

Quindi, se p è la proposizione "Massimo corre", Fp formalizza "Massimo correrà" e Pp sta per "Massimo corse"; "Massimo avrà corso" si può rendere con FPp, mentre "Massimo aveva corso" con PPp. Il calcolo logico che stiamo per costruire dovrà giustificare le intuizioni prima illustrate, per cui, ad esempio, da A segue FPA, da $FA \vee FB$ segue $F(A \vee B)$, mentre da $FA \wedge FB$ non segue $F(A \wedge B)$.

La formula $\neg F \neg A$ significa "Non sarà mai il caso che $\neg A$", ossia "Sempre nel futuro A".

Analogamente, la formula $\neg P \neg A$ significa "Non è mai stato il caso che $\neg A$", ossia "Sempre nel passato A".

Introduciamo i due operatori G e H per $\neg F \neg$ e $\neg P \neg$.

Alternativamente, si possono assumere G e H come operatori primitivi e, come intuitivamente ovvio, si possono definire F e P rispettivamente nel modo seguente:

$$FA =_{df} \neg G \neg A \text{ e } PA =_{df} \neg H \neg A$$

Per interpretare il linguaggio ampliato con i nuovi operatori si adotta l'usuale semantica di Kripke, nella quale si rivela opportuna qualche lieve modifica terminologica. Al posto dell'insieme W di mondi consideriamo un insieme non vuoto T di "istanti" e indichiamo la relazione di accessibilità con "$<$": $t_1 < t_2$ si legge "l'istante t_1 precede l'istante t_2".

Una coppia $(T, <)$ costituisce una struttura (*frame*) per la logica temporale e, data una interpretazione I che assegna a ciascuna lettera proposizionale un valore di verità per ciascun istante di T, si ottiene la terna ordinata $(T, <, I)$, del tutto analoga a (W, R, I), che viene detta *modello temporale.*

Le due clausole della definizione della nozione di "verità di una formula A all'istante t appartenente a T nel modello $(T, <, I)$", per le formule del tipo FA e PA assumono la seguente formulazione:

$(T, <, I), t \models FA$ se e solo se esiste un istante t' con $t < t'$ per cui $(T, <, V), t' \models A$
$(T, <, I), t \models PA$ se e solo se esiste un istante t' con $t' < t$ per cui $(T, <, I), t' \models A$

Esse consentono di attribuire un valore di verità in un certo istante t a proposizioni *temporalizzate* (precedute da uno degli operatori temporali): in un certo istante t è vera FA se A è vera in un istante che segue t, mentre è vera PA se A è vera in un istante che precede t. Si ricava facilmente che:

$(T, <, I), t \models GA$ se e solo se per ogni istante t' con $t < t'$ si ha $(T, <, I), t' \models A$
$(T, <, I), t \models HA$ se e solo se per ogni istante t' con $t' < t$ si ha $(T, <, I), t' \models A$

Queste clausole ricalcano evidentemente quella dell'operatore L della logica modale minimale. Nella logica temporale si considerano quattro operatori, due per il passato e due per il futuro, e si concentra l'attenzione sugli istanti (tra cui quello presente) e sul loro ordinamento.

Richiamiamo brevemente anche gli altri concetti semantici.

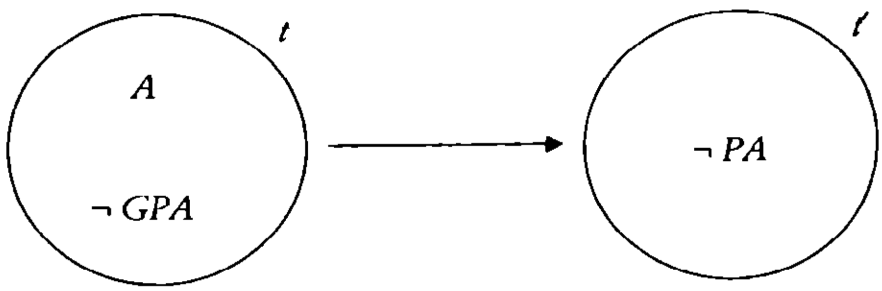
Una proposizione A è *valida in un modello* $(T, <, I)$ (in formula $(T, <, I) \models A$) se e solo se è vera in ogni istante del modello, è *valida in una struttura* $(T, <)$ $((T, <) \models A)$ se e solo se, per ogni interpretazione I, $(T, <, I) \models A$ e, infine, è *valida* $(\models A)$ se e solo se è valida in ogni struttura $(T, <)$.

Formule valide in ogni struttura

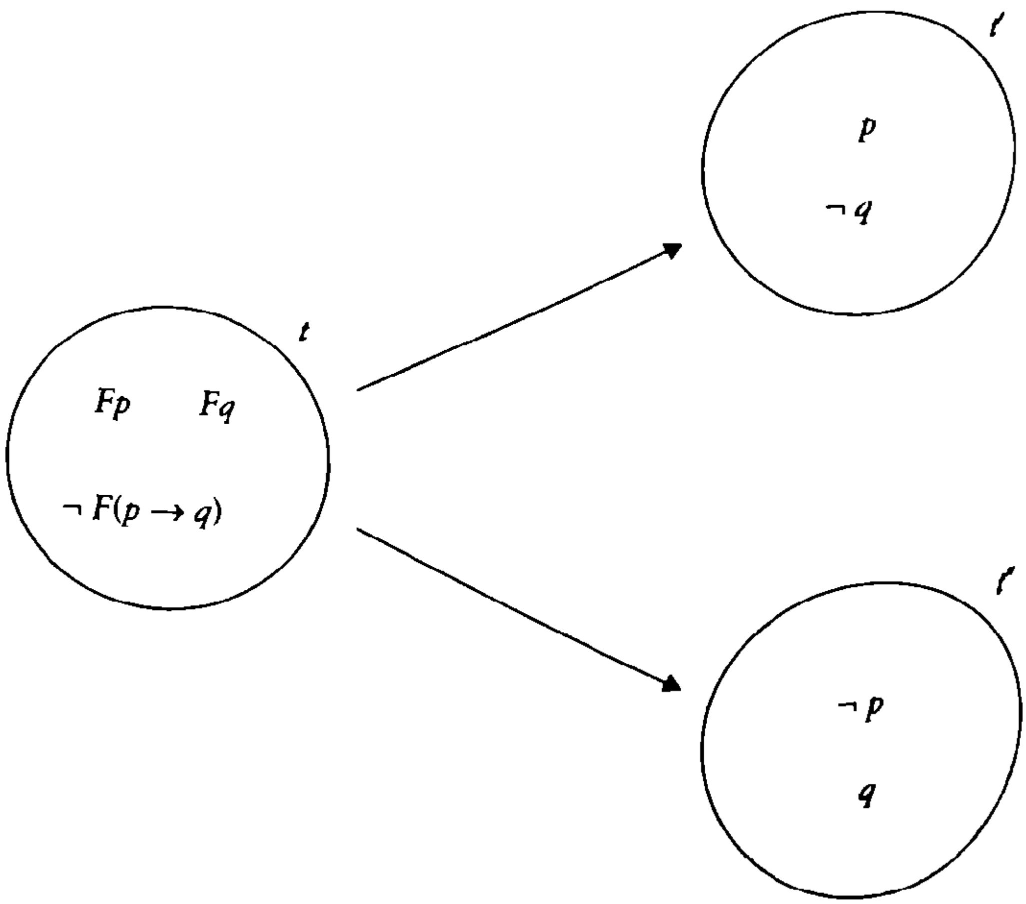
Vi sono formule valide, ossia vere in ogni istante di ogni modello temporale, indipendentemente da qualsiasi condizione imposta sulla struttura $(T, <)$.

ESEMPIO 1. Dimostriamo che $\models A \rightarrow GPA$.

Procediamo per assurdo. Supponiamo che ad un istante t di un modello temporale $(T, <, I)$ non valga $A \rightarrow GPA$. Si ha allora $(T, <, I), t \models A$ e non $(T, <, I), t \models GPA$, ossia $(T, <, I), t \models \neg GPA$). Perché si verifichi quest'ultima condizione deve esistere un istante t' successivo a t in cui non vale PA. Ma allora si ha l'assurdo che all'istante t' non vale PA mentre nell'istante t, che è passato rispetto a t', vale A. La situazione è illustrata nel seguente diagramma analogo a quelli del CAP. 2 in cui ciascun istante è rappresentato dall'insieme delle proposizioni vere in esso e la relazione $<$ è rappresentata mediante frecce fra istanti:



ESEMPIO 2. Nel seguente diagramma:



è rappresentato un modello temporale con tre soli istanti t, t' e t'', con $t < t'$ e $t < t''$, mentre t' e t'' sono irrelati. Se all'istante t' vale p e non vale q, mentre all'istante t'' vale q e non vale p, allora all'istante t valgono Fp e Fq, ma non vale $F(p \wedge q)$, poiché in nessun istante futuro rispetto a t (né in t', né in t'') vale $p \wedge q$. Ne segue che $Fp \wedge Fq \rightarrow F(p \wedge q)$ non è valida.

L'insieme delle formule valide costituisce la *logica minimale* $\mathbf{K_T}$. Essa può essere presentata come calcolo assiomatico estendendo un qualsiasi calcolo per la logica proposizionale classica con i seguenti assiomi:

(A1)	$G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$
(A2)	$H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$
(A3)	$A \rightarrow GPA$
(A4)	$A \rightarrow HFA$

e, oltre al *modus ponens*, con le regole analoghe a quelle di necessitazione: *da A deriva GA* e *da A deriva HA* (se $\vdash A$, allora $\vdash GA$ e $\vdash HA$).

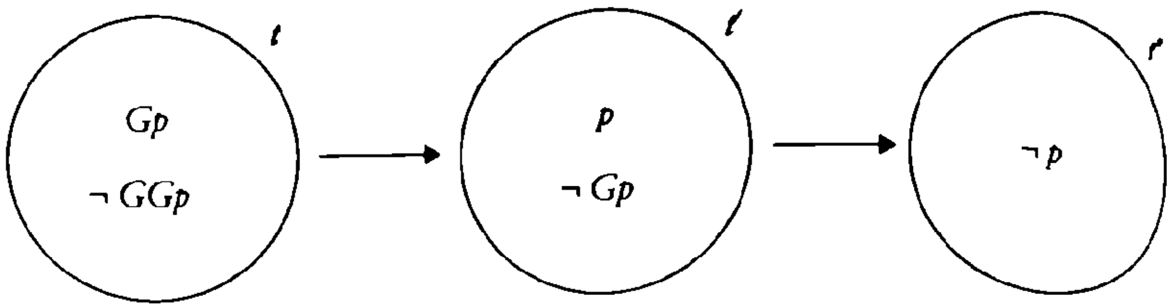
Tra i teoremi di $\mathbf{K_T}$ vi sono, ad esempio, le seguenti formule:

(1)	$G(A \rightarrow B) \rightarrow (FA \rightarrow FB)$	(2)	$H(A \rightarrow B) \rightarrow (PA \rightarrow PB)$
(3)	$GA \vee GB \rightarrow G(A \vee B)$	(4)	$HA \vee HB \rightarrow H(A \vee B)$
(5)	$F(A \wedge B) \rightarrow FA \wedge FB$	(6)	$P(A \wedge B) \rightarrow PA \wedge PB$
(7)	$G(A \wedge B) \leftrightarrow (GA \wedge GB)$	(8)	$H(A \wedge B) \leftrightarrow (HA \wedge HB)$
(9)	$PGA \rightarrow A$	(10)	$FHA \rightarrow A$
(11)	$A \wedge FB \rightarrow F(PA \wedge B)$	(12)	$A \wedge PB \rightarrow P(FA \wedge B)$

Valgono per $\mathbf{K_T}$ i teoremi di correttezza e di completezza: in $\mathbf{K_T}$ sono derivabili tutte e sole le formule valide [1].

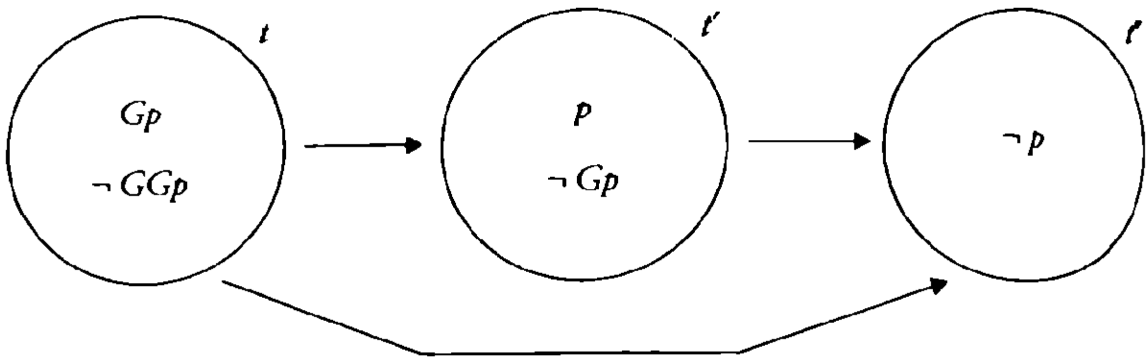
La logica temporale minimale e le sue estensioni

Consideriamo ora la formula $Gp \rightarrow GGp$. Essa non è valida e, quindi, non è un teorema di $\mathbf{K_T}$. Nel seguente modello temporale, all'istante t vale Gp e non vale GGp:



Infatti, affinché all'istante t non valga GGp basta che vi sia un istante t' successivo a t in cui non vale Gp (e in tale istante varrà p dato che all'istante t vale Gp). Affinché in t' non valga Gp basta che vi sia un istante t'' successivo a t' in cui non vale p.

Se supponiamo ora che la relazione $<$ sia transitiva, si perviene ad un assurdo. Infatti, in tal caso, da $t < t'$ e $t' < t''$ segue $t < t''$ e il diagramma precedente diviene:



Si ha allora l'assurdo che in t vale Gp ("Sempre in futuro p"), e nell'istante t'', successivo a t, vale $\neg p$, ossia non vale p.

Ne segue che, se $<$ è transitiva, la formula $Gp \rightarrow GGp$ (e, più in generale, lo schema $GA \rightarrow GGA$) è valida. Vale anche il viceversa, ossia se la formula è valida, allora la relazione $<$ è transitiva [2]. Analogo ragionamento si può condurre per $HA \rightarrow HHA$.

Se si amplia la logica minimale $\mathbf{K_T}$ con l'assioma:

(A5) $$GA \rightarrow GGA$$

oppure con l'assioma:

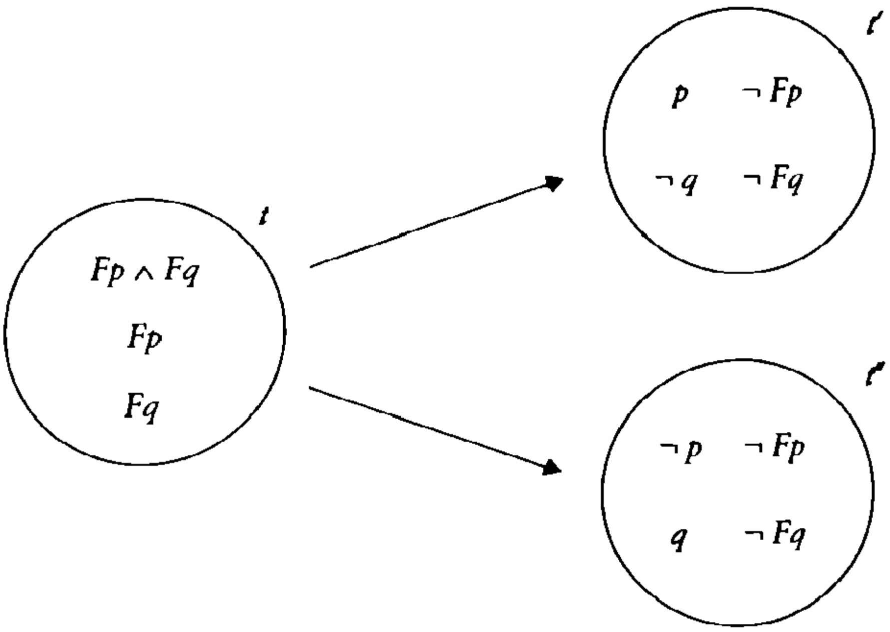
(A5') $$HA \rightarrow HHA$$

si ha il sistema $\mathbf{KM_T}$ in cui sono derivabili tutte e sole le proposizioni valide in tutte le strutture $(T, <)$ con $<$ transitiva. Dato che la transitività è un requisito minimale per una relazione d'ordine, il sistema $\mathbf{KM_T}$ costituisce la *logica temporale minimale.*

Consideriamo ora la formula:

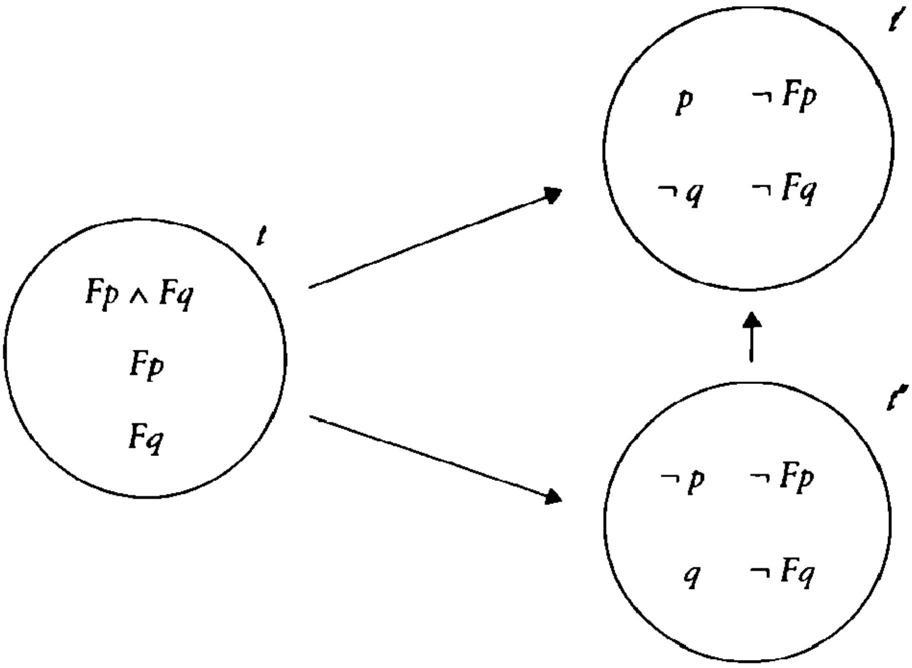
$$Fp \wedge Fq \rightarrow F(Fp \wedge q) \vee F(p \wedge q) \vee F(p \wedge Fq)$$

Essa non è vera all'istante t del seguente modello temporale:



La valutazione delle lettere proposizionali p e q è scelta in modo che nei due istanti t' e t'' successivi a t non vale nessuna delle tre congiunzioni $p \wedge q$, $Fp \wedge q$, $p \wedge Fq$ (in t' e t'' non valgono né Fp né Fq poiché si tratta di istanti "senza futuro"), quindi in t non vale $F(Fp \wedge q) \vee F(p \wedge q) \vee F(p \wedge Fq)$; valgono invece Fp (in quanto in t' vale p) e Fq (in quanto in t'' vale q), e quindi $Fp \wedge Fq$. In definitiva, all'istante t vale l'antecedente, ma non il conseguente, della formula in esame.

Tuttavia, se imponiamo che due istanti qualsiasi siano sempre relati, ossia che valga $t' < t''$ o $t' = t''$ o $t'' < t'$, supporre che la formula non sia vera all'istante t conduce a una contraddizione. Ad esempio, se supponiamo che $t'' < t'$, si ottiene:



e vi è l'assurdo che all'istante t'' vale $\neg\, Fp$ e all'istante t', successivo a t'', vale p. Si trova un'analoga contraddizione supponendo che $t' < t''$ (e evidentemente non può essere nemmeno $t' = t''$).

Si può dimostrare che, se si aggiungono gli assiomi:

(A6) $\quad FA \wedge FB \rightarrow F(FA \wedge B) \vee F(A \wedge B) \vee F(A \wedge FB)$

(A7) $\quad PA \wedge PB \rightarrow P(PA \wedge B) \vee P(A \wedge B) \vee P(A \wedge PB)$

si ha la *logica temporale lineare* $\mathbf{KL_T}$ in cui sono derivabili tutte e sole le formule valide nelle strutture con la relazione $<$ transitiva e totale. Se si assume solo (A7) si ha la linearità solo verso il passato, e sono possibili ramificazioni verso il futuro. Assumendoli entrambi si ha l'ordinamento totale (lineare) degli istanti di tempo.

Come per le logiche precedentemente considerate, alla validità di certe formule "corrisponde" una proprietà delle strutture temporali. Ci si può quindi porre il problema di caratterizzare, tramite formule, strutture temporali con determinate caratteristiche, individuando, se possibile, tutte e sole le leggi logiche relative a differenti "concezioni" della struttura del tempo. Vediamo qualche esempio.

Consideriamo una qualsiasi contraddizione, ad esempio $p \wedge \neg p$, e la formula:

$$G(p \wedge \neg p) \vee FG(p \wedge \neg p)$$

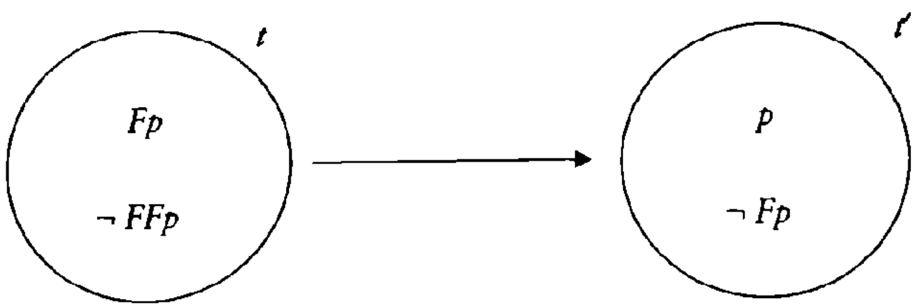
Se essa è vera in un istante t, allora o questo istante non ha successivo (se in esso è vero $G(p \wedge \neg p)$, in un qualsiasi istante successivo a t dovrebbe valere $p \wedge \neg p$, e ciò è impossibile), oppure, se vale il secondo disgiunto $FG(p \wedge \neg p)$, l'istante t deve essere seguito da un istante t' in cui vale $G(p \wedge \neg p)$ e che è terminale (per quanto osservato a proposito del primo disgiunto). Imporre la validità della formula, quindi, comporta che *il tempo abbia una fine.*

Analogamente, $H(p \wedge \neg p) \vee PH(p \wedge \neg p)$ corrisponde all'*esistenza di un inizio del tempo.*

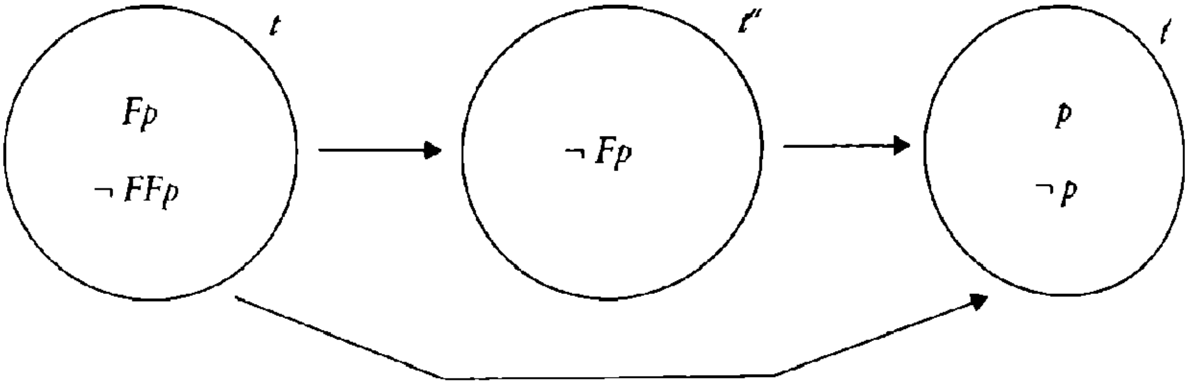
Invece, se in un istante t vale la proposizione $Gp \rightarrow Fp$, allora o in t non vale Gp, e allora t è seguito da un istante in cui non vale p, oppure vale Fp, e allora t è seguito da un istante in cui vale p. In ogni caso t non è un istante terminale. Imporre la validità della formula, quindi, equivale a imporre che ogni istante non sia terminale, ossia l'*eternità del tempo verso il futuro.*

Analogamente, la formula $Hp \rightarrow Pp$ corrisponde all'*eternità del tempo verso il passato.*

Prendiamo ora in esame la proposizione $Fp \rightarrow FFp$. Essa è falsa all'istante t del seguente modello temporale:



Tuttavia, se imponiamo che il tempo, oltre che lineare, sia *denso*, ossia che tra due istanti qualsiasi ve ne sia sempre un terzo, tra t e t' vi deve essere un istante t'' e allora si perviene alla seguente situazione contraddittoria:



Infatti, dato che in t vale Fp, vi deve essere t' successivo a t in cui vale p. D'altra parte, per la densità, vi è un istante t'' compreso fra t e t' e in t'' deve valere $\neg Fp$ poiché in t vale $\neg FFp$; ma allora in t', successivo a t'', dovrebbe valere $\neg p$, e si ha la contraddizione che all'istante t' valgono sia p, sia $\neg p$.

Se agli assiomi della logica temporale lineare $\mathbf{KL_T}$ si aggiungono quelli dell'eternità verso il passato e verso il futuro e gli schemi che determinano la densità ($FA \rightarrow FFA$ e $PA \rightarrow PPA$) si ottiene la *logica del tempo razionale* $\mathbf{KQ_T}$ (i numeri razionali, infatti, costituiscono un insieme totalmente ordinato, denso, senza né primo né ultimo elemento).

Per ottenere la *logica del tempo reale* $\mathbf{KR_T}$ (vale a dire quella che corrisponde alla struttura del tempo rappresentata da una retta, ossia quella abituale della fisica elementare) occorrono degli assiomi che garantiscano la *continuità* del tempo. Si può dimostrare, con considerazioni più complesse ma sostanzialmente dello stesso tipo di quelle finora svolte, che tali schemi sono i seguenti:

$$FA \wedge FG\neg A \rightarrow F(HFA \wedge G\neg A)$$
$$PA \wedge PH\neg A \rightarrow P(GPA \wedge H\neg A)$$

Se si vuole invece che la struttura del tempo sia *discreta*, ossia che ogni istante abbia un predecessore e un successore immediato (come ad esempio nell'insieme dei numeri interi), ossia una "quantizzazione" del tempo, occorre aggiungere agli assiomi della logica temporale lineare i seguenti schemi con cui si ottiene il sistema $\mathbf{KD_T}$:

$$A \wedge HA \rightarrow FHA$$
$$A \wedge GA \rightarrow PGA$$

Infine, se si vuole realizzare il modello del tempo "circolare", il ciclo dell'eterno ritorno, bisogna imporre, anziché la linearità, l'equivalenza fra il passato e il futuro. Il sistema $\mathbf{KC_T}$ della logica temporale circolare si ottiene aggiungendo a $\mathbf{K_T}$ gli schemi $FFA \rightarrow FA$, $GA \rightarrow A$, $GA \rightarrow HA$ che comportano la transitività, riflessività e simmetria della relazione $<$.

