Indice

1 Introduzione **1**

2 Nozioni preliminari **5**
2.1 Logiche modali proposizionali 5
2.2 Logiche del primo ordine 9

3 Logiche modali quantificate **15**
3.1 Sintassi 15
3.2 Semantica 18
3.2.1 Domini e termini non rigidi 18
3.2.2 Semantica di Tarski-Kripke 23
3.2.3 Interpretazione e sostituzione 27
3.2.4 Semantica di Kripke 32
3.3 Calcoli assiomatici 36
3.3.1 Logica modale quantificata classica $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ 36
3.3.2 Assiomatizzare la non rigidità di un termine . . . 39
3.3.3 Alcuni teoremi di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ 42
3.3.4 Teorema di validità per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ 43
3.3.5 Logica modale quantificata libera $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ 43
3.3.6 Alcuni teoremi e regole ammissibili in $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ . . . 45
3.3.7 Teorema di validità per $\mathsf{L}^{\circ} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ 45

4 Teoremi di completezza **47**
4.1 Definizioni e lemmi preliminari 49
4.2 Logiche senza la Barcan formula 55
4.2.1 Modelli canonici normali 55
4.2.2 Completezza di $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ e di alcune sue estensioni . 66
4.2.3 Completezza di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ e di alcune sue estensioni . 68

4.3 Logiche con la Barcan formula 72
4.3.1 $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ e sue estensioni 73
4.3.2 $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$ e sue estensioni 78
4.3.3 $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ e sue estensioni 85

5 Logiche modali con operatore lambda **89**
5.1 Un linguaggio più espressivo 89
5.2 Sintassi 92
5.3 Semantica 94
5.4 Calcoli assiomatici 95
5.4.1 Alcuni teoremi di L^{*}_{λ} 97
5.5 Risultati di completezza 99
5.5.1 Logiche senza la Barcan formula 99
5.5.2 Logiche che estendono $\mathsf{Q}_{\lambda}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ 106
5.5.3 Logiche che estendono $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}+\mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ 108

6 Logiche modali indiciate **115**
6.1 Modalità *de dicto* e *de re* 115
6.2 Sintassi 120
6.3 Semantica delle transizioni 122
6.4 Calcoli assiomatici 124
6.4.1 Formule rilevanti 128
6.4.2 Alcune derivazioni 129
6.5 Corrispondenza 132
6.6 Rigidità 137
6.7 Completezza di $\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$ 143
6.7.1 Teoria classica del primo ordine $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$ 144
6.7.2 Relazioni ammissibili 146
6.7.3 Gerarchie di modelli e completezza 150
6.8 Completezza di $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$ 153
6.9 Completezza di alcune estensioni 155

Bibliografia **159**

Capitolo 1

Introduzione

La *logica modale del primo ordine* o *logica modale quantificata* nasce quale combinazione della logica del primo ordine – classica o libera – con una base proposizionale modale contenente gli operatori modali $\Box$ e $\Diamond$. A livello proposizionale, gli operatori modali possono essere usati, fra altro, per esprimere locuzioni del linguaggio naturale di tipo aletico (*necessario* e *possibile*), temporale (*sempre* e *a volte*) ed epistemico (*sapere* e *non poter escludere*). Nel passaggio al primo ordine si fa di norma l'assunzione che sia possibile utilizzare questi stessi operatori per rappresentare le succitate locuzioni. Così facendo si va incontro ad una messe di problemi tanto interessanti quanto ardui da trattare da un punto di vista formale. W.V.O. Quine con indefessa determinazione, fin dagli anni '40, ci ha messi in guardia dal costruire sistemi formali per logiche modali quantificate (si vedano, ad esempio, [Barcan Marcus, 1990; Kripke, 2017; Quine, 1953a]). Più recentemente M. Fitting [1999, p. 105] scrive 'L'aggiunta dei quantificatori [e dell'identità] apre le porte ad un labirinto pieno di conseguenze sgradite e di problemi'.

L'approccio alla base di questo volume mira ad affrontare e possibilmente risolvere proprio quelle criticità già poste in risalto nella letteratura. A tal fine si è optato di confrontarci con le specifiche scelte dipendenti dagli aspetti vuoi sintattici vuoi semantici relativi alle logiche modali quantificate. Nel passare dalle logiche modali proposizionali a quelle quantificate si impongono svariate scelte che riguardano sia le interrelazioni che intercorrono tra i domini dei diversi mondi sia le interrelazioni che intercorrono tra gli oggetti denotati dai termini nei diversi mondi. In particolare, dobbiamo decidere se i differenti mondi debbano condividere uno stesso dominio di quantificazione (i cosiddetti *domini costanti*) oppure se sia sufficiente assumere che ogni oggetto continui a esistere nei mondi accessibili a partire da un mondo dato (i cosiddetti *domini crescenti*) oppure, infine, se i domini di quantificazione possano variare da un mondo all'altro (i cosiddetti *domini variabili*). Inoltre dovremo decidere se i termini siano tutti dei cosiddetti *designatori rigidi*, ovvero siano tali che ciascun termine denota lo stesso oggetto in ciascun mondo (accessibile a partire da un dato mondo), oppure no. Ciascuna di tali scelte ha i suoi pregi e i suoi difetti sia da un punto di vista filosofico sia da un punto di vista matematico. In questo volume siamo interessati principalmente al punto di vista matematico e rimandiamo il lettore ai seguenti testi per una discussione filosofica di alcune delle possibili scelte: [Garson, 2013; Fitting e Mendelsohn, 1998; Frixione et al., 2016; Hughes e Cresswell, 1996].

Da un punto di vista matematico un problema centrale delle logiche modali quantificate risulta essere quello di dimostrare dei risultati di completezza. Infatti se consideriamo le estensioni al primo ordine di una logica modale proposizionale completa, otteniamo spesso una logica incompleta o, quantomeno, una logica per la quale risulta difficile dimostrare la proprietà di completezza. Il nostro obbiettivo sarà quello di esplorare tre approcci, di crescente generalità (e complessità), alle logiche modali quantificate contenenti designatori non rigidi. Riteniamo, infatti, che l'assunzione che tutti i termini siano designatori rigidi sia una semplificazione eccessiva che, da un punto di vista matematico, non è necessaria. Infatti, mostreremo che è possibile estendere i risultati di completezza ottenuti per logiche modali quantificate con solo designatori rigidi alle logiche contenti anche designatori non rigidi.

Innanzitutto considereremo logiche modali quantificate (a domini costanti, crescenti e variabili) contenenti termini non rigidi e basate sull'ordinario linguaggio delle logiche modali quantificate. Tale approccio, introdotto in [Thomason, 1970] e sviluppato in [Garson, 2013], si basa sull'assumere che, preso un arbitrario termine non rigido j, in ciascun mondo ci sia un termine rigido che, per così dire, funge localmente da testimone del termine non rigido j. Presenteremo tali logiche nel Capitolo 3. In particolare, seguendo la distinzione presentata in [Corsi, 2002], studieremo prima le logiche basate sulla *semantica di Tarski-Kripke*, ovvero le logiche basate su una semantica (con quantificazione classica e) a domini crescenti, e poi passeremo alle logiche basate sulla *semantica di Kripke*, ovvero basate su una semantica (con quantificazione libera e) a domini variabili. Nel Capitolo 4 dimostreremo dei risultati di completezza basati sul metodo del modello canonico per tali logiche. In particolare, faremo vedere che i risultati di completezza ottenuti in [Corsi, 2002] possono essere estesi ad un linguaggio contenente designatori non rigidi.

Nel Capitolo 5 considereremo logiche modali quantificate in cui i designatori non rigidi sono gestiti tramite l'operatore di astrazione λ. Tale approccio, introdotto in [Stalnaker e Thomason, 1968] e sviluppato in [Fitting e Mendelsohn, 1998], risulta essere più generale di quello considerato nei capitoli precedenti poiché, come vedremo, permette di distinguere due diverse letture di un enunciato in cui un termine non rigido occorre nel campo di azione di un operatore modale. Anche in questo caso considereremo sia logiche basate sulla semantica di Tarski-Kripke che logiche basate sulla semantica di Kripke e faremo vedere che valgono risultati di completezza analoghi a quelli presentati nel Capitolo 4.

Infine, nel Capitolo 6 presenteremo un approccio ancora più generale alle logiche modali quantificate che è stato introdotto in [Corsi, 2009] e che va sotto il nome di *logiche modali indiciate*. Tale approccio è basato sull'imporre che negli operatori debba occorrere un insieme di variabili: invece che $\Box$ avremo un operatore di forma $|^{t_1}_{x_1}, \dots ^{t_n}_{x_n}|$ che vincola le variabili nel suo campo di azione e in cui è possibile effettuare sostituzioni. In tale modo otterremo un approccio che, oltre ad avere tutti i vantaggi di quello basato sull'aggiunta dell'operatore di astrazione λ, permetterà di trattare in modo più soddisfacente la distinzione tra formule modali *de dicto* (in cui la proprietà modale riguarda un enunciato) e formule modali *de re* (in cui la proprietà modale riguarda un oggetto). In particolare, le formule *de re* saranno trattate semanticamente sulla base di una relazione di rappresentazione vigente tra gli oggetti dei diversi mondi che ricorda la relazione di controparte studiata in [Lewis, 1986]. Presenteremo alcuni risultati di completezza per logiche modali indiciate utilizzando un metodo introdotto da Silvio Ghilardi in [Braüner e Ghilardi, 2007].

Capitolo 2

Nozioni preliminari

Per rendere questo libro il più possibile *self-contained*, riteniamo opportuno iniziare dando una introduzione essenziale alle logiche sulla base delle quali svilupperemo i diversi approcci alle logiche modali quantificate. Conseguentemente in questo capitolo presenteremo alcune nozioni di base delle logiche modali proposizionali e delle teorie della quantificazione classica e libera.

2.1 Logiche modali proposizionali

Introduciamo ora gli elementi essenziali delle logiche modali proposizionali sulla base delle quali costruiremo le logiche modali quantificate nei capitoli successivi. Per una introduzione dettagliata alle logiche modali proposizionali rimandiamo il lettore a [Orlandelli e Corsi, 2019].

Linguaggio

Dato un insieme non vuoto di variabili enunciative Φ, definiamo l'insieme delle *formule modali proposizionali* (anche dette $\mathscr{L}^p$-*formule*, o *formule di* $\mathscr{L}^p$) come segue:

Definizione 2.1.

1. $\perp$ è una formula;

2. ogni variabile enunciativa $p_i \in \Phi$ è una formula;
3. se A è una formula allora anche $\neg A$, $\Box A$ e $\Diamond A$ sono formule;
4. se A e B sono formule allora anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \rightarrow B)$ sono formule;
5. nient'altro è una formula.

Semantica

Definizione 2.2 (Struttura)**.** Una *struttura* (*relazionale*) è una coppia $F = \langle W, R \rangle$ dove W è un insieme non vuoto e R è una relazione binaria definita su W (ovvero $R \subseteq W \times W$).

Chiameremo i membri di W *mondi* (*possibili*) e la relazione R *relazione di accessibilità*. Se la coppia $\langle w, v \rangle$ soddisfa la relazione R, scriveremo wRv e diremo che *v è accessibile a partire da w*.

Definizione 2.3 (Modello)**.** Un *modello* è una tripla $M = \langle W, R, I \rangle$ dove i primi due elementi costituiscono una struttura e I è una funzione (detta di *interpretazione*) che associa un sottoinsieme di W a ciascuna variabile enunciativa (ovvero $I : \Phi \longrightarrow 2^w$).

Intuitivamente la funzione di interpretazione ci dice in quali mondi una variabile enunciativa sia vera: se $w \in I(p)$ diremo che *p è vera nel mondo w di un modello M* e scriveremo $\models^M_w p$; altrimenti diremo che *p è falsa in tale mondo* e scriveremo $\not\models^M_w p$. La seguente definizione ci dice come estendere tale nozione di verità a formule di complessità arbitraria sulla base della loro costruzione.

Definizione 2.4 (Verità)**.** La verità di una $\mathscr{L}^p$-formula A in un punto w di un modello $M = \langle W, R, I \rangle$ è così definita:

$\models^M_w p$	sse	$w \in I_w(p)$
$\not\models^M_w \bot$		
$\models^M_w \neg B$	sse	$\not\models^M_w B$
$\models^M_w B \wedge C$	sse	$\models^M_w B$ e $\models^M_w C$

$\models^M_w B \vee C$	sse	$\models^M_w B$ oppure $\models^M_w C$
$\models^M_w B \to C$	sse	$\not\models^M_w B$ oppure $\models^M_w C$
$\models^M_w \Box B$	sse	per ogni v tale che wRv, $\models^M_v B$
$\models^M_w \Diamond B$	sse	per qualche v tale che wRv, $\models^M_v B$

Osservazione 2.5. Data la definizione di verità è immediato verificare che la formula $\Diamond A$ è semanticamente equivalente a $\neg\Box\neg A$ e, analogamente, $\Box A$ è equivalente a $\neg\Diamond\neg A$.

Definizione 2.6 (Validità)**.** Diremo che una formula è *vera in un modello* $M = \langle W, R, I\rangle$ se e solo se essa è vera in ogni mondo di tale modello e diremo che una formula è *valida* (*su una classe di strutture*) se e solo se tale formula è vera in ogni modello (che sia basato su una struttura appartenente a tale classe).

Le logiche modali proposizionali che considereremo possono essere definite come gli insiemi delle formule valide su alcune classi di strutture definite da particolari proprietà della relazione di accessibilità. Come è ben noto, una peculiarità delle logiche modali proposizionali è che certe formule modali *corrispondono* a certe proprietà della relazione di accessibilità (ovvero tali formule sono valide su tutte e sole le strutture che soddisfano tali proprietà). In particolare, per noi saranno rilevanti i seguenti ben noti risultati.

Proposizione 2.7 (Risultati di corrispondenza)**.**

D *Lo schema di formule* $D := \Box A \to \Diamond A$ *è valido su tutte e sole le strutture seriali, ovvero tali che:*
per ogni $w \in W$ esiste $v \in W$ tale che wRv.

T *Lo schema di formule* $T := \Box A \to A$ *è valido su tutte e sole le strutture riflessive, ovvero tali che:*
per ogni $w \in W$, wRw.

4 *Lo schema di formule* $4 := \Box A \to \Box\Box A$ *è valido su tutte e sole le strutture transitive, ovvero tali che:*
per ogni $w, v, u \in W$, se wRv e vRu allora wRu.

B *Lo schema di formule* $B := A \to \Box\Diamond A$ *è valido su tutte e sole le strutture simmetriche, ovvero tali che:*
per ogni $w, v \in W$, se wRv allora vRw.

Alcune logiche modali proposizionali

Presentiamo ora (i calcoli assiomatici per) alcune delle più importanti logiche modali proposizionali. Innanzitutto abbiamo la logica modale (normale minimale) K che è assiomatizzata come segue.

Definizione 2.8 (Logica K)**.**

- Schemi di assiomi:

$Taut$	Tutte le tautologie classiche
K	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
$Def_\Diamond$	$\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$

- Regole di inferenza:

$$\frac{A}{\Box A}\ N \qquad\qquad \frac{A \qquad A \to B}{B}\ MP$$

Presentiamo ora gli assiomi che utilizzeremo per definire le estensioni di K che considereremo (si noti che tali assiomi non sono altro che le formule considerate nella Proposizione 2.7).

Definizione 2.9 (Assiomi modali)**.**

D. $\Box A \to \Diamond A$

T. $\Box A \to A$

4. $\Box A \to \Box\Box A$

B. $A \to \Box\Diamond A$

Definizione 2.10. Considereremo le seguenti logiche modali proposizionali che estendono K:

D $\quad \mathsf{K} + D$

T $\quad \mathsf{K} + T$

K4 $\quad \mathsf{K} + 4$

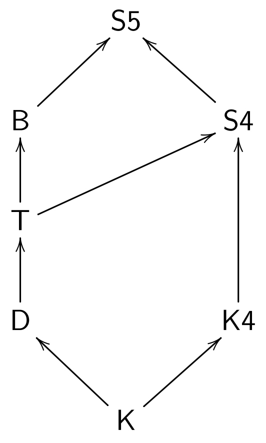


Figura 2.1: Il diagramma delle logiche modali proposizionali

S4	$\mathsf{K} + T + 4$
B	$\mathsf{K} + B + T$
S5	$\mathsf{K} + T + 4 + B$

Definizione 2.11. Sia L^{p} una logica modale proposizionale.

- Una *dimostrazione* in L^{p} è una sequenza finita di formule tale che ciascuna di esse o è un assioma di L^{p} o segue da formule che la precedono in tale sequenza applicando una regola di L^{p}.

- L'ultima formula di una dimostrazione in L^{p} è detta *teorema* di L^{p}. Il fatto che A sia un teorema di L^{p} è rappresentato da $\vdash_{\mathsf{L}^{\mathsf{p}}} A$.

Nella Figura 2.1 sono presentati i rapporti di inclusione tra i teoremi delle logiche modali proposizionali qui considerate.

2.2 Logiche del primo ordine

Introduciamo ora gli elementi essenziali della logica del primo ordine basata su quantificazione classica e di quella basata su quantificazione libera (positiva). Per un'introduzione dettagliata alla quantificazione classica rimandiamo il lettore ad un qualsiasi manuale di logica (ad esempio [van Dalen, 2012]) e per la quantificazione libera a [Bencivenga, 2002]. In breve, la differenza tra questi due approcci consiste nell'accettare che i termini del linguaggio abbiano una portata esistenziale o meno: l'inferenza da 'Pegaso è un cavallo alato' a 'esiste un cavallo alato' è valida in logica classica ma non in logica libera. Infatti, se $A(t)$ rappresenta una generica formula in cui occorre il termine t e se $A(x)$ rappresenta la stessa formula in cui le occorrenze del termine t sono state rimpiazzate da occorrenze della variabile x, allora la formula

$$A(t) \to \exists x A(x)$$

è valida se consideriamo una logica del primo ordine basata su quantificazione classica, ma non lo è se consideriamo una logica del primo ordine basata su quantificazione libera (da intendersi come *libera da presupposizioni esistenziali*). La differenza, per l'appunto, è che in logica classica, ma non in logica libera, si assume che ogni oggetto (di cui il linguaggio può parlare) esista, ovvero sia incluso nel campo di azione dei quantificatori $\forall$ ed $\exists$.

Linguaggio del primo ordine

Sia $x, y, x \ldots$ un insieme infinito numerabile di variabili. Per definire un linguaggio del primo ordine $\mathscr{L}^1$ dobbiamo definire una segnatura Σ, ovvero, nel nostro caso, un insieme al più numerabile di costanti individuali $a, b, c \ldots$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un insieme al più numerabile di simboli relazionali P^n, R^n, Q^n di arietà n. Assumeremo che Σ contenga sempre il predicato binario di identità $=$ per il quale, come usuale, useremo notazione infissa (ovvero scriveremo $x = y$ invece che $= x, y$). Un *termine* (denotato da $t, s \ldots$) è una variabile o una costante individuale.

Definizione 2.12 (Formule di $\mathscr{L}^1$)**.**

1. $\bot$ è una formula;

2. se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini e P è un simbolo relazionale n-ario allora $Pt_1, \ldots, t_n$ è una formula (detta *atomica*);

3. se A è una formula allora $\neg A$ lo è e, inoltre, se x è una variabile, anche $\forall x A$ ed $\exists x A$ sono formule;

4. se A e B sono formule, anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \to B)$ lo sono;

5. nient'altro è una formula.

Un'occorrenza di una variabile x in una formula A è detta *vincolata* se è nel campo di azione di un quantificatore Qx (per $Q \in \{\forall, \exists\}$), ovvero x è vincolata in A se occorre in una sottoformula di A di forma QxB; altrimenti tale occorrenza è detta essere *libera*. Un *enunciato* è una formula in cui non ci sono occorrenze libere di variabili. Data una formula A, con $A[t/x]$ indicheremo la formula ottenuta a partire da A sostituendo ogni occorrenza libera della variabile x con un'occorrenza del termine t, eventualmente rinominando le variabili vincolate per evitare la cattura di occorrenze libere (cf. Definizione 3.6).

Quantificazione classica

Definizione 2.13 (Modello)**.** Un modello classico è una coppia $M = \langle U, I \rangle$ dove U è un insieme non vuoto detto *universo* del modello e I è una funzione di interpretazione per i simboli della segnatura Σ tale che: per ogni costante individuale c, $I(c) \in U$ e per ogni relazione n-aria P, $I(P) \subseteq (U)^n$. In generale assumeremo che per ogni modello $\langle U, I \rangle$ il simbolo $=$ sia interpretato come predicato di identità, ovvero $I(=) = \{\langle o, o \rangle : o \in U\}$.

Definizione 2.14 (Assegnamento)**.** Dato un modello $\langle U, I \rangle$ un assegnamento σ è una funzione che associa a ogni variabile un oggetto dell'universo U.

Con $\sigma^{x \triangleright o}$ denoteremo l'assegnamento che mappa la variabile x sull'oggetto o dell'universo e si comporta come σ per le altre variabili. Dati un modello $\langle U, I \rangle$ un assegnamento σ su tale modello e un termine t, con $I^{\sigma}(t)$ denoteremo $I(t)$ se t è una costante individuale e $\sigma(t)$ se t è una variabile.

Definizione 2.15 (Soddisfazione)**.** La soddisfazione di una formula A in un modello M rispetto a un assegnamento σ, in simboli $\sigma \models^M A$, è definita per induzione sulla formula A. Presentiamo solo il caso delle formule atomiche e dei quantificatori dato che gli altri casi sono come in Definizione 2.4.

$$\begin{array}{lll} \sigma \models^M P t_1,\ldots,t_n & \text{sse} & \langle I^\sigma(t_1),\ldots,I^\sigma(t_n)\rangle \in I(P) \\ \sigma \models^M \forall x B & \text{sse} & \text{per ogni } o \in U,\ \sigma^{x\rhd o} \models^M B \\ \sigma \models^M \exists x B & \text{sse} & \text{per qualche } o \in U,\ \sigma^{x\rhd o} \models^M B \end{array}$$

Definizione 2.16. Una $\mathscr{L}^1$-formula è *vera* in un modello M se e solo se essa è soddisfatta in quel modello rispetto ad ogni assegnamento. Una $\mathscr{L}^1$-formula è *valida* se e solo se essa è vera in ogni modello.

Definizione 2.17 (Calcolo assiomatico $\mathsf{Q}_=$)**.** Presentiamo ora gli assiomi e le regole di inferenza che definiscono il calcolo assiomatico $\mathsf{Q}_=$ per la logica del primo ordine con quantificazione classica. Per comodità separiamo gli assiomi e le regole in 4 gruppi tematici.