Considerazioni sulle logiche temporali

Abbiamo schematicamente illustrato alcuni sistemi di logica temporale proposizionale che "corrispondono" a strutture temporali familiari. Gli sviluppi di questo settore hanno rivelato situazioni più complesse, ossia vi sono esempi di strutture temporali che non possono essere assiomatizzate, esempi di schemi ai quali non corrispondono proprietà della relazione $<$ e la situazione diviene alquanto più intricata se si passa dal livello proposizionale a quello predicativo. Solo per fare un esempio, la proposizione "Un matematico sarà presidente della repubblica" può ricevere quattro diverse interpretazioni:

$\exists x(Mx \wedge FPx)$
("Vi è un matematico che sarà presidente della repubblica")
$\exists xF(Mx \wedge Px)$
("Vi è qualcuno che sarà matematico e presidente della repubblica")
$F\exists x(Mx \wedge FPx)$
("Vi sarà un matematico che diverrà presidente della repubblica")
$F\exists x(Mx \wedge Px)$
("Vi sarà un matematico presidente della repubblica")

Le formule in cui operatori temporali o intensionali interagiscono con i quantificatori sono di difficile interpretazione poiché coinvolgono individui "attuali" e individui "possibili". La semantica delle logiche modali al livello predicativo è assai complessa e controversa e, in questo testo, abbiamo preferito tralasciarla, per mantenere l'esposizione ad un livello introduttivo.

Nella letteratura sono stati considerati molti altri operatori temporali oltre quelli sui quali ci siamo soffermati (ad esempio "adesso", "fintanto che") e semantiche basate, anziché sul concetto di "istante", per sua natura problematico, su quello di "intervallo di tempo". A questo proposito è stato osservato che la proposizione "Massimo corre" è vera in un intervallo di tempo e nei suoi sottointervalli. Tuttavia la proposizione "Massimo va al lavoro" che è vera per un certo intervallo di tempo, non lo è più per sottointervalli. In Intelligenza Artificiale le due proposizioni sono state distinte con due diversi operatori, Vale e Occorre. Con ovvio significato dei simboli:

Vale(Corre(Massimo); (14 p.m., 15 p.m.))
Occorre(Andare(Massimo, Lavoro); (9 a.m.; 9.30 a.m.))

Sono inoltre state proposte formalizzazioni delle proposizioni temporali direttamente nella logica dei predicati introducendo variabili per istanti e una costante individuale a per indicare l'istante presente. Ad esempio, in questa prospettiva:

Pp si scrive $\exists t(t < a \wedge p(t))$
Fp si scrive $\exists t(t > a \wedge p(t))$

In ogni caso, nel ragionamento comune, gli aspetti temporali intervengono con molteplici sfumature e il problema di formalizzarli adeguatamente è ancora lontano da una soluzione soddisfacente.

Tra l'altro, gli aspetti temporali interagiscono con gli altri operatori intensionali prima introdotti. Ad esempio:

"Massimo sa che dovrà necessariamente andare a Milano"
"È necessario che Massimo creda che Angelo sia stato sincero"

Date le difficoltà di accordo che si incontrano già all'interno dei singoli settori, il problema sollevato dalle modalità di interazione di più tipi di operatori, ossia di elaborare sistemi logici adeguati in cui convivano, accanto agli operatori temporali, gli altri operatori intensionali si rivela molto complesso. D'altra parte, non solo molti tradizionali problemi filosofici (ad esempio quello del determinismo) possono essere inquadrati solo in ambiti non estensionali, ma le applicazioni della logica richiedono la considerazione di aspetti temporali. Si pensi ad esempio al loro fondamentale ruolo in ambito giuridico e in Intelligenza Artificiale: il ragionamento umano può essere formalizzato solo uscendo dai confini della logica classica e introducendo operatori studiati nei settori esaminati in questa parte del testo. Se in ciascun ambito i risultati sono confortanti, l'interazione degli operatori intensionali sta muovendo i primi passi. Tra l'altro, il superamento dei limiti della logica classica può avvenire non solo lasciando cadere l'ipotesi della vero-funzionalità dei connettivi, ma abbandonando l'ipotesi della bivalenza delle proposizioni o abbracciando entrambe le vie, come vedremo nelle logiche che esamineremo nella seconda parte.

Parte seconda
Logiche alternative alla logica classica

Nella prima parte abbiamo esaminato vari sistemi logici che estendono quelli della logica classica con la considerazione di operatori non vero-funzionali. La semantica dei mondi possibili ha consentito di consolidare le conoscenze di varie logiche modali, ed è per questo motivo che, pur mantenendo la trattazione ad un livello introduttivo, ci siamo soffermati ad illustrare anche alcuni aspetti tecnici legati all'impiego di tale semantica.

In questa seconda parte rivolgiamo la nostra attenzione ad altri settori delle logiche non classiche, generalmente più complessi e controversi di quelli finora esaminati, e che si propongono anch'essi di superare i limiti della logica classica. Il panorama di queste articolazioni delle ricerche logiche è assai ampio e in enorme sviluppo. Coerentemente con i nostri fini, abbiamo scelto cinque settori nei quali è possibile presentare in poche pagine il nucleo fondamentale delle problematiche affrontate. Ciò che accomuna le logiche di questa seconda parte è che in esse si rifiutano leggi basilari della logica classica, quasi sempre così intuitivamente ovvie da rendere difficile capire come esse possano essere messe in dubbio. In generale, se è abbastanza facile comprendere, anche attraverso semplici esempi, come mai sorga l'esigenza di superare i confini della logica classica o di rinunciare ad alcune delle sue leggi, è invece un'impresa assai più ardua proporre veri e propri sistemi logici che realizzino quanto ci si auspica. Da un lato, il sistema deve soddisfare le nuove esigenze, e spesso capita che, per ottenere un determinato obiettivo, si vada incontro a risultati del tutto indesiderati o di difficile interpretazione. D'altro lato, affinché le strategie messe in atto non risultino puri espedienti *ad hoc*, occorre che i calcoli siano accompagnati da un'adeguata semantica che giustifichi gli assiomi e le regole che si assumono. Molto spesso tali semantiche, proprio perché non devono rendere valide leggi della logica classica, presentano sottili articolazioni e si basano su considerazioni che danno luogo a varie possibili alternative. La nostra trattazione sarà persino più breve di quella dei capitoli precedenti, poiché quasi ogni punto richiederebbe giustificazioni e analisi approfondite. L'obiettivo principale che ci proponiamo è illustrare la messa in discussione di leggi e regole della logica classica e alcune delle conseguenze della rinuncia ad esse.

Nel CAP. 8 proponiamo alcuni sistemi di *logica polivalente*, nei quali si assume più di un valore di verità: una proposizione non è più soltanto vera o falsa, ma si hanno ulteriori possibilità di valutazione. La legge in discussione è pertanto il *principio del terzo escluso* $A \vee \neg A$.

Il CAP. 9 è dedicato alle *logiche della rilevanza*, nelle quali si vogliono evitare le inferenze nelle quali le premesse non rivestono un ruolo determinante per stabilire la conclusione. Le leggi sotto inchiesta sono la *legge di affermazione del conseguente* $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ e la *legge di negazione dell'antecedente* $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ e le relative regole di derivazione (ossia i già citati paradossi dell'implicazione materiale).

Uno dei principali limiti della logica classica è la formalizzazione delle proposizioni condizionali "se A, allora B" mediante il connettivo vero-funzionale del condizionale materiale $\rightarrow$. In molte inferenze il condizionale non ha un comportamento vero-funzionale, e nelle *logiche condizionali* (CAP. 10) si propongono formalizzazioni diverse del condizionale, che non rispettano varie leggi logiche del condizionale materiale, tra le quali, ad esempio, la *legge di concatenazione* $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ e la *legge di contrapposizione* $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Una delle prime logiche alternative alla logica classica che sono state intensamente studiate è la *logica intuizionista* (CAP. 11) nella quale non valgono, oltre a numerosi altri, il *principio del terzo escluso* $A \vee \neg A$, la *legge di negazione classica* $(\neg A \rightarrow B \wedge \neg B) \rightarrow A$ e la *legge della doppia negazione classica* $\neg\neg A \rightarrow A$. Il carattere costruttivo rende questa logica uno dei punti di riferimento per le sempre più diffuse applicazioni nella ricerca scientifica.

Nel CAP. 12, infine, tratteremo brevemente le *logiche paracoerenti*, nelle quali si mettono in discussione sia la *legge di Scoto* $A \wedge \neg A \rightarrow B$, sia il *principio di non contraddizione* $\neg (A \wedge \neg A)$.

In realtà, come vedremo, i cinque settori sono in interazione fra loro e con quelli esaminati in precedenza, e non costituiscono affatto campi separati di ricerca.

Proponiamo ora un esempio per illustrare come sia possibile rifiutare leggi logiche che appaiono intuitivamente del tutto evidenti.

L'equivalenza fra le due proposizioni:

"Elisa è ligure e Massimo è lombardo o piemontese"
"Elisa è ligure e Massimo è lombardo oppure Elisa è ligure e Massimo è piemontese"

ci appare del tutto scontata.

La legge logica che formalizza tale equivalenza è la *proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione*:

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Tale legge viene messa in discussione nell'ambito della *logica quantistica* [1]. Vediamo perché. Nell'ambito della microfisica vi sono grandezze che, per il principio di indeterminazione di Heisenberg, non possono essere misurate simultaneamente. Ad esempio, lo spin di un elettrone in una data direzione è una grandezza che può assumere solo i due valori $+1/2$ e $-1/2$; tuttavia, se è noto lo spin lungo una direzione (ad esempio l'asse x), non può essere determinato simultaneamente quello dello stesso elettrone lungo un'altra direzione (ad esempio l'asse y). Supponiamo che, per un certo elettrone, lo spin lungo l'asse x valga $+1/2$. È allora vera la proposizione: "Lo spin lungo l'asse x vale $+1/2$ *e* lo spin lungo l'asse y vale $+1/2$ *o* $-1/2$" ($A \wedge (B \vee C)$), ma non è accettabile la proposizione: "Lo spin lungo l'asse x vale $+1/2$ *e* lo spin lungo l'asse y vale $+1/2$ *o* lo spin lungo l'asse x vale $+1/2$ *e* lo spin lungo l'asse y vale $-1/2$" ($(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$). Nella logica classica la disgiunzione $A \vee B$ è vera se e solo se almeno uno dei due disgiunti è vero, mentre nella logica quantistica la verità di una disgiunzione non implica la verità di uno dei due disgiunti. Nell'esempio è vera la disgiunzione "Lo spin lungo l'asse y vale $+1/2$ *o* $-1/2$" ma non si può accettare alcuno dei due disgiunti poiché è stato determinato lo spin lungo l'asse x. Ciò evidenzia anche che una proposizione può essere falsa (non è vera "Lo spin lungo l'asse y vale $+1/2$") senza che sia vera la sua negazione ("Lo spin lungo l'asse y non vale $+1/2$", che equivale a "Lo spin lungo l'asse y vale $-1/2$").

Come emerge in questo esempio, la non validità di alcune leggi della logica classica è dovuta a un diverso significato attribuito ai connettivi.

Il rifiuto di leggi all'apparenza incontrovertibili quali il principio del terzo escluso o il principio di non contraddizione si fonda su un diverso significato dei connettivi biargomentali e, soprattutto, della negazione. Nelle logiche che considereremo i connettivi biargomentali e la negazione non sono più tutti vero-funzionali, ma alcuni hanno un'interpretazione intensionale spesso analoga a quella degli operatori modali. Per questo motivo, la semantica dei mondi possibili può essere utilizzata per interpretare i connettivi e la negazione in modo diverso da quello della loro tavola di verità.

8
Logiche polivalenti

Introduzione

Le logiche *polivalenti* sono sistemi logici nei quali non si assume uno dei princìpi fondamentali della logica classica, il *principio di bivalenza*, in base al quale vi sono due soli valori di verità, il "vero" **V** e il "falso" **F**, e ogni proposizione è vera o falsa. Nelle logiche polivalenti si assumono tre o più valori di verità, e in alcune anche infiniti valori di verità, e quindi in esse non è più in generale valido il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$. Il panorama di queste logiche è assai ampio e variegato: alcune hanno un valore puramente storico o di curiosità, altre più recenti e complesse non si sono ancora del tutto consolidate tecnicamente, molte si inquadrano in settori ormai autonomi (ad esempio le logiche *fuzzy*, di cui parleremo nel CAP. 14) e hanno importanti applicazioni in matematica, in Intelligenza Artificiale e nello studio del ragionamento di senso comune: nel linguaggio naturale, a differenza di quello matematico, tra il vero e il falso si assume quasi sempre una gamma più o meno ampia di valori intermedi.

Nella letteratura la polivalenza viene trattata con due angolature differenti, ma complementari e in interazione fra loro. Nella prima, più specifica, si studiano sistemi logici in cui si assumono più di due valori di verità e, limitandoci al livello proposizionale, si caratterizza il comportamento dei connettivi mediante matrici, ossia tavole di verità che generalizzano quelle della logica classica. Usualmente, in quest'ottica, le considerazioni semantiche precedono quelle di natura sintattica. Nella seconda prospettiva, di più largo respiro, la polivalenza interviene nella semantica dei sistemi logici e delle teorie formali: si introducono opportune strutture algebriche mediante le quali si valutano le formule e si definiscono le nozioni semantiche, usualmente al fine di ottenere teoremi di correttezza e completezza di calcoli logici e altri risultati metateorici relativi a teorie formali. In essa si possono far rientrare le cosiddette *semantiche algebriche*, la cui analisi pervade tutti i settori dell'indagine logica, compresa la stessa logica polivalente. In questa sede concentreremo la nostra attenzione soprattutto su tre sistemi trivalenti, al fine di illustrare la varietà di significati che si possono attribuire al terzo valore di verità. Successivamente accenneremo ad altri sistemi e ad alcuni recenti sviluppi delle logiche polivalenti.

La logica trivalente di Łukasiewicz

Il primo sistema di logica trivalente, ossia con tre valori di verità, è stato introdotto dal logico polacco J. Łukasiewicz in un celebre articolo del 1920. In realtà, già Aristotele, in un passo del *De Interpretatione*, aveva posto il problema del valore di verità delle proposizioni al futuro: assumere oggi come vera o falsa la proposizione "Domani vi sarà una battaglia navale" equivale ad affermare che il futuro è già determinato, e quindi che l'uomo è privo di una qualsiasi libertà di azione. Per salvaguardare il "libero arbitrio", si rivela necessario, in termini logici, rifiutare il principio di bivalenza. Il problema dell'attribuzione di un valore di verità a proposizioni future è stato lungamente dibattuto nel corso della storia della logica ed è noto come *problema dei futuri contingenti*, ossia proposizioni relative a fatti che potranno avverarsi o meno [1]. Attualmente, come abbiamo visto nel CAP. 7, i problemi logici relativi ai tempi dei verbi hanno trovato una loro naturale collocazione nell'ambito delle *logiche temporali*, nelle quali non si rifiuta il principio di bivalenza. Łukasiewicz, invece, ha introdotto, accanto al vero (V) e al falso (F), un terzo valore di verità, l'"indeterminato" (I), col significato di "che potrebbe essere sia vero che falso", il quale può essere ragionevolmente attribuito a proposizioni al tempo futuro come la precedente relativa alla battaglia navale. Il comportamento dei connettivi logici (negazione, congiunzione, disgiunzione e condizionale) è riportato nelle seguenti tavole:

A	$\neg A$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**I**	**I**	**V**	**I**
V	**F**	**F**	**V**	**F**
I	**V**	**I**	**V**	**V**
I	**I**	**I**	**I**	**V**
I	**F**	**F**	**I**	**I**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**I**	**F**	**I**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

In base a queste tavole né il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$, né il principio di non contraddizione $\neg (A \wedge \neg A)$, né la legge della doppia negazione nella forma $A \leftrightarrow \neg \neg A$ sono tautologie, dal momento che assumono valore **I** quando A ha valore **I**. Se si osservano le tavole si constata come l'assegnazione dei valori di verità (**V**, **F**, **I**) alla negazione, congiunzione, disgiunzione sia del tutto conforme al significato intuitivo di "indeterminato".

L'unica anomalia riguarda il condizionale: Łukasiewicz ha attribuito valore **V** al condizionale $A \rightarrow B$ quando A e B hanno entrambe valore **I**. La ragione di questa scelta è che il logico polacco voleva annoverare tra le tautologie il *principio di identità* $A \rightarrow A$. Dal punto di vista intuitivo, un condizionale tra due proposizioni "indeterminate" è anch'esso "indeterminato" (anche se non lo è nel caso in cui antecedente e conseguente coincidano). Se si assumesse **I** come valore del condizionale $A \rightarrow B$ quando A e B hanno entrambe valore **I**, non vi sarebbe alcuna tautologia. Infatti, come è evidente dalle tavole precedenti, qualsiasi forma proposizionale avrebbe valore **I** quando le lettere proposizionali che figurano in essa hanno valore **I**. Ciò avrebbe ridimensionato il programma di Łukasiewicz, il quale si proponeva di creare una logica *non aristotelica* che doveva liberare l'uomo dai vincoli della logica classica (come le geometrie non euclidee hanno liberato l'uomo dai vincoli della geometria euclidea), e nella quale fossero presenti principi logici sotto forma di tautologie.

Formulata come nelle tavole, la logica trivalente di Łukasiewicz **LTL** può essere presentata come un calcolo assiomatico simile a quello proposizionale classico, con i seguenti assiomi:

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
(4) $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$

e la regola del *modus ponens*: A, $A \rightarrow B \vdash B$. In esso sono derivabili tutte e sole le formule valide della logica di Łukasiewicz, e quindi non è derivabile né il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$, né il principio di non contraddizione $\neg (A \wedge \neg A)$.

La logica trivalente di Bochvar

Un'altra logica trivalente, che indichiamo con **LTB**, è stata introdotta dal logico russo D. A. Bochvar nel 1939. In essa l'interpretazione del terzo valore di verità **I** è "privo di significato". Quindi, se una componente di una proposizione è priva di significato, lo è anche l'intera proposizione. Pertanto, nella loro versione più semplice, le tavole dei connettivi sono le seguenti (in esse, dove non compare il terzo valore **I**, come già accadeva nella logica di Łukasiewicz, i risultati sono gli stessi delle usuali tavole di verità della logica classica, mentre, dove compare **I**, anche solo in una delle due proposizioni congiunte da un connettivo biargomentale, la proposizione composta ha valore **I**):

A	$\neg A$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**I**	**I**	**I**	**I**
V	**F**	**F**	**V**	**F**
I	**V**	**I**	**I**	**I**
I	**I**	**I**	**I**	**I**
I	**F**	**I**	**I**	**I**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**I**	**I**	**I**	**I**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

Bochvar ha proposto il suo sistema logico con l'intento di evitare, mediante una modifica della logica, le antinomie che avevano provocato, all'inizio del secolo scorso, la cosiddetta "crisi dei fondamenti della matematica". Ad esempio, l'equivalenza che esprime la celebre antinomia di Russell relativa alla classe N degli insiemi normali (si dice *normale* un insieme che non contiene se stesso come elemento):

$$N \in N \leftrightarrow \neg (N \in N)$$

non è una contraddizione poiché ha valore **I** se $N \in N$ assume il valore **I**. Indipendentemente da queste considerazioni, è evidente che con queste tavole non esistono "tautologie", ossia nessuna formula assume sempre valore **V** qualsiasi siano i valori di verità delle lettere che compaiono in essa. Per ovviare a questo inconveniente, Bochvar ha esteso la sua logica con altri connettivi più complessi. Vari espedienti, come vedremo nel CAP. 12, sono stati adottati in altri sistemi di logica polivalente proposti successivamente da molti studiosi del settore.

La logica trivalente di Kleene

Nel 1938 S. C. Kleene ha proposto una logica trivalente, che indichiamo con **LTK**, con tavole quasi uguali a quelle di Łukasiewicz, ma con un'attribuzione più naturale dei valori di verità al condizionale. Le tavole di verità dei connettivi sono le seguenti:

A	$\neg A$
V	**F**
I	**I**
F	**V**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**I**	**I**	**V**	**I**
V	**F**	**F**	**V**	**F**
I	**V**	**I**	**V**	**V**
I	**I**	**I**	**I**	**I**
I	**F**	**F**	**I**	**I**
F	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**I**	**F**	**I**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

Una prima interpretazione che Kleene dà al terzo valore **I** è "incognito" o "sconosciuto", e che, a differenza di "indeterminato", come per Łukasiewicz, o "privo di significato", come per Bochvar, non intende escludere le altre due possibilità, ossia che il valore **I** di una proposizione possa essere successivamente mutato in **V** o **F** (una circostanza di questo genere si verifica, come vedremo nel CAP. 11, per le proposizioni matematiche nell'ambito dell'intuizionismo, anche senza che si adotti una logica polivalente). Una seconda interpretazione si ricollega alla *teoria della computabilità*. Supponiamo di considerare, relativamente a un certo dominio D, una proprietà Px e di essere in possesso di un algoritmo che stabilisca se un elemento a di D abbia o non abbia la proprietà Px, ossia se Pa è vera o falsa. In teoria della computabilità si considerano algoritmi tali che, per alcuni argomenti, il procedimento da essi innescato va in *loop* e non produce alcun risultato (in altre parole, l'algoritmo è *parziale*, ossia stabilisce se la proprietà è vera o falsa relativamente a un sottoinsieme di D, e per gli elementi di D che non appartengono a tale sottoinsieme la proprietà non è definita). Se a è uno di questi argomenti, Pa non è né vera, né falsa e appare allora appropriato attribuirle un terzo valore **I**, col significato di "indefinito". In definitiva: Pa ha valore **V** se l'algoritmo stabilisce in un numero finito di passi che a ha la proprietà Px; Pa ha valore **F** se l'algoritmo stabilisce in un numero finito di passi che a ha non la proprietà Px; Pa ha valore **I** se l'algoritmo non fornisce né il valore **V**, né il valore **F** in un numero finito di passi. Con questa seconda interpretazione, le tavole precedenti determinano cosa accade quando si considerano proprietà composte mediante i connettivi proposizionali. Per quanto riguarda la negazione, se Pa è vera, allora $\neg$ Pa è falsa; se Pa è falsa, allora $\neg$Pa è vera; se Pa è indefinita, lo è anche $\neg$ Pa. Una congiunzione è vera solo quando i congiunti sono entrambi veri, è falsa quando almeno uno dei congiunti è falso ed è indefinita negli altri casi. Così, se uno dei disgiunti è vero, lo è anche la disgiunzione (anche se l'altro disgiunto è indefinito), mentre se uno dei disgiunti è indefinito e l'altro è falso o indefinito, anche la disgiunzione è indefinita, e così via. Non vale il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$ e, ad esempio, non assumono gli stessi valori le due formule: $B \wedge (A \vee \neg A)$ e B. Si può verificare che hanno gli stessi valori le seguenti coppie di formule che nella logica classica compaiono nei due membri dei bicondizionali che esprimono le leggi di De Morgan e di Filone Megarico:

$$A \wedge B \text{ e } \neg(\neg A \vee \neg B)$$
$$A \vee B \text{ e } \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
$$A \rightarrow B \text{ e } \neg A \vee B$$

La logica di Kleene presenta alcune analogie con i sistemi della logica della rilevanza che esamineremo nel prossimo capitolo: in essa non valgono il paradosso positivo e la regola del sillogismo disgiuntivo (vale però il paradosso negativo).

Altri sistemi polivalenti e conclusioni

Accanto alle logiche trivalenti sono state considerate molte altre logiche a più valori di verità. In alcune di esse, per aumentare l'insieme delle leggi logiche, si assumono come valide le formule che assumono in tutte le interpretazioni un valore di verità che appartiene a un prefissato sottoinsieme dei valori di verità. Matrici con più valori sono frequentemente utilizzate come strumento per ottenere risultati di indipendenza di assiomi dei calcoli logici e di teorie formali: per dimostrare che un assioma A è indipendente dagli altri si cercano di individuare delle opportune matrici a più valori in modo che, in base ad esse, tutti gli assiomi tranne A e tutte le formule derivabili dagli altri assiomi assumano valori diversi da quello assunto da A. Evidentemente ciò è sufficiente a garantire che A non può essere dedotto (è indipendente) dagli altri assiomi.

Richiamiamo ora brevemente qualcuna delle logiche polivalenti più frequentemente citate.

Nel 1921 E. Post ha studiato sistemi a n valori di verità, indicati con i numeri 0, 1, ..., $n - 1$, in cui i valori di verità della disgiunzione e della negazione sono così definiti:

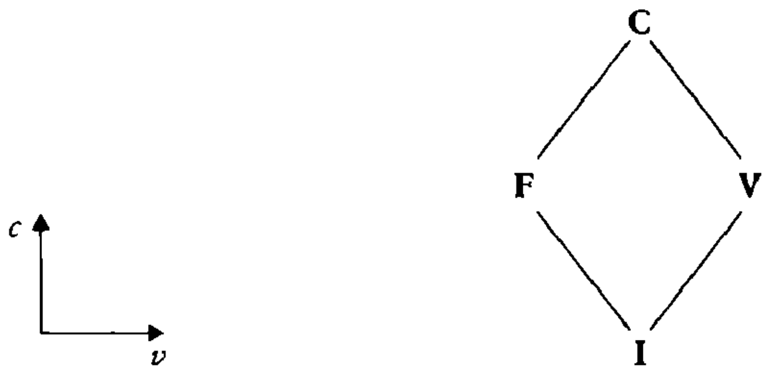
$$v(A \vee B) = \text{Minimo}\{v(A), v(B)\}$$
$$v(\neg A) = v(A) + 1 \pmod{n}$$

(i valori delle proposizioni composte con gli altri connettivi sono determinati mediante le usuali equivalenze della logica classica). Essi sono generalizzazioni della logica proposizionale classica, che sono state anche assiomatizzate da Post, interessanti soprattutto per lo studio delle funzioni matematiche dal punto di vista combinatorio.

Nel 1930 J. Łukasiewicz e A. Tarski hanno proposto logiche polivalenti a n valori di verità, posti uguali a $k/(n-1)$, con $k = 0, 1, ..., n-1$ (ad esempio, per $n = 5$ i valori sono 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1), e nelle quali $v(\neg A) = 1 - v(A)$, $v(A \rightarrow B) = 1$ se $v(A) \leq v(B)$ e $v(A \rightarrow B) = 1 - v(A) + v(B)$ se $v(A) > v(B)$, e che sono state successivamente assiomatizzate. Essi hanno introdotto anche un sistema a infiniti valori di verità, rappresentati dai numeri razionali compresi fra 0 e 1 (estremi inclusi).

Nel 1932 K. Gödel ha studiato alcuni sistemi di logica polivalente per cercare di caratterizzare mediante matrici la logica intuizionista (vedi il CAP. 11), e ha dimostrato che tale caratterizzazione non può essere ottenuta con un numero finito di valori di verità. Nel 1936 S. Jaskowski ha individuato una matrice a infiniti valori di verità adeguata, almeno entro certi limiti, per caratterizzare la logica intuizionista.

Più recentemente N. D. Belnap ha introdotto una logica a quattro valori di verità che estende **LTK**: oltre a **V** (vero), **F** (falso), **I** (indefinito o sconosciuto) vi è il valore **C** per *contraddittorio*, il quale corrisponde a una proposizione della quale si ha sia una dimostrazione, sia una dimostrazione della negazione. Questi valori si possono confrontare con due ordinamenti come in figura:



Il primo ordinamento ($\leq_v$), da sinistra a destra, determina il *grado di verità*, il secondo ($\leq_c$), dal basso verso l'alto, il *grado di conoscenza*. La metà inferiore del diagramma corrisponde alla logica di Kleene in cui i valori, rispetto al grado di verità, risultano così ordinati: $\mathbf{F} \leq_v \mathbf{I} \leq_v \mathbf{V}$ (lo sconosciuto ha un grado di verità intermedio rispetto al falso e al vero). Se ci spostiamo dal basso verso l'alto cresce il grado di conoscenza associato a ciascun valore di verità: dal grado di conoscenza nullo (**I**) a uno intermedio (**V** o **F** i quali non sono confrontabili fra loro) fino al massimo rappresentato da **C**.