1. Assiomi/regole proposizionali:

   $Taut$ ogni $\mathscr{L}^1$-istanza di una tautologia proposizionale

   MP $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

2. Assiomi/regole per la quantificazione classica:

   UI $\forall x A \to A$

   UD $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$, per x non libera in A

   $Def_\exists$ $\exists x A \leftrightarrow \neg\forall x \neg A$

   Gen $\dfrac{A}{\forall x A}$

3. Assiomi per l'identità:

   Rif $t = t$

   Lbz $t = s \to (A[t/x] \to A[s/x])$

4. Regola sui termini:

   $Sost$ $\dfrac{A}{A[t/x]}$

Le nozioni di *dimostrazione* e *teorema* di $\mathsf{Q}_=$ sono analoghe a quelle date nella Definizione 2.11 per le logiche modali proposizionali.

Osservazione 2.18. Usualmente l'assioma di istanziazione universale UI è lo schema $\forall xA \to A[t/x]$ invece che lo schema, più debole, $\forall xA \to A$ presentato nella Definizione 2.17. La versione più forte risulta però derivabile da quella più debole grazie alla regola $Sost$. Abbiamo preferito assumere uno schema di istanziazione debole unito a una regola di sostituzione perché questo approccio si adatta meglio alle logiche modali quantificate con termini non rigidi che studieremo nei capitoli seguenti.

Quantificazione libera

La logica del primo ordine con quantificazione libera è del tutto analoga a quella con quantificazione classica con la sola differenza che, semanticamente, i quantificatori $\forall$ ed $\exists$ non quantificano su tutto l'universo U di un modello, ma su un suo sottoinsieme D (che può essere vuoto o anche coincidere con U). Infatti, i modelli per la logica libera hanno un *doppio dominio* composto da un *dominio esterno* non vuoto U su cui vengono interpretati i simboli descrittivi della segnatura Σ e un *dominio interno* D ($\subseteq U$) su cui vengono interpretati i quantificatori. Per questo motivo il fatto che in un modello sia vera una formula atomica Pt non implica che sia vera la sua generalizzazione esistenziale $\exists xPx$: t potrebbe denotare un oggetto non esistente in tale modello (ovvero un oggetto non incluso nel dominio interno D su cui agiscono i quantificatori). Come già anticipato, in logica libera dal fatto che sia vero l'enunciato 'Pegaso è un cavallo alato' non segue la verità dell'enunciato 'esiste un cavallo alato'.

Presentiamo ora le nozioni di modello, soddisfazione e calcolo assiomatico per la logica libera del primo ordine. Tutte le altre nozioni rilevanti sono definite esattamente come per la logica classica.

Definizione 2.19 (Modello)**.** Un modello per la logica libera è una tripla $M = \langle U, D, I\rangle$ dove U è un insieme non vuoto detto *dominio esterno di* M; D è un sottoinsieme di U detto *dominio interno di* M; infine I è una funzione di interpretazione per i simboli della segnatura Σ definita sul dominio esterno U come in Definizione 2.13: $I(c) \in U$, $I(P) \subseteq (U)^n$ e $I(=) = \{\langle o, o\rangle : o \in U\}$.

Definizione 2.20 (Soddisfazione)**.** Nuovamente presentiamo solo il caso delle formule atomiche e dei quantificatori dato che gli altri casi sono come in Definizione 2.4.

$\sigma \models^M Pt_1, \ldots, t_n$	sse	$\langle I^\sigma(t_1), \ldots, I^\sigma(t_n) \rangle \in I(P)$
$\sigma \models^M \forall x B$	sse	per ogni $o \in D$, $\sigma^{x \triangleright o} \models^M B$
$\sigma \models^M \exists x B$	sse	per qualche $o \in D$, $\sigma^{x \triangleright o} \models^M B$

Definizione 2.21 (Calcolo assiomatico $\mathsf{Q}^\circ_=$)**.** Il calcolo assiomatico $\mathsf{Q}^\circ_=$ per la logica del primo ordine con quantificazione libera è ottenuto a partire dagli assiomi/regole dati nella Definizione 2.17 rimpiazzando gli assiomi/regole per la quantificazione classica (gruppo 2) con i seguenti assiomi/regole per la quantificazione libera:

UI° $\quad \forall y(\forall x A \to A[y/x])$

UD° $\quad \forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$

VQ $\quad A \to \forall x A$, per x non libera in A

Prm $\quad \forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$

$Def_\exists$ $\quad \exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A$

Gen $\quad \dfrac{A}{\forall x A}$

Osservazione 2.22. È immediato vedere che ogni formula valida/ogni teorema della logica libera è anche una formula valida/un teorema della logica classica, ma non viceversa.

Concludiamo questo capitolo presentando alcuni teoremi della logica libera $\mathsf{Q}^\circ_=$ che ci saranno utili in seguito:

1. $(\forall x A \to B) \leftrightarrow \exists x(A \to B)$, per x non libera in B
2. $\exists x(x = t) \to (\forall x A \to A[t/x])$

Capitolo 3

Logiche modali quantificate

3.1 Sintassi

Definizione 3.1. Un *linguaggio del primo ordine con identità* $\mathscr{L}$ contiene i seguenti simboli:

1. Simboli logici:
   (a) Connettivi proposizionali: $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$
   (b) Operatori modali: $\Box$, $\Diamond$
   (c) Quantificatori: $\forall$, $\exists$
2. Una quantità infinita numerabile di varibili: x_1, x_2, x_3, $\ldots$
3. Simboli descrittivi (segnatura Σ):
   (a) Un insieme, al più numerabile, di costanti individuali: c_1, c_2, c_3, $\ldots$
   (b) Un insieme, al più numerabile, di descrizioni individuali: j_1, j_2, j_3, $\ldots$
   (c) Simboli relazionali P^n,Q^n,R^n,..... di arietà $n, 0 \leq n < \omega$
   (d) Il predicatio binario di identità: $=$
4. Simboli ausiliari: (,)

Un *termine* è una variabile o una costante individuale o una descrizione individuale. Un *termine rigido* è una variabile o una costante individuale. Le descrizioni individuali sono chiamate anche *termini non rigidi.*
Nel seguito useremo le seguenti metavariabili:

- $t, s, r...$ per termini;
- $f, g, h, ...$ per termini rigidi;
- $a, b, c, ..$ per costanti individuali;
- $i, j, k, ..$ per descrizioni individuali;
- $x, y, z, ..$ per variabili.

Definizione 3.2 (Formule di $\mathscr{L}$)**.** Le *formule ben formate* (semplicemente *formule*) sono così definite:

- $\bot$ è una formula;
- se P^n è un simbolo relazionale n-ario e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $P^n t_1, \ldots, t_n$ è una formula (detta *formula atomica*);
- se t e s sono termini allora $t = s$ è una formula (atomica);
- se A è una formula allora anche $\neg A$, $\Box A$ e $\Diamond A$ lo sono;
- se A e B sono formule allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \to B)$ lo sono;
- se A è una formula e x una variabile allora $\forall x A$ e $\exists x A$ sono formule;
- nient'altro è una formula.

La variabile x è detta *vincolata* in $\forall x A$ e in $\exists x A$ e, in tali formule, A è detta essere l'*ambito* del quantificatore. Un'occorrenza di una variabile che non è vincolata da un quantificatore è detta *libera.* Una formula è un *enunciato* se non contiene variabili libere.

La formula $(A \leftrightarrow B)$ è definita come $((A \to B) \wedge (B \to A))$.

Useremo le seguenti metavariabili: $p, q, r \ldots$ per simboli relazionali 0-ari (anche detti *variabili enunciative*), $A, B, C, \ldots$ per formule e $G, H, \ldots$ per formule atomiche. Inoltre useremo il simbolo $\equiv$ per denotare l'identità sintattica di due simboli. Infine, useremo le usuali convenzioni sulle parentesi:

1. $\neg, \Box, \Diamond, \forall, \exists$ legano più degli operatori binari;
2. $\wedge$ e $\vee$ legano più di $\rightarrow$ (e di $\leftrightarrow$);
3. le parentesi più esterne si omettono;
4. si scrive associando a sinistra:
   $A \vee B \vee C \vee \cdots \vee D$ invece di $(\ldots((A \vee B) \vee C) \vee \cdots \vee D)$
   $A \wedge B \wedge C \wedge \cdots \wedge D$ invece di $(\ldots((A \wedge B) \wedge C) \wedge \cdots \wedge D)$.

Definizione 3.3 (Lunghezza di una formula)**.** La *lunghezza* di una formula A, $\mathsf{ln}(A)$, è definita per induzione sulla costruzione di A:

1. $\mathsf{ln}(\bot) = \mathsf{ln}(P^n t_1, \ldots, t_n) = \mathsf{ln}(s = t) = 0$;
2. $\mathsf{ln}(\neg A) = \mathsf{ln}(\Box A) = \mathsf{ln}(\Diamond A) = \mathsf{ln}(\forall x A) = \mathsf{ln}(\exists x A) = \mathsf{ln}(A) + 1$;
3. $\mathsf{ln}(A \wedge B) = \mathsf{ln}(A \vee B) = \mathsf{ln}(A \rightarrow B) = \mathsf{ln}(A) + \mathsf{ln}(B) + 1$.

Definizione 3.4 (Sottoformule)**.** L'insieme delle sottoformule di una formula A, $\mathsf{Sf}(A)$, è definito per induzione sulla costruzione di A:

1. $\mathsf{Sf}(P^n t_1, \ldots, t_n) = \{P^n t_1, \ldots, t_n\}$;
2. $\mathsf{Sf}(\bot) = \{\bot\}$;
3. $\mathsf{Sf}(t = s) = \{t = s\}$;
4. $\mathsf{Sf}(\circ B) = \{\circ B\} \cup \mathsf{Sf}(B)$, per $\circ \in \{\neg, \Box, \Diamond, \forall x, \exists x\}$;
5. $\mathsf{Sf}(B \circ C) = \{B \circ C\} \cup \mathsf{Sf}(B) \cup \mathsf{Sf}(C)$, per $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Definizione 3.5 (Sostituzione di variabili in termini)**.** Usiamo $s[t/x]$ per denotare il termine ottenuto sostituendo la variabile x con il termine t all'interno del termine s:

- Se $s \equiv a$ o $s \equiv j$, allora $s[t/x] \equiv s$;

- Se $s \equiv x$, allora $s[t/x] \equiv t$;
- Se $s \equiv y$ con $y \not\equiv x$ allora $s[t/x] \equiv s$.

Definizione 3.6 (Sostituzione di variabili in formule)**.** Con $A[t/x]$ denotiamo la formula ottenuta a partire da A sostituendo ogni occorrenza libera di x con un'occorrenza di t. La definizione è per induzione sulla costruzione di A:

- $\bot [t/x] \equiv \bot$;
- $(P^n s_1, \ldots, s_n)[t/x] \equiv (P^n s_1[t/x], \ldots, s_n[t/x])$;
- $(s_1 = s_2)[t/x] \equiv (s_1[t/x] = s_2[t/x])$;
- $(\circ B)[t/x] \equiv \circ(B[t/x])$, per $\circ \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$;
- $(B \circ C)[t/x] \equiv (B[t/x] \circ C[t/x])$, per $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
- $(QyB)[t/x] \equiv \begin{cases} QyB & \text{se } y \equiv x \\ Qy(B[t/x]) & \text{se } y \not\equiv x \text{ e } y \not\equiv t \\ Qz((B[z/y])[t/x]) & \text{se } y \not\equiv x \text{ e } y \equiv t \\ z \text{ non in } \forall yB \text{ né in } t & \end{cases} \quad Q \in \{\forall, \exists\}$

3.2 Semantica

3.2.1 Domini e termini non rigidi

Semantica a domini crescenti

Iniziamo presentando una semantica per il linguaggio modale che sia il più vicino possibile alla semantica tarskiana per la logica classica. La differenza principale sarà che dovremo considerare una molteplicità di modelli tarskiani tra i quali imporremo alcune interrelazioni invece che un singolo modello. L'idea di base è molto semplice, partiamo da una *struttura relazionale* costituita da un insieme W e da una relazione binaria R definita su W, $\langle W, R\rangle$, e decoriamo ciascun punto $w \in W$ con un modello tarskiano $\langle U_w, I_w\rangle$ dove ciascun U_w è un insieme non vuoto (che chiameremo *universo*) e I_w è una funzione di interpretazione definita sul dominio U_w. Dobbiamo però imporre le seguenti interrelazioni tra tali modelli tarskiani: innanzitutto imponiamo che i domini siano *crescenti*, ovvero che se wRv allora $U_w \subseteq U_v$; inoltre imponiamo che le costanti individuali siano designatori rigidi, ovvero che se wRv allora $I_w(c) = I_v(c)$. Si noti che non imponiamo alcuna restrizione sulle descrizioni individuali, infatti esse rappresentano i designatori non rigidi la cui interpretazione varia passando da un mondo all'altro.

Il tipo di funzione di interpretazione che adottiamo è chiamata *interpretazione oggettuale*: per ogni mondo w, l'universo U_w è l'insieme degli oggetti che esistono in w. Riteniamo che questo sia il modo più naturale di interpretare i simboli descrittivi di un linguaggio del primo ordine. Come è ben noto tale tipo di interpretazione genera i classici problemi ontologici che attanagliano le logiche modali, quali il problema dell'esistenza in diversi mondi e il problema dell'identità attraverso mondi possibili. Per le principali alternative all'interpretazione oggettuale, ovvero per l'interpretazione *sostituzionale* e per quella *concettuale* rimandiamo il lettore a [Garson, 2013].

Chiameremo *modelli di Tarski-Kripke* i modelli per la logica modale del primo ordine ottenuti decorando ogni punto di una *struttura* $\langle W, R\rangle$ con un modello tarskiano. Tali modelli verranno presentati in dettaglio nella prossima sezione. In particolare vedremo che tali modelli verificano tutti i teoremi della logica classica del primo ordine e tutti i teoremi della logica modale proposizionale K. Verificheremo inoltre la validità su tali modelli delle seguenti ben note formule che regolano l'interazione tra quantificatori e modalità nelle logiche del primo ordine:

Converso della formula della Barcan (CBF)	$\Box\forall x A \to \forall x \Box A$
Formula di Ghilardi (GF)	$\exists x \Box A \to \Box\exists x A$
Necessità dell'esistenza (NE)	$\forall x \Box\exists y(x = y)$

Verificheremo inoltre come in tale semantica non sia valida la più nota (e famigerata) delle formule che regolano l'interazione tra modalità e quantificatori:

Formula della Barcan (BF)	$\forall x \Box A \to \Box\forall x A$

Semantiche a domini costanti e variabili

La semantica di Tarski-Kripke è una generalizzazione di quella che in letteratura è nota come *semantica possibilista*. Qualora imponessimo che

$$wRv \text{ solo se } U_w = U_v$$

o, equivalentemente, che

$$\text{per ogni } w \in W, \quad U_w = U_v$$

otterremo la semantica possibilista propriamente detta (anche nota come *semantica a domini costanti*). In questo caso il dominio può essere visto come la collezione di tutte le cose possibili (siano esse attuali o meno) e, quindi, i quantificatori variano sugli oggetti possibili. Tale approccio semantico ha molti sostenitori, primariamente in virtù di una sua apparente maggiore semplicità. Un limite di tale approccio è che esso rende valida la Formula della Barcan.

Dal nostro punto di vista la semantica possibilista deve essere invece vista come un caso limite della *semantica attualista*, ovvero di una semantica in cui in ciascun punto si distingua tra il dominio di interpretazione e quello di quantificazione. Dato che uno dei nostri scopi principali è quello di fornire un approccio che sia il più generale possibile e che sia in grado di inquadrare il maggior numero possibile di calcoli modali del primo ordine, studieremo con attenzione una versione della semantica attualista.

Tale semantica attualista può essere concettualizzata come una *struttura* per la logica modale proposizionale $\langle W, R\rangle$ i cui punti sono decorati con modelli per la logica del primo ordine. La differenza è che in questo caso tali modelli non saranno dei modelli tarskiani, ma dei modelli per la logica libera, si veda il Capitolo 2.2, ovvero ciascun modello sarà una tripla $M_w = \langle D_w, U_w, I_w\rangle$ in cui dobbiamo distinguere due diversi domini di oggetti: un dominio non vuoto di oggetti U_w, detto *dominio esterno*, che svolgerà il ruolo di universo di interpretazione per i simboli descrittivi del linguaggio, e un dominio eventualmente vuoto D_w, detto *dominio interno*, che svolgerà il ruolo di dominio di variazione dei quantificatori. Nuovamente dovremo imporre delle interrelazioni tra i domini. In particolare imporremo che

$$\text{se } wRv \text{ allora } U_w \subseteq U_v$$

e imporremo che

$$\text{per ogni } w \in W, D_w \subseteq U_w$$

Dato che, come appena anticipato, il dominio interno D_w sarà il dominio di variazione dei quantificatori nel mondo w, esso può intuitivamente essere visto come il dominio degli oggetti esistenti (o attuali) nel mondo w. Allo stesso modo, dato che U_w è il dominio su cui interpretiamo i simboli descrittivi del linguaggio, esso può essere visto come il dominio degli oggetti che sono possibili (ovvero di cui possiamo parlare) dal punto di vista di w. Si noti che in un mondo w il dominio interno D_w può anche essere vuoto mentre, invece, il dominio esterno U_w non può mai essere vuoto. Si noti inoltre che, qualora wRv, abbiamo imposto che il dominio esterno di w sia un sottoinsieme di quello di v, ma non abbiamo imposto alcuna interrelazione tra i domini interni di tali mondi.

In tale semantica i quantificatori variano in ciascun mondo w unicamente sul dominio interno di tale mondo D_w, ovvero variano sugli oggetti che esistono in tale mondo e, per questo motivo, abbiamo una interpretazione *attualista* dei quantificatori. Tale semantica attualista è una versione della cosiddetta *semantica a domini variabili* dato che non abbiamo imposto alcuna relazione tra i domini interni dei diversi mondi. Si noti che anche la semantica per la logica modale del primo ordine presentata da Kripke [1963] è un caso limite di questa semantica in cui si impone che

$$\text{per ogni } w \in W,\ U_w = \bigcup_{v \in W} D_v$$

Tale semantica attualista verrà chiamata *semantica di Kripke*. Il grosso vantaggio di tale semantica risiede nella sua generalità che ci permetterà di ottenere modelli e contromodelli per un vasto insieme di formule significative. Inoltre riteniamo tale semantica estremamente semplice dato che è possibile ottenere un teorema di completezza per le logiche validate da tale semantica a partire dall'analogo risultato per le logiche validate dalla semantica di Tarski-Kripke.

Termini non rigidi

Nonostante la semantica di Tarki-Kripke (Kripke) sia molto vicina alla semantica tarskiana per la logica classica (libera), essa permette di distinguere in modo molto chiaro e semplice tra termini *rigidi* e termini *non rigidi*. Secondo la classificazione proposta da Kripke [1980], i termini, che in generale sono costruzioni sintattiche il cui ruolo inteso è quello di denotare oggetti,[1] si dividono in rigidi e non rigidi. Secondo Kripke i nomi denotano lo stesso oggetto in ogni mondo possibile e, perciò, sono designatori rigidi. Le descrizioni individuali, invece, possono denotare oggetti diversi nei diversi mondi e quindi sono designatori non rigidi. Per fare un esempio, il nome *Donald Trump* è un designatore rigido mentre la descrizione *l'attuale presidente degli Stati Uniti* è un designatore non rigido.

Da un punto di vista formale, la differenza tra termini rigidi e termini non rigidi è che l'enunciato

$$\forall x \Box Px \to \Box Pt$$

risulta valido quando t è un termine rigido, ma non quando t è non rigido.

Sarà molto interessante vedere il diverso ruolo giocato dalle costanti individuali (termini rigidi) e dalle descrizioni individuali (termini non rigidi) nella costruzione del modello canonico (cf. Capitolo 4). Per come abbiamo definito il linguaggio formale, esso potrebbe non contenere alcuna costante individuale, però esso conterrà sempre dei termini rigidi dato che, come vedremo, le variabili si comportano semanticamente come designatori rigidi. Nel corso della costruzione del modello canonico dovremo espandere il linguaggio con un insieme di nuovi termini rigidi, siano essi variabili o costanti individuali, che verranno usati per costruire il dominio dei diversi mondi del modello canonico. Da questo seguirà che il linguaggio del modello canonico debba necessariamente contenere dei termini rigidi, altrimenti il dominio di ciascun mondo sarebbe vuoto. D'altro canto le descrizioni individuali non giocheranno alcun ruolo nella costruzione dei domini del modello canonico, ma saranno solamente dei termini che, se presenti nel linguaggio di partenza, in ciascun punto del modello canonico verranno interpretati su un oggetto del dominio di tale punto (ovvero, nel nostro caso, su una costante individuale).

Thomason [1970] introdusse logiche modali con termini non rigidi; in particolare introdusse il sistema da lui chiamato Q3. Nonostante ciò, i termini non rigidi sono rimasti ai margini nella letteratura sulle logiche modali del primo ordine fino alla fine del secolo scorso quando due diversi approcci ai termini rigidi sono stati por-

[1] Per semplicità, ignoreremo sia la distinzione tra denotare e riferirsi che quella tra termini rigidi e termini fortemente rigidi, cf. [Kripke, 1980].

tati all'attenzione degli studiosi grazie al lavoro di Fitting e Mendelsohn [1998] e a quello di Garson [2013]. Nel presente capitolo seguiremo l'approccio di Garson ai termini non rigidi. Quello di Fitting e Mendelsohn, invece, verrà studiato nel Capitolo 5. Ci discosteremo però da entrambi dato che, solo per fare un esempio, questi autori considerano solo sistemi che includono la formula della Barcan. Nel caso di Garson, la ragione sta nel fatto che lui utilizza un calcolo di deduzione naturale contenente regole di inferenza tali per cui la formula della Barcan risulta essere un teorema di ciascun calcolo. Per evitare questa limitazione utilizzeremo un approccio più tradizionale alla teoria della dimostrazione dato che ci concentreremo su calcoli assiomatici alla Hilbert. Questo avrà un duplice vantaggio: da una parte ci consentirà di considerare sistemi senza la formula della Barcan; dall'altra, esso ci consentirà di avere un teorema di completezza uniforme per una vasta classe di logiche modali quantificate (con identità).

3.2.2 Semantica di Tarski-Kripke

Definizione 3.7 (TK-struttura)**.** Una *struttura di Tarski-Kripke* (TK-struttura) è una tripla:

$$\mathscr{F} = \langle W, R, U \rangle$$

dove:

- $W \neq \emptyset$ è un insieme non vuoto di cosiddetti *punti* o *mondi*;
- $R \subseteq W \times W$ è la relazione di *accessibilità* tra i mondi di W;
- U è una funzione che associa ad ogni mondo $w \in W$ un insieme U_w, detto *universo di w* tale che:
  $$U_w \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \text{se } wRv \text{ allora } U_w \subseteq U_v$$

Diremo che una TK-struttura $\langle W, R, U \rangle$ ha *universo costante* se e solo se tutti i mondi di tale TK-struttura condividono lo stesso universo, ovvero se $\forall u, v \in W (U_w = U_v)$.