Nei decenni successivi sono stati ottenuti molti risultati metateorici relativi ai sistemi finora menzionati e ad altri analoghi introdotti nel frattempo. Si può affermare che, per un lungo periodo di tempo, la logica polivalente è stato il settore della logica non classica matematicamente più studiato, anche se gran parte degli approfondimenti tecnici non sono stati accompagnati da un parallelo aumento della loro rilevanza ed applicabilità da un punto di vista più strettamente logico-deduttivo. In tempi recenti, con l'aumento delle applicazioni della logica in svariati ambiti, il fenomeno della "polivalenza" è divenuto un atteggiamento che ha coinvolto, come vedremo anche nel seguito, quasi tutti i sistemi della logica non classica.

9

Logiche della rilevanza

Introduzione

La *logica della rilevanza*, o *logica rilevante* (in inglese *relevance logic* o *relevant logic*), è un recente settore di ricerche logiche che si è posto l'obiettivo di formalizzare in modo adeguato le proprietà dell'implicazione. È evidente che, per la natura stessa dell'indagine logica, l'implicazione occupa un ruolo centrale: scopo della logica è stabilire le condizioni affinché una proposizione sia implicata da una o più proposizioni. I logici rilevantisti pongono l'accento sul fatto che, affinché una implicazione sia veramente tale, le premesse devono intervenire in modo effettivo per pervenire alla conclusione.

Nella logica classica l'implicazione viene ricondotta al connettivo del condizionale materiale $\rightarrow$, mediante il quale si formalizzano le proposizioni del tipo "se A, allora B". Dato il carattere vero-funzionale dei connettivi della logica classica, il valore di verità della proposizione $A \rightarrow B$ dipende unicamente dai valori di verità dell'antecedente A e del conseguente B, e non dai loro contenuti (e quindi prescinde completamente dagli ambiti di riferimento delle due proposizioni). La caratterizzazione del condizionale materiale, pur rivelandosi adeguata per trattare le proposizioni matematiche della forma "se A, allora B" e i loro nessi inferenziali, appare una semplificazione eccessiva per trattare le implicazioni nella loro generalità, tenendo conto di caratteristiche che siamo disposti ad attribuire ad esse.

Il concetto di implicazione della logica classica è messo sotto accusa dai logici rilevantisti poiché valgono le due seguenti regole (o le equivalenti leggi), dette *paradossi dell'implicazione materiale*:

(a) $A \vdash B \rightarrow A$ $\qquad$ ($A \rightarrow (B \rightarrow A)$ è una tautologia)
(b) $\neg A \vdash A \rightarrow B$ $\qquad$ ($\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ è una tautologia)

Il primo, detto *paradosso positivo*, significa che una proposizione vera è implicata da ogni proposizione; il secondo, detto *paradosso negativo*, che esprime la *regola* (*legge*) *di Scoto* (*ex absurdo sequitur quodlibet*), significa che una proposizione falsa implica qualsiasi proposizione. La loro correttezza segue direttamente dalla scelta che si effettua quando si assume l'usuale tavola di verità del condizionale materiale.

Rivolgiamo prima l'attenzione al paradosso positivo. La sua paradossalità può essere evidenziata con un esempio: "Roma è la capitale d'Italia" implica sia "Se gli asini volano, allora Roma è la capitale d'Italia", sia "Se gli asini non volano, allora Roma è la capitale d'Italia". L'essere Roma capitale d'Italia segue da due proposizioni (tra l'altro in contraddizione fra loro) che non presentano alcun nesso con la proposizione implicata: l'antecedente e il conseguente sono relativi ad ambiti diversi, senza alcun collegamento fra loro, e l'antecedente non appare rilevante per inferire il conseguente.

I molteplici sistemi della logica rilevante sono stati sviluppati con l'obiettivo di formalizzare l'implicazione in modo da evitare i paradossi dell'implicazione materiale assumendo che:

> quando una proposizione è implicata da altre occorre che queste ultime intervengano effettivamente per stabilirla.

L'attributo "rilevante" è in sintonia con il suo significato intuitivo: se si ottiene A da B senza che B rivesta alcun ruolo, allora B è "irrilevante" (superflua) ai fini della conclusione A. Si tratta di calcoli logici in cui l'implicazione (che continuiamo a rappresentare col simbolo $\rightarrow$) deve possedere proprietà diverse dal condizionale materiale, e che rientrano quindi nelle logiche "alternative" alla logica classica. Esaminiamo uno dei più importanti sistemi di logica rilevante.

Il sistema **R**

Per assiomatizzare l'implicazione rilevante si cercano di mantenere le leggi e le regole del condizionale della logica classica che, a livello intuitivo, non sollevano problemi poiché le premesse intervengono esplicitamente per ottenere la conclusione. Nel frammento di **R** relativo all'implicazione si assumono i seguenti assiomi:

(1) $A \rightarrow A$ (*identità* o *autoimplicazione*)
(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$ (*transitività prefissa*)

(3) $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$ (*contrazione* o *assorbimento*)
(4) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ (*permutazione*)

e la regola del *modus ponens*: $A, A \to B \vdash B$.

Gli schemi (2), (3) e (4) possono essere rispettivamente sostituiti da:

(2′) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ (*concatenazione*)
(3′) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (*legge di Frege*)
(4′) $A \to ((A \to B) \to B)$ (*asserzione*)

Gli schemi (1) e (4) possono essere sostituiti da:

(1″) $((A \to A) \to B) \to B$ e (4″) $A \to ((A \to A) \to A)$

dai quali segue l'equivalenza di A e $(A \to A) \to A$.

Si aggiungono poi la congiunzione e la disgiunzione, i seguenti assiomi:

(5) $A \wedge B \to A \quad A \wedge B \to B$ (*eliminazione della congiunzione*)
(6) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$ (*introduzione della congiunzione*)
(7) $A \to A \vee B \quad B \to A \vee B$ (*introduzione della disgiunzione*)
(8) $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$ (*eliminazione della disgiunzione*)
(9) $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee C$ (*distributività*)

e la *regola di aggiunzione*: $A, B \vdash A \wedge B$.

È importante osservare che, se invece della regola di aggiunzione, si assumesse lo schema $A \to (B \to A \wedge B)$, si riuscirebbe a derivare il paradosso positivo. Questa e altre stranezze, ad esempio relative alla distributività che non segue dagli altri assiomi come in logica classica, testimoniano le sottigliezze tecniche che si incontrano in questo settore di ricerche. **R** si completa aggiungendo la negazione e i due assiomi:

(10) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ (*contrapposizione*)
(11) $\neg\neg A \to A$ (*doppia negazione classica*)

Il sistema **R** è uno dei sistemi di riferimento della logica rilevante e ne sono state considerate numerose varianti, sia più deboli, sia più forti. Alcuni rilevantisti, per escludere qualsiasi implicazione di natura circolare, arrivano a considerare sistemi che rifiutano persino la legge di identità $A \to A$.

Senza entrare in ulteriori particolari tecnici, segnaliamo che lo sviluppo della logica rilevante si può ricollegare a quello delle logiche modali. Sono stati proposti vari sistemi di logica rilevante modale per caratterizzare l'*implicazione stretta*.

Il paradosso negativo, la regola del sillogismo disgiuntivo e considerazioni sulle derivazioni rilevanti

Venendo ora a considerare il paradosso negativo, una sua dimostrazione nel calcolo classico della deduzione naturale è, ad esempio, la seguente:

1.	$\neg A$	assunzione
2.	A	assunzione
3.	$A \vee B$	introduzione della disgiunzione (2)
4.	B	regola del sillogismo disgiuntivo (1, 3)
5.	$A \rightarrow B$	introduzione del condizionale (2, 4)

Per evitare di derivare il paradosso negativo, quasi tutti i logici rilevantisti hanno rinunciato alla regola del sillogismo disgiuntivo: $\neg A$, $A \vee B \vdash B$. Essa, per le leggi della doppia negazione, non problematiche dal punto di vista rilevantista, equivale alla regola, usualmente indicata con (γ) nella letteratura: A, $\neg A \vee B \vdash B$, che, in logica classica, per l'equivalenza fra $\neg A \vee B$ e $A \rightarrow B$, è equivalente al *modus ponens*.

Numerose strategie sono state escogitate per caratterizzare le "deduzioni rilevanti". Già a partire dallo studio del sistema **R**, dei suoi sottosistemi e delle loro varianti, la rilevanza delle premesse viene spesso evidenziata con una indicizzazione mediante insiemi di numeri delle formule che compaiono nelle derivazioni, in modo da riuscire a tenere conto delle ipotesi realmente utilizzate e a bloccare alcune derivazioni indesiderate della logica classica. Ad esempio, da A, $B \vdash A$ non si deve ottenere $A \vdash B \rightarrow A$ (ossia il paradosso positivo) poiché la formula B è irrilevante per ottenere A (che è assunta come premessa). Occorre quindi riformulare la regola di introduzione dell'implicazione in modo che sia applicabile solo se l'antecedente è effettivamente rilevante nella derivazione del conseguente. Per dare almeno un'idea di come funziona l'indicizzazione, consideriamo la seguente derivazione del paradosso positivo:

1.	$A_{\{1\}}$	assunzione
2.	$B_{\{2\}}$	assunzione
3.	$A_{\{1\}}$	ripetizione dell'assunzione
4.	$B \rightarrow A$	introduzione dell'implicazione (2, 3)
5.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	introduzione dell'implicazione (1, 4)

Essa può essere dichiarata illegittima poiché al passo (4) l'indice di B non figura tra gli indici di A.

Senza entrare in ulteriori particolari, dal punto di vista sintattico i sistemi della logica della rilevanza si basano su accorgimenti tecnici in grado di evitare la derivabilità dei paradossi dell'implicazione materiale, e ciò comporta il rifiuto di principi e procedimenti della logica classica. Ad esempio, per **R** e analoghi sistemi della logica rilevante, è ritenuta fondamentale la seguente proprietà, detta *di condivisione di variabili*:

> se è derivabile $A \rightarrow B$, allora A e B hanno almeno una lettera proposizionale in comune

la quale garantisce che il nesso fra antecedente e conseguente dipenda da una condivisione dei loro contenuti. Questa condizione, tuttavia, pur essendo necessaria, non si rivela sufficiente per evitare vari paradossi dell'implicazione.

Considerazioni semantiche e conclusioni

Il problema principale dei diversi sistemi di logica rilevante è individuare semantiche in grado di non far apparire espedienti *ad hoc* le varie strategie adottate per evitare i paradossi dell'implicazione materiale e giustificare le scelte fra i molteplici calcoli che rispettano la rilevanza delle ipotesi nello sviluppo delle derivazioni. Interessanti risultati sono stati ottenuti da A. Urquhart, K. Fine, M. Dunn e altri con la considerazione di opportune strutture algebriche. D'altra parte, come è noto, le *semantiche algebriche*, nonostante consentano quasi sempre di ottenere teoremi di correttezza e completezza, spesso non sono in grado di fornire un "autentico" significato ai calcoli logici, vale a dire un significato indipendente dalla sintassi dei calcoli stessi. Alcune semantiche non algebriche proposte dai rilevantisti, adeguate per sottosistemi di **R**, impiegano più valori di verità e quindi si riallacciano alle logiche polivalenti; altre, sfruttando i legami con le logiche modali, hanno cercato di adattare alle logiche rilevanti la semantica dei mondi possibili di Kripke. In particolare, A. Urquhart, R. Routley, R. K. Meyer hanno proposto una variante della semantica di Kripke in cui, al posto dell'abituale relazione binaria di accessibilità R, che si rivela insufficiente per interpretare i calcoli della logica rilevante, si introduce una relazione ternaria R che consente maggiore libertà di azione. Nella semantica di Routley e Meyer si assume la seguente condizione per la verità di un condizionale:

> $A \rightarrow B$ è vera in un mondo u se e solo se in tutti i mondi v e w tali che $Ruvw$ o A è falsa in v o B è vera in w

Imponendo condizioni su R, con un procedimento sostanzialmente analogo a quello seguito per le logiche modali incontrate nella prima parte, si rendono valide (o non valide) formule o regole di inferenza. Ad esempio, se si impone che, per ogni u, $Ruuu$, allora, se A e $A \rightarrow B$ sono vere in un mondo, lo è anche A. Così la legge $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ è valida se, per ogni u, v, w, se $Ruvw$ allora $Rvuw$. In tal modo, instaurando delle corrispondenze fra formule e proprietà di R analoghe a quelle viste a suo tempo per la relazione binaria di accessibilità, si riescono a individuare semantiche adeguate a vari sistemi della logica rilevante, tra cui lo stesso sistema **R**.

Il problema diviene allora quello di trovare "significati" plausibili per la relazione ternaria, analoghi a quelli individuati per la relazione binaria della usuale semantica di Kripke per le logiche modali. In una interpretazione di Dunn i mondi sono concepiti come "stati di informazione", i quali si possono fondere tra loro, e $Ruvw$ si legge "La fusione degli stati di informazione u e v (che può non coincidere con l'unione insiemistica) è contenuta nello stato di informazione w". In un'altra interpretazione, di Barwise e Restall, i mondi sono concepiti come "siti" o "canali di informazione" e $Ruvw$ si legge "u è il canale di informazione tra i siti v e w" (in tal caso si assume che $A \rightarrow B$ è vera in un mondo u se e solo se, ogni volta che u connette un sito v in cui vale A con un sito w, allora B è vera in w). Altre due interpretazioni, una legata sempre alla teoria dell'informazione e l'altra che concepisce i mondi come "situazioni" non complete, sono state recentemente proposte da E. D. Mares. In ogni caso, la relazione ternaria non è ancora risultata adeguata ad evitare alcuni paradossi della rilevanza, tra cui ad esempio $A \wedge \neg A \rightarrow B$ e $A \rightarrow B \vee \neg B$. Inoltre, per trovare semantiche adeguate per la negazione si è fatto ricorso a mondi "non bivalenti", a mondi "incoerenti" e ad analoghi espedienti più articolati di quelli finora impiegati, introdotti per studiare altre logiche, ad esempio le logiche paracoerenti.

In conclusione, i sistemi di logica rilevante, intensivamente studiati a partire dai lavori di A. R. Anderson e N. D. Belnap degli anni settanta del secolo scorso, vengono attualmente inquadrati nel settore in ampio sviluppo delle logiche "substrutturali", alle quali accenneremo nel CAP. 15. In ogni caso, se non è difficile raggiungere un accordo nel ritenere accettabili dal punto di vista rilevantista determinate leggi o regole di derivazione e rifiutabili altre, la necessità di impedire derivazioni perfettamente legittime in logica classica ha dato origine ad un largo spettro di calcoli logici, accomunati dall'obiettivo di evitare i paradossi del condizionale materiale. Il problema principale, in imprese di questo genere, è giustificare le strategie che si adottano: molti calcoli logici della rilevanza sono apparsi come soluzioni *ad hoc* di portata limitata, altri hanno fornito soluzioni solo parziali, altri ancora hanno sostanzialmente raggiunto i loro obiettivi, ma presentano difetti non facilmente superabili o hanno conseguenze indesiderate. Infatti, la massiccia mole di lavoro sintattico prodotto dai logici rilevantisti ha incontrato non pochi ostacoli sul piano della giustificazione semantica. A prescindere da questo genere di considerazioni, è importante sottolineare come si sia ormai affermato un "atteggiamento rilevantista" che, come quello "polivalente", investe tutto il settore delle logiche non classiche, comprese quelle che hanno importanti applicazioni pratiche nell'Intelligenza Artificiale.

10

Logiche condizionali

Introduzione

Le logiche condizionali nascono dal tentativo di trattare logicamente le proposizioni del tipo "Se..., allora..." come vengono abitualmente impiegate nei ragionamenti di senso comune. Come si è detto più volte, se in vari casi la loro formalizzazione mediante il condizionale materiale è adeguata, in molti altri produce risultati del tutto insoddisfacenti. Abbiamo già esaminato i tentativi di superare i paradossi dell'implicazione materiale mediante la considerazione dell'implicazione stretta (cfr. pp. 56-8) e, nel capitolo precedente, le logiche rilevanti. Le logiche condizionali si rivolgono non tanto all'implicazione come relazione fra premesse e conclusione, quanto proprio al significato delle proposizioni condizionali, ossia al condizionale come connettivo biargomentale. I condizionali possono essere col verbo all'indicativo ("Se esci, allora ti porto al cinema") o al congiuntivo-condizionale ("Se piovesse, prenderei l'ombrello"). Tra questi ultimi rivestono particolare interesse i cosiddetti *condizionali controfattuali* ovvero quei condizionali in cui l'antecedente esprime una condizione che di fatto non si è realizzata ("Se avessi partecipato alla gara, avrei vinto").

Consideriamo le seguenti inferenze evidentemente scorrette:

(a) "Se premi il pulsante A e il pulsante B si apre il registratore di cassa. Quindi, se premi il pulsante A si apre il registratore di cassa oppure se premi il pulsante B si apre il registratore di cassa"

(b) "Se Elisa è nata a Savona, allora è ligure e, se Massimo è nato a Milano, è lombardo. Quindi se Elisa è nata a Savona è lombarda oppure se Massimo è nato a Milano è ligure"

(c) "Non è vero che se c'è un Dio allora il male trionfa. Allora c'è un Dio"

Eppure le seguenti forme proposizionali:

(a′) $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$
(b′) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D) \vee (C \rightarrow B)$
(c′) $\neg (A \rightarrow B) \rightarrow A$

sono tautologie. Anche le seguenti inferenze ci appaiono scorrette:

(d) "Se Bush fosse morto nel 1995, non avrebbe vinto le elezioni nel 2000. Se Bush non avesse vinto le elezioni nel 2000, si sarebbe dato al golf. Quindi, se Bush fosse morto nel 1995, si sarebbe dato al golf"
(e) "Se non avesse piovuto, allora non mi sarei bagnato. Quindi, se mi fossi bagnato, allora avrebbe piovuto"
(f) "Se avessi fame, mangerei un panino. Quindi, se avessi fame e mangiassi un risotto, allora mangerei un panino"

Tuttavia la loro formalizzazione mediante il condizionale materiale conduce alle seguenti tautologie, ancora più evidenti delle precedenti:

(d′) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (*legge di concatenazione*)
(e′) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (*legge di contrapposizione*)
(f′) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow B)$ (*legge di arricchimento*)

Questi controesempi costituiscono un ostacolo alla formalizzazione dei condizionali della lingua naturale con il condizionale materiale. Nelle logiche condizionali si studiano sistemi in cui il condizionale è formalizzato in modo da evitare di incorrere in controesempi come quelli precedenti.

Teorie consequenzialiste e compatibiliste

Con *teorie della consequenzialità* (o *consequenzialiste*) si fa riferimento alle proposte di Chisholm, Goodman, Sellars, Rescher e altri che assumono la seguente definizione (usiamo il simbolo $\mapsto$ per sottolineare che si tratta di un condizionale diverso dal condizionale materiale):

> $A \mapsto B$ è vero se e solo se A, unitamente a un insieme di leggi e proposizioni vere, implica B o, equivalentemente, nel caso in cui B può essere derivato da A unito a leggi e proposizioni vere

In tal modo si recupera il significato implicito nella parola "conseguente" ovvero qualcosa che consegue da ipotesi. Essa spiega il carattere *ellittico* di molti condizionali nell'uso quotidiano: solitamente il conseguente non è inferito dal solo antecedente, ma anche da varie proposizioni sottintese che dovrebbero essere esplicitate affinché l'inferenza risulti corretta. Ad esempio, in "Se tu mangiassi quell'*amanita falloide*, moriresti", per poter derivare il conseguente "Moriresti" dall'antecedente "Se tu mangiassi quell'*amanita falloide*", si sottintendono: "Quello è un fungo del tipo *amanita falloide*" (proposizione vera), "Le *amanite falloidi* sono funghi velenosi e mortali se mangiati dagli esseri umani" (legge), "Tu sei un essere umano" (proposizione vera). Esplicitando le proposizioni vere e le leggi, il conseguente può essere logicamente inferito dall'antecedente.

Un problema di tale impostazione riguarda la determinazione delle proposizioni vere appropriate per definire le condizioni di verità di un condizionale. Supponiamo che A sia falso; allora la sua negazione $\neg A$ sarà vera. Ma da una proposizione e dalla sua negazione segue qualsiasi proposizione per la legge di Scoto. La precedente definizione va quindi resa ancora più articolata:

> $A \mapsto B$ è vero nel caso in cui B è implicato da A, insieme a tutte le leggi fisiche e tutte le proposizioni vere *compatibili* con A, ovvero tutte le proposizioni vere tali che nessuna di esse implichi controfattualmente la negazione di A e tali che la negazione di nessuna di esse sia implicata controfattualmente da A

Si tratta però di una definizione circolare perché le condizioni di verità dei controfattuali vengono date in termini di *compatibilità*, e quelle di *compatibilità* in termini di valori di verità dei condizionali controfattuali.

Inoltre, supponiamo che $\neg A \vee B$ sia vera. Da questa proposizione e da A (l'antecedente) possiamo dedurre B (il conseguente) per la regola del sillogismo disgiuntivo. Ora, A e $\neg A \vee B$ sono compatibili. Ciò significa che si può sempre trovare una proposizione C (ossia $\neg A \vee B$), per dedurre B. Da "Non sono italiana oppure lo sbarco sulla Luna è avvenuto nel 1969" e da "Sono italiana" posso dedurre "Lo sbarco sulla Luna è avvenuto nel 1969", e quindi concludere, per la definizione precedente, che il condizionale "Se sono italiana allora lo sbarco sulla Luna è avvenuto nel 1969" è vero. Nonostante questa e altre difficoltà, le impostazioni consequenzialiste e compatibiliste ispirano molti sistemi di logica condizionale. I loro sviluppi sono guidati da intuizioni basate su varianti della semantica di Kripke per le modalità: un condizionale rimanda a un mondo in cui è vero l'antecedente e che, nel caso di un controfattuale, è diverso dal mondo attuale, e la relazione di accessibilità viene interpretata come relazione di similarità o somiglianza tra mondi.

Il sistema **LCS** di Stalnaker

Stalnaker ha elaborato, partendo da intuizioni di tipo semantico, quella che può essere detta la logica classica dei condizionali. Secondo Stalnaker:

> il condizionale $A \mapsto B$, se A è logicamente possibile, è vero nel mondo u nel caso in cui B è vero nel mondo più simile a u in cui A è vero (se A è logicamente impossibile, si assume che $A \mapsto B$ sia vero)

La definizione si basa sull'ipotesi che, quando l'antecedente di un condizionale è logicamente possibile, c'è sempre al più un mondo possibile in cui l'antecedente è vero e che è più simile al mondo attuale di ogni altro mondo possibile in cui l'antecedente è vero (*assunzione dell'unicità*). Nella sua semantica, Stalnaker assume varie condizioni, tra le quali: ogni mondo è più simile a se stesso di ogni altro mondo; se v è l'$A \wedge B$-mondo più simile a u (ovvero v è il mondo più simile a u in cui $A \wedge B$ è vera), allora v è l'A-mondo più simile a u; se l'A-mondo più simile a u è un B-mondo e il B-mondo più simile a u è un A-mondo, allora l'A-mondo più simile a u e il B-mondo più simile a u sono lo stesso mondo. Indichiamo con **LCS** (*logica condizionale di Stalnaker*) il calcolo di logica condizionale determinato dal modello di Stalnaker. In esso si assumono i seguenti assiomi:

(C1) $A \mapsto A$
(C2) $(A \mapsto B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
(C3) $(\neg A \mapsto A) \rightarrow (B \mapsto A)$
(C4) $((A \mapsto B) \wedge (B \mapsto A)) \rightarrow ((A \mapsto C) \leftrightarrow (B \mapsto C))$

(C5) $((A \mapsto B) \wedge \neg (A \mapsto \neg C)) \to ((A \wedge C) \mapsto B)$
(C6) $(A \mapsto B) \vee (A \mapsto \neg B)$ (*legge del terzo escluso condizionale*)

e le due seguenti regole di inferenza:

(RC1) $A \leftrightarrow B \vdash (C \mapsto A) \leftrightarrow (C \mapsto B)$
(RC2) $A_1 \wedge ... \wedge A_n \to B \vdash (C \mapsto A_1) \wedge ... \wedge (C \mapsto A_n) \to (C \mapsto B)$ $(n \geq 0)$

In **LCS** non valgono né la legge di concatenazione, né la legge di contrapposizione, né la legge di arricchimento. Il controesempio prima citato alla legge di concatenazione (d) può essere così spiegato: il mondo più simile a quello attuale in cui Bush è morto nel 1995 non è necessariamente il mondo più simile a quello attuale in cui Bush non ha vinto le elezioni nel 2000 (il mondo più simile a quello attuale in cui Bush non ha vinto le elezioni nel 2000 è un mondo in cui Bush è vivo) ed è per questo che le premesse sono vere e la conclusione è falsa. Un analogo ragionamento si può fare con il controesempio (f): il mondo più simile a quello attuale in cui ho fame non è necessariamente il mondo più simile a quello attuale in cui ho fame e mangio un risotto.

In base alla semantica di Stalnaker la legge del terzo escluso condizionale (C6) appare del tutto legittima: se A è impossibile entrambi i disgiunti sono veri; se A è possibile, vi è un solo A-mondo più simile a quello attuale e in esso B è vera o falsa. A livello intuitivo, però, tale legge esprime l'idea che, di due qualsiasi condizionali con conseguenti opposti, almeno uno dei due è vero, e ciò appare controintuitivo come emerge nel seguente esempio:

> "Se Cleopatra fosse stata napoletana, il Milan avrebbe perso la finale di Champions League, oppure, se Cleopatra fosse stata napoletana, il Milan non avrebbe perso la finale di Champions League"

Il sistema LCL di Lewis

Lewis ha sviluppato alcune proposte per formulare una logica e una semantica per i condizionali simile a quella di Stalnaker, le quali non contemplino la legge del terzo escluso condizionale e l'assunzione di unicità: non vi è un solo mondo più simile a quello attuale, ma un insieme di mondi. Si considerino, ad esempio, Bizet e Verdi, contemporanei ma non compatrioti (uno francese e l'altro italiano). Sembra che non possa esserci un solo mondo più simile al nostro in cui Bizet e Verdi siano compatrioti: in alcuni sono entrambi francesi, in altri entrambi italiani (mentre i mondi in cui, per esempio, sono olandesi sarebbero meno simili al nostro).

Per decidere della verità di un condizionale, quindi, non si guarda al mondo più vicino a quello attuale in cui l'antecedente è vero, ma a tutti i mondi più vicini a quello attuale in cui l'antecedente è vero:

> $A \mapsto B$ è vero in u se e solo se B è vero in *tutti* i mondi più simili a u in cui A è vero

Pertanto, considerando tutti i mondi più simili a quello attuale in cui A è vero, potrebbe darsi che in alcuni di essi B sia vero e che in altri sia vero $\neg B$, e quindi, essendo falsi sia $A \mapsto B$ che $A \mapsto \neg B$, non risulta più valida la legge del terzo escluso condizionale $(A \mapsto B) \vee (A \mapsto \neg B)$.

Nella logica condizionale determinata dal modello di Lewis, che indichiamo con **LCL**, si assumono le stesse regole di inferenza e gli stessi assiomi di **LCS** tranne (C6), che viene sostituito da

(C6′) $(A \wedge B) \to (A \mapsto B)$ (principio di *condizionalità fattuale*)

Si ha che (C6′) è derivabile in **LCS**, e quindi **LCL** è più debole di **LCS**.

Dato che, senza ulteriori precisazioni, considerare più mondi simili al mondo attuale va incontro a obiezioni, Lewis ha fornito una nuova definizione delle condizioni di verità di un condizionale:

> $A \mapsto B$ (con A logicamente possibile) è vero nel mondo u se c'è un $A \wedge B$-mondo che è più vicino al mondo u di ogni $A \wedge \neg B$-mondo

Un problema comune a queste impostazioni è che, per stabilire la verità di un controfattuale, basta considerare i mondi possibili più simili (o il mondo più simile, per Stalnaker) in cui l'antecedente è vero, e vedere se il conseguente è vero. In questo modo può non intervenire alcun nesso fra antecedente e conseguente, ossia si presenta lo stesso tipo di problema che abbiamo visto verificarsi per la legge del terzo escluso condizionale. Per esempio, il controfattuale "Se Cesare non avesse passato il Rubicone, l'acqua congelerebbe a 0°" è vero poiché in ogni mondo più simile al nostro in cui Cesare non ha passato il Rubicone, in ogni caso, per una legge fisica, l'acqua congela a 0°.

Nelle logiche **LCS** e **LCL** non si richiede alcun rapporto di rilevanza o consequenzialità, dal momento che, per accertare la verità di un condizionale, basta un'ispezione dei mondi in cui l'antecedente del condizionale è vero. A livello intuitivo ciò significa che condizionali congiuntivi con antecedente vero hanno lo stesso valore di verità del conseguente (e quando l'antecedente è vero, il mondo attuale è l'unico A-mondo più vicino e quindi l'unico mondo da considerare nel valutare il condizionale). Ciò è stato criticato perché, come abbiamo già avuto modo di vedere, possono esserci condizionali con antecedente e conseguente entrambi veri che però sono da dichiarare falsi. Inoltre, si può notare che, come già detto, dato che ogni mondo è più simile a se stesso di ogni altro, se il mondo attuale è un A-mondo e se in esso B è vero, allora $A \mapsto B$ è vero nel mondo attuale. Ma, per lo stesso ragionamento, anche $B \mapsto A$ è vero nel mondo attuale. Dovremmo pertanto considerare veri entrambi i condizionali:

"Se Roma fosse la capitale d'Italia, Roma si troverebbe in Italia"
"Se Roma si trovasse in Italia, Roma sarebbe la capitale d'Italia"

I condizionali con antecedenti e conseguenti veri sono considerati tutti indistintamente veri, ma è piuttosto sconcertante pensare che da ogni proposizione vera si possa inferire qualsiasi proposizione vera. Si supponga che questa mattina il tuo oroscopo dica che farai un piacevole incontro, e si supponga che, per puro caso, incontri un tuo caro amico. Dato che antecedente e conseguente sono entrambi veri, il condizionale "Se l'oroscopo dice che farai un piacevole incontro, lo farai" dovrebbe essere considerato vero, anche se lo riteniamo del tutto falso. Si osservi che questi inconvenienti non sorgono nella teoria consequenzialista: per dichiarare vero un condizionale con antecedente e conseguente veri dobbiamo derivare consequenzialmente il conseguente dall'antecedente.

Altri sistemi di logica condizionale

Dato che è alquanto problematico individuare un unico sistema logico in grado di giustificare la grande varietà di condizionali indicativi e congiuntivi, sono stati proposti molti altri sistemi ispirati da considerazioni semantiche più sottili e che mettono in dubbio alcuni assiomi di **LCL**. Ad esempio Pollock ha elaborato un sistema in cui la relazione di similarità non è totale (mondi simili a un terzo possono non essere confrontabili tra loro), si rifiuta l'assioma (C6′) e si adotta il più debole:

$$(C6'') \quad ((A \mapsto C) \wedge (B \mapsto C)) \rightarrow (A \vee B \mapsto C)$$

Nute ha ulteriormente rielaborato la semantica e proposto una logica condizionale ancora più ristretta in cui non si assume (C5).

Tutti questi sistemi hanno la caratteristica di presupporre minimi cambiamenti tra mondi simili e non riescono a giustificare adeguatamente la seguente situazione. Supponiamo che l'erba del mio prato sia di pochissimo troppo bassa per venir a contatto con le lame del mio tagliaerba e quindi, in questo momento, l'erba non può essere tagliata con il mio tagliaerba. Supponiamo, inoltre, che il mio tagliaerba sia così debole che possa tagliare solo 1 cm di erba: se l'erba è più alta di 1 cm rispetto all'altezza delle lame, il tagliaerba si blocca. In tal caso la seguente proposizione controfattuale:

"Se l'erba fosse più alta, il tagliaerba la toserebbe"

va considerata vera o falsa? Con la semantica finora adottata dovremmo ritenerla vera, dal momento che ci sono mondi in cui l'erba è più alta dell'altezza delle lame, ma non più alta di 1 cm dall'altezza delle lame, i quali sono più vicini al mondo attuale di qualsiasi altro mondo in cui l'erba è più alta di 1 cm rispetto all'altezza delle lame. Tuttavia, la risposta intuitivamente più corretta sembra essere che la proposizione è falsa: se qualcuno dicesse "Se l'erba fosse più alta, il tagliaerba la toserebbe" noi gli replicheremmo "No, se fosse troppo alta". Questo mostra che a volte, nel valutare un condizionale, non consideriamo solo cambiamenti minimi. Per questo sono state proposte varie teorie più sofisticate che non richiedono che i mondi da cui dipende la valutazione di $A \mapsto B$ in u siano molto vicini o simili ad u. Tutto ciò che è richiesto è che i mondi rilevanti assomiglino ad u solo per alcuni aspetti minimali, mentre per altri aspetti possono differire anche vistosamente.

Considerazioni sulle logiche condizionali

Una delle tesi più controverse tra gli studiosi di logica condizionale è la *legge di semplificazione degli antecedenti disgiuntivi*:

$$(A \vee B \mapsto C) \rightarrow (A \mapsto C) \wedge (B \mapsto C)$$

Il problema è che, se la aggiungiamo ai sistemi logici finora considerati, si possono derivare le leggi di concatenazione e di contrapposizione. Per molti studiosi essa è però così evidente che la necessità di evitarla è un sintomo dell'impossibilità di trattare i condizionali congiuntivi mediante una semantica dei mondi possibili. A questo proposito, però, si può notare che, a dispetto dell'evidenza intuitiva, vi sono esempi del linguaggio ordinario che mostrano come la legge di semplificazione degli antecedenti disgiuntivi non sia sempre attendibile. Se consideriamo i due seguenti condizionali:

(a) "Se Papa Ratzinger dovesse pronunciarsi a favore o contro l'aborto, si pronuncerebbe contro l'aborto"
(b) "Se Papa Ratzinger dovesse pronunciarsi a favore dell'aborto, si pronuncerebbe contro l'aborto"

il primo è vero, ma il secondo non può esserlo.

Alcuni logici ritengono che gli esempi che supportano la legge di semplificazione degli antecedenti disgiuntivi hanno in realtà una forma logica differente. Se il primo dei due precedenti condizionali (a) si formalizza con $A \vee B \mapsto C$, una proposizione quale:

(c) "Se le precipitazioni atmosferiche fossero maggiori o il consumo idrico fosse minore, i problemi di carenza idrica diminuirebbero"

dovrebbe essere formalizzata con $(A \mapsto C) \wedge (B \mapsto C)$, ossia la "o" rappresenterebbe una *congiunzione* con *campo d'azione ampio* piuttosto che una *disgiunzione con campo d'azione stretto* (come nell'esempio del Papa). In base ai sostenitori di una simile soluzione, la (a) e la (c) hanno forme logiche differenti, anche se condividono la stessa struttura grammaticale di superficie. Potremmo, però, sottolineare un'evidente differenza tra le due proposizioni nella stessa struttura grammaticale, ovvero il fatto che uno dei due disgiunti nell'antecedente di (a) è anche il conseguente, mentre ciò non accade in (c). Ma si possono produrre esempi senza tale caratteristica. Supponiamo che, dopo aver asserito (a), l'interlocutore proseguisse dicendo:

(d) "Così, se Papa Ratzinger dovesse pronunciarsi a favore o contro l'aborto, la mia clinica (in cui si praticano aborti) ne risentirebbe in negativo"

Sembra del tutto ragionevole accettare questo condizionale ma, al tempo stesso, respingere il seguente:

(e) "Se Papa Ratzinger dovesse pronunciarsi a favore dell'aborto, la mia clinica ne risentirebbe in negativo"

Quindi, l'occorrenza della stessa proposizione come antecedente e come conseguente non è una condizione necessaria per il fallimento della legge di semplificazione degli antecedenti disgiuntivi, e non può essere utilizzata come criterio per distinguere i condizionali la cui forma logica è $A \vee B \mapsto C$ da quelli la cui forma logica è invece $(A \mapsto C) \wedge (B \mapsto C)$. Per decidere quindi quale delle due formalizzazioni è adatta per un certo condizionale non possiamo basarci solamente sugli aspetti sintattici.

Per concludere, riassumiamo brevemente le varie posizioni sul problema dei condizionali. Innanzitutto si può distinguere tra coloro per i quali i condizionali del linguaggio ordinario non hanno valori di verità o quanto meno richiedono l'adozione di un'ottica polivalente [1], e coloro per i quali, invece, hanno valori di verità. Tra questi ultimi si può distinguere tra coloro per i quali i condizionali hanno le condizioni di verità del condizionale materiale, e coloro che, come abbiamo visto nel corso del capitolo, fanno riferimento alla semantica dei mondi possibili per fornire una definizione e varie condizioni di verità per i condizionali. Solitamente per gli autori per i quali i condizionali hanno condizioni di verità ben determinate (siano esse quelle del condizionale materiale oppure no), i vari esempi forniti per minare la possibilità stessa di trattare logicamente i condizionali vengono giustificati dal fatto che una logica dei condizionali deve fornire le condizioni di verità e non tanto quelle di asseribilità dei condizionali. La grande varietà di soluzioni proposte dai logici, fra le quali abbiamo scelto alcune fra le più significative, testimonia che il settore è ancora in evoluzione. Tra l'altro, interessanti prospettive di ricerca provengono dall'interazione con le logiche rilevanti: alcuni recenti sistemi di logica rilevante consentono una trattazione dei condizionali controfattuali in grado di superare alcuni dei controesempi difficili da aggirare restando nell'ambito della logica condizionale.

II

La logica intuizionista

Introduzione

La logica intuizionista costituisce uno dei settori più importanti delle ricerche logiche nel quale si rifiutano alcuni princìpi della logica classica, primo fra tutti il principio del terzo escluso. La sua origine è legata alle problematiche sui fondamenti della matematica dell'inizio del secolo scorso e ad una diversa concezione della disciplina. Per gli intuizionisti la matematica è frutto dell'attività mentale dell'uomo. Essi escludono ogni affermazione di esistenza di enti non basata su una effettiva costruzione. In particolare si esclude l'esistenza di totalità infinite per cui, ad esempio, la successione dei numeri naturali è intesa come una sequenza effettivamente costruibile a partire dall'unità mediante l'operazione di successore: i numeri naturali non costituiscono un infinito in atto, ma un infinito solo in senso *potenziale*. Anche per gli intuizionisti i numeri primi sono infiniti poiché, dato un numero finito di numeri primi, è possibile individuarne uno diverso. La celebre dimostrazione di questo risultato, che si trova già negli *Elementi* di Euclide, ha un carattere costruttivo perché indica come, dato un qualsiasi numero primo, se ne può individuare in modo costruttivo uno maggiore.

Per evidenziare come assumere solo dimostrazioni costruttive comporti il rifiuto di alcuni principi della logica classica, è sufficiente tener presente che una proposizione esistenziale $\exists x A(x)$ è ritenuta stabilita o esibendo l'oggetto che gode della proprietà $A(x)$, o indicando come costruirlo in modo effettivo. Ad esempio, se $A(x)$ è la proprietà "Esiste y tale che y è un numero primo maggiore di x", la proposizione $\forall x A(x)$ è stabilita mediante la dimostrazione di Euclide. Invece, essendo tuttora aperto il problema dell'esistenza o meno di infinite coppie di numeri primi gemelli (si dicono *gemelli* due numeri primi che differiscono di 2, quali 3 e 5, 17 e 19, 41 e 43), se $A(x)$ è la proprietà "Esiste y tale che y e $y+2$ sono numeri primi maggiori di

x", la formula $\forall x A(x)$ esprime un problema non risolto. Per il matematico classico essa è vera o falsa, anche se per ora ignoriamo quale dei due casi si verifica. Anche per il matematico intuizionista il giudizio è sospeso finché non si riuscirà o a dimostrare costruttivamente $\forall x A(x)$ o a dimostrare costruttivamente che da essa segue una contraddizione; però, dato che non è affatto detto *a priori* che si verificherà una delle due alternative, essa non può essere dichiarata vera o falsa. Ne segue che egli non accetta che valga $\forall x A(x) \vee \neg\forall x A(x)$, poiché farlo significherebbe ammettere che *ogni* problema matematico sia risolubile, e quindi, in definitiva, il matematico intuizionista rifiuta il *principio del terzo escluso.*

Alcune caratteristiche della logica intuizionista

Gli intuizionisti rifiutano, oltre al principio del terzo escluso, la regola che nella logica classica formalizza il procedimento di dimostrazione per assurdo:

$$\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B) \vdash A$$

(se da $\neg A$ segue una contraddizione, allora è dimostrata A). Tale regola è abitualmente detta *regola di negazione classica* proprio per sottolineare che non è accettata dagli intuizionisti. Essi accettano tuttavia la legge di Scoto:

$A \wedge \neg A \vdash B$ (da una contraddizione segue qualsiasi proposizione)

Nella logica intuizionista dimostrare una negazione $\neg A$ equivale a dimostrare che da A segue una contraddizione. Si accetta quindi la regola:

$$A \rightarrow (B \wedge \neg B) \vdash \neg A$$

detta *regola di negazione minimale.* Tale regola viene talvolta assunta sotto forma di "definizione" della negazione. Più precisamente, introdotto un simbolo $\perp$ per la contraddizione, si definisce $\neg A =_{\mathrm{df}} A \rightarrow \perp$.

Ne segue che vi è una sostanziale differenza fra le due regole della doppia negazione: $\neg\neg A \vdash A$ e $A \vdash \neg\neg A$.

Dal punto di vista classico sono sullo stesso piano: $\neg\neg A$ è vera se e solo se $\neg A$ è falsa se e solo se A è vera. Nella logica intuizionista non si ragiona più in termini di vero e di falso, ma di "dimostrato costruttivamente" (per affermare A) e dimostrato che si trova una contraddizione assumendo A (per affermare $\neg A$), per cui la prima regola non vale: da $\neg\neg A$, ossia che $\neg A$ porta a una contraddizione, non si ottiene una dimostrazione costruttiva di A. Ad esempio, se si dimostra $\neg\neg\exists x A(x)$, ossia che è assurdo che non esista un oggetto con la proprietà $A(x)$, non si può ritenere dimostrato $\exists x A(x)$ poiché, in generale, la dimostrazione per assurdo non indica né l'oggetto che ha la proprietà, né come ottenerlo costruttivamente [1]. La seconda regola vale: se si assume A, da $\neg A$ segue immediatamente $\perp$ $(A \wedge \neg A)$, ossia $\neg\neg A$.

Quindi, uscendo dall'ottica del vero e del falso della matematica classica (che presuppone un dominio ideale di enti matematici) e adottando solo procedimenti costruttivi (che si riferiscono ad un universo in evoluzione di enti costruiti dall'uomo), non sono valide leggi fondamentali quali il principio del terzo escluso, la regola di negazione classica (che formalizza il ragionamento per assurdo), una delle due leggi della doppia negazione [2].

I connettivi logici vengono ad avere una interpretazione diversa da quella fornita dalle usuali tavole di verità. Abbiamo già detto come va intesa la negazione $\neg$. Per gli altri connettivi si ha:

> $A \wedge B$ è dimostrabile se e solo se sono dimostrabili sia A che B
> $A \vee B$ è dimostrabile se e solo se è dimostrabile A o è dimostrabile B
> $A \rightarrow B$ è dimostrabile se e solo se, data una qualsiasi dimostrazione di A, si può ottenere in modo effettivo una dimostrazione di B

In queste clausole dimostrabile va sempre accompagnato dall'attributo costruttivamente che d'ora in poi sottintendiamo. Con queste diverse caratterizzazioni dei connettivi continuano a valere molte leggi della logica classica tra le quali:

(a)	$\neg(A \wedge \neg A)$	(*principio di non contraddizione*)
(b)	$A \rightarrow \neg\neg A$	(*legge di doppia negazione intuizionista*)
(c)	$\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	(*legge di Brouwer*)
(d)	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	(*legge di Duns Scoto*)
(e)	$A \wedge B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$	(*prima legge di De Morgan debole*)
(f)	$A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	(*seconda legge di De Morgan debole*)
(g)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	(*legge di contrapposizione debole*)
(h)	$(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(*legge debole di Filone Megarico*)

(i) $(A \to C) \land (B \to C) \leftrightarrow (A \lor B \to C)$

(l) $(A \lor B \to C) \to (A \to C) \land (B \to C)$

(m) $(A \to B) \lor (A \to C) \to (A \to B \lor C)$

Non valgono invece, nella logica intuizionista, i condizionali inversi di (e), (f), (g), (h), (l) e (m).

Le equivalenze logiche quali quelle di De Morgan e di Filone Megarico,

$$A \land B \leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B)$$

$$A \lor B \leftrightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$$

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$$

che consentono in logica classica di "interdefinire" i connettivi, non valgono nella logica intuizionista (vale solo uno dei due condizionali del bicondizionale), per cui in quest'ultima i tre connettivi di congiunzione, disgiunzione e condizionale sono fra loro indipendenti. Tutti questi risultati conseguono, anche se non sempre in modo intuitivamente ovvio, dalla diversa concezione intuizionista dei connettivi. Per ottenerli in modo formale si può far riferimento al calcolo assiomatico che proponiamo nel prossimo paragrafo.

Il calcolo proposizionale intuizionista

Il linguaggio della logica proposizionale intuizionista **PI** è lo stesso di quello della logica proposizionale classica **PC**. L'apparato deduttivo è costituito dalla regola del *modus ponens* e, ad esempio, dai seguenti assiomi formulati da A. Heyting:

(1) $A \to A \land A$

(2) $A \land B \to B \land A$

(3) $(A \to B) \to (A \land C \to B \land C)$

(4) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(5) $A \to (B \to A)$

(6) $A \land (A \to B) \to B$

(7) $A \to A \vee B$

(8) $A \vee B \to B \vee A$

(9) $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

(10) $\neg A \to (A \to B)$

(11) $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \to \neg A$

Il bicondizionale $A \leftrightarrow B$ è definito nel modo usuale con la congiunzione $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Gli assiomi (10) e (11) corrispondono alla legge di Scoto e alla legge di negazione minimale, le quali sono complessivamente più deboli della legge di negazione classica. Assumendo (10) e (11) si possono derivare gli schemi (a)-(m) del paragrafo precedente, ma non le formule che abbiamo segnalato come non accettabili dagli intuizionisti, ad esempio il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$. Se si aggiunge quest'ultimo agli assiomi si riottiene la logica classica. La logica intuizionista, quindi, è un sottosistema della logica classica e di essa si possono proporre numerose assiomatizzazioni alternative o basate sugli altri tipi di calcolo (della deduzione naturale, dei sequenti o degli alberi semantici).

Uno dei risultati più interessanti sui rapporti fra **PI** e **PC** è il seguente:

una formula A è derivabile in **PC** se e solo se $\neg\neg A$ è derivabile in **PI**

Così, ad esempio, anche se il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$ non è derivabile in **PI**, dato che esso è derivabile in **PC**, in **PI** è derivabile la sua doppia negazione $\neg\neg(A \vee \neg A)$.

Dato che le caratteristiche della logica intuizionista sono determinate dalla concezione costruttiva degli enti matematici, è doveroso almeno segnalare come si modifica il comportamento logico dei quantificatori universale ed esistenziale. Continuano a valere le seguenti leggi:

$$\neg \exists x A(x) \to \forall x \neg A(x)$$

$$\exists x \neg A(x) \to \neg \forall x A(x)$$

$$\exists x A(x) \to \neg \forall x \neg A(x)$$

$$\forall x A(x) \to \neg \exists x \neg A(x)$$

ma non valgono, ad esempio, le seguenti:

$$\neg \forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x \neg A(x) \rightarrow \forall x A(x)$$

$$\neg \forall x \neg A(x) \rightarrow \exists x A(x)$$

$$\neg \neg \exists x A(x) \rightarrow \exists x \neg \neg A(x)$$

Ne segue in particolare che in logica intuizionista i due quantificatori non sono interdefinibili come invece avviene nella logica classica.

I calcoli della logica intuizionista sono stati accompagnati da semantiche di varia natura, e si possono ottenere relativamente ad esse risultati di correttezza e di completezza. La più adatta al contesto della nostra trattazione è l'interpretazione *modale*.

Data una qualsiasi formula A del linguaggio di **PI**, associamo ad essa una formula $m(A)$ della logica modale sostituendo ciascuna lettera proposizionale p con Lp, ciascuna negazione $\neg B$ con $\neg MB$ (oppure, equivalentemente, con $L \neg B$) e ogni condizionale con l'implicazione stretta $\supset$ (ossia sostituiamo $A \rightarrow B$ con $A \supset B$, ossia $L(A \rightarrow B)$). Si può allora dimostrare il seguente teorema:

> A è derivabile in **PI** se e solo se $m(A)$ è derivabile nel sistema **KT4** (**S4**) della logica modale aletica

Questo risultato conduce a costruire una interpretazione di **PI** in una semantica di Kripke con relazione di accessibilità R riflessiva e transitiva. Essa risulta analoga a quella vista nella prima parte, con la differenza che il valore di verità di una proposizione composta con i connettivi di negazione e di condizionale viene calcolata in un mondo w prendendo in considerazione i valori di verità che le proposizioni componenti assumono nei mondi accessibili da w (ossia $\neg A$ e $A \rightarrow B$ vengono trattate come se fossero formule modalizzate). Come si è argomentato in precedenza i vari mondi costituiscono il complesso delle nostre conoscenze matematiche e le proprietà riflessiva e transitiva della relazione di accessibilità caratterizzano uno sviluppo delle nostre conoscenze verso il futuro, che può essere suscettibile di diverse diramazioni a seconda di come risultano risolti i problemi aperti.

Ulteriori considerazioni sulla logica intuizionista

Le modifiche alle definizioni dei connettivi e il conseguente rifiuto di leggi della logica classica richiedono un "cambio di mentalità" non sempre agevole da capire a livello intuitivo. Un classico esempio consente di chiarire ulteriormente il discorso fin qui condotto.

Esaminiamo la seguente dimostrazione della proposizione:

"Esistono due numeri irrazionali m e n tali che m^n è razionale"

È noto fin dall'antichità che il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale. Consideriamo ora il numero $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si hanno due casi:

(a) se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è razionale, allora basta porre $m = n = \sqrt{2}$

(b) se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale, dato che $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$, allora basta porre $m = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $n = \sqrt{2}$

La proposizione è pienamente giustificata in base alle regole della logica classica, ma la dimostrazione non è accettabile in base ai canoni dell'intuizionismo. Ciò che si è in effetti dimostrato è un'alternativa: $m = n = \sqrt{2}$ oppure $m = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $n = \sqrt{2}$, e quindi, in definitiva, non sapendo quale dei due disgiunti si verifica, non si è dimostrata costruttivamente la proposizione in questione. Per questa ragione nella logica intuizionista non si può accettare una proposizione in forma disgiuntiva se non si è stabilito quale dei due disgiunti vale: non è possibile dichiarare vera la proposizione "Il numero $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è razionale o irrazionale" fino a che non si stabilisce (in modo costruttivo) quale delle due alternative si verifica. Con ciò si è ulteriormente chiarito il motivo del rifiuto del principio del terzo escluso.

Terminiamo con alcune considerazioni utili per il seguito. La logica intuizionista non è importante solo per il suo ruolo nell'ambito dei fondamenti della matematica. Il suo carattere costruttivo la rende particolarmente adatta a trattare fenomeni della più diversa natura da implementare sui calcolatori. Per questa ragione molte logiche sviluppate in tempi recenti per le loro applicazioni, su alcune delle quali ci soffermeremo nella terza parte, assumono una "base" intuizionista piuttosto che classica (ossia **PI** anziché **PC**).

Se si rinuncia alla legge di Scoto (assioma (10)) si ottiene una logica ancora più debole di quella intuizionista, detta *logica minimale* (di Johansson) **LM**, che, almeno in prima battuta, si può far rientrare nelle logiche *paracoerenti*, ossia quei sistemi nei quali una contraddizione non implica qualsiasi formula. Ad essi dedichiamo il prossimo capitolo.

12
Logiche paracoerenti

Introduzione

Nei precedenti capitoli abbiamo in più occasioni menzionato la legge di Scoto $A \wedge \neg A \rightarrow B$ o l'equivalente legge di negazione dell'antecedente (il paradosso negativo) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$. Da esse segue che, se da un insieme di ipotesi X deriva una contraddizione $A \wedge \neg A$, da X deriva una formula B qualsiasi. È del tutto evidente che un insieme di ipotesi da cui deriva ogni formula è del tutto inutile, e per questo motivo viene detto *assolutamente inconsistente* o *banale* (in inglese *trivial*). Pertanto, se si adotta la logica classica o una qualsiasi di quasi tutte le numerose altre logiche finora esaminate, un insieme X da cui deriva una contraddizione è banale. Le logiche *paracoerenti* (o *paraconsistenti*) sono state elaborate a partire dalla seconda metà del secolo scorso in modo che si possano derivare delle contraddizioni senza rendere banali le teorie. Tali logiche devono in qualche misura rinunciare alla legge di Scoto. Nei capitoli precedenti abbiamo già incontrato esempi di logiche con questa caratteristica. Le logiche rilevanti (CAP. 9), ad esempio, per evitare il paradosso negativo, in generale fanno a meno della legge di Scoto. Analogamente, la logica minimale (cfr. p. 131) si ottiene dalla logica intuizionista proprio eliminando la legge di Scoto. In questi casi, però, le motivazioni alla base di tale rinuncia non sono paracoerenti in senso stretto: per ottenere sistemi di logica paracoerente è ritenuto necessario che le teorie non divengano banali in presenza di vere e proprie contraddizioni. Nelle logiche paracoerenti si mette in discussione anche quello che, a buon titolo, può essere considerato il principio più basilare e incontrovertibile del pensiero umano, definito da Aristotele "il principio più saldo di tutti", vale a dire il *principio di non contraddizione* $\neg(A \wedge \neg A)$.

Si tenga presente che, in generale, derivare mediante un calcolo logico una contraddizione, non è di per sé un sintomo negativo. Anzi, è proprio derivando una contraddizione che si sviluppano, ad esempio, le dimostrazioni per assurdo. La banalizzazione si realizza quando, in presenza delle regole prima menzionate, si ottiene una contraddizione in una teoria. Questa è la ragione principale per cui, ad esempio nelle teorie matematiche, è necessario evitare le contraddizioni. D'altra parte, come più volte ribadito nel corso di questo volume, il ragionamento umano ha confini ben più ampi di quello matematico e, molto spesso, si argomenta razionalmente anche in presenza di situazioni contraddittorie. Nello sviluppo stesso della matematica ci si è spesso imbattuti in contraddizioni (ad esempio le antinomie della teoria degli insiemi) e ciò non ha affatto impedito lo svolgimento di ulteriori ricerche. Se in matematica, dato che si adotta la logica classica, ad un certo stadio di maturazione delle teorie si rivela necessario proporre sistemazioni coerenti, in altri ambiti si deve cercare di convivere con le contraddizioni, magari adottando proprio sistemi di logica paracoerente. Così, ad esempio, la celebre teoria dell'atomo di Bohr è incoerente con la fisica classica: in base ad essa un elettrone orbitante non emette energia, mentre dalle equazioni di Maxwell segue che esso emette energia. Dato che ovviamente non se ne è dedotto qualsiasi cosa a proposito degli elettroni, si è assunto un atteggiamento paracoerente. È abituale, inoltre, avere credenze contraddittorie e nelle stesse basi di dati dei calcolatori spesso si insinuano delle contraddizioni e non si vuole affatto dedurre qualsiasi proposizione.