Definizione 3.8 (TK-modello)**.** Un *modello di Tarski-Kripke* (TK-modello) è una quadrupla $\mathscr{M} = \langle W, R, U, I \rangle$ dove i primi tre elementi costituiscono una TK-struttura $\mathscr{F}$ e I è una funzione che associa a ciascun mondo una funzione di interpretazione per i simboli descrittivi del linguaggio. In particolare,

$$I_w(P^n) \subseteq (U_w)^n \qquad I_w(c) \in U_w \qquad I_w(j) \in U_w$$

Chiameremo *TK-modello basato su* $\mathscr{F}$ ogni modello $\langle W, R, U, I\rangle$ i cui primi tre elementi costituiscono la TK-struttura $\mathscr{F}$.

Definizione 3.9 (TK-modello normale)**.** Un TK-modello $\langle W, R, U, I\rangle$ è detto *normale* se e solo se

1. per ciascun $w \in W$, $I_w(=) = \{\langle o, o\rangle : o \in U_w\}$; e

2. per ciascuna costante individuale c, $w\mathscr{R}v$ implica $I_w(c) = I_v(c)$.

Quando questo non creerà ambiguità, useremo *TK-modello* per riferirci ai TK-modelli normali.

Definizione 3.10 (Assegnamento)**.** Dato un mondo w di un TK-modello $\langle W, R, U, I\rangle$, un w*-assegnamento* è una funzione $\sigma : Var \longrightarrow U_w$ che mappa ciascuna variabile su un oggetto dell'universo U_w.

Dato un w-assegnamento σ e un oggetto $o \in U_w$, useremo $\sigma^{x \rhd o}$ per l'assegnamento che si comporta come σ su tutte la variabili diverse da x e che mappa x su o. Si noti che se wRv allora un w-assegnamento è anche un v-assegnamento (questo grazie al fatto che abbiamo assunto che se wRv allora $U_w \subseteq U_v$).

Dato un TK-modello $\langle W, R, U, I\rangle$ e un w-assegnamento σ, l'interpretazione di un generico termine t, $I^\sigma_w(t)$, è così definita: se t è una variabile $I^\sigma_w(t) = \sigma(t)$, altrimenti $I^\sigma_w(t) = I_w(t)$.

Definizione 3.11 (Soddisfazione)**.** La nozione di *soddisfazione* di una formula A in un punto w di un TK-modello $\mathscr{M} = \langle W, R, U, I\rangle$ sotto un w-assegnamento σ, $\sigma \models^{\mathscr{M}}_w A$, è definita per induzione sulla costruzione di A come segue:

$\sigma \models^{\mathscr{M}}_w P^n t_1, \dots, t_n$	sse	$\langle I^\sigma_w(t_1), \dots, I^\sigma_w(t_n)\rangle \in I_w(P^n)$
$\sigma \not\models^{\mathscr{M}}_w \bot$		
$\sigma \models^{\mathscr{M}}_w \neg B$	sse	$\sigma \not\models^{\mathscr{M}}_w B$
$\sigma \models^{\mathscr{M}}_w B \wedge C$	sse	$\sigma \models^{\mathscr{M}}_w B$ e $\sigma \models^{\mathscr{M}}_w C$

$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} B \vee C$	sse	$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} B$ oppure $\sigma \models_w^{\mathcal{M}} C$
$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} B \to C$	sse	$\sigma \not\models_w^{\mathcal{M}} B$ oppure $\sigma \models_w^{\mathcal{M}} C$
$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} \forall x B$	sse	per ogni $o \in U_w$, $\sigma^{x \rhd o} \models_w^{\mathcal{M}} B$
$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} \exists x B$	sse	per qualche $o \in U_w$, $\sigma^{x \rhd o} \models_w^{\mathcal{M}} B$
$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} \Box B$	sse	per ogni v tale che wRv, $\sigma \models_v^{\mathcal{M}} B$
$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} \Diamond B$	sse	per qualche v tale che wRv, $\sigma \models_v^{\mathcal{M}} B$

Quando ciò non creerà ambiguità, useremo $\sigma \models_w A$ al posto di $\sigma \models_w^{\mathcal{M}} A$.

Definizione 3.12. Sia $\mathcal{M} = \langle W, R, U, I\rangle$ e sia $w \in W$, diremo che una formula A è:

- *vera in un punto w di $\mathcal{M}$*, $\models_w^{\mathcal{M}} A$, sse per ciascun w-assegnamento σ, $\sigma \models_w^{\mathcal{M}} A$;
- *vera in $\mathcal{M}$*, $\mathcal{M} \models A$, sse per ciascun $w \in W$, $\models_w^{\mathcal{M}} A$;
- *valida su una TK-struttura $\mathcal{F}$*, $\mathcal{F} \models A$, sse per ciascun TK-modello $\mathcal{M}$ basato su $\mathcal{F}$, $\mathcal{M} \models A$;
- *TK-valida,* $\models A$, sse per ogni TK-struttura $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models A$;
- *TK-conseguenza (su $\mathcal{F}$)* di un insieme di formule Γ se e solo se per ciascun punto w di ciascun modello $\mathcal{M}$ (basato su $\mathcal{F}$), se $\models_w^{\mathcal{M}} \{B : B \in \Gamma\}$ allora $\models_w^{\mathcal{M}} A$.

Diremo inoltre che $\mathcal{M}$ è un *modello per un insieme di enunciati* Δ se e solo se per qualche $w \in W$, abbiamo che $\models_w^{\mathcal{M}} A$ per ogni enunciato A in Δ; qualora Δ sia l'insieme dei teoremi di una logica L diremo che $\mathcal{M}$ è un *modello per (la logica)* L.

Proposizione 3.13. *Lo schema BF è valido su una TK-struttura $\mathcal{F}$ se e solo se $\mathcal{F}$ è una TK-struttura a dominio singolo.*

Tabella 3.1: Alcune formule notevoli e TK-struttura

Formule TK-valide:	Formule non TK-valide:
$\Box\forall xA \to \forall x\Box A \quad (CBF)$	$\forall x\Box A \to \Box\forall xA \quad (BF)$
$\exists x\Box A \to \Box\exists xA \quad (GF)$	$\Box\exists xA \to \exists x\Box A \quad (CGF)$
$\forall xA \to A[f/x] \quad (f$ rigido$)$	$\forall x\Box Px \to \Box P[j/x] \quad (j$ non rigido$)$
$\forall xA \to \exists xA$	
$\forall x\Box\exists y(x = y) \quad (NE)$	
$\exists x\Box(x = t)$	

Dimostrazione.
$\Leftarrow$) Supponiamo, per assurdo, che esista una TK-struttura $\mathscr{F}$ a dominio singolo su cui BF non sia valida. Dovrà allora esistere un mondo w di un $\mathscr{F}$-modello tale che per qualche σ:

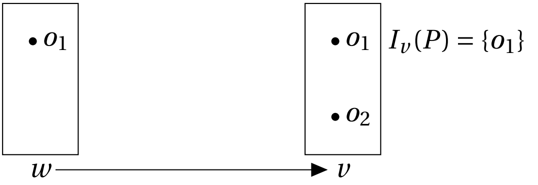
1) $\sigma \not\models_w \forall y\Box A \to \Box\forall yA$
2) $\sigma \models_w \forall y\Box A$ 1
3) $\sigma \not\models_w \Box\forall yA$ 1
4) $\forall o \in U_w\, (\sigma^{y\triangleright o} \models_w \Box A)$ 2
5) $\forall o \in U_w, \forall v\, (wRv \Rightarrow \sigma^{y\triangleright o} \models_v A))$ 4
6) $wRs \,\&\, \sigma \not\models_s \forall yA$ 3
7) $wRs \,\&\, o_1 \in U_s \,\&\, \sigma^{y\triangleright o_1} \not\models_s A$ 6

Essendo $\mathscr{F}$ una struttura a dominio singolo, sappiamo che $o_1 \in U_s$ implica che $o_1 \in U_w$. Dunque o_1 e s soddisfano l'antecedente di 5 e, perciò, $\sigma^{y\triangleright o_1} \models_s A$, ma questo contraddice quanto detto in 7.

$\Rightarrow$) Procediamo per contrapposizione. Assumiamo che $\mathscr{F}$ sia una TK-struttura non a singolo dominio e mostriamo che $\mathscr{F} \not\models BF$; in particolare mostriamo che:

$$\mathscr{F} \not\models \forall x\Box Px \to \Box\forall xPx$$

Sia $\mathscr{M}$ il seguente modello basato su una $\mathscr{F}$ non avente singolo dominio:



È immediato vedere che $\models_w^{\mathcal{M}} \forall x \Box Px$ (dato che $R = \{\langle w, v\rangle\}$ e l'unico oggetto di U_w soddisfa P nell'unico mondo accessibile a partire da w). Inoltre abbiamo che $\not\models_w^{\mathcal{M}} \Box\forall x Px$ (dato che wRv e l'oggetto o_2 non soddisfa P nel mondo v). □

3.2.3 Interpretazione e sostituzione

Lemma 3.14 (Lemma di coincidenza)**.** *Siano σ e τ due w-assegnamenti, abbiamo che*

1. *Se essi coincidono sulle variabili occorrenti nel termine t allora:*

$$I_w^{\sigma}(t) = I_w^{\tau}(t)$$

2. *Se essi coincidono sulle variabili libere occorrenti nella formula A allora:*

$$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} A \quad sse \quad \tau \models_w^{\mathcal{M}} A$$

.

Dimostrazione.

1. Esercizio.

2. Procediamo per induzione su $\mathsf{ln}(A)$. Consideriamo solo alcuni casi e lasciamo gli altri come esercizio.

$\sigma \models_w^{\mathcal{M}} P^n t_1,\dots,t_n$	sse	Def. 3.11
$\langle I_w^{\sigma}(t_1),\dots,I_w^{\sigma}(t_n)\rangle \in I_w(P^n)$	sse	Lemma 3.14.1
$\langle I_w^{\tau}(t_1),\dots,I_w^{\tau}(t_n)\rangle \in I_w(P^n)$	sse	Def. 3.11
$\tau \models_w^{\mathcal{M}} P^n t_1,\dots,t_n$		

$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \Box B$	sse	Def. 3.11
per ogni v tale wRv, $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{v} B$	sse	ipotesi induttiva (I.I.)
per ogni v tale wRv, $\tau \models^{\mathcal{M}}_{v} B$	sse	Def. 3.11
$\tau \models^{\mathcal{M}}_{w} \Box B$		

$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall x B$	sse	Def. 3.11
per ogni $o \in U_w$, $\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} B$	sse	I.I.
per ogni $o \in U_w$, $\tau^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} B$	sse	Def. 3.11
$\tau \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall x B$		

$\Box$

Lemma 3.15 (Lemma su enunciati e assegnamenti)**.** *Se A è un enunciato (ovvero una formula che non contiene variabili libere) allora dati due w-assegnamenti σ e τ abbiamo che:*

$$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} A \quad sse \quad \tau \models^{\mathcal{M}}_{w} A$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Lemma 3.14. $\Box$

Lemma 3.16 (Interpretazione e sostituzione di termini)**.** *Siano s e t termini e sia σ un w-assegnamento, allora:*

1. *Se $I^{\sigma}_{w}(s) = o$, allora $I^{\sigma}_{w}(t[s/x]) = I^{\sigma^{x \rhd o}}_{w}(t)$*

2. $I^{\sigma^{z \rhd o}}_{w}(t[z/x]) = I^{\sigma^{x \rhd o}}_{w}(t)$

Dimostrazione. Per entrambe le proprietà abbiamo casi a seconda che t sia una variabile che coincide con x oppure no.

1. Se $t \equiv x$, allora $I^{\sigma}_{w}(x[s/x]) = I^{\sigma}_{w}(s) = o = I^{\sigma^{x \rhd o}}_{w}(x)$.
   Se, invece, $t \not\equiv x$ allora non c'è nulla da dimostrare dato che la sostituzione non ha effetto su t e $I^{\sigma^{x \rhd o}}_{w}$ coincide con I^{σ}_{w}.

2. Nuovamente l'unico caso da considerare è quello in cui $t \equiv x$. In questo caso abbiamo che:
   $I^{\sigma^{z \rhd o}}_{w}(x[z/x]) = I^{\sigma^{z \rhd o}}_{w}(z) = o = \sigma^{x \rhd o}(x) = I^{\sigma^{x \rhd o}}_{w}(x)$.

$\Box$

Lemma 3.17 (Assegnamenti e sostituzioni)**.** *Sia A una formula e sia z una variabile che non occorre in A. Per ogni w-assegnamento σ e ogni $d \in U_w$*

$$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} A \qquad sse \qquad \sigma^{z \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} A[z/x]$$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su $\mathsf{ln}(A)$. Presentiamo alcuni casi significativi e lasciamo gli altri come esercizio.

$\sigma^{z \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} (Pt_1,\dots,t_n)[z/x]$	sse	Def. 3.6
$\sigma^{z \rhd o} \models_{w} Pt_1[z/x],\dots,t_n[z/x]$	sse	Def. 3.11
$\langle I_w^{\sigma^{z \rhd o}}(t_1[z/x]),\dots,I_w^{\sigma^{z \rhd o}}(t_n[z/x])\rangle \in I_w(P)$	sse	Lemma 3.16.2
$\langle I_w^{\sigma^{x \rhd o}}(t_1),\dots,I_w^{\sigma^{x \rhd o}}(t_n)\rangle \in I_w(P)$	sse	Def. 3.11
$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} Pt_1,\dots,t_n$		

$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} (\Box B)[z/x]$	sse	Def. 3.6
$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} \Box(B[z/x])$	sse	Def. 3.11
per ogni v tale che wRv, $\models_v^{\sigma^{z \rhd o}} B[z/x]$	sse	I.I.
per ogni v tale che wRv, $\models_v^{\sigma^{x \rhd o}} B$	sse	Def. 3.11
$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} \Box B$		

Nel caso in cui $A \equiv \forall yB$ dobbiamo distinguere due casi a seconda che y sia o meno identica a x. Nel primo caso abbiamo:

$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} (\forall xB)[z/x]$	sse	Def. 3.6
$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall xB$	sse	Lemma 3.14.2 ($z \not\in B$)
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall xB$		

Nel secondo caso, invece, abbiamo:

$\sigma^{z \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} (\forall yB)[z/x]$	sse	Def. 3.6
$\sigma^{z \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall y(B[z/x])$	sse	Def. 3.11
per ogni o_1 in U_w, $\sigma^{z \rhd o, y \rhd o_1} \models^{\mathcal{M}}_{w} B[z/x]$	sse	I.I.
per ogni o_1 in U_w, $\sigma^{x \rhd o, y \rhd o_1} \models^{\mathcal{M}}_{w} B[z/x]$	sse	Def. 3.11
$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall yB$		

$\Box$

Lemma 3.18 (α-conversione)**.** *Siano A una formula e z una variabile che non occorre in A, allora*

$$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall x A \qquad sse \qquad \sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall z(A[z/x])$$

Dimostrazione.

$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall x A$	sse	Def. 3.11
per ogni o in U_w, $\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} A$	sse	Lemma 3.17
per ogni o in U_w, $\sigma^{z \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} A[z/x]$	sse	Def. 3.11
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall z(A[z/x])$		

□

Lemma 3.19 (Sostituzione e soddisfazione)**.** *Siano A una formula e σ un w-assegnamento e sia f una variabile o una costante individuale (ovvero un designatore rigido) tale che $I^{\sigma}_{w}(f) = o$, allora*

$$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} A[f/x] \qquad sse \qquad \sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} A$$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su $\mathsf{ln}(A)$. Nuovamente consideriamo solo alcuni casi significativi.

$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} P t_1, \dots, t_n$	sse	Def. 3.11
$\langle I^{\sigma^{x \rhd o}}_{w}(t_1), \dots, I^{\sigma^{x \rhd o}}_{w}(t_n) \rangle \in I_w(P^n)$	sse	Lemma 3.16.1
$\langle I^{\sigma}_{w}(t_1[f/x]), \dots, I^{\sigma}_{w}(t_n[f/x]) \rangle \in I_w(P^n)$	sse	Def. 3.11
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} P(t_1[f/x]), \dots, (t_n[f/x])$	sse	Def. 3.6
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} (P t_1, \dots, t_n)[f/x]$		

$\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} \Box B$	sse	Def. 3.11
per ogni v t.c. $w\mathscr{R}v$, $\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} B$	sse	$I^{\sigma}_{w}(f) = o$ e f rigido
per ogni v t.c. $w\mathscr{R}v$, $\sigma^{x \rhd I^{\sigma}_{v}(f)} \models^{\mathcal{M}}_{v} B$	sse	I.I.
per per ogni v t.c. $w\mathscr{R}v$, $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{v} B[f/x]$	sse	Def. 3.11
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \Box B[f/x]$		

Nel caso in cui $A \equiv \forall y B$ assumiamo che y sia distinto da x (il caso in cui $x \equiv y$ vale poiché $(\forall x B)[f/x] \equiv \forall x B$). Assumiamo inoltre che $f \not\equiv y$ per evitare di dover rinominare la variabile vincolata.

$$
\begin{array}{lll}
\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall y B & \text{sse} & \text{Def. } 3.11 \\
\text{per ogni } o_1 \in U_w,\ \sigma^{x \rhd o, y \rhd o_1} \models^{\mathcal{M}}_{v} B & \text{sse} & x \not\equiv y \\
\text{per ogni } o_1 \in U_w,\ \sigma^{y \rhd o_1, x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{v} B & \text{sse} & \text{I.I.} \\
\text{per ogni } o_1 \in U_w,\ \sigma^{y \rhd o_1} \models^{\mathcal{M}}_{v} B[f/x] & \text{sse} & \text{Def. } 3.11 \\
\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall y (B[f/x]) & \text{sse} & \text{Def. } 3.6\ (x \not\equiv y \text{ e } f \not\equiv y) \\
\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} (\forall y B)[f/x] & &
\end{array}
$$

□

Osservazione 3.20. Il Lemma 3.19 non vale se f è una descrizione individuale. Un controesempio è dato dal seguente modello $\mathcal{M}$:

In questo modello abbiamo che $\not\models^{\mathcal{M}}_{w} \Box(Px[j/x])$ (dato che $\not\models^{\mathcal{M}}_{v} Pj$) ed abbiamo che $\sigma^{x \rhd o_1} \models^{\mathcal{M}}_{w} \Box Px$ (dato che $\sigma^{x \rhd o_1} \models^{\mathcal{M}}_{v} Px$).

Lemma 3.21 (Quantificazione vacua)**.** *Se x non occorre libera in A, allora per ciascun w-assegnamento σ,*

$$
\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall x A \quad \textit{sse} \quad \sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} A \quad \textit{sse} \quad \sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \exists x A
$$

Dimostrazione.

$$
\begin{array}{lll}
\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall x A & \text{sse} & \text{Def. } 3.11 \\
\text{per ogni } o \in U_w, \sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} A & \text{sse} & \text{Lemma } 3.14.2 \text{ e } U_w \neq \emptyset \\
\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} A & \text{sse} & \text{Lemma } 3.14.2 \text{ e } U_w \neq \emptyset \\
\text{per qualche } o \in U_w, \sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} A & \text{sse} & \text{Def. } 3.11 \\
\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \exists x A & &
\end{array}
$$

□

Definizione 3.22. Sia A una formula le cui variabili libere sono (incluse in) $x_1, \ldots, x_n$, allora l'enunciato $\forall x_1, \ldots \forall x_n A$ è detto *chiusura universale* di A.

Lemma 3.23 (Chiusura universale)**.** *Sia $\forall x_1 \ldots \forall x_n A$ la chiusura universale di A.*

$$
\models^{\mathcal{M}}_{w} A \quad \textit{sse} \quad \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall x_1 \ldots \forall x_n A
$$

Dimostrazione. Per induzione sul numero n di variabili libere in A. Se $n = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Se $n = m + 1$, assumiamo per induzione che il lemma valga per m variabili, e procediamo come segue:

$\models^{\mathscr{M}}_{w} A$	sse	Def. 3.12 ($U_w \neq \emptyset$)
per ogni $o \in U_w$ e ogni σ, $\sigma^{x_{m+1} \triangleright o} \models^{\mathscr{M}}_{w} A$	sse	Def. 3.11
per ogni w-ass. σ, $\sigma \models^{\mathscr{M}}_{w} \forall x_{m+1} A$	sse	Def. 3.12
$\models^{\mathscr{M}}_{w} \forall x_{m+1} A$	sse	I.I.
$\models^{\mathscr{M}}_{w} \forall x_1, \ldots, \forall x_m, \forall x_{m+1} A$		

□

3.2.4 Semantica di Kripke

Definizione 3.24 (K-struttura)**.** Una *struttura di Kripke* (K-struttura) è una quadrupla

$$\mathscr{F} = \langle W, R, U, D \rangle$$

dove:

- $W \neq \emptyset$ è un insieme non vuoto di cosiddetti *punti* o *mondi*;
- $R \subseteq W \times W$ è la relazione di *accessibilità* tra i mondi di W;
- U è una funzione che associa ad ogni mondo $w \in W$ un insieme U_w, detto *dominio esterno di* w, tale che:
  $$U_w \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \text{se } wRv \text{ allora } U_w \subseteq U_v$$
- D è una funzione che associa ad ogni mondo $w \in W$ un insieme, possibilmente vuoto, D_w detto *dominio interno di* w e tale che $D_w \subseteq U_w$.

Sebbene wRv implichi che $U_w \subseteq U_v$, esso non implica alcuna relazione tra D_w e D_v.

Definizione 3.25. Data una K-struttura $\mathscr{F} =< W, R, U, D >$ e due generici $w, v \in W$, diremo che $\mathscr{F}$ è una K-struttura:

- a dominio *crescente* se wRv implica $D_w \subseteq D_v$;
- a dominio *decrescente* se wRv implica $D_w \supseteq D_v$;

- a dominio *costante* se wRv implica $D_w = D_v$;
- a *singolo* dominio se $D_w = U_w$.

Definizione 3.26 (K-modello)**.** Un *modello di Kripke* (K-modello) è una quintupla $\mathscr{M} = \langle W, R, U, D, I\rangle$ dove i primi quattro elementi costituiscono una K-struttura $\mathscr{F}$ e I è una funzione che associa a ciascun mondo una funzione di interpretazione per i simboli descrittivi del linguaggio definita sul dominio esterno del mondo w. In particolare,

$$I_w(P^n) \subseteq (U_w)^n, \quad I_w(c) \in U_w \quad \text{e} \quad I_w(j) \in U_w$$

Chiameremo *K-modello basato su* $\mathscr{F}$ ogni modello i cui primi quattro elementi costituiscono la K-struttura $\mathscr{F}$.