Fin dall'antichità si è dovuto cercare di trovare vie per convivere con le contraddizioni, a partire dall'individuazione dell'antinomia del mentitore, che si può così formulare: se consideriamo la proposizione A = "A non è vera", allora A è vera se e solo se A non è vera (se dico "Io mento" allora se ciò che dico è vero allora è falso e, se ciò che dico è falso, allora è vero).

Logiche paracoerenti di Da Costa

Come nei precedenti capitoli proponiamo subito come si perviene ad uno dei più importanti sistemi paracoerenti, introdotto da Newton Da Costa negli anni sessanta del secolo scorso e che indichiamo con **LPC**. Si inizia assumendo come unica regola il *modus ponens* e i seguenti undici assiomi:

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3) $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

(4) $A \wedge B \rightarrow A$

(5) $A \wedge B \rightarrow B$

(6) $A \rightarrow A \vee B$

(7) $A \vee B \rightarrow B$

(8) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

(9) $A \vee (A \rightarrow B)$

(10) $A \vee \neg A$

(11) $\neg\neg A \rightarrow A$

Si può notare la presenza di assiomi che vengono a vario titolo rifiutati nei sistemi proposti nei precedenti capitoli della seconda parte.

Si può dimostrare che nel sistema proposto non si può derivare la legge di Scoto $A \wedge \neg A \rightarrow B$ e, se la si aggiunge, si riottiene la logica proposizionale classica **PC**.

A partire da questo sistema minimale si ottengono vari sistemi paracoerenti, aggiungendo nuovi assiomi, regole o definizioni. È abituale introdurre due nuovi operatori monoargomentali $^\bullet$ e $^\circ$ tali che $^\circ A$ e $^\bullet A$ significhino rispettivamente "A è coerente" e "A è incoerente", e un'ulteriore regola:

$$^\circ A, A, \neg A \vdash B$$

la quale afferma che, se A è coerente e tuttavia valgono sia A che $\neg A$, allora ne segue qualsiasi formula B. In altri termini, si introduce la legge di Scoto, limitandola però alle formule coerenti. L'idea di Da Costa è che, all'interno delle situazioni coerenti, si devono recuperare le potenzialità inferenziali della logica classica.

Si può dimostrare che, nel sistema ottenuto, non vale la legge di contrapposizione debole:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \qquad \textit{(legge di contrapposizione debole)}$$

Se valesse si otterrebbe facilmente $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$ e si avrebbe una forma della legge di Scoto che, comportando la banalizzazione relativamente a tutte le formule precedute dalla negazione, renderebbe la paracoerenza poco interessante [1]. Vale una regola più ristretta, basata su un'ipotesi di coerenza:

$$^\circ B,\ A \to B \vdash \neg B \to \neg A$$

Si può poi ulteriormente proseguire aggiungendo le seguenti regole (dette di dualità) per i due nuovi operatori che hanno un evidente significato intuitivo:

$$\neg{}^\bullet A \vdash {}^\circ A \qquad \neg{}^\circ A \vdash {}^\bullet A \qquad {}^\bullet A \vdash \neg{}^\circ A \qquad {}^\circ A \vdash \neg{}^\bullet A$$

e le regole:

$^\bullet A \vdash A \wedge \neg A$ (dall'incoerenza segue la contraddizione)
$\neg(A \wedge \neg A) \vdash {}^\circ A$ (dalla non contraddizione segue la coerenza)

Il sistema **LPC** (usualmente indicato con $\mathbf{C}_1$ nella letteratura) si ottiene aggiungendo tre regole relative ai connettivi, le quali sanciscono che le formule composte da formule coerenti sono a loro volta coerenti:

$$^\circ A \wedge {}^\circ B \vdash (A \wedge B)^\circ$$
$$^\circ A \vee {}^\circ B \vdash (A \vee B)^\circ$$
$$^\circ A \to {}^\circ B \vdash (A \to B)^\circ$$

Partendo da questa base Da Costa ha poi sviluppato una gerarchia di sistemi $\mathbf{C}_n$ considerando i diversi modi con cui la coerenza e l'incoerenza si propagano dai componenti ai composti ponendo condizioni su $^\circ A$ e $^\bullet A$.

Questi sistemi di Da Costa, al pari di numerosi altri elaborati successivamente, hanno in comune l'idea di partire non assumendo la vero-funzionalità del connettivo di negazione, nel senso che il valore di verità di $\neg A$ è indipendente da quello di A. Aggiungendo via via nuovi vincoli si ottengono varie proprietà della negazione e sistemi con diverso potere inferenziale.

Altre logiche paracoerenti

Per formalizzare il fenomeno della paracoerenza sono state elaborate numerose strategie.

Una di esse, che si può far risalire alla "logica discussiva" di Jaskowski, dà origine alle cosiddette *logiche non aggiuntive*, nelle quali non si assume che da A e $\neg A$ derivi $A \wedge \neg A$ (ossia si rifiuta la regola di introduzione della congiunzione $A, B \vdash A \wedge B$). Anche questo rifiuto può essere giustificato intuitivamente. Supponiamo, ad esempio, che i partecipanti a un dialogo abbiano ciascuno opinioni coerenti, e che le credenze di ciascuno si comportino come le formule possibilitate di un sistema di logica modale aletica quale **S5**. Dato che un partecipante al dialogo può credere A e un altro $\neg A$, in quel dialogo valgono sia A, sia $\neg A$, ma non vale in ogni caso la formula $A \wedge \neg A$, che non è creduta da alcun partecipante.

Un'altra strategia è quella di far ricorso a logiche polivalenti nelle quali sono scelti alcuni valori di verità come *designati* e si accettano le formule che assumono un valore di verità designato. Una logica polivalente è allora paracoerente se in essa sia una formula che la sua negazione possono entrambe assumere un valore di verità designato.

Il modo più semplice per realizzare questa possibilità è assumere, accanto al vero **V** e al falso **F**, il valore di verità contraddittorio, che indichiamo con **C**, col significato di "contemporaneamente vero e falso". Nella logica tetravalente alla quale abbiamo fatto cenno a p. 106, compare esplicitamente tale valore di verità **C**.

Se nella logica trivalente di Kleene **LTK**, cambiamo **I** con **C** e designiamo entrambi i valori **V** e **C**, otteniamo un'interessante logica paracoerente (introdotta da G. Priest), ampiamente indagata nella letteratura. L'idea è quella di allargare l'estensione di "vero" a comprendere sia **V** che **C**, ossia dare ad esso l'accezione di "almeno vero" che si può estendere alle proposizioni con valore **C**. Si assumono come valide le formule che assumono sempre un valore di verità designato. In tal caso sono validi il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$, ma anche il principio di non contraddizione $\neg(A \wedge \neg A)$ e la legge di Scoto $A \wedge \neg A \rightarrow B$. La paracoerenza si manifesta non al livello delle formule valide, ma sulla relazione di conseguenza logica, definita in modo usuale: A è conseguenza logica di X se e solo se A ha valore di verità designato ogni volta che tutte le formule di X hanno valore di verità designato. È immediato verificare che, in base a tale definizione:

B non è conseguenza logica di $A, \neg A$
B non è conseguenza logica di $A \wedge \neg A$

Dato però che, ad esempio:

B non è conseguenza logica di $A, A \rightarrow B$

non risulta corretta la regola del *modus ponens*. In sostanza, questo sistema polivalente ha troppe tautologie e troppo poche conseguenze logiche e, per questo motivo, ne sono state considerate diverse varianti.

Restando sulle considerazioni di natura semantica, per dotare varie logiche non scotiane e paracoerenti di una semantica rispetto alla quale risultino corrette e complete, si sono arricchite le strutture della semantica di Kripke con ulteriori elementi. Senza entrare in particolari tecnici che coinvolgono anche la relazione di accessibilità R, la principale caratteristica di questo arricchimento è la considerazione, accanto ai mondi usuali, di mondi *non normali* i quali intervengono per attribuire un valore di verità in un mondo alle formule negate: in un mondo u è vera $\neg A$ se e solo se A è falsa in tutti i mondi normali accessibili da u (in tal modo si tratta la negazione come un operatore intensionale: per valutare $\neg A$ in u, bisogna considerare anche i mondi accessibili da u). In base a questa definizione e alle proprietà che vengono imposte alla relazione R, si ottiene che nei mondi non normali sono vere *tutte* le formule negate, e quindi in essi sono vere tutte le contraddizioni della forma $\neg A \wedge \neg\neg A$. Tuttavia non si ha una "banalizzazione" dei mondi non normali, nel senso che in essi siano vere tutte le formule, poiché, anche se è vera $\neg A$, ciò non comporta che sia vera A. Con queste modifiche si può ottenere non solo una semantica adeguata per la logica minimale rispetto alla quale **LM** è corretta e completa, ma si è aperta la via per la considerazione di mondi non normali di varia natura, che possono fornire interpretazioni per altri sistemi di logica non scotiana e di logica paracoerente.

Considerazioni conclusive

Da un punto di vista tecnico è interessante osservare come praticamente in tutti i settori degli studi logici esaminati in questa parte, la negazione costituisca il principale oggetto di considerazione. A prescindere dagli aspetti semantici e dalle motivazioni che danno luogo ai molteplici sistemi trattati, è particolarmente importante aver chiarito la forza relativa delle varie leggi logiche che coinvolgono la negazione.

La legge di negazione classica, alla base delle dimostrazioni per assurdo, $(\neg A \rightarrow B \wedge \neg B) \rightarrow A$, consente di derivare tutte le altre, tra cui la legge di Scoto $A \wedge \neg A \rightarrow B$. Quest'ultima consente di ottenere la legge di negazione classica solo assumendo qualche altra legge, ad esempio il principio del terzo escluso $A \vee \neg A$.

La legge di negazione minimale, $(A \rightarrow B \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$, non implica né la legge di negazione classica, né quella di negazione intuizionista, ma può giustificare la prima (e quindi a maggior ragione la seconda) se si assume la legge della doppia negazione $\neg\neg A \rightarrow A$.

Il principio di non contraddizione $\neg (A \wedge \neg A)$ è più debole della legge di negazione minimale, ma può giustificarla se si assume la legge di contrapposizione $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

Questo complesso intreccio di dipendenze, che potrebbe essere ulteriormente arricchito, mette in luce la possibilità di considerare molti sistemi nei quali la negazione presenta caratteristiche diverse.

Nei sistemi più deboli la negazione ha, come si è detto, un comportamento non riconducibile alla vero-funzionalità, e ciò che accomuna molte delle logiche esaminate è proprio il fatto che in molte proposizioni del linguaggio comune connettivi come il condizionale o la disgiunzione sono impiegati con caratteristiche diverse da quelle della logica classica, e quindi non valgono leggi quali il principio del terzo escluso, o regole come il sillogismo disgiuntivo e la concatenazione.

Le logiche paracoerenti, al pari di altre considerate in questa parte, sono importanti non solo per le loro numerose applicazioni, ma anche perché il loro sviluppo ha consentito di far interagire più sistemi dando luogo a settori quali la logica deontica paracoerente, la logica deontica rilevante, la logica epistemica paracoerente, la logica condizionale rilevante e così via. È ormai abituale parlare di impostazione polivalente, rilevante, costruttiva, paracoerente, e altre ancora, che possono essere adottate anche simultaneamente.

Parte terza
Logiche per l'Intelligenza Artificiale

Già dagli anni settanta del secolo scorso, M. Minsky aveva più volte ribadito che l'obiettivo primario dell'Intelligenza Artificiale era "cercare di imitare il modo in cui la mente umana ragiona". I calcoli logici classici non sono stati introdotti per codificare il ragionamento di senso comune, ma sono stati elaborati con particolare riferimento alle teorie matematiche e con il fine di perseguire la perfezione deduttiva, la coerenza e la completezza: essi si basano sulla separazione fra le proposizioni che contengono le informazioni rilevanti di un determinato ambito (gli assiomi) e le regole che consentono la loro elaborazione deduttiva (le derivazioni). L'impossibilità di "confutare" quanto già dimostrato, che garantisce ad esempio la "stabilità" dei teoremi matematici e accomuna anche la quasi totalità delle logiche finora considerate nelle prime due parti, appare un sintomo dell'inadeguatezza dei procedimenti logico-formali per risolvere i problemi dell'Intelligenza Artificiale: nel ragionamento comune (*common sense reasoning*) molto spesso, con l'aumento dell'informazione disponibile, si ritratta quanto si è accettato fino ad un certo momento. Ad esempio, se tu sai che possiedo un'auto, deduci che puoi chiedermela in prestito; ma se ti informo che l'auto è guasta deduci che non puoi chiedermela in prestito; se però aggiungo che sto andando a ritirarla dal meccanico deduci nuovamente che puoi chiedermela in prestito; ma se vieni a sapere che serve a mia moglie, cambi nuovamente la conclusione, e così via.

I logici hanno raccolto la sfida lanciata da coloro che ritenevano e ritengono che le tecniche logiche siano inadeguate a trattare i problemi dell'Intelligenza Artificiale e del ragionamento di senso comune. A tal fine hanno elaborato sia sistemi che sfruttano le idee che hanno portato alle estensioni o alle alternative alla logica classica, sia altri del tutto nuovi (e, come si è detto più volte, hanno spesso cercato di conciliare e far interagire le motivazioni sottostanti a più di un settore).

In questa terza parte, per rendere più esauriente la nostra panoramica, dedichiamo tre capitoli ad altrettanti settori dell'indagine logica scelti tra i più significativi fra quelli emersi in tempi recenti.

Nel CAP. 13 trattiamo schematicamente le logiche non monotòne, sviluppate a partire dagli anni settanta del secolo scorso proprio con l'intento di formalizzare gli aspetti di rivedibilità delle conclusioni ottenute nel ragionamento di senso comune. A differenza di quanto accaduto finora, la trattazione si svolge al livello della logica dei predicati, e quindi presuppone nel lettore conoscenze più ampie di quelle finora richieste. In ogni caso, dato che la nostra esposizione si mantiene ad un livello molto introduttivo, le idee che fanno da sfondo ai vari sistemi che presenteremo possono essere colte anche prescindendo da molti degli aspetti tecnici, peraltro ineludibili se si vuole mantenere l'informazione al livello di rigore che deve accompagnare qualsiasi esposizione degli sviluppi della logica. In sostanza, nelle logiche non monotòne si modifica l'apparato deduttivo dei calcoli logici in modo da poter ritrattare conclusioni già ottenute. Ciò ha comportato numerosi problemi sia di carattere tecnico, sia dal punto di vista semantico, i quali sono tutt'altro che risolti. Tuttavia, in una panoramica di ampio respiro culturale sulle varie logiche, è sicuramente utile farsi almeno un'idea di questi nuovi sistemi in cui viene modificato l'abituale impianto deduttivo delle logiche più tradizionali.

Nel CAP. 14 esponiamo alcuni elementi introduttivi delle logiche *fuzzy*, sviluppate anch'esse a partire dagli anni settanta del secolo scorso nel contesto di applicazioni di tipo informatico, allo scopo di rappresentare tipi di conoscenza e modellare inferenze difficili da trattare con gli strumenti tradizionali: esse si propongono di eseguire deduzioni in contesti nei quali intervengono concetti intrinsecamente vaghi. Tali logiche hanno attualmente moltissime importanti applicazioni tecnologiche in informatica e in teoria dei controlli, vengono impiegate per le diagnosi mediche, in *pattern recognition*, nell'ingegneria delle trasmissioni automatiche e nella previsione dei tassi di cambio monetari, e sono usate ad esempio nella metropolitana di Sendai in Giappone e in apparecchiature di largo consumo come cineprese, condizionatori d'aria, automobili e lavatrici. Dal punto di vista degli obiettivi di questo testo, la considerazione di un settore alquanto complesso e ancora in via di assestamento sia dal punto di vista tecnico, sia da quello concettuale, ha soprattutto l'obiettivo di presentare logiche a "infiniti valori di verità" che, a differenza della gran parte delle logiche polivalenti proposte nel CAP. 8, hanno valenze applicative molto diffuse e di grande portata.

Il CAP. 15 è dedicato a un settore ancora più recente dei precedenti. Negli usuali processi inferenziali un'ipotesi è una risorsa *illimitata*, ossia si può utilizzare ripetutamente. Un assioma o un teorema matematico, ad esempio, possono intervenire quante volte si vuole nel corso di una dimostrazione. In molte situazioni, invece, si ha a che fare con risorse che si esauriscono. Nella logica lineare si considerano appunto situazioni in cui, accanto a risorse inesauribili, ne compaiono altre che spariscono una volta utilizzate. Questa caratteristica rende i sistemi della logica lineare, inizialmente proposti per affrontare problemi teorici relativi ai rapporti tra le dimostrazioni formali e informali della matematica, suscettibili di importanti applicazioni informatiche. La logica lineare rientra sia nelle logiche costruttive, sia nelle logiche substrutturali e alcune sue varianti rientrano nelle logiche non commutative. Pur presentando aspetti tecnicamente molto complessi, farsi un'idea delle sue più semplici caratteristiche contribuisce ad arricchire la nostra panoramica sui vari settori della logica. In particolare, la logica lineare proposizionale classica non è né un'estensione, né un'alternativa alla logica classica, ma costituisce, per così dire, un suo "raffinamento". In essa, infatti, sono presenti vari nuovi connettivi che presentano un comportamento diverso da quelli finora considerati. Le sue regole si esprimono abitualmente, anziché nei calcoli assiomatici, in quelli del calcolo dei sequenti. Dovremo pertanto adottare questa diversa impostazione e ciò costringerà il lettore ad un ulteriore sforzo.

Come si è detto, in logica lineare sono stati elaborati sofisticati strumenti tecnici per costruire una semantica delle dimostrazioni matematiche, e quindi per chiarire in modo maggiormente soddisfacente la natura della nostra attività inferenziale: considerando nuove strutture, molti tradizionali problemi della filosofia della matematica potranno essere affrontati con maggiore consapevolezza e scientificità. Segnaliamo inoltre che, adottando la logica lineare, si possono fornire modelli di spiegazione scientifica più fini di quelli basati sulla logica classica, ad esempio in grado di trattare il fenomeno della revisione delle teorie e vari aspetti della reale pratica scientifica. Infine, è mediante essa che si sta attualmente sviluppando quasi per intero la *linguistica computazionale*: gli strumenti della logica lineare si sono rivelati in grado di tener conto di numerosi fenomeni linguistici e di vari modi di combinare risorse grammaticali, e ciò ha condotto ad individuare nuove grammatiche adatte a trattare nozioni linguistiche sempre più sofisticate. È in ogni caso sorprendente il fatto che un recente e complesso ambito di studi logici, con molteplici applicazioni in svariati settori molto avanzati della ricerca informatica e scientifica, abbia anche le caratteristiche per proporsi sia come strumento in grado di gettare nuova luce su tradizionali problematiche matematiche ed epistemologiche, sia per condurre indagini in ambito linguistico.

13
Logiche non monotone

Introduzione

La *proprietà di monotonia* relativamente al nesso di conseguenza logica si può enunciare nel modo seguente:

$$\text{se } X \subset Y \text{ e } X \models A, \text{ allora } Y \models A$$

Essa afferma che, aumentando l'insieme delle premesse, non diminuisce l'insieme delle conseguenze logiche. Relativamente ai calcoli logici la proprietà di monotonia si può formulare in modo equivalente (in base ai teoremi di correttezza e completezza) mediante la relazione di derivabilità:

$$\text{se } X \subset Y \text{ e } X \vdash A, \text{ allora } Y \vdash A$$

Molte inferenze che si eseguono abitualmente non hanno la proprietà di monotonia. Una forma di ragionamento che non ne gode è quella *per default* (ossia "in assenza di informazioni contrarie"). L'esempio canonico, che farà da filo conduttore in questo capitolo, è il seguente: "Gli uccelli (tipicamente) volano" e, quindi, se "Tweety è un uccello", ne segue che "Tweety vola" (in formula: da $\forall x(\mathrm{U}x \rightarrow \mathrm{V}x) \wedge \mathrm{U}t$ segue $\mathrm{V}t$). D'altra parte, se riceviamo l'ulteriore informazione che "Tweety è uno struzzo" scartiamo la nostra precedente conclusione in quanto gli struzzi sono uccelli che (tipicamente) non volano, ossia da $\mathrm{S}t$ segue $\neg\mathrm{V}t$. Per evitare la contraddizione si può allora riformulare la prima delle precedenti premesse nel modo seguente:

$$\forall x(\mathrm{U}x \wedge \neg\,\mathrm{S}x \rightarrow \mathrm{V}x) \qquad (1)$$

D'altra parte, le possibili eccezioni alla prima premessa sono molteplici e non completamente note. Si può allora introdurre un predicato E di "eccezionalità" che è la disgiunzione di tutti le possibili proprietà che impediscono agli uccelli di volare, tra le quali figura quella di "essere uno struzzo", e riformulare così la (1):

$$\forall x(\mathrm{U}x \wedge \neg \mathrm{E}x \rightarrow \mathrm{V}x) \qquad (2)$$

In tal modo, però, da Ut non si può più derivare Vt se prima non si è provato $\neg$Et. L'essenza del ragionamento *per default* consiste in questo: se è data come premessa la (2), da Ut si può derivare Vt anche senza aver dimostrato $\neg$Et, purché non si sia in grado di derivare Et. In parole più semplici, se qualcuno ci comunica soltanto che "Tweety è un uccello", vogliamo essere autorizzati a dedurre che "Tweety vola", nel senso che, se per una qualsiasi ragione Tweety non volasse, ci aspettiamo di venirne più o meno direttamente informati. Pertanto, nelle logiche non monotone si possono dedurre formule che non sono conseguenza logica delle premesse (Vt non consegue logicamente dalla (2) e da Ut) e, acquisendo nuova informazione, si possono scartare formule già dedotte. A partire dagli anni ottanta del secolo scorso sono stati proposti numerosi sistemi logici non monotoni che hanno trovato applicazioni soprattutto in Intelligenza Artificiale. Nel seguito ne proponiamo sinteticamente qualcuno con lo scopo di illustrare le strategie adottate e alcune vie per superare le difficoltà che sorgono in questi nuovi contesti.

La negazione come fallimento

In una base di dati **DB** compaiono solitamente alcune informazioni positive o negative e non viene fornita alcuna indicazione sul valore di verità delle formule che non compaiono esplicitamente nella **DB** o che non sono da essa deducibili. Assumere l'*ipotesi del mondo chiuso* IMC (in inglese CWA, *closed world assumption*) significa assumere che la **DB** contenga tutta l'informazione positiva possibile, ossia che vanno negate tutte le formule che non possono essere dedotte:

$$\text{se } \mathbf{DB} \nvdash A, \text{ allora } \mathbf{DB} + \mathrm{IMC} \vdash \neg A$$

Assumere IMC comporta la non monotonia: se non si può dedurre A, si deduce $\neg A$; tuttavia, se si aggiunge A alla **DB**, IMC non consente più di ottenere $\neg A$. IMC, così formulata, può tuttavia condurre a contraddizioni.

Se in **DB** figura solo la formula $\mathrm{P}a \vee \mathrm{P}b$, allora $\mathbf{DB} \nvdash \mathrm{P}a$, $\mathbf{DB} \nvdash \mathrm{P}b$, per cui $\mathbf{DB} + \mathrm{IMC} \vdash \neg\, \mathrm{P}a$, $\mathbf{DB} + \mathrm{IMC} \vdash \neg\, \mathrm{P}b$, ma $\neg\, \mathrm{P}a$ e $\neg\, \mathrm{P}b$ contraddicono l'ipotesi $\mathrm{P}a \vee \mathrm{P}b$. Così, se **DB** contiene solo $\forall x(\mathrm{U}x \wedge \neg\, \mathrm{E}x \rightarrow \mathrm{V}x)$ e $\mathrm{U}t$, allora $\mathbf{DB} \vdash \mathrm{E}t \vee \mathrm{V}t$, $\mathbf{DB} \nvdash \mathrm{E}t$, $\mathbf{DB} \nvdash \mathrm{V}t$ e, analogamente a prima, assumere IMC porta a contraddizione. L'inconveniente sorge se in **DB** sono presenti o derivabili disgiunzioni di formule senza che lo sia almeno un disgiunto. Questo e altri problemi hanno condotto a formulare varianti della IMC. Ad esempio si può assumere IMCG (IMC Generalizzata): si può derivare A solo sotto l'ipotesi che in **DB** non siano dimostrabili formule del tipo $A \vee B$. In tal caso le due contraddizioni precedenti non possono essere ricavate. Tuttavia, nel secondo esempio, come si è detto, si *vuole* derivare $\mathrm{V}t$. Questo risultato può essere ottenuto applicando IMC solo alle formule contenenti predicati scelti in un insieme prefissato, ad esempio quelle contenenti E.

In tal caso, poiché $\mathbf{DB} \nvdash \mathrm{E}t$, allora $\mathbf{DB} + \mathrm{IMC} \vdash \neg\, \mathrm{E}t$, e quindi $\mathrm{V}t$ segue da $\forall x(\mathrm{U}x \wedge \neg\, \mathrm{E}x \rightarrow \mathrm{V}x)$ e da $\mathrm{U}t$.

Questo accorgimento non funziona se, ad esempio, in **DB** vi sono le formule $\mathrm{E}a \vee \mathrm{Q}a$ e $\mathrm{E}b \vee \neg\, \mathrm{Q}a$. In tal caso $\mathbf{DB} \vdash \mathrm{E}a \vee \mathrm{E}b$, $\mathbf{DB} \nvdash \mathrm{E}a$, $\mathbf{DB} \nvdash \mathrm{E}b$, e quindi $\mathbf{DB} + \mathrm{IMC} \vdash \neg\, \mathrm{E}a$ e $\mathbf{DB} + \mathrm{IMC} \vdash \neg\, \mathrm{E}b$, in contraddizione con $\mathrm{E}a \vee \mathrm{E}b$. Questo inconveniente può essere eliminato combinando IMCG e la limitazione della IMC alle formule contenenti alcuni predicati prefissati.

Logiche con *default*

Nelle logiche con *default* (**DL**) si aumenta l'apparato deduttivo standard della logica dei predicati del primo ordine mediante regole del tipo:

$$\frac{A : \mathrm{G}\, B}{C}$$

col seguente significato: se A è un'ipotesi o è stata derivata ed è coerente assumere B (B è giustificata), allora si deduce C (A è il *prerequisito*, B la *giustificazione* e C il *conseguente* della regola di *default*). Il nostro esempio si può esprimere con la seguente regola di *default*:

$$\frac{\mathrm{U}x : \mathrm{G}\, \mathrm{V}x}{\mathrm{V}x}$$

Dall'ipotesi Ut, poiché Vt è coerente con essa, la regola consente di dedurre Vt. Con le ulteriori ipotesi St (t è uno struzzo) e $\forall x(Sx \rightarrow \neg Vx)$ ("Gli struzzi non volano"), non essendo Vt coerente con esse, non si può più dedurre Vt (e quindi la **DL** è una logica non monotona).

Il problema principale delle **DL**, costituite da un insieme X di premesse e da un insieme **R** di regole di *default*, è stabilire cosa significa che una formula è derivabile in esse, poiché ciò che è derivabile dipende anche da ciò che non è derivabile, ed è quindi presente una circolarità. Per evitarla si ricorre al concetto di estensione: una *estensione* è un insieme minimale Y di formule che contiene X, è deduttivamente chiuso (tutto ciò che è derivabile da Y con le regole logiche standard appartiene a Y) e a esso appartengono tutti i conseguenti delle regole di **R** i cui prerequisiti sono in Y e le cui giustificazioni non appaiono negate in Y. In parole più semplici, un'estensione è un insieme minimale di formule che possono essere tutte giustificate in base all'apparato deduttivo della **DL**. A questo proposito sono possibili due atteggiamenti: nel primo, più prudente, si assumono come teoremi della **DL** le formule comuni a tutte le estensioni; nel secondo, più azzardato, si assumono tutte le formule appartenenti a una data estensione.