Definizione 3.27 (K-modello normale)**.** Un TK-modello $\langle W, R, U, D, I\rangle$ è detto *normale* se e solo se

1. per ciascun $w \in W$, $I_w(=) = \{\langle o, o\rangle : o \in U_w\}$; e
2. per ciascuna costante individuale c, $w\mathscr{R}v$ implica $I_w(c) = I_v(c)$.

Quando questo non creerà ambiguità, useremo *K-modello* per riferirci ai K-modelli normali.

Definizione 3.28 (Assegnamento)**.** Dato un mondo w di un K-modello $\langle W, R, U, D, I\rangle$, un *$w$-assegnamento* è una funzione $\sigma : Var \longrightarrow U_w$ che mappa ciascuna variabile su un oggetto del dominio esterno U_w.

Dato un w-assegnamento σ e un oggetto $o \in U_w$, useremo $\sigma^{x \rhd o}$ per l'assegnamento che si comporta come σ su tutte la variabili diverse da x e che mappa x su o. Si noti che ogniqualvolta wRv un w-assegnamento è anche un v-assegnamento, (questo grazie al fatto che se wRv allora $U_w \subseteq U_v$).

Dato un K-modello $\langle W, R, U, D, I\rangle$ e un w-assegnamento σ, l'interpretazione di un generico termine t, $I^\sigma_w(t)$, è così definita: se t è una variabile $I^\sigma_w(t) = \sigma(t)$, altrimenti $I^\sigma_w(t) = I_w(t)$.

Definizione 3.29 (Soddisfazione)**.** La nozione di *soddisfazione* di una formula A in un punto w di un TK-modello $\mathscr{M} = \langle W, R, U, D, I\rangle$ sotto un w-assegnamento σ, $\sigma \models^{\mathscr{M}}_w A$, è definita per induzione sulla costruzione di A come segue:

$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} P^n t_1,\ldots,t_n$	sse	$\langle I^{\sigma}_{w}(t_1),\ldots,I^{\sigma}_{w}(t_n)\rangle \in I_w(P^n)$
$\sigma \not\models^{\mathcal{M}}_{w} \bot$		
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \neg B$	sse	$\sigma \not\models^{\mathcal{M}}_{w} B$
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} B \wedge C$	sse	$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} B$ e $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} C$
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} B \vee C$	sse	$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} B$ oppure $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} C$
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} B \to C$	sse	$\sigma \not\models^{\mathcal{M}}_{w} B$ oppure $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} C$
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \forall xB$	sse	per ogni $o \in D_w$, $\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} B$
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \exists xB$	sse	per qualche $o \in D_w$, $\sigma^{x \rhd o} \models^{\mathcal{M}}_{w} B$
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \Box B$	sse	per ogni v tale che wRv, $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{v} B$
$\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} \Diamond B$	sse	per qualche v tale che wRv, $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{v} B$

Quando ciò non creerà ambiguità, useremo $\sigma \models_w A$ al posto di $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} A$.

Definizione 3.30. Sia $\mathcal{M} = \langle W, R, U, D, I\rangle$ e sia $w \in W$, diremo che una formula A è:

- *vera in w*, $\models^{\mathcal{M}}_{w} A$, sse per ciascun w-assegnamento σ, $\sigma \models^{\mathcal{M}}_{w} A$;
- *vera in $\mathcal{M}$*, $\mathcal{M} \models A$, sse per ciascun $w \in W$, $\models^{\mathcal{M}}_{w} A$;
- *valida su una K-struttura $\mathcal{F}$*, $\mathcal{F} \models A$, sse per ciascun K-modello $\mathcal{M}$ basato su $\mathcal{F}$, $\mathcal{M} \models A$;
- *K-valida*, $\models A$, sse per ogni K-struttura $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models A$;
- *K-conseguenza (su $\mathcal{F}$)* di un insieme di formule Γ se e solo se per ciascun punto w di ciascun modello $\mathcal{M}$ (basato su $\mathcal{F}$), se $\models^{\mathcal{M}}_{w} \{B : B \in \Gamma\}$ allora $\models^{\mathcal{M}}_{w} A$.

Diremo inoltre che $\mathcal{M}$ è un *modello per un insieme di enunciati* Δ se e solo se per qualche $w \in W$, abbiamo che $\models^{\mathcal{M}}_{w} A$ per ogni enunciato

Tabella 3.2: Alcune formule notevoli e K-struttura

Formule K-valide:	Formule non K-valide
	$\Box\forall xA \to \forall x\Box A \quad (CBF)$
	$\forall x\Box A \to \Box\forall xA \quad (BF)$
	$\exists x\Box A \to \Box\exists xA \quad (GF)$
	$\Box\exists xA \to \exists x\Box A \quad (CGF)$
	$\forall x\Box\exists y(x = y) \quad (NE)$
	$\exists x(x = j) \to \exists x\Box(x = j)$
$\forall x\Box A \wedge \exists x(x = f) \to \Box A[f/x]$	$\forall x\Box A \wedge \exists x(x = j) \to \Box A[j/x]$

A in Δ; qualora Δ sia l'insieme dei teoremi di una logica L diremo che $\mathscr{M}$ è un *modello per (la logica)* L.

Lemma 3.31. *I Lemmi che abbiamo dimostrato nel Capitolo 3.2.3 per la semantica di Tarski-Kripke valgono anche per la semantica di Kripke con la sola eccezione dei Lemmi 3.21 e 3.23. In particolare del Lemma 3.21 rimangono valide (unicamente) le seguenti implicazioni:*

1. *Se* $\sigma \models^{\mathscr{M}}_{w} A$ *allora* $\sigma \models^{\mathscr{M}}_{w} \forall xA$;
2. *Se* $\sigma \models^{\mathscr{M}}_{w} \exists xA$ *allora* $\sigma \models^{\mathscr{M}}_{w} A$.

dato che esse non dipendono dall'ipotesi che il dominio interno D_w *sia non vuoto.*

Proposizione 3.32.

1. *Lo schema BF è valido su una K-struttura se e solo se essa ha dominio decrescente.*
2. *Lo schema CBF è valido su una K-struttura se e solo se essa ha dominio crescente.*

Dimostrazione. La dimostrazione per BF è analoga a quella data nella Proposizione 3.13, basta considerare i domini interni al posto dell'universo.

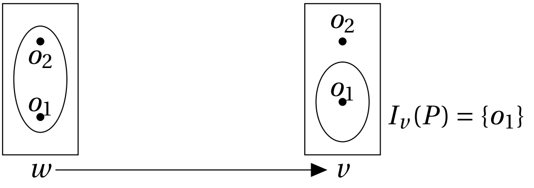
Consideriamo il caso di CBF.

$\Leftarrow$) Supponiamo, per assurdo, che esista una K-struttura $\mathscr{F}$ a domini crescenti tale che esista un mondo w di un $\mathscr{F}$-modello che falsifichi CBF. Allora ci sarà un w-assegnamento σ tale che:

1)	$\sigma \not\models_w \Box\forall x A \to \forall x \Box A$	
2)	$\sigma \models_w \Box\forall x A$	1
3)	$\sigma \not\models_w \forall x \Box A$	1
4)	$\forall v \in W (wRv \Rightarrow \forall o \in D_v(\sigma^{x \rhd o} \models_v A))$	2
5)	$o_1 \in D_w \,\&\, wRs \,\&\, \sigma^{x \rhd o_1} \not\models_s A$	3

È immediato vedere che quanto affermato in 4 è in contraddizione con quanto affermato in 5: dato che $\mathscr{F}$ ha domini crescenti, l'oggetto o_1 è nel dominio interno di s e, perciò, da 4 otteniamo che $\sigma^{x \rhd o_1} \models_s A$.

$\Rightarrow$) Procediamo per contrapposizione. Consideriamo il seguente modello basato su una K-struttura non avente domini crescenti.



Abbiamo che ogni oggetto del dominio interno di v (ovvero o_1) soddisfa P in v e, dunque, $\models_w \Box\forall x P x$. Al contempo, però, o_2 esiste in w e non soddisfa P in v, dunque $\not\models_v \forall x \Box P x$. Abbiamo così mostrato che il modello considerato falsifica un'istanza di CBF. $\Box$

Osservazione 3.33. Lo schema $GF := \exists x \Box A \to \Box \exists x A$ si comporta semanticamente come CBF: esso è valido su una K-struttura se e solo se essa ha domini crescenti.

3.3 Calcoli assiomatici

3.3.1 Logica modale quantificata classica $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$

Presentiamo ora gli assiomi e le regole di inferenza che definiscono il calcolo assiomatico $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$ per la logica modale minimale con quantificazione classica. Per comodità separiamo gli assiomi e le regole in 5 gruppi tematici.

1. Assiomi/regole modali proposizionali:

$Taut$	ogni $\mathscr{L}$-istanza di una tautologia proposizionale
K	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
$Def_{\Diamond}$	$\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$
MP	$\dfrac{A \quad A \to B}{B}$
N	$\dfrac{A}{\Box A}$

2. Assiomi/regole per i quantificatori:

UI	$\forall x A \to A$
UD	$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$, per x non libera in A
$Def_{\exists}$	$\exists x A \leftrightarrow \neg\forall x \neg A$
Gen	$\dfrac{A}{\forall x A}$

3. Riflessività dell'identità:

Rif	$t = t$

4. Assiomi/regole per i termini rigidi (variabili e costanti individuali) f, g:

Lbz	$f = g \to (A[f/x] \to A[g/x])$
ND	$f \neq g \to \Box(f \neq g)$
$Sost$	$\dfrac{A}{A[f/x]}$

5. Assiomi/regole per le descrizioni individuali j, k:

Lbz^{at}	$j = k \to (G[j/x] \to G[k/x])$, per G atomica
$NRT\text{-}Ax$	$\exists x(x = j)$

Definizione 3.34.

1. Se L è una delle estensioni della logica K presentate in Figura 2.1, allora $\mathsf{Q_=.L}$ è la sua estensione con quantificazione classica.

2. Con $\mathsf{Q_=.L+BF}$ indichiamo la logica ottenuta aggiungendo lo schema BF alla logica $\mathsf{Q_=.L}$.

3. Con L indicheremo una qualsiasi logica che estenda $\mathsf{Q_=.K}$.

Definizione 3.35.

1. Una *dimostrazione* in L è una sequenza finita di formule tale che ciascuna di esse o è un assioma di L o segue da formule che la precedono in tale sequenza via applicazione di una regola di L.

2. L'ultima formula A di una dimostrazione in L è detta *teorema* di L, $\vdash_{\mathsf{L}} A$.

Definizione 3.36. Siano A una formula e Δ un insieme di formule. Diremo che A è *derivabile* da Δ in L, $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} A$, se e solo se esiste un sottoinsieme $\{B_1, \dots, B_n\}$ finito di Δ tale che $\vdash_{\mathsf{L}} B_1 \wedge \dots \wedge B_n \to A$.

Definizione 3.37. Una regola di inferenza

$$\frac{B_1 \quad \dots \quad B_n}{A}$$

è *ammissibile* in L se e solo se, qualora tutte le sue premesse siano teoremi di L, anche la sua conclusione lo è.

Teorema 3.38. *Siano A, B formule e Δ un insieme di formule,*

$$\Delta \cup \{A\} \vdash_{\mathsf{L}} B \qquad \textit{sse} \qquad \Delta \vdash_{\mathsf{L}} A \to B$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla Definizione 3.36. □

È immediato vedere che tutti i teoremi della logica classica sono teoremi di L e che ogni regola di inferenza che sia ammissibile nella logica classica è ammissible in L. In particolare le seguenti regole sono ammissibili in L:

GP

$$\frac{A \to B}{A \to \forall x B} \qquad \text{per } x \text{ non libera in A}$$

PA

$$\frac{A \to B}{\exists x A \to B} \qquad \text{per } x \text{ non libera in B}$$

RM

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

3.3.2 *Assiomatizzare la non rigidità di un termine*

Passiamo ora ad esaminare l'assioma per i termini non rigidi *NRT-Ax*. Innanzitutto occorre notare che $\exists x(x = j)$ non può essere derivato a partire dall'assioma *UI* tramite la regola *Sost* dato che tale regola è ristretta ai soli termini rigidi. Però, come dice Garson:

> l'assenza di termini non rigidi dal sistema è una grave carenza dato che le espressioni non rigide sono così diffuse nel linguaggio naturale. Un contributo di questo libro consiste nel mostrare che un sistema adeguato all'interpretazione oggettuale con termini non rigidi può essere formulato grazie alla regola [NRT] che controlli l'interazione tra le costanti rigide c e gli altri termini t. [Garson, 2013, p. 261]

Il contributo di Garson consiste per l'appunto nel presentare un approccio alla logica modale del primo ordine con termini non rigidi e, così facendo, nel riportare all'attenzione la regola che governa i termini non rigidi introdotta da Thomason [1970]. Di fatto Garson utilizza una variante della regola di Thomason che fa uso delle costanti individuali. Il sistema di Thomason contiene la seguente regola:[2]

$$NRT \qquad \frac{A \to j \neq x}{\neg A} \quad \text{per } x \text{ non libera in } A \text{ e } x \not\equiv j$$

[2] Tale regola è chiamata $R6$ da Thomason ed $(\exists i)$ da Garson.

Di per se stessa questa regola appare strana e il suo ruolo oscuro. Ma se la si esamina dal punto di vista di un calcolo modale quantificato basato sulla logica classica con identità quale $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$, il suo ruolo si chiarisce facilmente. Infatti questa regola è equivalente all'enunciato $\exists x(j = x)$, ovvero all'assioma *NRT-Ax*. Motiviamo ora la nostra affermazione dimostrando tale equivalenza. Innanzitutto mostriamo che la regola *NRT* è ammissibile nei sistemi contenenti l'assioma *NRT-Ax*:

1)	$\vdash$	$A \rightarrow (j \neq x)$	Assunzione
2)	$\vdash$	$(j = x) \rightarrow \neg A$	$Taut$, 1
3)	$\vdash$	$\exists x(j = x) \rightarrow \neg A$	*PA*, 2
4)	$\vdash$	$\exists x(j = x)$	*NRT-Ax*
5)	$\vdash$	$\neg A$	*MP*, 3,4

Facciamo ora vedere che *NRT-Ax* è un teorema dei calcoli contenenti la regola *NRT* (e l'assioma UI):

1)	$\vdash$	$\forall x(j \neq x) \rightarrow j \neq x$	*UI*
2)	$\vdash$	$\neg\forall x(j \neq x)$	*NRT*, 1
3)	$\vdash$	$\exists x(j = x)$	$Def_\exists$, 2

In un contesto in cui valga la logica classica l'universo del discorso coincide con il dominio di quantificazione. Perciò, assumendo, come stiamo facendo, che i termini non rigidi denotino oggetti appartenenti a tale universo del discorso,[3] dobbiamo concludere che l'oggetto denotato da un arbitrario termine non rigido sia un membro del dominio di quantificazione. D'altro canto, quando passeremo a logiche modali del primo ordine basate su quantificazione libera

[3] Si noti che esistono approcci alternativi ai termini non rigidi, quali quello in [Fitting e Mendelsohn, 1998], in cui non si assume che essi debbano denotare un oggetto in ogni mondo.

l'assioma *NRT-Ax* diventerà troppo forte dato che esso implicherebbe che i termini non rigidi denotino sempre e solo oggetti esistenti (ovvero oggetti appartenenti al dominio interno del mondo in considerazione). Al contempo, continueremo ad assumere che i termini non rigidi denotino un oggetto dell'universo del discorso. Per questo motivo qualora una formula implichi che la denotazione di un dato termine non rigido sia diversa dal valore di ciascuna variabile, allora quella formula dovrà essere falsa: dovremo accettare la regola *NRT*.

Si noti inoltre che a partire dall'assioma *UI* non possiamo derivare $\forall x A \rightarrow A[j/x]$ quando j è un termine non rigido. Inoltre, dato che lavoriamo su un linguaggio che contiene il predicato di identità, dobbiamo assumere che una versione ristretta del principio di Leibniz di indiscernibilità degli identici LBZ^{at} valga per i termini non rigidi. Come notato da Garson [2013, p. 286] il principio LBZ^{at}, unitamente all'assioma classico *UI*, è sufficiente a provare una versione ristretta alle formule atomiche dell'assioma classico *UI*. Infatti, per G atomico, abbiamo la seguente derivazione di $\forall x G \rightarrow G[j/x]$:

1)	$\vdash$	$\forall x G \rightarrow G$	*UI*
2)	$\vdash$	$(\forall x G \wedge x = j) \rightarrow G$	$Taut$, 1
3)	$\vdash$	$x = j \wedge G \rightarrow G[j/x]$	Lbz^{at}
4)	$\vdash$	$(\forall x G \wedge x = j) \rightarrow G[j/x]$	$Taut$, 2, 3
5)	$\vdash$	$x = j \rightarrow (\forall x G \rightarrow G[j/x])$	$Taut$, 4
6)	$\vdash$	$\exists x(x = j) \rightarrow (\forall x G \rightarrow G[j/x])$	*PA*, 5
7)	$\vdash$	$\exists x(x = j)$	$NRT\text{-}Ax$
8)	$\vdash$	$\forall x G \rightarrow G[j/x]$	*MP*, 6, 7

Riteniamo interessante notare che su una base classica la formula $\exists x(x = j) \rightarrow (\forall x G \rightarrow G[j/x])$ è derivabile utilizzando unicamente LBZ^{at} come unico assioma sui termini non rigidi.

3.3.3 Alcuni teoremi di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$

Presentiamo ora la semplice derivazione di due famosi teoremi di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$, ovvero *CBF*:= $\Box\forall xA \to \forall x\Box A$ e *GF*:= $\exists x\Box A \to \Box\exists xA$.

1)	$\vdash$	$\forall xA \to A$	*UI*
2)	$\vdash$	$\Box\forall xA \to \Box A$	*RM*, 1
3)	$\vdash$	$\Box\forall xA \to \forall x\Box A$	*GP*, 2

1)	$\vdash$	$A \to \exists xA$	*UI*, $Def_{\exists}$
2)	$\vdash$	$\Box A \to \Box\exists xA$	*RM*, 1
3)	$\vdash$	$\exists x\Box A \to \Box\exists xA$	*PA*, 2

Passiamo ora a mostrare l'ammissiblità in $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ della seguente regola di inferenza:

$$Subs^{at} \qquad \frac{G}{G[j/x]} \qquad \text{per } G \text{ atomico e } j \text{ non rigido}$$

1)	$\vdash$	G	Assunzione
2)	$\vdash$	$\forall xG$	*Gen*, 1
3)	$\vdash$	$\forall xG \to G[j/x]$	Teorema
4)	$\vdash$	$G[j/x]$	*MP*, 2, 3

Mostriamo ora che, se P è una formula atomica, j una descrizione e f un termine rigido, allora:

$$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}} j = f \to (P[j/x] \to P[f/x])$$

1)	$\vdash$	$z = f \to (P[z/x] \to P[f/x])$	*Lbz*
2)	$\vdash$	$j = f \to (P[j/x] \to P[f/x])$	$Subs^{at}$, 1

3.3.4 Teorema di validità per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$

Teorema 3.39 (Validità di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$)**.** *Ogni teorema di* $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ *è valido rispetto alla classe di tutte le TK-struttura.*

Dimostrazione. Assumiamo che A sia un teorema di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ e dimostriamo che esso è valido su un'arbitraria TK-struttura $\mathscr{F}$ (rispetto ai modelli normali) per induzione sulla derivazione di A. In pratica è sufficiente mostrare che:

1. Ogni assioma di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ è valido su $\mathscr{F}$;
2. ogni regola di inferenza di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ preserva la validità su $\mathscr{F}$.

Consideriamo unicamente il caso di *NRT-Ax*. Supponiamo, per assurdo, che esista un mondo w di un TK-modello $\mathscr{M}$ tale che

$$\not\models_{w}^{\mathscr{M}} \exists x(x = j)$$

Da questo segueche, per ogni $o \in U_w$, $\sigma^{x \rhd o} \models_{w}^{\mathscr{M}} x \neq j$ e, dunque, che per ogni $o \in U_w, I_w(j) \neq o$. Ma questo è in contraddizione con la definizione di I_w. □

Teorema 3.40 (Validità di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{L}(+\mathsf{BF})$)**.**

- *Ogni teorema di* $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{L}$ *è valido rispetto alla classe di tutte le TK-strutture per* L.
- *Ogni teorema di* $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{L}+\mathsf{BF}$ *è valido rispetto alla classe di tutte le TK-strutture a dominio singolo per* L.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema 3.39 e dalle Proposizioni 2.7 e 3.13. □

3.3.5 Logica modale quantificata libera $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$

Il calcolo assiomatico $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ per la logica modale minimale con quantificazione libera è ottenuto a partire dagli assiomi/regole dati nel Capitolo 3.3.1 per $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ rimpiazzando l'assioma sui termini *NRT-At* (gruppo 5) con la seguente regola:

$$NRT \qquad \frac{A \to j \neq x}{\neg A} \;, \text{ per } x \text{ non libera in } A$$

e rimpiazzando gli assiomi/regole per i quantificatori (gruppo 2) con i seguenti assiomi/regole per la quantificazione libera:

UI° $\forall y(\forall x A \rightarrow A[y/x])$

UD° $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$

VQ $A \rightarrow \forall x A$, per x non libera in A

Prm $\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$

$Def_\exists$ $\exists x A \leftrightarrow \neg\forall x \neg A$

Gen $\dfrac{A}{\forall x A}$

Definizione 3.41.

1. Con $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{L}$ denotiamo l'estensione con quantificazione libera della logica modale proposizionale L (cf. Definizione 3.34).

2. Con $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{L} + \mathsf{CBF}$ ($\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{L} + \mathsf{BF}$) indichiamo la logica ottenuta aggiungendo lo schema CBF (BF) alla logica $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{L}$.

3. Con L° indicheremo una qualsiasi logica che estenda $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{L}$.

Definizione 3.42.

1. Una *dimostrazione* in L° è una sequenza finita di formule tale che ciascuna di esse è un assioma di L° oppure segue per una regola di L° da formule che la precedono in tale sequenza.

2. L'ultima formula A di una dimostrazione in L° è detta *teorema* di L°, $\vdash_{\mathsf{L}^\circ} A$.

Definizione 3.43. Siano A una formula e Δ un insieme di formule. Diremo che A è *derivabile* da Δ in L°, $\Delta \vdash_{\mathsf{L}^\circ} A$, se e solo se esiste un sottoinsieme $\{B_1, \ldots, B_n\}$ finito di Δ tale che $\vdash_{\mathsf{L}^\circ} B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \rightarrow A$.