Chiariamo la situazione con un esempio. Le premesse "Gli italiani tipicamente sono cattolici", "I marxisti tipicamente non sono cattolici", "Angelo è un italiano marxista" danno luogo alla seguente **DL** (con ovvio significato dei simboli):

$$X = \{Ia, Ma\};\ \mathbf{R} = \left\{\frac{Ix\text{: } G\ Cx}{Cx};\ \frac{Mx\text{: } G \neg Cx}{\neg Cx}\right\}$$

In tal caso X contiene i prerequisiti delle regole di **R** (per $x = a$), ma l'applicazione di una delle due regole di **R** blocca l'applicazione dell'altra: poiché Ca è coerente con X, la prima regola consente di dedurre Ca e la seconda regola è bloccata (non è più coerente assumere $\neg$ Ca); se si applica prima la seconda regola, si deduce $\neg$ Ca e non è applicabile la prima regola. Pertanto, questa **DL** ha due estensioni Y e Z: Y è la chiusura deduttiva di {Ia, Ma, Ca} e Z è la chiusura deduttiva di {Ia, Ma, $\neg$ Ca}; nella prima estensione Angelo è cattolico e nella seconda non lo è. Quindi, nel primo atteggiamento, non si prende posizione sull'essere o meno cattolico di Angelo; se si assume il secondo atteggiamento e si sceglie una estensione, Angelo è cattolico o no a seconda se la scelta cade su Y o su Z. In casi del genere si può approfondire la questione assumendo, ad esempio, che le scelte ideologiche prevalgano sulla nazionalità: la prima regola di **R** risulta allora $\dfrac{\mathrm{L}x\colon \mathrm{G}\ (\mathrm{C}x \wedge \neg\, \mathrm{M}x)}{\mathrm{C}x}$ e rimane solo l'estensione Z.

Quando si considera una **DL** occorre indagare quando ammette estensioni (alcune **DL** intuitivamente non contraddittorie non ammettono estensioni) oppure ne ammette troppe. Occorre ancora risolvere in modo soddisfacente il problema di individuare un'adeguata semantica per le **DL**.

Logiche non monotone modali

In alcune logiche non monotone, anziché introdurre nuovi tipi di regole, si estende il linguaggio mediante un opportuno operatore intensionale G ad un argomento. Una regola di *default* della **DL** si esprime allora non come una regola di inferenza, ma mediante una formula del linguaggio: $A \wedge GB \rightarrow C$ (GB si può leggere "Si può assumere coerentemente B"). Si ottiene così una maggiore flessibilità espressiva, consentendo l'iterazione dell'operatore G e si possono formalizzare anche *default* condizionali in cui $A \wedge GB \rightarrow C$ è il conseguente di un condizionale, o *default* incapsulati, quando un *default* è conseguente di un altro *default*.

Nella logica autoepistemica **AEL** si introduce un operatore intensionale C in modo che CA ha il significato "A è creduta" e una regola di *default* si esprime con $A \wedge \neg\, C \neg\, B \rightarrow D$ ("Se A e non è creduta $\neg\, B$, allora D") . Lo sviluppo della **AEL** passa attraverso la considerazione delle espansioni stabili, le quali hanno notevoli analogie con le estensioni della **DL**, pur non coincidendo totalmente con esse. Più precisamente, le espansioni stabili di un insieme di premesse X sono gli insiemi di formule Y che soddisfano la seguente condizione:

$$Y = \text{chiusura deduttiva di } X \cup CY \cup \neg\, C\overline{Y}$$

dove CY è l'insieme delle formule CA con $A \in Y$ e $\neg\, C\overline{Y}$ è l'insieme delle formule $\neg\, CA$ con $A \notin Y$ (intuitivamente: ciò che è in Y è creduto e ciò che non è in Y non è creduto).

Nel solito esempio, se $X = \{Ut, Ut \wedge \neg C \neg Vt \rightarrow Vt\}$, poiché $\neg Vt$ non segue né da X né da qualsiasi formula modalizzata del tipo CA o $\neg CA$, ne segue che, per ogni espansione stabile Y, $\neg Vt \notin Y$. Ma allora $\neg C \neg Vt \in Y$ e, per *modus ponens*, si ottiene $Vt \in Y$ come desiderato. Come nei sistemi precedentemente esaminati, se $\neg Vt$ viene aggiunto a X (direttamente o come conseguenza di altre formule), il ragionamento precedente non si può ripetere e Vt non è più deducibile.

I sistemi non monotoni modali hanno il vantaggio di essere dotati, come si è visto nella prima parte, di una semantica kripkiana, in grado di chiarire, almeno in una certa misura, la portata e il significato intuitivo degli strumenti tecnici introdotti per formalizzare il ragionamento comune.

Logiche circoscrittive

Se nelle logiche con *default* e nelle logiche modali si formalizza il ragionamento non monotono mediante regole di nuovo tipo o introducendo appositi operatori intensionali, e ciò comporta la complicazione di caratterizzare le formule derivabili mediante costruzioni tecnicamente complesse quali le estensioni o le espansioni stabili, nelle *logiche circoscrittive* **CL** non si operano sostanziali modifiche all'apparato deduttivo o al linguaggio, ma, più semplicemente, si effettua un ampliamento degli assiomi assumendo nuove formule che hanno lo scopo di minimizzare l'estensione di alcuni predicati. L'idea è quella di minimizzare l'estensione di un predicato E mediante un nuovo assioma che consenta di derivare che gli individui per cui vale E sono tutti e soli quelli per cui E deve valere. Più precisamente, se X è un insieme di premesse, l'assioma che circoscrive E in X è il seguente:

$$\forall \Phi (X(\Phi) \wedge \forall x(\Phi x \rightarrow \mathrm{E}x) \rightarrow \forall x(\mathrm{E}x \rightarrow \Phi x))$$

dove Φ è una variabile predicativa, $X(\Phi)$ è la congiunzione delle formule di X in cui si è sostituito E con Φ. Si può facilmente verificare che, ad esempio, se $X = \{\mathrm{E}a, \mathrm{E}b, c \neq a, c \neq b\}$ e si circoscrive E in X, si può dedurre $\neg \mathrm{E}c$. Se da nuove informazioni derivasse $\mathrm{E}c$, la conclusione $\neg \mathrm{E}c$ non si può più ricavare. Ciò rende esplicita la non monotonia delle **CL**, ottenuta anche senza operare mutamenti nelle regole logiche. Tuttavia l'assioma che circoscrive E in X, poiché in esso compare quantificata una variabile predicativa, è una formula della logica del secondo ordine (con tutte le complicazioni che ciò comporta). La correttezza vale nella forma seguente: se una formula è un teorema di **CL**, allora è vera in tutti i modelli di X che sono E-minimali (un modello M è E-minimale se e solo se non esiste un modello M′ di stesso dominio in cui l'interpretazione di tutte le costanti predicative tranne E coincide con quella in M e in cui l'interpretazione di E è un sottoinsieme proprio di quella in M). Prescindendo da questioni tecniche relative al passaggio alla logica del secondo ordine, la forma di circoscrizione illustrata non è sufficientemente potente per trattare in modo soddisfacente il nostro esempio, in cui $X = \{\mathrm{U}t,\ \mathrm{U}t \wedge \neg \mathrm{E}t \to \mathrm{V}t\}$. In questo caso il predicato da circoscrivere è E (gli uccelli eccezionali sono il minimo possibile compatibilmente con le informazioni a disposizione), ma, diminuendo gli uccelli eccezionali, aumentano quelli che volano. Sono state pertanto elaborate forme più sofisticate di circoscrizione (ad esempio le logiche **CF** con circoscrizione di formula) adatte a trattare il nostro caso: si introducono predicati variabili, oltre che al posto di quelli da minimizzare (nell'esempio E), anche al posto di quelli lasciati liberi di variare (nell'esempio V). In **CF** si riesce a ottenere $\neg \mathrm{E}t$ da X, e quindi $\mathrm{V}t$. Ulteriori complicazioni sorgono se vi sono più predicati di eccezionalità. Ad esempio, se si aggiunge a X la formula $\forall x(\mathrm{S}x \to \mathrm{U}x \wedge \neg \mathrm{V}x)$ ("Gli struzzi sono uccelli che non volano"), in **CF** si ottiene quanto auspicato, ossia: $\forall x(\mathrm{S}x \leftrightarrow \mathrm{E}x)$. Tuttavia, più realisticamente, come non tutti gli uccelli volano, così non tutti gli struzzi non volano (ad esempio sono su un aereo), per cui la nuova formula andrebbe sostituita da:

$$\forall x(\mathrm{S}x \to \mathrm{U}x) \text{ e } \forall x(\mathrm{S}x \wedge \neg \mathrm{E}_1 x \to \neg \mathrm{V}x)$$

In tal caso, l'esigenza di minimizzare l'estensione di E_1 entra in conflitto con quella di minimizzare quella di E: gli struzzi eccezionali volano, e quindi non sono eccezionali come uccelli, e gli struzzi non eccezionali non volano, e quindi sono eccezionali come uccelli. Pertanto, se in X compare $\mathrm{S}t$, in assenza di informazioni contrarie vorremmo dedurre $\neg \mathrm{V}t$. Per ottenere ciò occorre un assioma circoscrittivo più complesso che introduca delle priorità di minimizzazione tra i predicati da circoscrivere (come avviene nella **CP**, circoscrizione con priorità). Nell'esempio E_1 va minimizzato prima di E, e in **CP** si ricava $\neg \mathrm{E}_1 t$, e quindi $\neg \mathrm{V}t$.

Semantica preferenziale e conclusioni

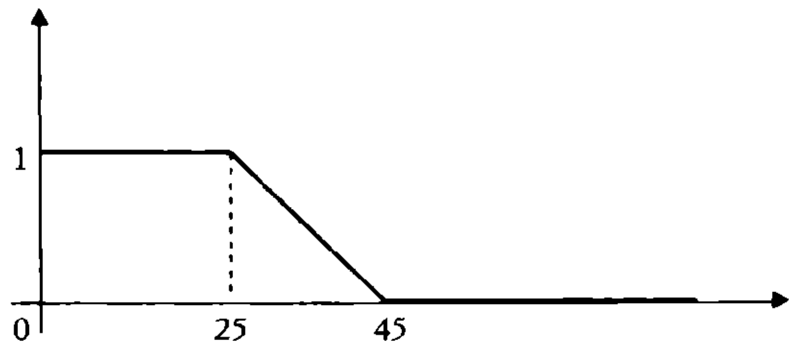
Le logiche non monotone della prima generazione e altre successive sulle quali non possiamo soffermarci, sono caratterizzate da una certa disomogeneità. La ricerca si è orientata, a partire dall'ultimo decennio del secolo scorso, sull'elaborazione di teorie più generali, nelle quali le precedenti rientrino come casi particolari. Un'idea, di natura semantica, è quella di *modello preferito*: quando si ragiona in modo non monotono, non interessano tutti i modelli dell'insieme X di ipotesi che formalizzano le conoscenze in un dato ambito, ma si vuole prenderne in considerazione soltanto un sottoinsieme, costituito dai modelli che hanno determinate caratteristiche che li rendono "preferiti" rispetto a un certo punto di vista. Nelle teorie circoscrittive, ad esempio, sono preferiti i modelli in cui alcuni predicati hanno l'estensione minima possibile. Nella *semantica preferenziale* si opera una generalizzazione della semantica dei modelli minimali in modo che, assumendo criteri diversi di preferenza, si ottengono logiche non monotone differenti. La definizione classica di conseguenza logica viene sostituita da: A è conseguenza logica (non monotona) di un insieme X di formule se e solo se A è vera in tutti i modelli "preferiti" di X. Può allora capitare che i modelli preferiti di un soprainsieme Y di X non siano un sottoinsieme dei modelli preferiti di X, e quindi, anche se A è conseguenza logica di X, non è detto che sia conseguenza logica di Y. Si possono introdurre definizioni diverse della relazione di preferenza in modo che la semantica preferenziale sia adeguata alle logiche con *default*, alle logiche autoepistemiche e alle logiche circoscrittive.

A partire da alcuni lavori pionieristici del logico D. Gabbay si sta tuttora sviluppando quella che, in prima approssimazione, possiamo chiamare la controparte sintattica della semantica preferenziale, con l'elaborazione di una costruzione assiomatica delle logiche preferenziali. Lo studio delle proprietà dell'implicazione non monotona, che si inquadra nell'ambito dei sistemi logici non classici visti in precedenza, quali quelli delle logiche condizionali, della logica della rilevanza e della logica intuizionista, consente una visione più omogenea del settore e sta aprendo nuove prospettive di ricerca. In sintesi, i logici hanno raccolto la sfida lanciata da coloro che ritenevano e ritengono che le tecniche logiche siano inadeguate a trattare i problemi dell'Intelligenza Artificiale e del ragionamento di senso comune. I risultati conseguiti riguardano l'individuazione delle proprietà matematiche e metateoriche dei formalismi non monotoni. I problemi per i quali sono stati elaborati non possono essere considerati risolti. Ad esempio, varie difficoltà sono sorte relativamente alla formalizzazione del ragionamento riguardante le azioni, in cui intervengono aspetti temporali: la semantica preferenziale non conduce ai risultati attesi quando la situazione evolve nel tempo. Inoltre, le inferenze del senso comune sono guidate con riferimento ad una spesso enorme conoscenza di sfondo qualitativo, difficile da fornire ai calcolatori, nella quale hanno le radici i criteri di preferenzialità che consentono all'uomo il comportamento razionale. Le tecniche finora elaborate appaiono per ora troppo rigide per adattarsi a scenari complessi e in evoluzione come quelli della vita reale, anche se, non dimentichiamolo, le loro applicazioni invadono sempre più la nostra vita quotidiana.

14
Logiche *fuzzy*

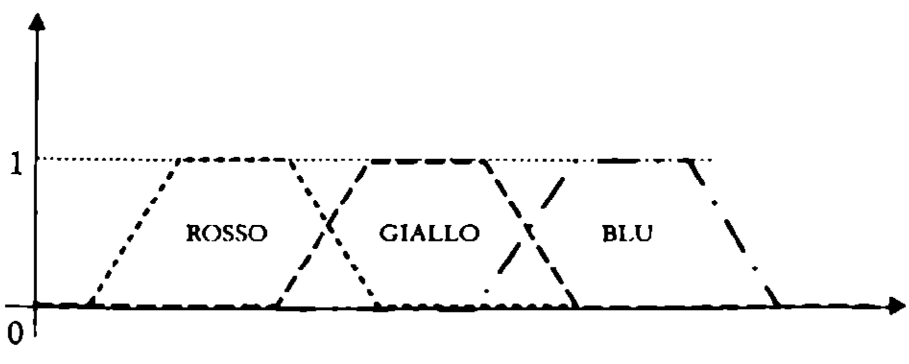
Introduzione

Tutte le proprietà che si prendono abitualmente in considerazione nelle logiche finora trattate si applicano, per così dire, in maniera "tutto o niente": una persona è nata in Italia oppure no, un numero è pari o non lo è; non ha senso dire che una data persona è nata in Italia, o che un numero è pari soltanto a un certo grado. Non tutte le proprietà però si comportano in questo modo. Consideriamo ad esempio proprietà quali *giovane*, *anziano*, *grande*, *piccolo*, *alto*, *veloce*, *nuovo*. In casi come questi non c'è un confine netto tra gli individui che godono della proprietà e quelli che non ne godono. Prendiamo ad esempio in considerazione la proprietà *giovane* (applicata ad esseri umani). Una persona di vent'anni è certamente giovane, una persona di sessanta certamente non lo è. Ma a che età una persona smette di essere giovane? Non è plausibile individuare un confine preciso. Si smette di essere giovani un po' alla volta. Di conseguenza, per proposizioni quali "Mario è giovane", appare poco plausibile assumere il principio di bivalenza secondo il quale una proposizione non può essere altro che vera o falsa. "Mario è giovane" smette di essere vera un po' alla volta (proprio come Mario smette un po' alla volta di essere giovane). Un modo per trattare questo tipo di proposizioni è assumere un atteggiamento "polivalente", ossia assumere che esistano valori di verità intermedi tra il vero e il falso. Questa via è impiegata nelle *logiche fuzzy*, dette talvolta *logiche sfumate* o *vaghe*, nelle quali si cerca di trattare in modo preciso concetti intrinsecamente vaghi. Nelle logiche *fuzzy* i valori di verità delle proposizioni vengono espressi come numeri reali compresi tra 0 e 1 (estremi inclusi). Il valore di verità 0 corrisponde al falso **F**, il valore di verità 1 corrisponde al vero **V**, gli altri numeri a valori intermedi tra il vero e il falso. Ad esempio una proposizione con valore di verità 0,88 sarà quasi vera, una con valore 0,12 sarà quasi falsa, una con valore 0,48 sarà circa a metà strada tra il vero e il falso, e così via. Il valore di verità delle proposizioni è determinato a partire dal modo in cui funzionano le proprietà *fuzzy*. Ad esempio, una proprietà come *giovane* avrà un comportamento del tipo mostrato dal seguente diagramma:



Sull'asse delle ascisse è rappresentata l'età, sull'asse delle ordinate l'intervallo dei valori di verità. Il diagramma si legge nel modo seguente. Assumiamo che una persona *a* fino ai venticinque anni sia da considerare giovane a tutti gli effetti. Pertanto, se *a* ha meno di venticinque anni, allora "*a* è giovane" avrà valore di verità 1. Una persona che ha più di quarantacinque anni è da considerare a tutti gli effetti non più giovane. Pertanto, se *a* ha più di quarantacinque anni, allora "*a* è giovane" avrà valore di verità 0. Per le età intermedie, il valore di verità di "*a* è giovane" segue l'andamento di una curva decrescente dal punto di coordinate (25, 1) al punto di coordinate (45, 0) (in figura si è utilizzato un segmento di retta, del quale è facile trovare l'equazione nella geometria analitica).

Anche i colori corrispondono a proprietà *fuzzy*: non c'è un salto netto tra ciò che è, poniamo, giallo e ciò che non lo è. I colori sfumano in maniera graduale dal giallo al rosso da una parte, e dal giallo al blu dall'altra. La struttura *fuzzy* delle proprietà di colore potrebbe pertanto essere rappresentata approssimativamente come nel grafico seguente, dove sull'asse delle ascisse sono riportate le lunghezza d'onda della luce:



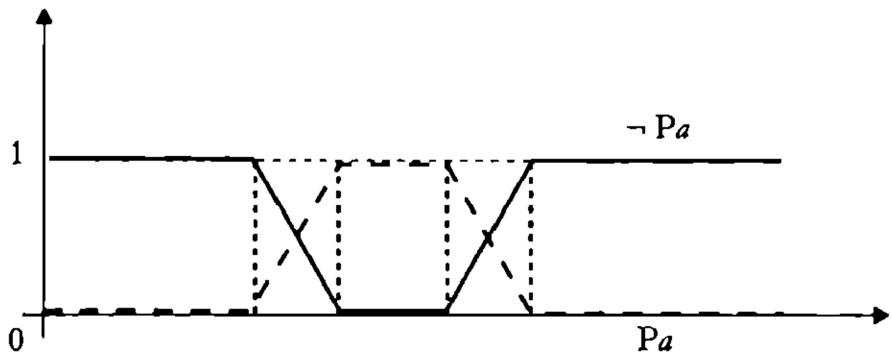
I connettivi nella logica *fuzzy*

Vediamo come in logica *fuzzy* possono essere definiti i valori di verità delle proposizioni composte mediante i connettivi. Indichiamo con $v(A)$ il valore di verità della proposizione A (e quindi $v(A)$ è un numero reale compreso fra 0 e 1, estremi inclusi).

Il valore di verità della *negazione* viene definito nel modo seguente:

$$v(\neg A) = 1 - v(A)$$

Il valore di verità *fuzzy* della proposizione $\neg A$ viene ottenuto sottraendo da 1 il valore il verità di A. Così, se $v(A)=0$, allora $v(\neg A)=1$; se $v(A)=1$, allora $v(\neg A)=0$; se $v(A)=0{,}25$, allora $v(\neg A)=0{,}75$, e così via. Di conseguenza, se il valore di verità della proposizione Pa ha l'andamento indicato nel seguente grafico da una linea tratteggiata:



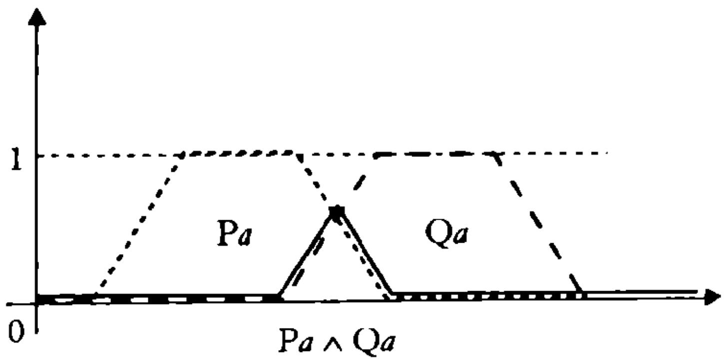
quello della proposizione ¬Pa ha l'andamento indicato dalla linea continua.

Per definire il comportamento della congiunzione e della disgiunzione non esclusiva sono possibili diverse alternative. Presentiamo qui la più semplice, che consiste nel definire i valori della congiunzione e della disgiunzione di due proposizioni rispettivamente come il minimo e il massimo tra i valori delle due proposizioni componenti.

Vale a dire, nel caso della *congiunzione*, si assume che:

$$v(A \wedge B) = \text{Minimo}\{v(A), v(B)\}$$

Quindi, se $v(A)=0$ e $v(B)=1$, $v(A \wedge B)=0$; se $v(A)=0{,}75$ e $v(B)=0{,}62$, allora $v(A \wedge B)=0{,}62$, e così via. Di conseguenza, se i valori di verità delle proposizioni P*a* e Q*a* hanno l'andamento rappresentato dalle linee tratteggiate del seguente grafico:

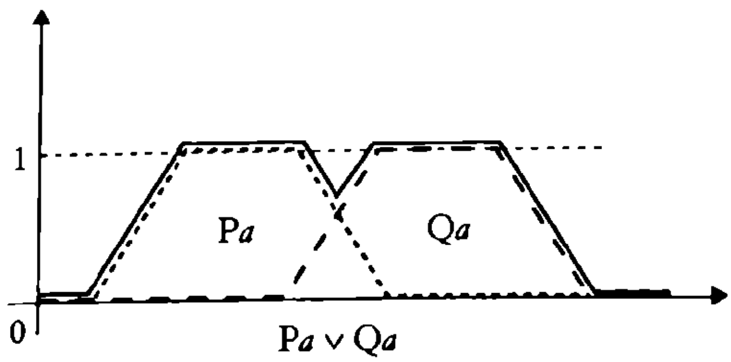


il valore di verità della proposizione P*a* ∧ Q*a* ha l'andamento rappresentato dalla linea continua.

Nel caso della *disgiunzione*, la si definisce come segue:

$$v(A \vee B) \;=\; \text{Massimo}\{v(A),\, v(B)\}$$

Quindi, se $v(A)=0$ e $v(B)=1$, allora $v(A \vee B)=1$; se $v(A)=0{,}75$ e $v(B)=0{,}62$, allora $v(A \vee B)=0{,}75$, e così via. Di conseguenza, se i valori di verità delle proposizioni P*a* e Q*a* hanno l'andamento rappresentato dalle linee tratteggiate del seguente grafico:



il valore di verità della proposizione P*a* ∨ Q*a* ha l'andamento rappresentato dalla linea continua.

Si noti che, in base a queste definizioni, se ci si limita a proposizioni che hanno come valori di verità 0 e 1, si ottengono le stesse tavole di verità della logica proposizionale classica. La scelta degli operatori di Minimo e Massimo è giustificata dal fatto che sono commutativi, associativi, reciprocamente distributivi e monotòni, per cui i connettivi di negazione, congiunzione e negazione conservano le usuali proprietà della logica classica. Ad esempio, è valida la legge di De Morgan:

$$\neg (A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

poiché vale la seguente uguaglianza tra numeri reali:

$$1 - \text{Massimo}\{v(A), v(B)\} = \text{Minimo}\{1 - v(A), 1 - v(B)\}$$

Più complesso da trattare è il caso del condizionale. Non appare ad esempio percorribile la via di definire il condizionale $A \rightarrow B$ mediante l'equivalenza con $\neg A \vee B$ come è possibile in logica classica. Se consideriamo ad esempio una proposizione A "a metà strada" tra il vero e il falso, ossia tale che $v(A) = 0{,}5$, in base alle definizioni precedenti si ha $v(\neg A) = 0{,}5$ e quindi $v(\neg A \vee A) = 0{,}5$, da cui si avrebbe $v(A \rightarrow A) = 0{,}5$. Quest'ultimo risultato è del tutto controintuitivo in quanto, anche ammettendo che le proposizioni abbiano valori di verità "graduati" tra 0 e 1, se l'antecedente del condizionale coincide col conseguente ci si aspetta che $v(A \rightarrow A) = 1$. Tale inconveniente viene eliminato assumendo, ad esempio, che:

$$v(A \rightarrow B) = \text{Minimo}\{1, 1 - v(A) + v(B)\}$$

Sono in realtà possibili svariate alternative ciascuna delle quali presenta pregi e difetti e che danno luogo a diversi sistemi di logica *fuzzy*.

Si introducono poi operatori che non hanno corrispettivo in logica classica e che si indicano con *molto* o *abbastanza* per giustificare inferenze quali la seguente:

> "Questo pomodoro è molto rosso. Se un pomodoro è rosso, allora è maturo. Quindi questo pomodoro è molto maturo"

non formalizzabili in modo adeguato con gli strumenti delle logiche finora trattate.

Nei sistemi di logica *fuzzy* appaiono condizionali del tipo "Se A, allora B" (ad esempio: "Se il traffico è intenso in una certa direzione, allora allunga i tempi del verde ai semafori") e si prescrive come varia il valore del conseguente al variare di quello dell'antecedente. Anche qui vi sono varie proposte che danno luogo a diversi sistemi di logica *fuzzy*, e ciascuno di essi presenta pregi e difetti.

Il paradosso del mucchio di grano

Interessanti applicazioni della logica fuzzy si hanno nell'analisi di alcuni paradossi. Qui ne prendiamo in considerazione uno, il *paradosso del mucchio di grano* (o *del sorìte*), attribuito a Eubulo di Mileto (IV sec. a.C.).

Le due seguenti proposizioni:

(1) "Un mucchio di un solo chicco di grano è piccolo"
(2) "Se ad un mucchio piccolo si aggiunge un chicco, il mucchio rimane piccolo"

appaiono del tutto plausibili.

Indicando con Pn la proposizione "Un mucchio di n chicchi è piccolo", esse possono essere formalizzate nel modo seguente:

(1) $P1$
(2) $Pn \rightarrow P(n+1)$

Intendendo la (2) come uno schema (ossia come l'insieme di formule che si ottengono variando il valore di n in tutti i modi possibili), applicando $m-1$ volte il *modus ponens* partendo da (1) e utilizzando ripetutamente (2), si dimostra facilmente Pm:

$P1$	(1)
$P1 \rightarrow P2$	(2)
$P2$	per *modus ponens*
$P2 \rightarrow P3$	(2)
$P3$	per *modus ponens*
$P3 \rightarrow P4$	(2)
. . . .	
$P(m-1)$	per *modus ponens*
$P(m-1) \rightarrow Pm$	(2)
Pm	per *modus ponens*

e quindi che un mucchio di m chicchi è piccolo. Ciò è evidentemente paradossale in quanto m può essere un numero arbitrariamente grande.

Ebbene, dato che $P1$ è chiaramente vera e che sul *modus ponens* non si possono sollevare obiezioni (almeno nell'ambito della logica classica), per evitare la conclusione paradossale occorre supporre che esista un numero k per il quale la proposizione $Pk \rightarrow P(k+1)$ sia falsa, ossia che sia vero l'antecedente ("Un mucchio di k chicchi è piccolo") e falso il conseguente ("Un mucchio di $k+1$ chicchi non è piccolo"); individuare un tale k appare peraltro del tutto problematico [1].

È evidente l'analogia con quanto esposto nell'introduzione a proposito della proprietà "giovane". Anche "piccolo" è una proprietà *fuzzy*: un mucchio con pochi chicchi è sicuramente piccolo, ma cessa gradualmente di essere piccolo all'aumentare del numero dei chicchi.

Nella logica *fuzzy* si può risolvere il paradosso usando i valori di verità generalizzati nel modo precedentemente delineato, supponendo che vi sia un opportuno legame di natura matematica tra i valori $v(A)$ e $v(A \rightarrow B)$ delle premesse e il valore $v(B)$ della conclusione del *modus ponens*. Utilizziamo ad esempio la moltiplicazione e poniamo:

$$v(B) = v(A) \times v(A \rightarrow B)$$

In tal caso, se $v(A) = v(A \rightarrow B) = 1$, allora anche $v(B) = 1$ (se le premesse del *modus ponens* sono certe, lo è anche la conclusione).

Se $v(A)$ e $v(A \rightarrow B)$ non sono entrambi uguali a 1, $v(B)$ non è più uguale a 1; anzi, se $v(A)$ e $v(A \rightarrow B)$ sono entrambi minori di 1, $v(B)$ è minore sia di $v(A)$ che di $v(A \rightarrow B)$: una conclusione da due premesse non certe ha valore di verità minore di entrambe.

Tornando al paradosso del mucchio, si deve porre evidentemente $v(P1) = 1$, ma si può supporre che (2) non sia certa, pur avendo un elevato grado di verità, ad esempio 0,9. In tal caso si ha successivamente:

$$
\begin{aligned}
&v(P1) = 1\\
&v(P1 \rightarrow P2) = 0{,}9\\
&v(P2) = 1 \times 0{,}9 = 0{,}9\\
&v(P2 \rightarrow P3) = 0{,}9\\
&v(P3) = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}9^2\\
&v(P3 \rightarrow P4) = 0{,}9\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&v(P(m-1)) = 0{,}9^{m-3} \times 0{,}9 = 0{,}9^{m-2}\\
&v(P(m-1) \rightarrow Pm) = 0{,}9\\
&v(Pm) = 0{,}9^{m-2} \times 0{,}9 = 0{,}9^{m-1}
\end{aligned}
$$

Pertanto, si può sì dimostrare Pm, ma con valore $0{,}9^{m-1}$. Dato che, al crescere di m, $0{,}9^{m-1}$ tende a zero, la proposizione "Un mucchio di m chicchi è piccolo" diventa sempre più falsa. Avendo scelto la moltiplicazione, la proposizione non è mai completamente falsa (zero è raggiunto solo al limite per m che tende a infinito). Ciò corrisponde all'idea che nessun mucchio realizzi completamente la proprietà "grande" (negazione di "piccolo"). Se si vuole che, per m sufficientemente grande, il mucchio cessi totalmente di essere piccolo, si può scegliere una funzione diversa dalla moltiplicazione. Ad esempio, se si pone:

$$v(B) = \begin{cases} v(A) + v(A \rightarrow B) - 1 & \text{se } v(A) + v(A \rightarrow B) - 1 > 0 \\ 0 & \text{se } v(A) + v(A \rightarrow B) - 1 \leq 0 \end{cases}$$

si ha $v(P1) = 1$, $v(P2) = 0{,}9$, $v(P3) = 0{,}8$, $v(P4) = 0{,}7$ e i valori decrescono raggiungendo il valore zero (in questo esempio troppo rapidamente; si può tuttavia assumere il valore di (2) molto più prossimo a 1 di 0,9 in modo che il raggiungimento del valore zero avvenga per un m grande quanto si desidera).

Ci sono delle somiglianze delle logiche *fuzzy* con le cosiddette *logiche delle probabilità*, nelle quali il valore di verità $v(A)$ di una proposizione è il numero reale compreso tra 0 e 1, estremi inclusi, che esprime la probabilità dell'evento descritto da A e le proposizioni composte si valutano utilizzando la teoria matematica delle probabilità. In entrambe i valori di verità delle proposizioni variano nell'intervallo dei numeri reali compresi tra 0 e 1 (estremi inclusi). Tuttavia gli obiettivi di questi due tipi di logica sono diversi. Nel caso della logica delle probabilità i valori intermedi tra 0 e 1 vengono usati per rappresentare il fatto che si ha una conoscenza incompleta del verificarsi o meno di certi eventi: prima di lanciare una moneta non si sa se verrà testa oppure croce. Si sa soltanto che, in condizioni normali, i due eventi hanno pari probabilità, e quindi si attribuisce ad entrambi valore di probabilità 0,5. Tuttavia, una volta che il lancio è stato effettuato, o l'esito è stato testa, oppure è stato croce. Non sono possibili casi intermedi, non c'è nulla di "sfumato" in tutto ciò. Se invece si sa che Giorgio ha 65 anni e si vuole esprimere il fatto che egli è anziano soltanto a un certo grado, ciò non ha a che fare con la mancanza di conoscenza sullo stato del mondo. Si tratta piuttosto di come trattare dal punto di vista linguistico e logico la proprietà "anziano". E, come si è visto, la logica *fuzzy* si rivolge a questo diverso tipo di circostanze.

15
Logica lineare

Introduzione

La *logica lineare* è un recente settore di studi logici, inaugurato da J.-Y. Girard nel 1987, che si è notevolmente sviluppato negli ultimi tempi. Esso viene qualificato *logica delle risorse computazionali* poiché il condizionale "Se A, allora B" viene interpretato come "Esattamente una risorsa di tipo A consente di ottenere esattamente una risorsa di tipo B", e formalizzato mediante un connettivo biargomentale che si legge "*A comporta B*" (in formula $A \multimap B$). Un esempio è il seguente. Sono entrambe vere le proposizioni condizionali "Se ho 1 €, allora posso comprare il giornale" e "Se ho 1 €, allora posso prendere un caffè al bar", ma, se ho esattamente 1 € e compro il giornale, allora non posso più prendere il caffè al bar o, viceversa, se prendo il caffè al bar, non posso più comprare il giornale: la mia risorsa di 1 € *si esaurisce* nel momento in cui compro il giornale o prendo il caffè al bar. Mentre abitualmente in logica dalle formule $A \rightarrow B$ e $A \rightarrow C$ segue logicamente la formula $A \rightarrow B \wedge C$, in logica lineare dalle formule $A \multimap B$ e $A \multimap C$ non segue la formula $A \multimap B \wedge C$.

La logica lineare è da annoverarsi tra le logiche cosiddette *substrutturali*, ossia quei sistemi logici che rinunciano ad una o più caratteristiche strutturali della logica intuizionista e classica, e nei quali non vale più la proprietà in base alla quale il numero delle occorrenze di un'ipotesi può essere variato a piacere. Essa viene sviluppata modificando i calcoli dei sequenti per la logica proposizionale intuizionista e classica.

Un *sequente* è una scrittura del tipo:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_m$$

la quale ha il seguente significato: dagli *antecedenti* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ segue *almeno uno* dei *conseguenti* $B_1, B_2, \ldots, B_m$.

Scrivendo $A_1, A_2, ..., A_n$ abbiamo finora sempre supposto che le formule $A_1, A_2, ..., A_n$ formino un *insieme*, ossia che non contino né l'ordine, né le eventuali ripetizioni (ad esempio, $p, p \vee q, p \rightarrow q$ oppure $p \rightarrow q, p, p \vee q$ oppure $p, p, p \rightarrow q, p \vee q, p \vee q$ costituiscono lo stesso insieme di premesse). In un'altra impostazione $A_1, A_2, ..., A_n$ (come pure $B_1, B_2, ..., B_m$) costituiscono una *sequenza* finita di formule, e quindi in essa contano l'ordine e le eventuali ripetizioni (come sequenze, le tre liste del precedente esempio sono diverse, o per l'ordine o per le ripetizioni). Per rendere equivalenti le due impostazioni si adottano sei regole *strutturali*, dette regole di *scambio* (*exchange*) (che consentono di variare l'ordine delle formule), di *indebolimento* (*weakening*) (che consentono di replicare formule) e di *contrazione* (*contraction*) (che consentono di eliminare le formule ripetute). In logica lineare non solo si adotta la seconda impostazione, ma si rinuncia anche alle regole di *indebolimento* e di *contrazione*. Tornando all'esempio precedente, posto A = "Ho 1 €", B = "Posso comprare il giornale" e C = "Posso prendere un caffè al bar", si assumono $A \Rightarrow B$ e $A \Rightarrow C$, ma non si vuole dedurre, come in logica classica, $A \Rightarrow B \wedge C$, poiché è falso che da "Ho 1 €", si deduce "Posso comprare il giornale e posso prendere un caffè al bar". Si può invece accettare $A, A \Rightarrow B \wedge C$, in cui la presenza di due occorrenze di A indica che ho due volte la risorsa di 1 €, ossia ho 2 €, ed è vero che da "Ho 2 €", si può dedurre "Posso comprare il giornale e posso prendere un caffè al bar". Pertanto, non si assumono le regole di indebolimento e di contrazione (che consentono di dimostrare l'equivalenza dei due sequenti $A \Rightarrow B \wedge C$ e $A, A \Rightarrow B \wedge C$). Tale rinuncia rende rilevante quante volte una formula interviene e, come vedremo, ciò conduce a "raffinare" i connettivi della logica intuizionista e classica. I connettivi non sono più riconducibili ai due usuali valori di verità (**V** e **F**), i quali vengono a costituire un caso particolare di una semantica più ampia e strutturata.

Regole additive e moltiplicative

Le regole logiche per i connettivi proposizionali possono essere formulate in due modi a seconda che si tenga conto o meno dei *contesti* dei sequenti (i contesti sono le sequenze finite di formule $A_1, A_2, ..., A_n$ e $B_1, B_2, ..., B_m$ che compaiono nelle regole unitamente alle formule che intervengono nell'applicazione della regola stessa). Nel primo caso si parla di *regole additive* o *contestuali*, nel secondo di *regole moltiplicative* o *indipendenti dal contesto*. In generale, una regola del calcolo dei sequenti introduce una formula del tipo $A \circledcirc B$ (dove $\circledcirc$ è un connettivo a due argomenti) nell'antecedente o nel conseguente del sequente conclusione. Nelle *regole* *additive a due premesse* si introduce la formula $A \copyright B$ nel conseguente del sequente conclusione e devono essere uguali i contesti dei due sequenti premesse e del sequente conclusione (ossia le sequenze finite di formule che occorrono in essi, escludendo A, B e $A \copyright B$). Nelle *regole additive a una premessa* si introduce $A \copyright B$ nel sequente conclusione e si richiede che nel sequente premessa compaia solo una di A e B, e che il contesto del sequente premessa (le sequenze finite di formule che vi occorrono escludendo A o B) sia uguale al contesto del sequente conclusione (le sequenze finite di formule che vi occorrono, escludendo $A \copyright B$). Nelle *regole moltiplicative a due premesse* non si fanno ipotesi sui contesti delle premesse e si richiede che il contesto della conclusione sia la concatenazione dei contesti delle premesse, mentre nelle *regole moltiplicative a una premessa* si richiede che nella premessa compaiano entrambe le formule che vengono connettivate nella conclusione. In logica classica e intuizionista, e quindi in presenza delle sei regole strutturali, le formulazioni additive e moltiplicative delle regole sono equivalenti. In logica lineare, in cui si rinuncia alle regole di indebolimento e di contrazione, l'equivalenza non sussiste più e quindi, assumendo sia regole additive, sia regole moltiplicative, si raddoppia il numero dei connettivi proposizionali biargomentali.

Le regole e i calcoli della logica lineare

Proponiamo ora le regole dei connettivi della logica lineare. Per brevità, nella loro formulazione, abbreviamo le sequenze di formule con lettere greche maiuscole (ad esempio abbreviamo con Γ la sequenza $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e con Δ la sequenza $B_1, B_2, \ldots, B_m$ che compaiono nelle regole).

Congiunzione. Al posto del connettivo $\wedge$ di congiunzione della logica classica si hanno due congiunzioni, la *congiunzione additiva*, che si indica con & ("con"), e la *congiunzione moltiplicativa*, che si indica con $\otimes$ ("volte" o "per"). Le *regole della congiunzione additiva* & sono le tre seguenti (le prime due, a una premessa, di introduzione nell'antecedente e la terza, a due premesse, di introduzione nel conseguente):

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \,\&\, B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \,\&\, B \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \,\&\, B, \Delta}$$

Le *regole della congiunzione moltiplicativa* $\otimes$ sono le due seguenti (la prima, di introduzione nell'antecedente, a una premessa e la seconda, di introduzione nel conseguente, a due premesse):

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Sigma \Rightarrow B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow A \otimes B, \Delta, \Pi}$$

Disgiunzione. Al posto del connettivo $\vee$ di disgiunzione della logica classica si hanno due disgiunzioni, la *disgiunzione additiva*, che si indica con $\oplus$ ("più"), e la *disgiunzione moltiplicativa*, che si indica con $\wp$ ("par"). Le *regole della disgiunzione additiva* $\oplus$ sono le tre seguenti:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus B \Rightarrow \Delta}$$

Le *regole della disgiunzione moltiplicativa* $\wp$ sono le due seguenti:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wp B, \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Sigma, B \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \Sigma\, A \wp B \Rightarrow \Delta, \Pi}$$

Nelle regole additive figurano sempre i due stessi contesti Γ e Δ, mentre in quelle moltiplicative possono esservi due ulteriori contesti Σ e Π. Si noti che, come abituale trattando sequenti, nelle regole a due premesse queste sono scritte nella stessa riga separate da uno spazio.

Negazione. Per quanto riguarda la negazione, la *negazione lineare* di A si indica con $A^{\perp}$ (il simbolo $\perp$ si legge "nil") e le due regole sono analoghe a quelle della logica classica:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A^{\perp}} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, A^{\perp} \Rightarrow \Delta}$$

Implicazione. L'*implicazione lineare moltiplicativa* o *comporta* (simbolo $\multimap$) è così definita: $A \multimap B =_{df} A^{\perp} \wp B$.

L'*implicazione lineare additiva*, meno significativa della precedente, è definita in modo corrispondente come $A^{\perp} \oplus B$.

Il calcolo dei sequenti della logica lineare *pura* **LLP** assume poi la regola a zero premesse ($A \Rightarrow A$), la regola del taglio, le due regole di scambio e altre quattro regole relative agli elementi neutri delle quattro operazioni (e, come già sottolineato, non si assumono le regole di indebolimento e di contrazione). Per ottenere il *calcolo dei sequenti della logica lineare proposizionale classica* **LLPC** si estende il calcolo dei sequenti per la logica lineare pura introducendo due nuovi connettivi monoargomentali, detti *esponenziali*: *ma certo!* (*ofcourse*), o *conservazione* (*storage*) (simbolo !) e *perché no?* (*whynot*), o *esaurimento* (*consumption*) (simbolo ?) i quali consentono di recuperare, per le formule a cui si applicano, le caratteristiche di inesauribilità della logica classica e intuizionista. Le regole di indebolimento e di contrazione sono rimpiazzate dalle seguenti quattro regole logiche relative agli esponenziali:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}$$

$$\frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A, ?A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A}$$

Per ottenere il *calcolo dei sequenti della logica lineare proposizionale intuizionista* **LLPI** si limitano i sequenti ad avere non più di una formula nel conseguente. Ciò comporta l'eliminazione dei connettivi nelle cui regole non è rispettata questa clausola, vale a dire $\wp$ (*par*) e ? (*whynot*). Il connettivo di implicazione lineare moltiplicativa (*comporta*) viene allora assunto come primitivo. Dei calcoli dei sequenti della logica lineare si considera anche la versione *non commutativa*, in cui si rinuncia anche alle regole di scambio. I principali calcoli dei sequenti della logica lineare studiati nella letteratura sono pertanto otto: intuizionisti o classici, con o senza esponenziali, commutativi o non commutativi.

Il significato dei connettivi lineari

Vediamo il significato intuitivo dei connettivi della logica lineare proposizionale classica e alcune loro proprietà.

La *congiunzione additiva* (*con*), detta anche *scelta interna*, indica la presenza di due risorse in alternativa fra loro: $A \& B$ significa che si ha la possibilità di scegliere una sola fra A e B (come nel precedente esempio del giornale e del caffè).

La *congiunzione moltiplicativa* (*volte* o *per*), detta anche *tensore*, indica la presenza simultanea di due risorse: $A \otimes B$ significa che si possono avere a disposizione sia A che B (ad esempio, se A significa "Ho 5 €", allora $A \otimes A$ significa "Ho 10 €" (e $A \otimes A$ è ben diverso da A).

La *disgiunzione additiva* (*più*), detta anche *scelta esterna*, rappresenta la scelta fra due risorse sulla quale non si può esercitare alcun controllo: $A \oplus B$ significa A o B, ma la scelta del disgiunto è eseguita da qualcun altro (ad esempio un distributore automatico in cui, introducendo una moneta, si riceve, a sorpresa, un oggetto che può essere di due generi differenti).

La *disgiunzione moltiplicativa* (*par*), rappresenta obiettivi simultanei che devono essere raggiunti ed equivale a $A^\perp \multimap B$ (nil A comporta B).

Il significato di un sequente $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, B_2, \ldots, B_m$ della logica lineare espresso mediante i connettivi è dato dall'unica formula:

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_n \multimap B_1 \wp B_2 \wp \ldots \wp B_m$$

La *negazione* $A^\perp$ di A è detta anche *duale* di A. La negazione lineare gode della proprietà: $(A^\perp)^\perp \equiv A$ (ossia sono derivabili $A \Rightarrow (A^\perp)^\perp$ e $(A^\perp)^\perp \Rightarrow A$). Intuitivamente, una proposizione A può trovarsi in uno stato di input o in uno stato di output. La sua duale $A^\perp$ ha i ruoli invertiti, ossia rappresenta A come output se A era un input e, viceversa, rappresenta A come input se A era un output (si pensi, ad esempio, alle coppie pagare/comprare, dare/ricevere, leggere/scrivere in informatica). Vale l'equivalenza $A \multimap B \equiv B^\perp \multimap A^\perp$ (ad esempio, sono equivalenti le proposizioni "Se ho 3 €, posso ottenere un pacchetto di sigarette" e "Se richiedo un pacchetto di sigarette, mi vengono chiesti 3 €").

Alle leggi di De Morgan della logica classica:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \qquad \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

corrispondono le leggi di dualità per i connettivi lineari:

$$(A \otimes B)^\perp \equiv A^\perp \wp \neg B^\perp$$

$$(A \,\&\, B)^\perp \equiv A^\perp \oplus \neg B^\perp$$

$$(A \wp B)^\perp \equiv A^\perp \otimes B^\perp$$

$$(A \,\&\, B)^\perp \equiv A^\perp \oplus B^\perp$$

Vale la seguente forma lineare del principio del terzo escluso: $A \wp A^\perp$.

Per quanto riguarda i *connettivi esponenziali* ! (*ma certo!*) e ? (*perché no?*), $!A$ significa che si può usare A quante volte si vuole e $?A$ che si può ottenere A quante volte si vuole, e valgono le equivalenze:

$$(!A)^\perp \equiv\ ?(A^\perp) \qquad (?A)^\perp \equiv\ !(A^\perp)$$

In particolare, $!A \multimap\ ?B$ equivale all'implicazione classica. Nel calcolo dei sequenti per la logica lineare proposizionale intuizionista, non essendo presenti $\wp$ e ?, non si possono esprimere alcune delle precedenti equivalenze (e molte delle altre equivalenze, come si è visto nel CAP. 11, valgono solo in uno dei due versi).

Le precedenti considerazioni sui connettivi spiegano chiaramente l'affermazione secondo cui la logica lineare costituisce un "raffinamento" della logica classica e della logica intuizionista e come essa si presti a trattare con risorse, piuttosto che con proposizioni. Un classico esempio di formalizzazione mediante i connettivi lineari è relativo al menu di un ristorante economico il quale offre, per 10 €, lattuga o pomodori secondo disponibilità, hamburger, patate fritte a volontà e, infine, formaggio o dessert a scelta del cliente. La formalizzazione è:

(10 €) $\multimap$ ((lattuga $\oplus$ pomodori) $\otimes$ (hamburger) $\otimes$ (!patate fritte) $\otimes$ (formaggio & dolce))

Indice dei principali simboli e sistemi logici

Indice dei principali simboli

$\neg$	negazione
$\wedge$	congiunzione
$\vee$	disgiunzione non esclusiva
$\rightarrow$	condizionale materiale
$\leftrightarrow$	bicondizionale
V, **F**	valori di verità vero, falso
$p, q, r, \ldots$	lettere proposizionali
$\mathbf{L}_0$	linguaggio della logica proposizionale classica
$A, B, C, \ldots$	variabili metateoriche per formule
$X, Y, Z, \ldots$	variabili metateoriche per insiemi di formule
$\vdash$	simbolo di derivazione
$\models$	simbolo di tautologia, validità e conseguenza logica
L, M	operatori modali aletici di "necessario" e "possibile"
O, P	operatori deontici di "obbligatorio" e "permesso"
W	insieme dei mondi possibili
$u, v, w, \ldots$	lettere per mondi possibili
R	relazione di accessibilità fra mondi
(W, R)	struttura (*frame*)
I	interpretazione nella semantica di Kripke
M, (W, R, I)	modello nella semantica di Kripke
$\supset$	implicazione stretta
S	operatore epistemico di "sapere"
C	operatore epistemico di "credere"
S_F	operatore epistemico di "sapere fondatamente"
C_F	operatore epistemico di "credere fondatamente"
(W, I, N)	modello di credenza
$int(A)$	intensione di A
F	operatore temporale di "futuro"

P	operatore temporale di "passato"
G	operatore temporale di "sempre nel futuro"
H	operatore temporale di "sempre nel passato"
$(T, <)$	struttura temporale
$(T, <, I)$	modello temporale
$\forall$, $\exists$	quantificatori universale ed esistenziale
$\subset$	relazione di inclusione fra insiemi
I	valore di verità "indeterminato" o "sconosciuto" per le logiche polivalenti
C	valore di verità "sia vero che falso" o "contraddittorio" per le logiche polivalenti
$\mapsto$	condizionale nelle logiche condizionali
$^{\circ}$	operatore monoargomentale di coerenza
$\bullet$	operatore monoargomentale di incoerenza
$\Rightarrow$	simbolo di sequente
Γ, Δ, Σ, Π	sequenze di formule
&	congiunzione additiva lineare "con"
$\otimes$	congiunzione moltiplicativa lineare "volte"
$\oplus$	disgiunzione additiva lineare "più"
$\wp$	disgiunzione moltiplicativa lineare "par"
$\perp$	negazione lineare "nil"
$\multimap$	implicazione lineare moltiplicativa "comporta"
!	esponenziale "ma certo!" (*ofcourse!*) o "conservazione" (*storage*)
?	esponenziale "perché no?" (*whynot?*), o "esaurimento" (*consumption*)

Indice dei principali sistemi logici [1]

PC	logica proposizionale classica
K	logica modale minimale
KT, M	logica aletica minimale
KT4, KT5	logiche modali aletiche
B	logica modale brouweriana
S1–S5	sistemi di logica modale di Lewis
KD	logica deontica minimale
D4, D5	logiche deontiche
KQ	sistema di Anderson per la logica deontica
$\mathbf{KT_S}$	logica minimale del sapere
$\mathbf{KT4_S}$, $\mathbf{KT5_S}$	logiche del sapere
$\mathbf{KD_C}$	logica minimale del credere

$KT4_C$, $KT5_C$	logiche del credere
E_M	logica epistemica minimale
K_T	logica minimale per modelli temporali
KM_T	logica temporale minimale
KL_T	logica temporale lineare
KQ_T	logica del tempo razionale
KR_T	logica del tempo reale
KD_T	logica del tempo discreto
KC_T	logica del tempo circolare
LTL	logica trivalente di Łukasiewicz
LTB	logica trivalente di Bochvar
LTK	logica trivalente di Kleene
R	logica rilevante di Anderson e Belnap
LCS	logica condizionale di Stalnaker
LCL	logica condizionale di Lewis
PI	logica proposizionale intuizionista
LM	logica minimale
LPC	logica paracoerente di Da Costa
DB	basi di dati
DL	logiche con *default*
AEL	logiche autoepistemiche
CL	logiche circoscrittive
CF	logiche con circoscrizione di formula
CP	logiche circoscrittive con priorità
LLP	logica lineare pura
LLPC	logica lineare proposizionale classica
LLPI	logica lineare proposizionale intuizionista

Note

1
Richiami di logica classica

1. Presupponiamo che il lettore abbia già una certa familiarità con la logica classica e con le modalità con cui si scrivono le sue formule. Il nostro principale testo di riferimento è Palladino (2002). Per le definizioni dei termini impiegati e per i lemmi logici può essere utile Palladino, Palladino (2005).

Parte prima
Logiche estensioni della logica classica

1. Quando in logica si afferma che "Piove" oppure, ad esempio, "Massimo corre" sono proposizioni, ossia che sono o vere o false, si presuppone di essere a conoscenza del contesto, ossia del luogo e del tempo di riferimento e di chi sono gli individui a cui ci si riferisce. In altri termini, ad esempio, "Piove" può abbreviare "Piove in Piazza Corvetto a Genova alle ore 10 del 27/8/2006" e "Massimo corre" può abbreviare "Massimo Bianchi, nato a Genova il 25/9/1946, corre alle ore 15 del 14/7/2006 nel parco del Valentino a Torino".

2. Quando in logica si fanno esempi quali quelli ora proposti, si danno per scontati aspetti che, ad un'analisi più profonda, potrebbero dar luogo a problemi: è sottinteso che si sta parlando dei numeri naturali e che si possa sempre accertare se piove oppure non piove. In realtà, al livello di analisi per noi sufficiente, tali problemi non sono pertinenti: non si intende né affrontare il problema della "verità in matematica", né addentrarsi in questioni sul numero di gocce d'acqua che, cadendo, rendono vera "Piove" e falsa "Non piove" (nel linguaggio comune si può affermare, in un momento in cui cadono alcune gocce di pioggia, che "Piove e non piove").

3. Ricordiamo che talvolta si usa il termine "operatore" per indicare elementi del linguaggio che si applicano ad una singola proposizione (ad esempio la negazione è un operatore) e si riserva la parola "connettivi" per indicare quelli che "connettono" (almeno) due proposizioni. A volte si preferisce usare solo il termine "connettivo", precisando "connettivo a un argomento (monoargomentale)", "connettivo a due argomenti (biargomentale)", e così via, consentendo di generalizzare il discorso ai connettivi a n argomenti. Normalmente, dato che i periodi complessi si ottengono scrivendo proposizioni semplici una dopo l'altra, nel linguaggio naturale si incontrano quasi

esclusivamente connettivi ad uno o due argomenti. Quelli proposti negli esempi sono abitualmente qualificati come "operatori" poiché monoargomentali.