Definizione 3.44. Una regola di inferenza

$$\frac{B_1 \quad \ldots \quad B_n}{A}$$

è *ammissibile* in L° se e solo se, qualora tutte le sue premesse siano teoremi di L°, anche la sua conclusione lo è.

Teorema 3.45. *Siano A, B formule e Δ un insieme di formule,*

$$\Delta \cup \{A\} \vdash_{\mathsf{L}} B \qquad \textit{sse} \qquad \Delta \vdash_{\mathsf{L}} A \to B$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla Definizione 3.36. □

3.3.6 Alcuni teoremi e regole ammissibili in $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$

Presentiamo ora la derivazione di alcuni teoremi di $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$.

1. $\forall y(A[y/x] \to \exists x A)$

1)	$\vdash$	$\forall y(\forall x \neg A \to \neg A[y/x]$	UI°
2)	$\vdash$	$\forall y(A[y/x] \to \neg \forall x \neg A)$	$Taut, 1$
3)	$\vdash$	$\forall y(A[y/x] \to \exists x A)$	$Def_{\exists}, 2$

2. $(f = g) \to \Box(f = g)$ per f, g termini rigidi
   NB: questo teorema è noto come *necessità dell'identità* o NI

1)	$\vdash$	$(f = g) \to (\Box(f = y)[f/y] \to \Box(f = y)[g/y])$	Lbz
2)	$\vdash$	$(f = g) \to (\Box(f = f) \to \Box(f = s))$	Def. 3.6, 1
3)	$\vdash$	$\Box(f = f) \to ((f = g) \to \Box(f = g))$	$Taut, 2$
4)	$\vdash$	$\Box(f = f)$	Rif, N
5)	$\vdash$	$(f = g) \to \Box(f = g)$	MP, 3, 4

3.3.7 Teorema di validità per $\mathsf{L}^{\circ} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$

Teorema 3.46. *Abbiamo i seguenti risultati di validità:*

1. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ *($\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{L}$) è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture (per L).*

2. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}$ *(*$\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{L}+\mathsf{CBF}$*) è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture (per* L*) con dominio (interno) crescente.*

3. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ *(*$\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{L}+\mathsf{BF}$*) è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture (per* L*) con dominio (interno) decrescente.*

4. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}+\mathsf{BF}$ *(*$\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{L}+\mathsf{CBF}+\mathsf{BF}$*) è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture (per* L*) con dominio (interno) costante.*

5. $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ *(*$\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{L}$*) è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture (per* L*) con singolo dominio crescente.*

6. $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ *(*$\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{L}+\mathsf{BF}$*) è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture (per* L*) con singolo dominio costante.*

Dimostrazione. Come per la dimostrazione del Teorema 3.39, in ciascun caso si deve mostrare che gli assiomi di L° siano validi sulle K-strutture per L° e che le regole di L° preservino la validità su tali classi di K-strutture. Esercizio. $\square$

Capitolo 4

Teoremi di completezza

La strategia che useremo in questo capitolo per dimostrare la completezza forte di varie logiche modali fa uso della costruzione del *modello canonico*.

Definizione 4.1. Una logica L è *fortemente completa* rispetto ad una classe $\mathscr{H}$ di strutture sse per ogni insieme di enunciati Γ di $\mathscr{L}$ e per ogni enunciato A di $\mathscr{L}$,

$$\text{se } \Gamma \models_{\mathscr{H}} A, \text{ allora } \Gamma \vdash_{\mathsf{L}} A$$

Che una logica sia fortemente completa rispetto ad una classe $\mathscr{H}$ lo otterremo, se lo otterremo, come conseguenza del *lemma di esistenza del modello:*

Ogni insieme L-consistente di enunciati è vero in un punto di un modello per L

unitamente al fatto ulteriore che:

tale modello è basato su una struttura della classe $\mathscr{H}$.

Infatti (ragionando per contrapposizione) se $\Gamma \nvdash_{\mathsf{L}} A$ allora (per il Lemma 4.3) $\Gamma \cup \{\neg A\}$ è L-consistente e (per il lemma di esistenza del modello) esiste un modello per L ed un punto di tale modello che rende veri tutti gli enunciati di $\Gamma \cup \{\neg A\}$, dunque tale punto rende veri tutti gli enunciati di Γ e falso A. Se poi tale modello è basato su una struttura della classe $\mathscr{H}$, allora $\Gamma \not\models_{\mathscr{H}} A$.

Quindi una dimostrazione di completezza si riduce a una dimostrazione di esistenza di un particolare modello che chiameremo *modello canonico per* L, $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$, caratterizzato da tre proprietà:

1. $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ è un modello per la logica L, ovvero ogni enunciato che sia teorema di L è vero in ogni punto di $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$;

2. ogni insieme L-consistente di enunciati (cf. Def. 4.2.1) è vero in qualche punto di $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$;

3. $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ è basato su una struttura della classe $\mathscr{H}$.

Le prime due proprietà valgono per ogni modello canonico, la terza deve essere dimostrata caso per caso. Poiché le logiche che consideriamo contengono il predicato di identità e vogliamo che i modelli canonici che andremo a costruire interpretino l'identità nel modo *standard*, costruiremo modelli canonici *normali*.

In sintesi procediamo come segue. Alcune definizioni e lemmi preliminari permetteranno di dimostrare il lemma di Lindenbaum-Henkin:

Ogni insieme di enunciati L-consistente può essere esteso a un insieme L^C-saturo per qualche insieme numerabile C di costanti.

A questo punto saremo in grado di:

1. definire un modello canonico normale per L come una opportuna classe di insiemi L'-saturi per opportune estensioni $\mathscr{L}'$ di $\mathscr{L}^C$,

2. dimostrare il lemma del diamante che è cruciale per

3. far vedere che il modello canonico è un modello per L attraverso il lemma del modello canonico.

4.1 Definizioni e lemmi preliminari

I lemmi che seguono sono presentati in maniera tale che valgano sia per le logiche modali quantificate che sono estensioni di $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ che per quelle che sono estensioni di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$. È ben vero che $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ può essere visto come una particolare estensione di $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$, però preferiamo tenere separati i due sistemi e considerare le estensioni ottenute aggiungendo principi modali ad ognuno di essi. In questa sezione useremo L per denotare una qualsiasi logica che estenda $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ o $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$ con l'aggiunta di principi modali e lasciando inalterata la base non modale (ovvero $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}$ oppure $\mathsf{Q}_{=}$).

Definizione 4.2. Sia $\mathscr{L}$ un linguaggio modale del primo ordine contenente un insieme non vuoto di costanti individuali, $Cost(\mathscr{L})$, e sia Δ un insieme di enunciati di $\mathscr{L}$. Data una logica L con linguaggio $\mathscr{L}$ diciamo che:

- Δ è L-*consistente* sse $\Delta \nvdash_{\mathsf{L}} \bot$.
- Δ è L-*chiuso* sse per ogni enunciato A, $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} A$ implica $A \in \Delta$.
- Δ è $\mathscr{L}$-*completo* sse per ogni enunciato A, $A \in \Delta$ oppure $\neg A \in \Delta$.
- Δ è $\exists$-$\mathscr{L}$-*ricco* sse per ogni formula A contenente x come unica variabile libera, se l'enunciato $\exists x A \in \Delta$, allora $A[c/x] \in \Delta$ e $\exists x(x = c) \in \Delta$ per qualche costante individuale $c \in Cost(\mathscr{L})$.
- Δ è j-$\mathscr{L}$-*ricco* sse per ogni enunciato $j = j$, se $(j = j) \in \Delta$, allora $(j = c) \in \Delta$, per qualche costante individuale $c \in Cost(\mathscr{L})$.
- Δ è L-*saturo* sse Δ è L-consistente, $\mathscr{L}$-completo, $\exists$-$\mathscr{L}$-ricco e j-$\mathscr{L}$-ricco.
- Δ è $\forall$-$\mathscr{L}$-*induttivo* sse se $A[c/x] \in \Delta$ per ciascuna costante $c \in Cost(\mathscr{L})$ tale che $\exists x(x = c) \in \Delta$ allora $\forall x A(x) \in \Delta$.

Lemma 4.3. *Sia Δ un insieme di enunciati del linguaggio di L.*

1. *Se $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} B$ e $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} \neg B$ allora Δ è L-inconsistente.*
2. *Se Δ è L-consistente e $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} B$ allora $\Delta \cup \{B\}$ è L-consistente.*

3. *Se Δ è L-consistente e $\Delta \nvdash_{\mathsf{L}} B$ allora $\Delta \cup \{\neg B\}$ è L-consistente.*

4. *Se Δ è L-consistente e $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} A_1 \vee \cdots \vee A_n$ allora, per qualche i, $1 \leq i \leq n$, $\Delta \cup \{A_i\}$ è L-consistente.*

Dimostrazione.

1. Per Modus Ponens da $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} B$ e $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} B \to \bot$.

2. Si assuma, per assurdo, che così non sia, ovvero che $\Delta \cup \{B\} \vdash_{\mathsf{L}} \bot$. Allora $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} B \to \bot$. Ma, per ipotesi, $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} B$ e, perciò, Δ sarebbe L-inconsistente, il che contraddice quanto assunto.

3. Si assuma, per assurdo, che $\Delta \cup \{\neg B\} \vdash_{\mathsf{L}} \bot$. Allora $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} \neg\neg B$, da cui $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} B$. Ma questo contraddice l'assunzione che $\Delta \nvdash_{\mathsf{L}} B$.

4. Si assuma, per assurdo, che così non sia, ovvero che $\Delta \cup \{A_i\} \vdash_{\mathsf{L}} \bot$ per ogni $i, 1 \leq i \leq n$. Allora $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} \neg A_1 \wedge \cdots \wedge \neg A_n$ e, perciò $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} \neg(A_1 \vee \cdots \vee A_n)$. Da questo e dall'ipotesi che $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} A_1 \vee \cdots \vee A_n$ segue (per 4.3.1) che Δ è L-inconsistente, il che contraddice l'ipotesi che Δ sia L-consistente.

□

Lemma 4.4.

1. *Se Δ è un insieme di enunciati L-consistente e $\mathscr{L}$-completo allora Δ è L-chiuso.*

2. *Se Δ è un insieme di enunciati L-saturo, Δ è $\forall$-$\mathscr{L}$-induttivo.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Lemma 4.5. *Sia Δ un insieme di enunciati L-consistente e $\mathscr{L}$-completo e siano A, B enunciati di $\mathscr{L}$, allora*

1.	$\Delta \vdash_{\mathsf{L}} A$	*sse*	$A \in \Delta$
2.	$A \notin \Delta$	*solo se*	$\Delta \cup \{A\}$ *è* L*-inconsistente*
3.	$A \in \Delta$ *e* $A \to B \in \Delta$	*solo se*	$B \in \Delta$
4.	$\bot \notin \Delta$		
5.	$(A \to B) \in \Delta$	*sse*	$A \notin \Delta$ *oppure* $B \in \Delta$
6.	$\neg A \in \Delta$	*sse*	$A \notin \Delta$
7.	$(A \wedge B) \in \Delta$	*sse*	$A \in \Delta$ *e* $B \in \Delta$
8.	$(A \vee B) \in \Delta$	*sse*	$A \in \Delta$ *oppure* $B \in \Delta$

Dimostrazione.

1. ($\Rightarrow$) Se, per assurdo, $A \notin \Delta$ allora, essendo Δ $\mathscr{L}$-completo, $\neg A \in \Delta$; dunque Δ sarebbe L-inconsistente.
2. Se $A \notin \Delta$ allora, essendo Δ $\mathscr{L}$-completo, $\neg A \in \Delta$. Dunque $\Delta \cup \{A\}$ è L-inconsistente.
3. Segue da 1.
4. Per definizione di L-consistenza.

5-9. Esercizio.

$\square$

Definizione 4.6. Sia Δ un insieme di enunciati, definiamo l'insieme

$$\square^{-}(\Delta) := \{A : \square A \in \Delta\}$$

Lemma 4.7. *Sia Δ un insieme L-consistente di enunciati e $\Diamond B \in \Delta$. Allora l'insieme $\square^{-}(\Delta) \cup \{B\}$ è L-consistente.*

Dimostrazione. Si assuma, per assurdo, che esista un sottoinsieme finito $\{D_1, \dots, D_n\}$ di $\square^{-}(\Delta)$ tale che:

1) $\vdash_{\mathsf{L}} \; D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n \wedge B \to \bot$

Allora

2)	$\vdash_{\mathsf{L}}$	$D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n \to (B \to \bot)$	$Taut$, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{L}}$	$D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n \to \neg B$	$Taut$, 2
4)	$\vdash_{\mathsf{L}}$	$\square D_1 \wedge \square D_2 \wedge \cdots \wedge \square D_n \to \square\neg B$	RM, 3
5)	$\Delta \vdash_{\mathsf{L}}$	$\square D_1 \wedge \cdots \wedge \square D_n$	$\{\square D_1, \dots, \square D_n\} \subseteq \Delta$
6)	$\Delta \vdash_{\mathsf{L}}$	$\square\neg B$	MP, 4, 5
7)	$\Delta \vdash_{\mathsf{L}}$	$\bot$	$\Diamond B \in \Delta$, 6

Ma questo contraddice l'ipotesi che Δ sia L-consistente. $\square$

Lemma 4.8 (Lemma delle catene)**.** *Sia* $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta_3 \subseteq \ldots$ *una catena di insiemi di enunciati. Sia inoltre* $\Delta = \bigcup_{n \in N} \Delta_n$*, allora*

$$\textit{se } \Delta \vdash_{\mathsf{L}} A \textit{ allora } \Delta_n \vdash_{\mathsf{L}} A, \textit{ per qualche } n \in N$$

Dimostrazione. Se $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} A$ allora, per qualche $\{B_1, \ldots, B_k\}$ sottoinsieme finito di Δ, $B_1, \ldots, B_k \vdash_{\mathsf{L}} A$. Per ciascun B_j, $1 \leq j \leq k$, esiste un $j^\star$ tale che $B_j \in \Delta_{j^\star}$. Si ponga $n = max\{1^\star, \ldots, k^\star\}$, allora $B_1, \ldots, B_k$ sono in Δ_n. Dunque $\Delta_n \vdash_{\mathsf{L}} A$.

□

Corollario 4.9. *Sia* $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_n \subseteq \ldots$ *una catena di enunciati. Se ciascun elemento* Δ_n *di tale catena è* L*-consistente, allora* $\bigcup_{n \in N} \Delta_n$ *è* L*-consistente.*

Dimostrazione. Se Δ è L-inconsistente allora $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} \perp$. Per il lemma delle catene (4.8) esiste dunque un indice n tale che $\Delta_n \vdash_{\mathsf{L}} \perp$, contrariamente all'ipotesi che ogni elemento della catena sia L-consistente.

□

Lemma 4.10 (Lemma sulle costanti)**.** *Sia* $\mathscr{L}^C$ *il linguaggio ottenuto estendendo* $\mathscr{L}$ *con un insieme* C *al più numerabile di nuove costanti individuali e sia* L^C *la logica* L *nel linguaggio* $\mathscr{L}^C$*.*

1. *Se* $\Delta \vdash_{\mathsf{L}^C} A$ *e nessuna costante di* C *occorre in* $\Delta \cup \{A\}$*, allora* $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} A$*.*

2. *Sia* Δ *un insieme di enunciati di* L^C *e* $\Delta \vdash_{\mathsf{L}^C} A(b)$*, ove la costante* b *non occorre in enunciati di* Δ*. Sia* z *una variabile che non occorre nella dimostrazione di* $A(b)$ *da* Δ*, allora* $\Delta \vdash_{\mathsf{L}^C} A(z)$*, ove* $A(z)$ *è ottenuta rimpiazzando ogni occorrenza di* b *con* z*.*

Dimostrazione.

1. Sia $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n, A\rangle$ una dimostrazione di A in L^C. Siano inoltre $c_1, \ldots, c_k$ tutte le costanti di C che occorrono $B_1, \ldots, B_n$. Si considerino k variabili $z_1, \ldots, z_k$ che non occorrono in suddetta dimostrazione di A e, per ciascun i tale che $1 \leq i \leq k$, si rimpiazzi ciascuna occorrenza di c_i con una occorrenza di z_i in tale dimostrazione. È facile dimostrare che la successione $\langle B_1^\star, B_2^\star, \ldots, B_n^\star, A\rangle$ ottenuta con tale rimpiazzamento è una dimostrazione di A da Δ in L.

2. Sia $\langle B_1, B_2, \ldots, B_n, A(b)\rangle$ una dimostrazione di $A(b)$ in L^C da Δ. Si consideri una variabile z che non occorre in tale dimostrazione e si consideri la successione $\langle B_1^\star, B_2^\star, \ldots, B_n^\star, A(z)\rangle$ ottenuta rimpiazzando ogni occorrenza di b con z. È facile dimostrare che la successione $\langle B_1^\star, B_2^\star, \ldots, B_n^\star, A(z)\rangle$ ottenuta con tale rimpiazzamento è una dimostrazione di $A(z)$ da Δ in L^C. □

Lemma 4.11 (Lemma di Lindenbaum-Henkin)**.** *Sia Δ un insieme L-consistente di enunciati del linguaggio $\mathscr{L}$ e sia C un insieme infinito numerabile di costanti individuali che non occorrono in $\mathscr{L}$. Esiste un insieme Γ di enunciati del linguaggio $\mathscr{L}^C$ tale che:*

1. $\Delta \subseteq \Gamma$*;*
2. Γ *è* L^C*-consistente;*
3. Γ *è* $\mathscr{L}^C$*-completo;*
4. Γ *è* $\exists$*-*$\mathscr{L}^C$*-ricco;*
5. Γ *è* j*-*$\mathscr{L}^C$*-ricco.*

Dimostrazione. Sia $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ una enumerazione di tutti gli enunciati di $\mathscr{L}^C$. Definiamo la seguente catena di insiemi di $\mathscr{L}^C$-enunciati:

- $\Gamma_0 = \Delta$;
- Per definire Γ_{n+1} si consideri l'enunciato A_n,
  1. Se $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ non è L^C-consistente, allora si pone:
  $$\Gamma_{n+1} \;=\; \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$$
  2. Se, invece, $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ è L^C-consistente, allora:
     (a) Se $A_n \equiv (\exists x B)$ per qualche B, si pone
     $$\Gamma_{n+1} \;=\; \Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \{B[b/x]\} \cup \{\exists y(y = b)\}$$
     dove b è una costante di C che non occorre né in Γ_n né in A_n;

(b) Se $A_n \equiv (j = j)$ per qualche descrizione individuale j, si pone

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \{j = b\}$$

dove b è una costante di C che non occorre né in Γ_n né in A_n;

(c) Se $A_n \not\equiv \exists x B$ per ogni B e $A_n \not\equiv (j = j)$ per ogni j, si pone

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$$

Lemma 4.12. *Per ciascun n l'insieme Γ_n è L^C-consistente.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.

Γ_0 è L^C-consistente poiché Δ lo è e per il lemma sulle costanti (4.10.1).

Assumiamo, per ipotesi di induzione, che Γ_n sia L^C-consistente, e procediamo per casi sulla definizione di Γ_{n+1}.

- Nel caso 1 sappiamo che $\Gamma_n \cup \{A\}$ è L^C-inconsistente, perciò $\Gamma_n \vdash_{\mathsf{L}^C} \neg A_n$. Per il Lemma 4.3.2, $\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$ è L^C-consistente. Perciò anche Γ_{n+1} è L^C-consistente.
- Nel caso 2(a) sappiamo che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\}$ è L^C-consistente. Assumiamo, per assurdo, che Γ_{n+1} sia L^C-inconsistente, allora

1) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \exists y(y = b) \to \neg B[b/x]$

Da cui

2)	$\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \exists y(y = z) \to \neg B[z/x]$	lemma 4.10.2 [z nuova]
3)	$\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall z(\exists y(y = z) \to \neg B[z/x])$	*Gen*, 2 [$z \notin FV(\Gamma_n, \exists x B)$]
4)	$\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall z \exists y(y = z) \to \forall z \neg B[z/x]$	UD°, 3
5)	$\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall z \exists y(y = z)$	Teorema
6)	$\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall z \neg B[z/x]$	*MP*, 4, 5

Ma questo contraddice la L^C-consistenza di $\Gamma_n \cup \{\exists x B\}$.

- Nel caso 2(b) sappiamo che $\Gamma_n \cup \{j = j\}$ è L^C-consistente. Assumiamo, per assurdo, che Γ_{n+1} non sia L^C-consistente, allora:

$$\Gamma_n \cup \{j = j]\} \cup \{j = b\} \vdash_{L^C} \perp$$

Da questo segue

1)	$\Gamma_n \cup \{j = j\} \vdash_{\mathsf{L}^C} j \neq b$	Teor. 3.45
3)	$\Gamma_n \cup \{j = j\} \vdash_{\mathsf{L}^C} j \neq z$	Lemma 4.10.2 [z nuova]
4)	$\Gamma_n \vdash_{\mathsf{L}^C} (j = j) \to (j \neq z)$	Teor. 3.45, 3
5)	$\Gamma_n \vdash_{\mathsf{L}^C} j \neq j$	*NRT*, 4

Ma questo contraddice la L^C-consistenza di $\Gamma_n \cup \{j = j\}$.

- Nel caso 2(c) Γ_{n+1} è L^C-consistente per costruzione.

Per il principio di induzione possiamo concludere che ciascun Γ_n è L^C-consistente. □

Si ponga

$$\Gamma = \bigcup_{n \in N} \Gamma_n$$

L'insieme Γ è L^C-consistente per il Corollario 4.9 (del lemma delle catene). Inoltre $\Delta \subseteq \Gamma$ (dato che $\Delta = \Gamma_0$) e Γ è $\mathscr{L}$-completo, $\exists$-$\mathscr{L}$-ricco e j-$\mathscr{L}$-ricco per costruzione. □

4.2 *Logiche senza la Barcan formula*

4.2.1 *Modelli canonici normali*

Passiamo ora a mostrare che per ogni logica L tale che $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}$ oppure $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$ e per ogni insieme L-consistente di enunciati Δ esiste un modello normale $\mathscr{M}$ per L tale che $\mathscr{M}$ è anche un modello di Δ, ovvero $\mathscr{M}$ è tale che:

1. per ogni $w \in W$ e per ogni teorema A di L, $\mathscr{M} \models_w A$;

2. esiste un $w \in W$ tale che, per ogni $B \in \Delta$, $\mathscr{M} \models_w B$.

Per fare questo introdurremo i cosiddetti *modelli canonici (normali)*. Prima di dare la definizione formale di tali modelli canonici, riteniamo utile discutere brevemente alcune delle caratteristiche più importanti di tali modelli.

Sia

$$\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, D, U, I \rangle$$

un modello canonico per la logica L.

• Innanzitutto avremo che ciascun w in W^{L} è un insieme L_w-saturo di enunciati, dove L_w è la logica L nel linguaggio $\mathscr{L}_w$ (che risulterà essere il linguaggio $\mathscr{L}$ della logica L esteso con un insieme di costanti individuali).

• La relazione di accessibilità R^c tra i mondi del modello canonico sarà definita nel modo usuale come:

$$wR^c v \quad \text{sse} \quad \Box^-(w) \subseteq v$$

Da tale definizione segue che, qualora $wR^c v$, $Cost(\mathscr{L}_w) \subseteq Cost(\mathscr{L}_v)$. Infatti se A è una qualche tautologia nel linguaggio $\mathscr{L}_w$, allora $\Box A \in w$ e, dunque, $A \in v$. D'altro canto, qualora $wR^c v$, potremo avere che $\mathscr{L}_v$ contenga costanti individuali che non sono in $\mathscr{L}_w$. Per quanto riguarda le descrizioni individuali, invece, avremo che per ogni $w, v \in W^{\mathsf{L}}$, $Descr(\mathscr{L}_w) = Descr(\mathscr{L}_v) = Descr(\mathscr{L})$.

• Dato che stiamo considerando logiche con identità, vogliamo che

($\star$) un enunciato di forma $s = t$ sia vero in un punto di un modello se e solo se t e s sono nomi dello stesso oggetto dell'universo di quel punto.

Come per la logica del primo ordine (classica oppure libera), esistono modelli per le logiche modali del primo ordine in cui gli assiomi per l'identità sono validi senza che valga la condizione ($\star$): essa vale solo su quei modelli tali che $I_w(=) = \{\langle o, o\rangle : o \in U_w\}$, ovvero sui modelli *normali*. Per ottenere un modello che soddisfi ($\star$), interpreteremo le costanti individuali sulle loro classi di equivalenza, ovvero l'interpretazione nel mondo w della costante c sara l'insieme $\{b : (b = c) \in w\}$. Tale insieme sarà denotato da $[c]_w$.

Un problema si presenterà immediatamente: la tecnica di base per la costruzione del modello canonico non permette di soddisfare entrambe le condizioni della Definizione 3.27. Per soddisfare 3.27.1, potremmo interpretare ciascuna costante individuale c in w sulla classe di equivalenza $[c]_w$ e definire U_w come l'insieme delle classi di equivalenza di costanti del linguaggio $\mathscr{L}_w$. Però, così facendo, potremmo violare la condizione 3.27.2 dato che potremmo avere che $wR^c v$ e $[c]_w \in U_w$ valgano e, allo stesso tempo, che una nuova costante c' sia in $[c]_v$ poiché $(c = c') \in v$. In questo caso violeremmo 3.27.2 dato che: $[c]_w \neq [c]_v$. Per evitare questo problema dovremo costruire modelli canonici che soddisfino la seguente condizione:

(#) Se $wR^c v$ allora $[c]_w = [c]_v$ per ciascuna costante $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$

Per fare questo, quando espanderemo un insieme L-consistente di $\mathscr{L}$-enunciati Δ per ottenere un insieme L^C-saturo Γ di $\mathscr{L}^C$-enunciati (dove C è un insieme di nuove costanti), dovremo assicurarci che valga la seguente condizione:

> nessun enunciato in cui occorrano delle costanti di C può essere in Γ a meno che tali costanti non siano (dichiarate essere) diverse da ciascuna costante in Δ.

Per soddisfare tale condizione dovremo procedere con estrema cautela nella dimostrazione del cosiddetto lemma del diamante (Lemma 4.14).

- Le descrizioni individuali non svolgeranno alcun ruolo attivo nella costruzione del modello canonico. Infatti, solamente le costanti individuali saranno prese come membri delle classi di equivalenza che useremo per costruire gli universi dei mondi di tale modello. Per ciascuna descrizione individuale j, e per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, dovremo assicurarci unicamente che esista una costante individuale c tale che $(j = c) \in w$. Nonostante ciò, j non farà parte della classe di equivalenza $[c]_w$. Dunque, per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, il dominio esterno di w sarà l'insieme delle classi di equivalenza di costanti del linguaggio $\mathscr{L}_w$, e il dominio interno di w sarà il sottoinsieme di U_w che contiene tutte e sole le classi di equivalenza di costanti che esistono in w, dove c esiste in w se e solo se $\exists x(x = c) \in w$.

Definizione 4.13 (Modello canonico normale per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$)**.** Sia $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ una logica definita sul linguaggio $\mathscr{L}$ e sia V un insieme infinito numerabile di costanti individuali tali che:

$$V \supset Cost(\mathscr{L}) \quad \text{e} \quad |V - Cost(\mathscr{L})| = \aleph_0$$

Un *modello canonico normale* per L è una quintupla

$$\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, U, D, I \rangle$$

tale che:

- W^{L} è la classe di tutti gli insiemi L_w-saturi w, dove $\mathscr{L}_w = \mathscr{L}^C$ per qualche insieme di costanti C tale che $Cost(\mathscr{L}^C) \neq \emptyset$, $C \subset V$ e $|V - Cost(\mathscr{L}^C)| = \aleph_0$;
- $wR^c v$ se e solo se
  - $\Box^-(w) \subseteq v$ e
  - per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$, $[c]_w = [c]_v$, ove $[c]_w = \{b \in Cost(\mathscr{L}_w) : (c = b) \in w\}$;
- $U_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\}$;
- $D_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}_w) \wedge \exists y(y = c) \in w\}$;
- per ciascun $w \in \mathscr{W}^{\mathsf{L}}$, l'interpretazione I_w è così definita:
  - $I_w(c) = [c]_w$;
  - $I_w(j) = [c]_w$ per qualche c tale che $(j = c) \in w$;
  - $I_w(P^n) = \{\langle [c_1]_w, ..., [c_n]_w \rangle : P^n c_1, ..., c_n \in w\}$;
  - $I_w(=) = \{\langle [c]_w, [c]_w \rangle : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\}$.

Lemma 4.14 (Lemma del diamante per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$)**.** *Se w è un insieme L_w-saturo di enunciati tale che $\Diamond A \in w$ allora esiste un insieme di enunciati v tali che:*

1. *v è L_v-saturo, dove $\mathscr{L}_v$ è $\mathscr{L}_w^{C'}$ per qualche insieme di costanti individuali C' tali che $(C' \cap Cost(\mathscr{L}_w)) = \emptyset$;*
2. *$A \in v$;*

3. *$v \supseteq \Box^{-}(w)$;*

4. *$Cost(\mathscr{L}_w) \subseteq Cost(\mathscr{L}_v)$;*

5. *per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$, $[c]_w = [c]_v$.*

Dimostrazione. Sia C un insieme non vuoto e numerabile di costanti non in $\mathscr{L}_w$, e sia $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ una enumerazione di tutti gli enunciati del linguaggio $\mathscr{L}_w^C$ in cui ciascuno di tali enunciati occorre *infinite volte*. Definiamo la seguente catena di $\mathscr{L}_w^C$-enunciati:

- $\Gamma_0 = \Box^{-}(w) \cup \{A\}$;

- Dati Γ_n e A_n, sia $\{c_1, \ldots, c_k\}$ l'insieme di tutte le costanti di C che occorrono in Γ_n.

  Distinguiamo due casi:

  1. A_n contiene costanti di C che non sono fra $\{c_1, \ldots, c_k\}$, allora poniamo

  $$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$$

  2. A_n contiene solo costanti di C che sono fra $\{c_1, \ldots, c_k\}$, allora distinguiamo due casi:

     (a) $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ non è L_w^C-consistente, allora poniamo

     $$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$$

     (b) $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ è L_w^C-consistente, allora procediamo sulla base della forma di A_n distinguendo tre sottocasi:

(i) Se$A_n \equiv \exists x B$, allora:

(i.A) Se per qualche $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$, abbiamo che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L_w^C-consistente, allora

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$$

(i.B) Se, invece, per nessuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$, abbiamo che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L_w^C-consistente, allora si considera una costante $b \in (C - \{c_1, \ldots, c_k\})$ e si pone:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[b/x]\} \cup \{\exists y(y = b)\} \cup \big\{(b \neq c) : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\big\}$$

(ii) Se $A_n \equiv (j = j)$, per qualche descrizione individuale j, allora:

(ii.A) Se per qualche $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$ l'insieme $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = c\}$ è L_w^C-consistente, allora

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = c\}$$

(ii.B) Se, invece, per nessuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$ l'insieme $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = c\}$ è L_w^C-consistente, allora si considera una costante $b \in (C - \{c_1, \ldots, c_k\})$ e si pone:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = b\} \cup \big\{(b \neq c) : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\big\}$$

(iii) Altrimenti, si pone:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$$

Lemma 4.15. *Ciascun elemento di suddetta catena è L_w^C-consistente.*

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su n.

Sappiamo che Γ_0 è L_w-consistente grazie al Lemma 4.7 e dunque, grazie al lemma sulle costanti (4.10.1), esso è anche L_w^C-consistente. Supponiamo ora, per ipotesi di induzione, che Γ_n sia L_w^C-consistente e mostriamo che anche Γ_{n+1} è L_w^C-consistente. Consideriamo solamente i casi 2(b)(i.B) e 2(b)(ii.B) e lasciamo gli altri come esercizio.

- Nel caso 2(b)(i.B) sappiamo, per ipotesi, che l'insieme $\Gamma_n \cup \{\exists x B\}$ è L_w^C-consistente. Mostriamo innanzitutto che, presa una $b \in (C - \{c_1, \ldots, c_k\})$, l'insieme $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[b/x]\} \cup \{\exists y(y = b)\}$ è L_w^C-consistente. Assumiamo, per assurdo, che così non sia, ovvero che:

1) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}_w^C} \exists y(y = b) \to \neg B[b/x]$

Da cui

2) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C_w} \exists y(y = z) \to \neg B[z/x]$ Lemma 4.10.2 [z nuova]

3) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C_w} \forall z(\exists y(y = z) \to \neg B[z/x])$ Gen, 2

4) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C_w} \forall z \exists y(y = z) \to \forall z \neg B[z/x]$ UD°, 3

5) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{L^C_w} \forall z \exists y(y = z)$ Teorema di L

6) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{L^C_w} \forall z \neg B[z/x]$ MP, 4, 5

Ma questo contraddice la L^C_w-consistenza di $\Gamma_n \cup \{\exists x B\}$. A questo punto, per mostrare che l'insieme Γ_{n+1} come definito nel caso 2(b)(i.B) è L^C_w consistente, si assume per assurdo che non lo sia, ovvero che:

1) $\Gamma_{n+1} \vdash_{\mathsf{L}^C_w} \bot$

Si ponga per brevità

$$\Gamma' := \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[b/x])\} \cup \{\exists y(y = b)\}$$

Allora da 1) otteniamo:

2) $\Gamma' \vdash_{\mathsf{L}^C_w} (b \neq c_{i_1} \wedge \ldots \wedge b \neq c_{i_j}) \to \bot$ Teor 3.45, 1
dove $c_{i_1} \ldots c_{i_j} \in Cost(\mathscr{L}_w)$.

3) $\Gamma' \vdash_{\mathsf{L}^C_w} (b = c_{i_1}) \vee \ldots \vee (b = c_{i_j})$ $Taut$, 2

Dunque, grazie al Lemma 4.3.4, anche l'insieme

$$\Gamma' \cup \{b = c_{i_h}\}$$

è L^C_w-consistente, per qualche h, $1 \leq h \leq j$. Da questo, però, segue che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c_{i_h}/x]\} \cup \{\exists y(y = c_{i_h})\}$ è L^C_w-consistente e ciò contraddice l'ipotesi secondo cui per nessuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$ l'insieme $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L^C_w-consistente. Possiamo dunque concludere che Γ_{n+1} è L^C_w-consistente.

- Passiamo ora al caso 2(b)(ii.B). L'ipotesi del caso in questione è che per nessuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$ l'insieme $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = c\}$ è L^C_w-consistente.

Assumiamo, per assurdo, che per ogni $b \in (C - \{c_1, \ldots, c_k\})$, l'insieme $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{(j = b)\}$ non sia L_w^C-consistente. Esisteranno allora $B_1, \ldots, B_m$ in Γ_n tali che:

1) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} B_1 \wedge \cdots \wedge B_m \wedge (j = j) \wedge (j = b) \rightarrow \perp$

Da cui:

2) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} B_1 \wedge \cdots \wedge B_m \wedge (j = j) \rightarrow (j \neq b)$ — *Taut*, 1

3) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} B_1 \wedge \cdots \wedge B_m \wedge (j = j) \rightarrow (j \neq x)$ — Lemma 4.10.2, 2 [x nuova]

4) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} B_1 \wedge \cdots \wedge B_m \wedge (j = j) \rightarrow \perp$ — *NRT*, 3

Ma questo contraddice l'ipotesi che $\Gamma_n \cup \{j = j\}$ sia L_w^C-consistente.

Si assuma ora, sempre per assurdo, che l'insieme:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = b\} \cup \big\{(b \neq c) : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\big\}$$

non sia L_w^C-consistente. Da questo, per il Teorema 3.45, segue immediatamente che esistono costanti $c_{i_1}, \ldots, c_{i_j} \in Cost(\mathscr{L}_w)$ tali che:

1) $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = b\} \vdash_{\mathsf{L}_w^C} \bigwedge_{k=1}^{j} b \neq c_{i_k} \rightarrow \perp$

2) $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = b\} \vdash_{L_w^C} \bigvee_{k=1}^{j} b = c_{i_k}$ — *Taut*, 1

Dunque, per il Lemma 4.3.4, per qualche c_{i_h}, l'insieme $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = b\} \cup \{b = c_{i_h}\}$ è L_w^C-consistente, da cui anche $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = c_{i_h}\}$ è L_w^C-consistente. Ma questo contraddice l'ipotesi che non esista alcuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$ tale che $\Gamma_n \cup \{j = j\} \cup \{j = c\}$ sia L_w^C-consistente. Possiamo dunque concludere che l'insieme Γ_{n+1} definito nel caso 2(b)(ii.B) è L_w^C-consistente. □

Possiamo allora porre

$$v = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

Infatti, grazie al Corollario 4.9 del lemma delle catene, sappiamo che tale insieme v è L_w^C-consistente.

Sia inoltre $C' \subseteq C$ l'insieme di tutte le costanti di C occorrenti negli enunciati in v. Definiamo il linguaggio $\mathscr{L}_v$ come $\mathscr{L}_w \cup C'$.

Mostriamo ora che v è $\mathscr{L}_v$-completo (cf. Definizione 4.2). Sia B un enunciato di $\mathscr{L}_v$ in cui occorrono le costanti $c_1, \ldots, c_n$ di C'. Mostriamo che $B \in v$ oppure $\neg B \in v$. Per ciascun c_j, $1 \leq j \leq n$, esiste un indice $j^\star$ tale che c_j occorre in qualche enunciato in $\Gamma_{j^\star}$. Si ponga $q = max\{1^\star, \ldots, n^\star\}$. Ciascuna costante in $c_1, \ldots, c_n$ occorre in Γ_q. Dato che ciascun enunciato della enumerazione $A_0, A_1, \ldots$ degli $\mathscr{L}_w^C$-enunciati da cui siamo partiti occorre infinite tante volte in tale sequenza, siamo certi che $B \equiv A_m$ per qualche $m > q$. Dunque $B \in \Gamma_{m+1}$ oppure $\neg B \in \Gamma_{m+1}$. Perciò, v è $\mathscr{L}_v$-completo dato che uno tra B e $\neg B$ occorre in v.

Inoltre, possiamo facilmente mostrare che v è anche $\exists$-$\mathscr{L}_v$-ricco. Infatti se $\exists x B \in v$, allora esiste un indice q tale che ogni costante occorrente in $\exists x B$ è in Γ_q. Inoltre possiamo supporre che $\exists x B \equiv A_m$ per qualche $m > q$ (di nuovo grazie alla presenza di infinite copie di $\exists x B$ nella enumerazione degli $\mathscr{L}_w^C$-enunciati). Dunque, per costruzione, per qualche $b \in C'$, abbiamo che $B[b/x] \in \Gamma_{m+1}$ e $\exists y(y = b) \in \Gamma_{m+1}$. Possiamo, perciò concludere che v è $\exists$-$\mathscr{L}_v$-ricco dato che, per qualche $b \in C', B[b/x] \in v$ e $\exists y(y = b) \in v$.

Analogamente è facile mostrare che v è j-$\mathscr{L}_v$-ricco (esercizio).

Abbiamo così dimostrato il punto 1 del lemma del diamante. I punti 2, 3, e 4 valgono per costruzione. Dobbiamo ora mostrare che vale anche il punto 5, ovvero che $[c]_w = [c]_v$ per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$. Innanzitutto abbiamo che $[c]_w \subseteq [c]_v$. Infatti, se $b \in [c]_w$, allora $(b = c) \in w$ e, dunque, $\Box(b = c) \in w$ grazie a NI. Dunque $(b = c) \in v$, da cui $b \in [c]_v$. Per mostrare che $[c]_v \subseteq [c]_w$ si assuma, per assurdo, che ci sia una qualche costante b tale che $b \in [c]_v$ e $b \notin [c]_w$, con $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$. Se $b \in Cost(\mathscr{L}_w)$, allora $(b \neq c) \in w$ e, per ND, anche $\Box(b \neq c) \in w$. Da questo otteniamo che $(b \neq c) \in v$, ma questo contraddice $b \in [c]_v$. Se, invece, $b \in (\mathscr{L}_v - \mathscr{L}_w)$ allora, per costruzione, $(b \neq c) \in v$ e questo contraddice l'ipotesi che $b \in [c]_v$. Dunque $[c]_v \subseteq [c]_w$. Possiamo così concludere che $[c]_w = [c]_v$ per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$. □

Lemma 4.16. *Modelli canonici per* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}$. *esistono e sono basati su K-strutture a domini interni variabili ed esterni crescenti.*

Dimostrazione. L'insieme W^L è non vuoto grazie al lemma di Lindenbaum-Henkin (4.11) e al fatto che l'insieme vuoto è L^C-consistente.

L'insieme U non è vuoto poiché non lo è l'insieme di costanti C; quindi, per ogni w, U_w non è vuoto. Per i punti 4 e 5 del lemma del diamante (4.14) i domini esterni sono crescenti. $D_w \subseteq U_w$ per definizione di D_w. Infine, l modello canonico è un modello normale grazie alla definizione di interpretazione dell'identità. $\square$

Lemma 4.17. *Le costanti individuali sono designatori rigidi nei modelli canonici, ovvero:*

$$\sigma \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} A[c/x] \quad sse \quad \sigma^{x \rhd [c]_w} \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} A$$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza di A. Consideriamo solamente due casi particolari e lasciamo i rimanenti come esercizio.

$\sigma^{x \rhd [c]_w} \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} Px$	sse	Def. 3.11
$\langle I_w^{\sigma^{x \rhd [c]_w}}(x)\rangle \in I_w(P)$	sse	$I_w(c) = [c]_w = \sigma^{x \rhd [c]_w}(x)$
$\langle I_w(c)\rangle \in I_w(P)$	sse	Def. 3.11
$\sigma \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} Pc$		

$\sigma^{x \rhd [c]_w} \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} \Box Px$	sse	Def. 3.11
per ogni v t.c. $wR^c v$, $\sigma^{x \rhd [c]_w} \models_v^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} Px$	sse	$[c]_w = [c]_v$ $(c \in \mathscr{L}_w)$
per ogni v t.c. $wR^c v$, $\sigma^{x \rhd [c]_v} \models_v^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} Px$	sse	I.I.
per ogni v t.c. $wR^c v$, $\sigma \models_v^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} Pc$	sse	Def. 3.11
$\sigma \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} \Box Pc$		

$\square$

Lemma 4.18 (Lemma del modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}$)**.** *Sia $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ un modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq Q^\circ_=.K$. Per ogni $w \in W^{\mathsf{L}}$, per ogni enunciato A di $\mathscr{L}_w$ e per ogni w-assegnamento σ*

$$\sigma \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} A \quad sse \quad A \in w$$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza dell'enunciato A.
Se $A \equiv \bot$, allora, banalmente, $A \notin w$ dato che w è L_w-consistente.
Se $A \equiv P^n c_1, \ldots, c_n$ allora

$\sigma \models_w^{\mathcal{M}^{\mathsf{L}}} P^n c_1, \dots, c_n$	sse	Def. 3.11
$\langle I_w^\sigma(c_1), \dots, I_w^\sigma(c_n) \rangle \in I_w^\sigma(P^n)$	sse	$I_w^\sigma(c_i) = [c_i]_w$
$\langle [c_1]_w, \dots, [c_n]_w \rangle \in I_w^\sigma(P^n)$	sse	definizione di I_w (Def. 4.13)
$P^n c_1, \dots, c_n \in w$		

Se $A \equiv (B \to C)$ allora

$\sigma \models_w^{\mathcal{M}^{\mathsf{L}}} B \to C$	sse	Def. 3.11
$\sigma \not\models_w^{\mathcal{M}^{\mathsf{L}}} B$ oppure $\sigma \models_w^{\mathcal{M}^{\mathsf{L}}} C$	sse	I.I.
$B \notin w$ oppure $C \in w$	sse	Lemma 4.5
$(B \to C) \in w$		

Se $A \equiv \Box B$ allora, per l'implicazione da sinistra verso destra abbiamo:

$\sigma \not\models_w^{\mathcal{M}^{\mathsf{L}}} \Box B$	sse	Def. 3.11
esiste un v tale che $wR^c v$ e $\sigma \not\models_v^{\mathcal{M}^{\mathsf{L}}} B$	sse	I.I.
esiste un v tale che $wR^c v$ e $B \notin v$	solo se	definizione di R^c
$\Box B \notin w$		

Per l'altra direzione, invece, abbiamo:

$\Box B \notin w$	sse	$\mathcal{L}_w$-comp. e $Def_\Diamond$
$\Diamond \neg B \in w$	solo se	Lemma 4.14
esiste v t.c. $\Box^-(w) \cup \{\neg B\} \in v$	sse	costruzione di R^c
esiste v t.c. $wR^c v$ e $\{\neg B\} \in v$	sse	I.I.
esiste v t.c. $wR^c v$ e $\sigma \not\models_v^{\mathcal{M}^{\mathsf{L}}} B$	sse	Def. 3.11
$\sigma \not\models_w^{\mathcal{M}^{\mathsf{L}}} \Box B$		

Se $A \equiv \forall x B$ allora

$\sigma \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} \forall x B$	sse	Def. 3.11
per ogni $[c]_w \in D_w$, $\sigma^{x \rhd [c]} \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} B$	sse	Lemma 4.17
per ogni $[c]_w \in D_w$, $\sigma \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} B[c/x]$	sse	I.I.
per ogni $[c]_w \in D_w$, $B[c/x] \in w$	sse	Def. di D_w (4.13)
$\forall c \in \mathscr{L}_w(\exists x(x=c) \in w \to B[c/x] \in w)$	sse	$\forall$-$\mathscr{L}_w$-induttività
$\forall x B \in w$		

I rimanenti casi sono lasciati come esercizio. □

4.2.2 *Completezza di* $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ *e di alcune sue estensioni*

Teorema 4.19 (Esistenza di K-modelli normali)**.** *Sia* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$. *Per ciascun insieme* L*-consistente di enunciati* Δ *esiste un modello normale di* Δ *che è anche un modello di* L *basato su una K-struttura.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ un modello canonico normale per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ costruito a partire da un insieme numerabile di costanti V che non occorrono in Δ. Per il Lemma 4.11 di Lindembaum-Henkin esiste un insieme L^{C}-saturo w che estende Δ, per qualche $C \subset V$ con $|V - C| = \aleph_0$. Dunque $w \in W^{\mathsf{L}}$ e, per il lemma del modello canonico (4.18), $\mathscr{M}^{\mathsf{L}} \models_w \Delta$. Inoltre, per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, $\{A : \vdash_{\mathsf{L}} A\} \subseteq w$, ovvero $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ è un modello della logica L. $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ è basato su una K-struttura a domini interni variabili ed esterni crescenti grazie al Lemma 4.16. □

Teorema 4.20. *La logica* $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le K-strutture.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema 4.19 poiché ogni K-struttura è una struttura per $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$. □

Teorema 4.21. *La logica* $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{CBF}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le K-strutture a domini interni crescenti.*

Dimostrazione. Facciamo vedere che $\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}} \forall x \Box \exists y(x = y)$:

1)	$\vdash_{\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}} \forall x \exists y(x = y)$	Teorema
2)	$\vdash_{\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}} \Box \forall x \exists y(x = y)$	N, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}} \Box \forall x \exists y(x = y) \to \forall x \Box \exists y(x = y)$	CBF
4)	$\vdash_{\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}} \forall x \Box \exists y(x = y)$	MP, 2, 3

Sia $\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, U, D, I \rangle$ un modello canonico normale per la logica $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}$. Mostriamo che se $wR^c v$ allora $D_w \subseteq D_v$. Assumiamo che $[c]_w \in D_w$. Da questo, per definizione di $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$, segue $\exists x(x = c) \in D_w$. Inoltre $\forall x \Box \exists y(x = y) \in w$ dato che è un teorema di $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{CBF}$. Essendo w deduttivamente chiuso, anche $\Box \exists y(c = y) \in w$ e, dato che $wR^c v$, $\exists y(c = y) \in v$. Da questo abbiamo che $[c]_v \in D_v$. Inoltre, essendo $c \in \mathscr{L}_w$, $[c]_v = [c]_w$ per definizione di modello canonico normale. Possiamo perciò concludere che $[c]_w \in D_v$. $\Box$

Teorema 4.22.