2
La semantica di Kripke

1. Per non appesantire le notazioni indicheremo sempre con *p*, *q*, *r*,... sia le lettere proposizionali di *U*, sia lettere proposizionali qualsiasi (variabili metateoriche per lettere proposizionali); analogamente *u*, *v*, *w*,... indicano sia mondi possibili particolari (elementi di *W*), sia mondi generici (variabili per mondi, per elementi generici di *W*). Dal contesto risulta sempre chiaro quale dei due casi si verifica.

2. Dato che in *U* vi sono due sole lettere, in un mondo si hanno quattro possibilità (*p* e *q* entrambe vere, *p* vera e *q* falsa, *p* falsa e *q* vera, *p* e *q* entrambe false). Dato che i mondi sono 3, le possibili interpretazioni sono $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

3. I problemi della decidibilità (e indecidibilità) sono fondamentali in logica, anche in vista delle applicazioni. Data la loro tecnicità non li prenderemo in considerazione in questo testo.

3
La logica modale minimale

1. Più precisamente si tratta di uno schema di formule in quanto *A* e *B* stanno per formule qualsiasi. Nel seguito, per brevità, poiché non possono sorgere fraintendimenti, chiameremo spesso formule anche gli schemi di formule.

2. Ricordiamo che uno dei compiti della logica è individuare procedimenti rigorosamente definiti, e se possibile algoritmici, per stabilire la validità di formule e la correttezza di regole di inferenza.

4
Logiche modali aletiche

1. Nella letteratura sono frequentemente impiegati i simboli $\Box$ e $\Diamond$ per indicare gli operatori di necessità e di possibilità.

2. Si tratta del ragionamento già esposto nel capitolo precedente.

3. *Se R è riflessiva ed euclidea, allora è simmetrica e transitiva.*
Dimostrazione. Siano *u* e *v* due mondi qualsiasi di *W* tali che *uRv*. Dato che *R* è riflessiva, si ha *uRu*. Da *uRv* e *uRu*, per l'euclideicità, segue *vRu*. In definitiva, da *uRv* segue *vRu* e quindi *R* è simmetrica. Siano *u*, *v* e *w* tre mondi qualsiasi di *W* tali che *uRv* e *vRw*. Per la simmetria di *R*, da *uRv* segue *vRu*. Da *vRu* e *vRw*, per l'euclideicità, si ha *uRw*. In definitiva, da *uRv* e *vRw* si ottiene *uRw* e quindi *R* è transitiva.

4. Se si aggiunge a **KT** come assioma $A \rightarrow LMA$ si ottiene un altro sistema modale, spesso indicato con **B** nella letteratura poiché ha legami con la logica intuizionista (CAP. 11): **B** è l'iniziale di Brouwer, il logico fondatore dell'intuizionismo. A proposito di questa formula $A \rightarrow LMA$, la sua lettura "Se *A* è vera allora è necessario che sia possibile", appare intuitivamente plausibile e sembra non possa sorgere alcun dub-

bio nell'accettarla come nuovo assioma. Purtroppo però, se la si assume, si può dimostrare $MLA \rightarrow A$ che, invece, non appare altrettanto intuitivamente ovvia: se è possibile che sia necessaria A ne segue che A è vera?

5. Il lettore può cimentarsi a trovare le derivazioni delle equivalenze proposte oppure a dimostrare la loro validità nelle strutture con relazione di accessibilità R riflessiva e transitiva.

6. Il lettore può cimentarsi a trovare le derivazioni delle equivalenze proposte oppure a dimostrare la loro validità nelle strutture con relazione di accessibilità R riflessiva, simmetrica e transitiva.

7. La qualifica di "non classiche" attribuita alle logiche trattate in questo testo non è motivata da ragioni storiche, ma è puramente convenzionale. Talvolta le logiche non classiche sono dette "logiche filosofiche".

8. Per evitare fraintendimenti è bene ricordare che il limite del condizionale materiale che stiamo evidenziando non preclude la sua adeguatezza per formalizzare l'implicazione impiegata nelle dimostrazioni matematiche. La logica classica è in primo luogo la logica della matematica e non deve sorprendere il fatto che gli strumenti adatti per formalizzare il ragionamento matematico non siano adeguati a trattare tutti gli aspetti del ragionamento in generale.

5
Logiche deontiche

1. Segnaliamo che non tutti accettano la validità dei due bicondizionali. Essi sono assunti nei tre sistemi di logica deontica che ci apprestiamo ad illustrare. Ciò significa che, in analogia con quanto accade nei sistemi modali aletici, i due operatori O e P sono interdefinibili, ossia si può assumerne uno solo dei due e definire l'altro.

2. In **KD** non è derivabile $OA \rightarrow A$ poiché evidentemente una relazione può essere seriale senza essere riflessiva.

3. Si noti che nel sistema modale aletico **KT5** (**S5**) lo schema (4) $LA \rightarrow LLA$ è derivabile (la riflessività e l'euclideicità di R implicano la transitività di R). Invece, se si aggiunge a **KD** l'assioma:

(5) $$PA \rightarrow OPA$$

non si può derivare l'assioma:

(4) $$OA \rightarrow OOA$$

(dalla serialità e l'euclideicità di R non segue la transitività). Pertanto **D5** si ottiene aggiungendo (5) a **D4** e non a **KD**: se si aggiunge (5) a **KD** si ha il sistema **KD5**, più debole di **D5**.

4. Si può introdurre in **KD** la formula $O(OA \rightarrow A)$, la quale, intuitivamente impone che gli obblighi siano soddisfatti, dalla quale segue $OOA \rightarrow OA$ (ciò che è obbligatorio che sia obbligatorio è obbligatorio). Dal punto di vista semantico l'assunzione di questa formula comporta che, se uRv, allora in v vale $OA \rightarrow A$, ossia che in v gli obblighi sono realizzati. Come il lettore può agevolmente verificare e per quanto già visto in precedenza, ciò significa che v vede se stesso. La formula equivale alla proprietà di "riflessività secondaria" della relazione di accessibilità R: se uRv, allora vRv. Evidentemente la riflessività secondaria è una proprietà più debole della riflessività, la quale, come si è detto, va evitata nei contesti deontici.

5. La semantica dei mondi possibili aiuta a render conto di questa stranezza rela-

tiva alle tautologie: dato che le tautologie sono vere in ogni mondo, sono vere anche nei mondi "buoni" e quindi obbligatorie in qualsiasi mondo. Si può dire che sono legalmente (o moralmente) rilevanti solo gli obblighi non riferiti a tautologie, ossia tali che in OA la formula A può essere falsa.

6. Ad esempio i seguenti:

$$O(A \wedge B) \leftrightarrow OA \wedge OB$$
$$P(A \vee B) \leftrightarrow PA \vee PB$$
$$OA \rightarrow PA$$
$$PA \rightarrow \neg O \neg A$$

7. La semantica dei mondi possibili aiuta a chiarire la situazione. Se in un mondo u vale OA, allora A è vera in tutti i perfezionamenti deontici di u. D'altra parte, se A è vera, anche $A \vee B$ è vera e quindi in u vale $O(A \vee B)$. Ma ciò accade proprio perché OA è vera in u.

8. Ricordiamo che i paradossi dell'implicazione materiale sono legati all'essere tautologia delle due formule $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (una proposizione falsa implica materialmente una qualsiasi proposizione) e $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (una proposizione vera è implicata materialmente da qualsiasi proposizione), mentre quelli dell'implicazione stretta sono legati all'essere valide in logica modale delle due formule $L \neg A \rightarrow (A \supset B)$ (una proposizione impossibile implica strettamente qualsiasi proposizione) e $L\ A \rightarrow (B \supset A)$ (una proposizione necessariamente vera è implicata strettamente da qualsiasi proposizione).

6
Logiche epistemiche

1. Prescindiamo da possibili differenze fra "sapere" e "conoscere" che alcuni individuano nel carattere più particolare del primo rispetto al secondo, come ad esempio in "Conosco Genova, ma non so dov'è l'Acquario".

2. Nelle formule e negli schemi della logica intensionale minimale **K** come formulata nei precedenti capitoli, al posto di M va scritto $\neg S \neg$. Segnaliamo anche che nella letteratura si impiegano spesso le lettere K (*know*) e B (*belief*) al posto di S e C.

3. Ricordiamo che da R riflessiva ed euclidea segue che R è transitiva e simmetrica. Quindi, aggiungendo a $\mathbf{KT_S}$ lo schema (5), ossia passando a $\mathbf{KT5_S}$, sono derivabili sia lo schema di introspezione positiva $SA \rightarrow SSA$, che corrisponde alla transitività di R, sia $A \rightarrow S \neg S \neg A$ (se A è vera, si sa di non sapere non A), che corrisponde alla simmetria di R.

4. Si noti che la locuzione spesso impiegata nel linguaggio naturale "Questo non lo credo, ma lo so" non contraddice questo schema; il suo significato, infatti, non è "Lo so e non lo credo" ($SA \wedge \neg CA$), ma piuttosto "Questo non lo credo soltanto, ma lo so", che equivale a $CA \wedge SA$.

7
Logiche temporali

1. Il lettore può esercitarsi a dimostrare che tutte le formule (1)-(12) sono valide, che non lo sono i condizionali inversi di quelle con la forma di condizionale. Può inoltre esaminare le strettissime analogie e le differenze con le formule della logica modale minimale.

2. Il lettore attento si sarà certamente accorto che abbiamo ripetuto praticamente tale e quale un ragionamento già condotto in precedenza nel CAP. 4 a proposito di $LA \rightarrow LLA$.

Parte seconda
Logiche alternative alla logica classica

1. La logica quantistica è uno dei settori che abbiamo tralasciato per non uscire dai limiti di un'esposizione introduttiva a largo raggio, poiché è più lungo e articolato descrivere i suoi elementi introduttivi (occore far riferimento a strutture algebriche che intervengono nella fisica quantistica).

8
Logiche polivalenti

1. Così si esprime Łukasiewicz: «Se tutto ciò che accade e diventa vero in un tempo futuro è già da oggi ed è stato vero per tutta l'eternità, il futuro è allora determinato quanto il passato e differisce dal passato solo nel dover ancora accadere. [...] le nostre avventure e le vicissitudini della nostra vita, tutte le nostre decisioni e azioni, buone o cattive sono già decise».

10
Logiche condizionali

1. Ad esempio, per alcuni i condizionali avrebbero solo valori di probabilità, i quali corrispondono alle probabilità condizionate standard della teoria matematica delle probabilità.

11
La logica intuizionista

1. In matematica sono frequenti dimostrazioni con questa caratteristica. Ad esempio Cantor ha dimostrato, per assurdo, che esistono (infiniti) numeri trascendenti, ma la dimostrazione non consente di trovarne nemmeno uno.

2. Si osservi che non si ha un rifiuto del principio di bivalenza come avviene nelle logiche polivalenti: per gli intuizionisti vi sono solo due valori di verità, ma essi hanno un significato diverso da quelli della logica classica. Una proposizione A può essere "indeterminata", ma in qualsiasi momento può succedere che si stabilisca se è vera o falsa.

12
Logiche paracoerenti

1. Questo è quanto avviene ad esempio nella logica minimale. Per questa ragione, anche se in quest'ultima non vale la legge di Scoto, non la si ritiene una logica genuinamente paracoerente.

14
Logiche *fuzzy*

1. Si noti che quando si vuole immettere in ruolo *ope legis* chi ha già raggiunto una "grande" quantità di giorni di servizio precario, si deve fissare un k di questo tipo, ad esempio 700 giorni, con la conseguenza di escludere chi ha lavorato 699 giorni e favorire chi ha lavorato appena un giorno di più.

Indice dei principali simboli e sistemi logici

1. Nella letteratura i vari sistemi logici sono indicati in vari modi. Qui abbiamo adottato una nomenclatura più omogenea e di più immediata lettura.

Bibliografia

Manuali introduttivi di logica classica

AGAZZI E. (1990), *La logica simbolica*, La Scuola, Brescia.

BUCHER T. G. (1997), *Introduzione alla logica*, CLUEB, Bologna.

COPI I. M., COHEN C. (1999), *Introduzione alla logica*, Il Mulino-Prentice Hall International, Bologna (ed. or. 1998).

DALLA CHIARA M. L., GIUNTINI R., PAOLI F. (2004), *Sperimentare la logica*, Liguori Editore, Napoli.

LEMMON E. J. (1986), *Elementi di logica con gli esercizi risolti*, Laterza, Roma-Bari (ed. or. 1965).

MONDADORI M., D'AGOSTINO M. (1997), *Logica*, Bruno Mondadori, Milano.

NOLT J., ROHATYN D., VARZI A. (2004), *Logica*, McGraw-Hill Libri Italia, Milano (ed. or. 1988, 1998).

PALLADINO D. (2002), *Corso di Logica. Introduzione elementare al calcolo dei predicati*, Carocci, Roma.

PALLADINO D. (2004), *Logica e teorie formalizzate. Completezza, incompletezza, indecidibilità*, Carocci, Roma.

Manuali di logica classica

BELL J. L., MACHOVER M. A. (1977), *A Course in Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam.

CASARI E. (1997), *Introduzione alla logica*, UTET, Torino.

ENDERTON H. B. (1972), *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, New York.

MENDELSON E. (1972), *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, Torino (ed. or. 1964).

SHOENFIELD R. J. (1980), *Logica matematica*, Boringhieri, Torino (ed. or. 1967).

Testi di logica modale aletica

BENTHEM J. VAN (1982), *Modal Logic and Classical Logic*, Bibliopolis, Napoli.

CASTELLANI F. (1990), *Intensioni e mondi possibili*, Franco Angeli, Milano.

CHELLAS B. (1980), *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.

HUGHES G. H., CRESWELL M. J. (1973), *Introduzione alla logica modale*, Il Saggiatore, Milano (ed. or. 1968).

IDD. (1990), *Guida alla logica modale*, CLUEB, Bologna (ed. or. 1984).

IDD. (1996), *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London.

KONYNDIK K. (1986), *Introductory Modal Logic*, University of Notre Dame Press, Notre Dame.

LEMMON E., SCOTT D. (1977), *An Introduction to Modal Logic*, Blackwell, Oxford.

LEWIS C. I., LANGFORD C. H. (1932), *Symbolic Logic*, The Century Co., New York-London.

PIZZI C. (a cura di) (1974), *Leggi di natura, modalità, ipotesi*, Feltrinelli, Milano.

PLANTINGA A. (1974), *The Nature of Necessity*, Oxford University Press, Oxford.

ZEMAN J. (1973), *Modal Logic. The Lewis-Modal Systems*, Oxford University Press, Oxford.

Testi di logica deontica

ÅQVIST L. (1987), *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems*, Bibliopolis, Napoli.

CORRADINI A. (1989), *Semantica della preferenza e decisione etica*, Franco Angeli, Milano.

DI BERNARDO G. (1972), *Introduzione alla logica dei sistemi normativi*, il Mulino, Bologna.

ID. (1977) (a cura di), *Logica deontica e semantica*, il Mulino, Bologna.

HILPINEN R. (1981), *New Studies in Deontic Logic*, Reidel, Dordrecht.

WRIGHT G. H. VON (1951), *An Essay in Modal Logic*, North Holland, Amsterdam.

ID. (1968), *An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action*, North Holland, Amsterdam.

ID. (1989), *Norma e azione*, il Mulino, Bologna (ed. or. 1963).

Testi di logica epistemica

FAGIN R., HALPERN J. Y., MOSES Y., VARDI M. Y. (1995), *Reasoning about Knowledge*, MIT Press, Cambridge.

FRIXIONE M., PALLADINO D. (1993), *Logica epistemica, onniscienza logica e intelligenza artificiale*, in "Epistemologia", 16, pp. 311-39.

HANSSON S. O. (1999), *A Textbook on Belief Revision*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

HINTIKKA J. (1962), *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*, Cornell University Press, Ithaca (NY).

RESCHER N. (2005), *Epistemic Logic: Survey in the Logic of Knowledge*, University of Pittsburg Press, Pittsburg.

SCHLESINGER G. N. (1985), *The Range of Epistemic Logic*, Aberdeen University Press, Aberdeen.

Testi di logica temporale

BENTHEM J. VAN (1982), *The Logic of Time*, Reidel, Dordrecht.

BONOMI A., ZUCCHI A. (2001), *Tempo e linguaggio. Introduzione alla semantica del tempo e dell'aspetto verbale*, Bruno Mondadori, Milano.

DORATO M. (1994), *Modalità e temporalità*, Bagatto Libri, Roma.

GABBAY D. (1976), *Investigations in Modal and Tense Logic*, Reidel, Dordrecht.

PIZZI C. (a cura di) (1974), *La logica del tempo*, Boringhieri, Torino.

PRIOR A. N. (1957), *Time and Modality*, Clarendon Press, Oxford.

ID. (1967), *Past, Present and Future*, Oxford University Press, Oxford.

Testi di logica polivalente

ACKERMANN R. (1967), *Introduction to Many-Valued Logics*, Routledge & Kegan Paul, London.

FITTING M., ORLOWSKA E. (eds.) (2003), *Beyond Two*, Physica Verlag, Heidelberg.

MALINOWSKI G. (1993), *Many-Valued Logics*, Oxford University Press, Oxford.

MARSONET M. (1976), *Introduzione alle logiche polivalenti*, Abete, Roma.

RESCHER N. (1968), *Many-Valued Logic*, McGraw-Hill, New York.

Testi di logica rilevante

ANDERSON A. R., BELNAP N. D. (1975), *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol. I, Princeton University Press, Princeton (NJ).

ANDERSON A. R., BELNAP N. D., DUNN J. M. (1992), *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, Vol. II, Princeton University Press, Princeton (NJ).

DIAZ M. R. (1981), *Topics in the Logic of Relevance*, Philosophia Verlag, München.

MARES E. D. (2004), *Relevant Logic: A Philosophical Interpretation*, Cambridge University Press, Cambridge.

NORMAN J., SYLVAN R. (eds.) (1989), *Directions in Relevant Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
READ S. (1988), *Relevant Logic*, Basil Blackwell, Oxford.
ROUTLEY R., MEYER R. K., PLUMWOOD V., BRADY R. (1983-2003), *Relevant Logic and Their Rivals*, Vol. I, Ridgeview, Atascardero (CA); Vol. II, Ashgate, Aldeshot.

Testi di logica condizionale

KVART I. (1986), *A Theory of Counterfactuals*, Hackett Publishing Company, Indianapolis.
LEWIS D. (1973), *Counterfactuals*, Harvard University Press, Cambridge (MA).
NUTE D. (1980), *Conditional Logic*, Reidel, Dordrecht.
PIZZI C. (1987), *Dalla logica della rilevanza alla logica condizionale*, Euroma-La Goliardica, Roma.

Testi di logica intuizionista

DUMMETT M. (1975), *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford.
GALVAN S. (1997), *Non contraddizione e terzo escluso. Le regole della negazione nella logica classica, intuizionista e minimale*, Franco Angeli, Milano.
HEYTING A. (1956), *Intuitionism: An Introduction*, North Holland, Amsterdam.
MORICONI E. (1988), *Esistenza e costruzione. Introduzione all'intuizionismo*. ETS, Pisa.
TROELSTRA A. S. (1969), *Principles of Intuitionism*, Springer, Berlin.

Testi di logica paracoerente

BERTO F. (2006), *Teorie dell'assurdo. I rivali del principio di Non-Contraddizione*, Carocci, Roma.
CARNIELLI W. A., CONIGLIO M. E., D'OTTAVIANO I. M. L. (eds.) (2002), *Paraconsistency. The Logical Way to the Inconsistent*, Marcel Dekker, New York-Basel.
PRIEST G., ROUTLEY N., NORMAN J. (eds.) (1989), *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, München.
RESCHER N., BRANDOM R. (1980), *The Logic of Inconsistency: A Study in Non-Standard Possible World Semantics and Ontology*, Basil Blackwell, Oxford.
WOODS J. (2003), *Paradox and Paraconsistency. Conflict Resolution in the Abstract Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge.

Testi di logica non monotona

BREWKA G. (1991), *Nonmonotonic Reasoning: Logical Foundations of Commonsense*, Cambridge University Press, Cambridge.

GABBAY D. M., HOGGER C. J., ROBINSON J. A. (eds.) (1993-94), *Non Monotonic and Uncertain Reasoning, Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Clarendon Press, London.

FISHER SERVI G. (2001), *Quando l'eccezione è la regola. Le logiche non monotone*, McGraw-Hill Libri Italia, Milano.

ŁUKASZEWICZ W. (1990), *Non-Monotonic Reasoning: Formalization of Commonsense Reasoning*, Ellis Horwood, Chicester.

Testi di logica *fuzzy*

BENZI M. (1997), *Il ragionamento incerto. Probabilità e logica in intelligenza artificiale*, Franco Angeli, Milano.

COX E. (1994), *The Fuzzy Systems Handbook*, Academic Press, Harcourt Brace & Company, Boston.

KOSKO B. (1993), *Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic*, Hyperion, New York.

SANGALLI A. (2000), *L'importanza di essere fuzzy. Matematica e computer*, Boringhieri, Torino.

ZIMMERMANN H. J. (1996), *Fuzzy Set Theory and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London.

Testi di logica lineare e logiche substrutturali

ABRUSCI V. M. (1992), *Seminari di logica lineare*, Laterza, Bari.

GIRARD J.-Y. (1987), *Linear Logic*, in "Theoretical Computer Science", 50, pp. 1-102.

ID. (1991), *La logica lineare*, in C. Mangione (a cura di), *Logica*, Le Scienze Quaderni, n. 60, pp. 82-90.

PAOLI F. (2002), *Substructural Logics: A Primer*, Kluwer, Dordrecht.

RESTALL G. (2000), *An Introduction to Substructural Logics*, Routledge, London.

SCHRÖDER-HEISTER P., DOSEN K. (eds.) (1993), *Substructural Logics*, Clarendon Press, Oxford.

Testi miscellanei e vari

AGAZZI E., CELLUCCI C. (a cura di) (1981), *Logiche moderne. Aspetti storici, filosofici e matematici della logica moderna e delle sue applicazioni*, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Roma.

BELL J. L., DE VIDI D., SOLOMON G. (2001), *Logical Options*, Broadview Press, Peterborough.

BOOLOS G. S. (1993), *The Logic of Probability*, Cambridge University Press, Cambridge.

CARNIELLI W., PIZZI C. (2001), *Modalità e multimodalità*, Franco Angeli, Milano.

FRIXIONE M. (1994), *Logica, significato e Intelligenza Artificiale*, Franco Angeli, Milano.

GABBAY D., GUENTHNER F. (eds.) (1983-89), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. I: *Elements of Classical Logic*; Vol. II: *Extensions of Classical Logic*; Vol. III: *Aternatives to Classical Logic*; Vol. IV: *Topics in the Philosophy of Language*, Reidel, Dordrecht.

GABBAY D., WANSING H. (eds.) (1999), *What Is Negation?*, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

GALVAN S. (1991), *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica*, Franco Angeli, Milano.

GOBLE L. (2001), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Blackwell Publishers, Malden.

GRANA N. (1990), *Logica deontica paraconsistente*, Liguori Editore, Napoli.

HAACK S. (1983), *Filosofia delle logiche*, Franco Angeli, Milano (ed. or. 1978).

HALPERN J. Y. (2003), *Reasoning about Uncertainty*, MIT Press, Cambridge.

MAGNANI L., GENNARI R. (1997), *Manuale di logica. Logica classica e del senso comune*, Guerini, Milano.

MANGIONE C., BOZZI S. (1993), *Storia della logica da Boole ai giorni nostri*, Garzanti, Milano.

PALLADINO D., PALLADINO C. (2005), *Breve dizionario di logica*, Carocci, Roma.

PRIEST G. (2001), *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

PRIEST G., BEALL J. C., ARMOUR GARB B. (eds.) (2004), *The Law of Non-Contradiction. New Philosophical Essays*, Clarendon Press, Oxford.

RESCHER N. (ed.) (1968), *Studies in Logical Theory*, Basil Blackwell, Oxford.

SAINSBURY R. M. (1991), *Logical Forms*, Basil Blackwell, Oxford.

SILVESTRINI D. (a cura di) (1979), *Individui e mondi possibili*, Feltrinelli, Milano.

SOWA J. F. (2000), *Knowledge Representation: Logical, Philosophical and Computational Foundations*, Brooks/Cole, Pacific Grove (CA).

WANSING H. (ed.) (1996), *Negation. A Notion in Focus*, De Gruyter, Berlin-New York.

Quality Paperbacks

In questa collana:

Jürgen A. Alt, *Karl R. Popper*

Alessandro Antonietti, *Invito alla psicologia*

Maggie Black, *La cooperazione allo sviluppo internazionale*

Norberto Bobbio, *Il dubbio e la scelta. Intellettuali e potere nella società contemporanea*

Edoardo Boncinelli, *Biologia dello sviluppo. Dalla cellula all'organismo*, nuova edizione aggiornata

Franz J. Broswimmer, *Ecocidio. Come e perché l'uomo sta distruggendo la natura*

Andrea Bruno Jr, *Percorsi dell'architettura contemporanea*

Greg Campbell, *Diamanti di sangue. Lo sporco affare delle pietre più preziose del mondo*

Maurizio Cardaci (a cura di), *Ciber-psicologia. Esplorazioni cognitive di Internet*

Cristiano Castelfranchi, Isabella Poggi, *Bugie, finzioni, sotterfugi. Per una scienza dell'inganno*

Felice Cimatti, *Mente e linguaggio negli animali. Introduzione alla zoosemiotica cognitiva*

Annalisa Coliva, *I concetti. Teorie ed esercizi*

Annalisa Coliva, Elisabetta Lalumera, *Pensare. Leggi ed errori del ragionamento*

Michele Di Francesco, *Introduzione alla filosofia della mente*, nuova edizione aggiornata

Anthony Everitt, *Cicerone. Vita e passioni di un intellettuale*

Adriano Fabris, *Essere e tempo di Heidegger. Introduzione alla lettura*

Hinric Fink-Eitel, *Foucault*

Domenico Fisichella, *Totalitarismo. Un regime del nostro tempo*, nuova edizione

Fergus Fleming, *Cime misteriose. La grande avventura della conquista delle Alpi*

Fergus Fleming, *Deserto di ghiaccio. La storia dell'esplorazione artica*

Pasquale Frascolla, *Il "Tractatus logico-philosophicus" di Wittgenstein. Introduzione alla lettura*

Anthony Giddens, *Cogliere l'occasione. Le sfide di un mondo che cambia*

Elisa Giunchi, *Afghanistan*

Dinjar Godrej, *I cambiamenti climatici*

Peter Groenwegen, Gianni Vaggi, *Il pensiero economico. Dal mercantilismo al monetarismo*

Noreena Hertz, *La conquista silenziosa. Perché le multinazionali minacciano la democrazia*

Michael Ignatieff, *Isaiah Berlin. Ironia e libertà*

Lisa Jardine, *Affari di genio. Una storia del Rinascimento europeo*

Giovanni Jervis, Giovanni Bartolomei, *Freud*

Martin Jones, *Cacciatori di molecole. L'archeologia alla ricerca del* DNA *antico*

Ethan B. Kapstein, *Governare la ricchezza. Il lavoro nell'economia globale*

Giuliana Laschi, *L'Unione europea. Storia, istituzioni, politiche*

Paul Martin, *I segreti del sonno*

Filippo Mignini, *L'Etica di Spinoza. Introduzione alla lettura*

Martha C. Nussbaum, *Coltivare l'umanità. I classici, il multiculturalismo, l'educazione contemporanea*

Arrigo Quattrocchi, *La musica in cento parole. Un piccolo lessico*

Paolo Quintili, *Illuminismo ed Enciclopedia*

Achille C. Varzi, *Parole, oggetti, eventi e altri argomenti di metafisica*

Marco Vozza, *Tra ragione e passione. Invito alla filosofia*

Angelo Vulpiani, *Determinismo e caos*

Paul Wouters, *La bottega del filosofo. Ferri del mestiere per pensatori debuttanti*