- $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{D}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture seriali (e a domini interni crescenti);*
- $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{T}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive (e a domini interni crescenti);*
- $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K4}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture transitive (e a domini interni crescenti);*
- $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{S4}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive e transitive (e a domini interni crescenti).*

Dimostrazione. Per ciascuna logica L considerata nel teorema dobbiamo mostrare che il modello canonico $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ è basato su una K-struttura nella classe appropriata.

Se $D := \Diamond \top$ è un assioma di L, possiamo mostrare che R^c è seriale come segue. Preso un qualsiasi $w \in W^{\mathsf{L}}$ sappiamo che $\Diamond \top \in w$, dunque, per il Lemma 4.14 (del diamante) e per la definizione di R^c, esiste un $v \in W^{\mathsf{L}}$ tale che $wR^c v$.

Se $T := \Box A \to A$ è un assioma di L, allora è immediato vedere che, per ogni $w \in W^{\mathsf{L}}$, $wR^c w$ dato che, se qualche enunciato di forma $\Box A$

è in w allora, essendo w deduttivamente chiuso, anche A deve essere in w.

Infine, se $4 := \Box A \to \Box\Box A$ è un assioma di L dobbiamo mostrare che R^c è transitiva. Si considerino $w, v, u \in W^{\mathsf{L}}$ tali che $wR^c v$ e $vR^c u$. Se un qualche enunciato della forma $\Box A$ è in w allora, per chiusura deduttiva, anche $\Box\Box A \in w$. Perciò $\Box A \in v$ e, dunque, $A \in u$. Questo è sufficiente per concludere che $wR^c u$, ovvero che R^c è transitiva. $\Box$

4.2.3 *Completezza di* $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$ *e di alcune sue estensioni*

La completezza di $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$ si può ottenere come caso particolare della completezza per $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}$. Essendo la sua dimostrazione estremamente più semplice di quella per $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}$, vale la pena indicarne i passi fondamentali.

Definizione 4.23 (Modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$)**.** Sia $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$. Un *modello canonico normale* per L è una quadrupla $\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, U, I\rangle$ tale che:

- W^{L} è la classe di tutti gli insiemi w L_w-saturi, ove $\mathscr{L}_w = \mathscr{L}^C$ per qualche insieme C di costanti tale che $Cost(\mathscr{L}^C) \neq \emptyset$, $C \subset V$ e $|V - Cost(\mathscr{L}^C)| = \aleph_0$
- $wR^c v$ se e solo se
  - $\Box^-(w) \subseteq v$ e
  - per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$, $[c]_w = [c]_v$, dove per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, $[c]_w = \{b \in Cost(\mathscr{L}_w) : (c = b) \in w\}$;
- $U_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\}$;
- per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, l'interpretazione I_w è così definita:
  - $I_w(c) = [c]_w$;
  - $I_w(j) = [c]_w$ per qualche c tale che $(j = c) \in w$;
  - $I_w(P^n) = \{\langle [c_1]_w, ..., [c_n]_w\rangle : P^n c_1, ..., c_n \in w\}$;
  - $I_w(=) = \{\langle [c]_w, [c]_w\rangle : c \in Cost(\mathscr{L}_w\}$.

Lemma 4.24 (Lemma del diamante per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$)**.** *Sia* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$. *Se* w *è un insieme* L_w*-saturo di enunciati e* $\Diamond A \in w$*, allora esiste un insieme di enunciati* v *tale che:*

1. *v è L_v-saturo, ove $\mathscr{L}_v$ è $\mathscr{L}_w^C$ per qualche insieme C di costanti individuali tale che* $(C \cap Cost(\mathscr{L}_w)) = \emptyset$*;*

2. *$A \in v$;*

3. *$\Box^-(w) \subseteq v$;*

4. *$Cost(\mathscr{L}_w) \subseteq Cost(\mathscr{L}_v)$;*

5. *per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$, $[c]_w = [c]_v$.*

Dimostrazione. Sia C un insieme non vuoto e numerabile di costanti non in $\mathscr{L}_w$, e sia $A_0, A_1, \ldots A_n, A_{n+1} \ldots$ una enumerazione di tutti gli enunciati del linguaggio $\mathscr{L}_w^C$ in cui ciascuno di tali enunciati occorre *infinite volte*. Definiamo la seguente catena di $\mathscr{L}_w^C$-enunciati:

- $\Gamma_0 = \Box^-(w) \cup \{A\}$;

- Dati Γ_n e A_n, sia $\{c_1, \ldots, c_k\}$ l'insieme di tutte le costanti di C che occorrono in Γ_n.

  Distinguiamo due casi:

  1. A_n contiene costanti di C che non sono fra $\{c_1, \ldots, c_k\}$, allora poniamo

  $$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$$

  2. A_n contiene solo costanti di C che sono fra $\{c_1, \ldots, c_k\}$, allora distinguiamo due casi:

     (a) $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ non è L_w^C-consistente, allora poniamo

     $$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$$

     (b) $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ è L_w^C-consistente, allora procediamo sulla base della forma di A_n distinguendo tre sottocasi:

(i) Se$A_n \equiv \exists x B$, allora:

(i.A) Se per qualche $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$, abbiamo che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\}$ è L_w^C-consistente, allora

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\}$$

(i.B) Se, invece, per nessuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \dots, c_k\}$, abbiamo che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\}$ è L_w^C-consistente, allora si considera una costante $b \in (C - \{c_1, \dots, c_k\})$ e si pone:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[b/x]\} \cup \big\{(b \neq c) : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\big\}$$

(ii) Altrimenti, si pone:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$$

A questo punto possiamo procedere come per il Lemma 4.14. □

Osservazione 4.25. Non occorre considerare il caso $A_n \equiv (j = j)$, poiché $\exists x(x = j)$ è assioma di $Q_=.K$ quindi grazie al caso 2.(i) l'insieme v contiene un enunciato del tipo $(j = c)$ per qualche $c \in Cost(\mathscr{L}_v)$.

Vale l'analogo del Lemma 4.16, ovvero

Teorema 4.26. *Modelli canonici per* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$ *esistono e sono basati su TK-strutture a universi crescenti.*

Teorema 4.27 (Esistenza di TK-modelli normali)**.** *Sia* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$. *Per ciascun insieme* L*-consistente di enunciati* Δ *esiste un modello di* Δ *che è anche un modello di* L*, è normale ed è basato su una TK-struttura.*

Dimostrazione. Come per il Lemma 4.19. □

Teorema 4.28. *La logica* $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le TK-strutture.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema 4.27. □

Teorema 4.29.

- $\mathsf{Q}_=.\mathsf{D}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture seriali;*
- $\mathsf{Q}_=.\mathsf{T}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive;*
- $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K4}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture transitive;*
- $\mathsf{Q}_=.\mathsf{S4}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive e transitive.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 4.22. □

Osservazione 4.30. Si consideri la logica $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}$, dove $B := A \to \Box\Diamond A$, o una sua estensione. Sappiamo che B corrisponde semanticamente alla simmetria della relazione di accessibilità (cf. Proposizione 2.7). È possibile provare che un modello canonico $\mathscr{M}^{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}}$ è un modello per la logica $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}$. Ma, per come abbiamo fin qui costruito i modelli canonici, non è possibile mostrare che R^c sia simmetrica. Il problema è che se $wR^c v$, allora in generale abbiamo che $\mathscr{L}_w \subsetneq \mathscr{L}_v$. Perciò, se $\Box A \in v$ per qualche formula A che contenga delle costanti in $Cost(\mathscr{L}_v) - Cost(\mathscr{L}_w)$, A non può essere in w (dato che non è nel linguaggio di w). Facciamo però vedere che la formula BF è teorema di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}$. La trattazione di $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}$ sarà sviluppata nel prossimo paragrafo.

1)	$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}} \forall x \Box A \to \Box A$	UI
2)	$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}} \Diamond\forall x \Box A \to \Diamond\Box A$	$RM_{\Diamond}$, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}} \Diamond\Box A \to A$	B (contrapposto)
4)	$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}} \Diamond\forall x \Box A \to A$	$Taut$, 2, 3
5)	$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}} \Diamond\forall x \Box A \to \forall x A$	UD, 4
6)	$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}} \Box\Diamond\forall x \Box A \to \Box\forall x A$	RM, 5
7)	$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}} \forall x \Box A \to \Box\Diamond\forall x \Box A$	B
8)	$\vdash_{\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}} \forall x \Box A \to \Box\forall x A$	$Taut$, 6, 7

Analogamente, mostriamo che BF è teorema di $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}$.

1)	$\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \forall x(\forall x \Box A \to \Box A)$	Teorema di $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$
2)	$\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \Box\forall x(\forall x \Box A \to \Box A)$	N, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \forall x \Box(\forall x \Box A \to \Box A)$	CBF, 2
4)	$\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$	Teorema di K

5) $\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \forall x(\Diamond\forall x\Box A \to \Diamond\Box A)$ — $Taut, 3, 4$

6) $\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \forall x(\Diamond\forall x\Box A \to A)$ — B (contrapp.), 5

7) $\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \Diamond\forall x\Box A \to \forall x A$ — $UD^{\circ}, VQ, 6$

8) $\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \Box\Diamond\forall x\Box A \to \Box\forall x A$ — $RM, 7$

9) $\vdash_{\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}} \forall x\Box A \to \Box\forall x A$ — $Taut, B, 8$

4.3 Logiche con la Barcan formula

La formula della Barcan (BF)

$$\forall x\Box A \to \Box\forall x A$$

è valida sui modelli in cui i domini di variazione dei quantificatori sono decrescenti. Ciò significa che ,nel caso delle TK-strutture, wRv implica $U_w = U_v$ e, nel caso delle K-strutture, wRv implica $D_v \subseteq D_w$.

Fatto distintivo per ogni logica L tale che $\vdash_{\mathsf{L}} BF$ è dato dal seguente lemma, provato per la prima volta in [Thomason, 1970].

Lemma 4.31 (BF-induttività)**.** *Sia w un insieme L^C-saturo per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ ove C è un insieme al più numerabile di costanti individuali. Se $\{B_1, \ldots, B_m\}$ è un insieme finito di $\mathscr{L}^C$-enunciati tali che*

$$\Box^{-}(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F[c/x]$$

per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$ tale che $\exists y(y = c) \in w$, allora

$$\Box^{-}(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall x F$$

Dimostrazione.

Assumiamo che $\Box^{-}(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F[c/x]$, per ogni c tale che $\exists y(y = c) \in w$. Sia $B \equiv B_1 \wedge \cdots \wedge B_m$. Allora $\Box^{-}(w) \vdash_{\mathsf{L}^C} B \to F[c/x]$ per ogni $c \in Cost(\mathscr{L})$ tale che $\exists y(y = c) \in w$. Da questo segue che $w \vdash_{\mathsf{L}^C} \Box(B \to F[c/x])$, e dunque che $\Box(B \to F[c/x]) \in w$, per ogni c tale che $\exists y(y = c) \in w$.
Si prenda una variabile z che non occorra né in B né in $F[c/x]$ né

in $\forall xF$ e si consideri $\forall z\Box(B \to F[z/x])$. Poiché $\Box(B \to F[c/x]) \in w$, per tutte le c tali che $\exists y(y = c) \in w$ e w è $\forall$-$\mathscr{L}^C$-induttivo, allora $\forall z\Box(B \to F[z/x]) \in w$ e, grazie a BF, $\Box\forall z(B \to F[z/x]) \in w$. Quindi $\Box(B \to \forall zF[z/x]) \in w$ e, perciò, $(B \to \forall zF[z/x]) \in \Box^-(w)$. Da questo otteniamo che $\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall zF[z/x]$ e possiamo concludere che $\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall xF$. $\Box$

Le K-strutture per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$ sono strutture in cui ogni mondo è corredato da due domini, quello interno e quello esterno (universo) e i quantificatori variano sul dominio interno. La formula della Barcan è valida sulle K-strutture con domini interni decrescenti. La validità della formula della Barcan non dice niente sui domini esterni, però quando andiamo a costruire i modelli canonici per logiche che contengono BF è essenziale poter utilizzare il Lemma 4.31. Ciò è possibile solo se le formule $\{B_1, \ldots, B_m\}$ appartengono al linguaggio di w; quindi, in generale, solo se i linguaggi dei vari mondi sono uguali. Ma questo implicherebbe che i domini esterni siano tutti uguali. Questo crea difficoltà allorché il linguaggio della logica contenga descrizioni individuali dato che dobbiamo assicurarci che sia possibile trovare dei testimoni per esse (affinché soddisfino la j-$\mathscr{L}$-ricchezza) senza dover introdurre nuove costanti nel linguaggio. Questo fatto ci impone di distinguere le logiche con la formula della Barcan e linguaggio senza descrizioni individuali dalle logiche con la formula della Barcan e linguaggio contenente descrizioni individuali. Nei prossimi paragrafi tratteremo i due casi separatamente.

4.3.1 $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$ *e sue estensioni*

Con $\mathscr{L}^-$ indichiamo il linguaggio $\mathscr{L}$ senza descrizioni individuali.

Definizione 4.32 (Modello canonico normale per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$)**.** Sia $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$ una logica con linguaggio $\mathscr{L}^-$ e sia C un insieme non vuoto infinito numerabile di costanti individuali tali che $C \cap Cost(\mathscr{L}) = \emptyset$. Un *modello canonico normale* per L è una quintupla

$$\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, U, D, I\rangle$$

tale che:

- W^{L} è la classe di tutti gli insiemi L^C-saturi;

- $wR^c v$ se e solo se per ogni $w, v \in W^{\mathsf{L}}$
  - $\Box^-(w) \subseteq v$
  - $\{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\} \supseteq \{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in v\}$
  - per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$,
    ove $[c]_w = \{b \in Cost(\mathscr{L}^C) : (c = b) \in w\}$;
- $U_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$;
- $D_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}^C) \wedge \exists y(y = c) \in w\}$;
- l'interpretazione I_w è così definita:
  - $I_w(c) = [c]_w$
  - $I_w(P^n) = \{\langle [c_1]_w, ..., [c_n]_w \rangle : P^n c_1, ..., c_n \in w\}$
  - $I_w(=) = \{\langle [c]_w, [c]_w \rangle : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$.

Lemma 4.33 (Del diamante per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$)**.** *Sia* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$ *una logica con linguaggio $\mathscr{L}^-$ e sia C un insieme non vuoto infinito numerabile di costanti individuali tali che $C \cap Cost(\mathscr{L}) = \emptyset$. Se w è un insieme L^C-saturo di enunciati tale che $\Diamond A \in w$ allora esiste un insieme di enunciati v tali che:*

1. *v è L^C-saturo;*
2. *$A \in v$;*
3. *$v \supseteq \Box^-(w)$;*
4. *$\{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\} \supseteq \{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in v\}$;*
5. *per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$.*

Dimostrazione. Sia $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ una enumerazione di tutti gli enunciati del linguaggio $\mathscr{L}^C$. Definiamo la seguente catena di $\mathscr{L}^C$-enunciati:

1. $\Gamma_0 = \Box^-(w) \cup \{A\}$;

2. Siano dati Γ_n e A_n. Vogliamo definire Γ_{n+1}.

   (a) Se $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ non è L^C-consistente, allora

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$$

   (b) Se, invece, $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ è L^C-consistente, allora procediamo sulla base della forma di A_n distinguendo due sottocasi:

(i) Se $A_n \equiv \exists x B$, allora:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$$

ove $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$ è tale che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L^C-consistente.

(ii) Se $A_n \not\equiv (\exists x B)$ per ogni B, allora

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$$

Lemma 4.34. *Ciascun elemento Γ_n di suddetta catena è L^C-consistente.*

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su n.
Γ_0 è L^C-consistente grazie al Lemma 4.7. Supponiamo ora, per ipotesi di induzione, che Γ_n sia L^C-consistente e mostriamo che anche Γ_{n+1} è L^C-consistente. Consideriamo solamente il caso 2(b)(i) e lasciamo gli altri come esercizio. Nel caso 2(b)(i) sappiamo per ipotesi che l'insieme $\Gamma_n \cup \{\exists x B\}$ è L^C-consistente. Dobbiamo mostrare che esiste sempre una costante $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$ tale che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L^C-consistente. Assumiamo, per assurdo, che per nessuna $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$ l'insieme $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ sia L^C-consistente. Allora, per ciascuna tale c, abbiamo:

1) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \exists y(y = c) \to \neg B[c/x]$

Ma $\Gamma_n \cup \{\exists x B\}$ non è altro che $\Box^-(w)$ più un insieme finito di enunciati, quindi, per il Lemma 4.31, abbiamo che:

2) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall x(\exists y(y = x) \to \neg B)$

3) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall x \exists y(y = x) \to \forall x \neg B$ $\qquad UD^\circ, 2$

4) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall x \exists y(y = x)$ $\qquad$ Teorema di $\mathsf{Q}^\circ_=$

5) $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \vdash_{\mathsf{L}^C} \forall x \neg B$ $\qquad MP, 3, 4$

Ma questo contraddice l'ipotesi che l'insieme $\Gamma_n \cup \{\exists x B\}$ sia L^C-consistente. Possiamo allora concludere che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L^C-consistente per almeno una $c \in Cost(\mathcal{L}^C)$. □

Possiamo dunque porre

$$v = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

Infatti, grazie al Corollario 4.9 del lemma delle catene, sappiamo che tale insieme è L^C-consistente.

I punti 1-4 del lemma valgono per costruzione. Quanto al punto 5, per ogni costante $c \in Cost(\mathcal{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$ grazie al fatto che il linguaggio di v è lo stesso del linguaggio di w e $a = b \to \Box(a = b)$ e $a \neq b \to \Box(a \neq b)$ sono teoremi di $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$. □

Lemma 4.35. *Modelli canonici normali per* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$ *esistono e sono basati su K-strutture a domini interni decrescenti ed esterni costanti.*

Dimostrazione. L'insieme W^L non è vuoto grazie al lemma di Lindenbaum-Henkin (4.11) e al fatto che l'insieme vuoto è L^C-consistente. L'insieme U non è vuoto poiché non lo è l'insieme di costanti C; quindi, per ogni w, U_w non è vuoto. L'insieme delle costanti di ogni mondo è lo stesso, e coincide con $Cost(\mathcal{L}^C)$. Inoltre per il lemma del diamante (4.33.5), per ogni $w, v \in W^{\mathsf{L}}$, $U_w = U_v$, quindi i domini esterni sono uguali. $D_w \subseteq U_w$ per definizione di D_w. Infine, per il lemma del diamante (4.33.4), se $wR^C v$ allora $\{c \in Cost(\mathcal{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\} \supseteq \{c \in Cost(\mathcal{L}^C) : \exists x(x = c) \in v\}$. Quindi se $wR^c v$, allora $D_w \supseteq D_v$ (ovvero i domini interni sono decrescenti). Il modello canonico è un modello normale grazie alla definizione di interpretazione. □

Lemma 4.36 (Lemma del modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$)**.** *Sia $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ un modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$. Per ogni $w \in W^{\mathsf{L}}$, per ogni enunciato A di $\mathscr{L}^C$ e per ogni w-assegnamento σ*

$$\sigma \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} A \quad sse \quad A \in w$$

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Lemma 4.18 e fa uso del lemma del diamante (4.33), del fatto che le costanti sono designatori rigidi (Lemma 4.17) e che ogni insieme L^C-saturo è $\forall$-$\mathscr{L}$-induttivo (Lemma 4.4). □

Teorema 4.37 (Esistenza di K-modelli per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$)**.** *Sia $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$. Per ciascun insieme L-consistente di enunciati Δ esiste un modello normale di Δ che è anche un modello per L basato su una K-struttura a domini interni decrescenti ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ un modello canonico normale per una logica $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ costruito a partire da un insieme numerabile di costanti C che non occorrono in Δ. Per il Lemma 4.11 di Lindembaum-Henkin esiste un insieme L^C-saturo w che estende Δ. Dunque $w \in W^{\mathsf{L}}$ e, per il lemma del modello canonico (4.36), $\mathscr{M}^{\mathsf{L}} \models_w \Delta$. Inoltre, per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, $\{A : \vdash_{\mathsf{L}} A\} \subseteq w$, ovvero $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ è un modello della logica L. Infine, $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ è basato su una K-struttura a domini interni decrescenti ed esterni costanti per il Lemma 4.35. □

Teorema 4.38. *La logica $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ è completa rispetto alla classe delle K-strutture a domini interni decrescenti ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Lemma 4.37 poiché ogni K-struttura a domini interni decrescenti ed esterni costanti è una struttura per $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$. □

Teorema 4.39. $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}+\mathsf{CBF}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le K-strutture a domini interni costanti ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 4.21. □

Teorema 4.40.

1. $\mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{D}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture seriali a domini interni decrescenti (costanti) ed esterni costanti.*

2. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{T}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive a domini interni decrescenti (costanti) ed esterni costanti.*

3. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K4}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture transitive a domini interni decrescenti (costanti) ed esterni costanti.*

4. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{S4}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive e transitive a domini interni decrescenti (costanti) ed esterni costanti.*

5. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive e simmetriche a domini interni costanti ed esterni costanti.*

6. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{S5}+\mathsf{CBF}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive, transitive e simmetriche a domini interni costanti ed esterni costanti.*

4.3.2 $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *e sue estensioni*

Quando si considerano logiche che estendono $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ il cui linguaggio contiene descrizioni individuali, dobbiamo assumere una regola più forte di NRT, che chiameremo $\Box$-NRT, e riformulare definizioni e lemmi utilizzati per dimostrare la completezza di $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$.

$\Box$-NRT:

$$\frac{A_0 \to \Box(A_1 \to \cdots \to \Box(A_k \to j \neq x)\ldots)}{A_0 \to \Box(A_1 \to \cdots \to \Box(A_k \to j \neq j)\ldots)} \quad x \text{ non libera in } A_0,\ldots,A_k$$

Quando $k=0$, otteniamo la regola NRT.

Teorema 4.41 (Validità di $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{L}+\mathsf{BF}+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$)**.** *Ogni teorema di* $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{L}+\mathsf{BF}+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è valido rispetto alla classe di tutte le K-strutture per* L *a dominio interno decrescente e dominio esterno costante.*

Dimostrazione. Mostriamo unicamente che la seguente istanza di $\Box$-NRT:

$$\frac{A_0 \to \Box(A_1 \to (\Box(A_2 \to j \neq x)))}{A_0 \to \Box(A_1 \to (\Box(A_2 \to j \neq j)))} \quad x \notin A_0, A_1, A_2$$

preserva la validità sulle K-strutture a domini esterni costanti.

Per assurdo, supponiamo $\mathscr{M}$ sia basato su una K-struttura a dominio esterno costante e sia tale che

1) $\models^{\mathscr{M}}_{w} A_0 \to \Box(A_1 \to (\Box(A_2 \to j \neq x)))$

e

2) $\not\models^{\mathscr{M}}_{w} A_0 \to \Box(A_1 \to (\Box(A_2 \to j \neq j)))$

Da 2 segue che esiste un v tale che wR^2v (ovvero v è accessibile in due passi da w) e un w-assegnamento σ tale che $\sigma \models^{\mathscr{M}}_{v} j = j$. Si consideri un v-assegnamento τ tale che $\tau(x) = I_v(j)$. Dato che i domini esterni sono costanti, τ è anche un w assegnamento e, perciò, da 1 otteniamo che $\tau(x) \neq I_v(j)$. Ma questo contraddice il fatto che $\tau(x) = I_v(j)$. $\Box$

Definizione 4.42. Sia Δ un insieme di enunciati del linguaggio $\mathscr{L}$.

- Δ è *j-$\Diamond$-$\mathscr{L}$-ricco* sse

  se $F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = j)\ldots) \in \Delta$ allora

  $F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = c)\ldots) \in \Delta$ per qualche $c \in Cost(\mathscr{L})$

- Δ è *j-$\Box$-$\mathscr{L}$-induttivo* sse

  se $F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c)\ldots) \in \Delta$ per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L})$, allora $F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j)\ldots) \in \Delta$

- Δ è *j-L-saturo* sse Δ è L-consistente, $\mathscr{L}$-completo, $\exists$-$\mathscr{L}$-ricco e j-$\Diamond$-$\mathscr{L}$-ricco.

Lemma 4.43. *Sia Δ un insieme di enunciati j-L-saturo. Allora Δ è j-$\Box$-$\mathscr{L}$-induttivo.*

Dimostrazione. Supponiamo che $F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c)\ldots) \in \Delta$ per ogni costante $c \in Cost(\mathscr{L})$ e che $F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j)\ldots) \notin \Delta$. Essendo Δ $\mathscr{L}$-completo, $F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = j)\ldots) \in \Delta$. Ma Δ è j-$\Diamond$- $\mathscr{L}$-ricco, quindi per qualche $c \in Cost(\mathscr{L})$, $F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = c)\ldots) \in \Delta$. Questo contraddice la L-consistenza di Δ poichè $F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c)\ldots) \in \Delta$ per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$. $\Box$

Lemma 4.44 (Di Lindenbaum-Henkin per logiche con $\Box$-NRT)**.** *Sia Δ un insieme L-consistente e sia C un insieme non vuoto infinito numerabile di costanti che non occorrono in $\mathscr{L}$. Allora esiste un insieme Γ di enunciati di $\mathscr{L}^C$ tale che*

1. $\Delta \subseteq \Gamma$;
2. Γ *è* L^C*-consistente;*
3. Γ *è* $\mathscr{L}^C$*-completo;*
4. Γ *è* $\exists$-$\mathscr{L}^C$*-ricco;*
5. Γ *è* j-$\Diamond$-$\mathscr{L}^C$*-ricco.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede come per il lemma di Lindenbaum-Henkin 4.11. Mostriamo solo il punto 5. Nella costruzione della catena, consideriamo il caso 2(b) in cui $A_n \equiv F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \ldots \Diamond(F_k \wedge j = j)\ldots)$[1] e $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ è L^C-consistente. Supponiamo per assurdo che $\Gamma_n \vdash_{\mathsf{L}^C} (F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = c)\ldots)) \to \bot$ per ogni costante $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, allora
$\Delta \vdash_{\mathsf{L}^C} (G \wedge F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = c)\ldots)) \to \bot$ per ogni costante $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, ove G è la congiunzione degli enunciati di $(\Gamma_n - \Delta)$. In particolare, abbiamo che
$\Delta \vdash_{\mathsf{L}^C} G \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c^\star)\ldots)$, ove $c^\star \in C$ non occorre in G né in $F_0, \ldots, F_k, j = j$. Quindi, per qualche congiunzione D di formule di Δ, $\vdash_{\mathsf{L}^C} D \wedge G \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c^\star)\ldots)$, ove $c^\star$ non occorre in G né in $F_0, \ldots, F_k$ e neppure in D poiché $c^\star \in C$. Sia z una variabile che non occorre in quest'ultima formula, per il lemma sulle costanti (4.10.2), allora
$\vdash_{\mathsf{L}^C} D \wedge G \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq z)\ldots)$. Dunque, per la regola $\Box$-NRT, $\vdash_{\mathsf{L}^C} D \wedge G \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j)\ldots)$, da cui $\Gamma_n \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j)\ldots)$. Ma questo contraddice il fatto che $\Gamma_n + \{A_n\}$ è L^C-consistente. $\Box$

Il seguente lemma è fondamentale per le logiche con la formula della Barcan e descrizioni individuali: tale lemma avrà per i domini esterni un ruolo analogo a quello del Lemma 4.31 per i domini di quantificazione, ovvero ci permetterà di non espandere il linguaggio nella dimostrazione del lemma del diamante.

[1] Invece di $A_n \equiv (j = j)$.

Lemma 4.45. *Sia w j-L^C-saturo per* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$, *ove C è un insieme al più infinito numerabile di costanti individuali. Se $\{B_1, \ldots, B_m\}$ è un insieme finito di $\mathscr{L}^C$-enunciati tali che*

$$\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c) \ldots)$$

per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, allora

$$\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j) \ldots)$$

Dimostrazione. Supponiamo che, per ogni costante $c \in Cost(\mathscr{L})$, $\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c) \ldots)$ e quindi che $\Box^-(w) \vdash_{\mathsf{L}^C} B \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c) \ldots)$ ove $B \equiv (B_1 \wedge \cdots \wedge B_m)$. Segue che $w \vdash_{\mathsf{L}} \Box(B \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c) \ldots))$ e $w \vdash_{\mathsf{L}} \top \to \Box(B \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c) \ldots))$ Perciò $\top \to \Box(B \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c) \ldots)) \in w$ per ogni costante $c \in Cost(\mathscr{L})$, poiché w è deduttivamente chiuso (Lemma 4.4). $\top \to \Box(B \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j) \ldots)) \in w$ poiché w è j-$\Box$-$\mathscr{L}$-induttivo (Lemma 4.43). Da questo otteniamo che
$\Box(B \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j) \ldots) \in w$ e, perciò,
$B \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j) \ldots) \in \Box^-(w)$.
Segue che $\Box^-(w) \vdash_{\mathsf{L}} B \wedge F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j) \ldots)$, da cui $\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots B_m\} \vdash_{\mathsf{L}} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j) \ldots)$. $\Box$

Definizione 4.46 (Modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$)**.** Sia $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + BF + \Box\text{-}NRT$ una logica con linguaggio $\mathscr{L}$ e sia C un insieme infinito numerabile di costanti individuali tali che $C \cap Cost(\mathscr{L}) = \emptyset$. Un *modello canonico normale* per L è una quintupla

$$\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, U, D, I \rangle$$

tale che:

- W^{L} è la classe di tutti gli insiemi j-L^C-saturi,
- $wR^c v$ se e solo se per ogni $w, v \in W^{\mathsf{L}}$
  - $\Box^-(w) \subseteq v$
  - $\{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\} \supseteq \{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in v\}$

  - per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$, ove $[c]_w = \{b \in Cost(\mathscr{L}^C) : (c = b) \in w\}$;

- $U_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$;
- $D_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}^C) \wedge \exists y(y = c) \in w\}$;
- l'interpretazione I_w è così definita:
  - $I_w(c) = [c]_w$;
  - $I_w(j) = [c]_w$ per qualche c tale che $(j = c) \in w$;
  - $I_w(P^n) = \{\langle [c_1]_w, ..., [c_n]_w \rangle : P^n c_1, ..., c_n \in w\}$;
  - $I_w(=) = \{\langle [c]_w, [c]_w \rangle : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$.

Lemma 4.47 (Lemma del diamante per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$)**.** *Se w è un insieme j-L^C-saturo di enunciati tale che $\Diamond A \in w$ allora esiste un insieme di enunciati v tali che:*

1. *v è j-L^C-saturo;*
2. *$A \in v$;*
3. *$v \supseteq \Box^-(w)$;*
4. *$\{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\} \supseteq \{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\}$;*
5. *per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$;*
6. *per ogni descrizione individuale j esiste una $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$ tale che $(j = c) \in v$.*

Dimostrazione. Sia $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ una enumerazione di tutti gli enunciati del linguaggio $\mathscr{L}^C$. Definiamo la seguente catena di $\mathscr{L}^C$-enunciati:

1. $\Gamma_0 = \Box^-(w) \cup \{A\}$;
2. Siano dati Γ_n e A_n, vogliamo definire Γ_{n+1}.

   (a) Se $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ non è L^C-consistente, allora

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$$

(b) Se, invece, $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ è L^C-consistente, allora procediamo sulla base della forma di A_n distinguendo tre sottocasi:

(i) Se$A_n \equiv \exists x B$, allora:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$$

ove $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, è tale che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L^C-consistente.

(ii) Se $A_n \equiv F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = j)\ldots)$, allora:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \{F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = c)\ldots)\}$$

per qualche $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$ tale che l'insieme Γ_{n+1} risulta essere L^C-consistente.

(iii) Altrimenti,

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$$

Lemma 4.48. *Ciascun elemento di suddetta catena è L^C-consistente.*

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su n. Sappiamo che Γ_0 è L^C-consistente grazie al Lemma 4.7. Sia Γ_n L^C-consistente per ipotesi di induzione, mostriamo che allora anche l'insieme Γ_{n+1} è L^C-consistente. Il caso 2(b)(i) è identico all'analogo caso del Lemma 4.34. Dimostriamo unicamente il caso 2(b)(ii).

- Caso 2(b)(ii). Assumiamo, per assurdo, che non esista una costante c tale che $\Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \{F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge j = c)\ldots)\}$ sia L^C-consistente. Dunque $\Gamma_n \cup \{A_n\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq c)\ldots)$ per ogni $c \in \mathscr{L}^C$. Ma Γ_n è $\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\}$ per un qualche insieme finito di enunciati $\{B_1, \ldots, B_m\}$, quindi, per il Lemma 4.45, $\Gamma_n \cup \{A_n\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to j \neq j)\ldots)$ contrariamente alla L^C-consistenza di $\Gamma_n \cup \{A_n\}$. Possiamo allora facilmente mostrare che l'insieme Γ_{n+1} è L^C-consistente. □

Possiamo dunque porre

$$v = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

Infatti, grazie al Corollario 4.9 del lemma delle catene, sappiamo che tale insieme è L^C-consistente e, possiamo facilmente verificare che esso gode delle proprietà richieste (cf. Lemma 4.33). □

Lemma 4.49. *Modelli canonici normali per* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *esistono e sono basati su K-strutture a domini interni decrescenti ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.35. $\Box$

Lemma 4.50 (Del modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$)**.** *Sia* $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ *un modello canonico per* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$. *Per ogni* $w \in W^{\mathsf{L}}$, *per ogni enunciato* A *di* $\mathscr{L}^C$ *e per ogni* w*-assegnamento* σ

$$\sigma \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} A \quad \textit{sse} \quad A \in w$$

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Lemma 4.36. $\Box$

Teorema 4.51 (Esistenza di K-modelli per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$)**.** *Sia* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$. *Per ciascun insieme* L*-consistente di enunciati* Δ *esiste un modello normale di* Δ *che è anche un modello per* L *basato su una* K*-struttura a domini interni decrescenti ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.37 $\Box$

Teorema 4.52. *La logica* $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le K-strutture a domini interni decrescenti ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema 4.51. $\Box$

Teorema 4.53. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{CBF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le K-strutture a domini interni ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 4.21. $\Box$

Teorema 4.54.

1. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{D} + \mathsf{BF}(+\mathsf{CBF}) + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture seriali a domini interni decrescenti (costanti) ed esterni costanti;*

2. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{T} + \mathsf{BF}(+\mathsf{CBF}) + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive a domini interni decrescenti (costanti) ed esterni costanti;*

3. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K4}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture transitive a domini interni decrescenti (costanti) ed esterni costanti;*

4. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{S4}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive e transitive a domini interni decrescenti (costanti) ed esterni costanti;*

5. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive e simmetriche a domini interni ed esterni costanti;*

6. $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{S5}+\mathsf{CBF}+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive, transitive e simmetriche a domini interni ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 4.22. Negli ultimi due casi *BF* è omesso dagli assiomi poiché, come mostrato nell'Osservazione 4.30, è derivabile in tali logiche.

$\square$

4.3.3 $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ *e sue estensioni*

Per le logiche con *BF* basate su quantificazione classica abbiamo come teorema $\exists x(x=j)$ e, perciò, le descrizioni individuali non pongono alcun problema e possiamo procedere in modo analogo a quanto fatto nel Capitolo 4.2.3.

Definizione 4.55 (Modello canonico normale per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$)**.** Sia L una logica che estende $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ avente linguaggio $\mathscr{L}$ e C un insieme infinito numerabile di costanti.

Un *modello canonico normale* per L è una quadrupla

$$\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, U, I\rangle$$

tale che:

- W^{L} è la classe di tutti gli insiemi L^C-saturi w;
- $wR^c v$ se e solo se
  - $\Box^-(w) \subseteq v$ e

  - per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$, dove per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, $[c]_w = \{b \in Cost(\mathscr{L}^C) : (c = b) \in w\}$;

- $U_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$;

- per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, l'interpretazione I_w è così definita:

  - $I_w(c) = [c]_w$;
  - $I_w(j) = [c]_w$ per qualche c tale che $(j = c) \in w$;
  - $I_w(P^n) = \{\langle [c_1]_w, \dots, [c_n]_w \rangle : P^n c_1, \dots, c_n \in w\}$;
  - $I_w(=) = \{\langle [c]_w, [c]_w \rangle : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$.

Lemma 4.56 (Lemma del diamante per $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$)**.** *Se w è un insieme L^C-saturo di enunciati tale che $\Diamond A \in w$ allora esiste un insieme di enunciati v tali che:*

1. *v è L^C-saturo;*

2. *$A \in v$;*

3. *$v \supseteq \Box^-(w)$;*

4. *per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$.*

Dimostrazione. L'esistenza dell'insieme L^C-saturo v che estende l'insieme $\Box^-(w)$ è dovuta essenzialmente al Lemma 4.31, si veda anche il Lemma 4.33. La condizione 4 vale poiché $c_1 = c_2 \to \Box(c_1 = c_2) \in w$ e $c_1 \neq c_2 \to \Box(c_1 \neq c_2) \in w$ per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$. □

Teorema 4.57. *La logica $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$ è completa rispetto alla classe di tutte le TK-strutture a universo costante.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 4.20. □

Teorema 4.58.

- $\mathsf{Q}_=.\mathsf{D} + \mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture seriali a universo costante.*

- $\mathsf{Q}_=.\mathsf{T} + \mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive a universo costante.*

- $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K4}+\mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture transitive a universo costante.*

- $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{S4}+\mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive e transitive a universo costante.*

- $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{B}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive e simmetriche a universo costante.*

- $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{S5}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive, transitive e simmetriche a universo costante.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 4.22. $\square$

Capitolo 5

Logiche modali con operatore lambda

5.1 *Un linguaggio più espressivo*

Nei Capitoli 3 e 4 abbiamo considerato logiche modali quantificate basate su un ordinario linguaggio del primo ordine con identità esteso con gli operatori modali $\Box$ e $\Diamond$. Abbiamo anche distinto due differenti classi di termini: i cosiddetti termini rigidi (le variabili e le costanti individuali) e i termini non rigidi (le descrizioni individuali). Da un punto di vista semantico la differenza è che, fissato un modello e un assegnamento, i termini rigidi denotano lo stesso oggetto in ogni mondo (accessibile) mentre quelli non rigidi possono cambiare denotazione nel passaggio da un mondo ad un altro. Per questo motivo la verità di una formula quale $\Box Pt$ può variare a seconda che t sia rigido o meno. Da un punto di vista assiomatico una differenza tra i termini rigidi e quelli non rigidi è che la necessità dell'identità:

$$t = s \to \Box(t = s)$$

è un teorema se t e s sono entrambi termini rigidi e non è un teorema se almeno uno di essi non lo è.

Consideriamo ora il seguente enunciato:[1]

[1] L'esempio è tratto da [Quine, 1953b].

($\star$) il numero dei pianeti è necessariamente maggiore di 5.

Assumendo che la descrizione individuale j rappresenti l'espressione 'il numero dei pianeti' e che il simbolo relazionale unario P rappresenti il predicato 'essere maggiore di 5', la formalizzazione naturale di tale enunciato è:

$$\Box Pj$$

Data la definizione di soddisfazione (Def. 3.11), tale formula è vera in un mondo w se e solo se, in ciascun mondo v accessibile a partire da w, l'oggetto denotato da j in v, ovvero il numero dei pianeti in v, è maggiore di 5. Se, ad esempio, esiste un mondo accessibile a partire da w tale che $j = 3$ è vera in quel mondo, allora la formula $\Box Pj$ risulterà essere falsa in w. Allo stesso tempo, però, sembra possibile leggere l'enunciato ($\star$) come segue:

> l'oggetto denotato da 'il numero dei pianeti' è necessariamente maggiore di 5

e secondo questa lettura sembra naturale accettare che, se nel mondo w il numero dei pianeti è 9, allora, dato che in ogni mondo 9 è maggiore di 5, la formula $\Box Pj$ risulta essere vera in w. Possiamo perciò concludere che l'enunciato ($\star$), e dunque anche la formula $\Box Pj$, è semanticamente ambiguo dato che può essere interpretato in due modi diversi, ovvero può asserire (rispetto a un dato mondo w):

1. che in ogni mondo v accessibile a partire da w la formula Pj è vera; oppure

2. che in ogni mondo v accessibile a partire da w il predicato P è vero dell'oggetto denotato da j in w.

Nelle logiche modali fin qui considerate la formula $\Box Pj$ rappresenta la prima lettura dell'enunciato ($\star$) e non c'è modo di esprimere la seconda lettura se non attraverso una formula complessa quale:

$$(j = c) \land \Box Pc$$

ovvero tramite l'esplicito utilizzo di un termine rigido c al posto di j. Ma tale formalizzazione non è affatto naturale e, inoltre, non permette di esprimere ogni enunciato in cui occorrono descrizioni individuali (dato che imporremmo che ogni occorrenza di j sia interpretata nel mondo di partenza invece che nei mondi da esso accessibili). In questo capitolo estenderemo il linguaggio con l'operatore di astrazione λ per poter esprimere in maniera più soddisfacente le diverse letture di enunciati, quale ($\star$), in cui interagiscono modalità e descrizioni individuali. Tale approccio è proposto in [Stalnaker e Thomason, 1968] e sviluppato in [Fitting e Mendelsohn, 1998].

Nel lambda calcolo si usa l'operatore di astrazione λ per distinguere tra un termine $x+1$ e la funzione astratta da tale termine $\lambda x(x+1)$. Nel contesto delle logiche modali l'operatore λ può essere utilizzato per distinguere tra una formula aperta quale Px e il predicato $\lambda x Px$ astratto a partire da essa. Il punto fondamentale è che un predicato può essere astratto non solamente a partire da una formula atomica quale Px, ma anche a partire da una formula logicamente complessa e, in particolare, a partire da una formula che contiene operatori modali. Ad esempio, a partire dalla formula $\Box Px$ possiamo astrarre $\lambda x \Box Px$ che esprime il predicato 'essere necessariamente maggiore di 5'. In questo modo possiamo esprimere le due diverse letture proposte dell'enunciato ($\star$) attraverso le seguenti formule:

$$\Box(\lambda x Px.j) \qquad \text{e} \qquad \lambda x(\Box Px).j$$

che, semanticamente, verranno interpretate come proposto sopra in 1 e 2, rispettivamente. Infatti, la prima formula dice che è necessario che l'oggetto denotato da j soddisfi il predicato 'essere maggiore di 5'; dunque essa è vera in w se l'enunciato Pj è vero in ogni mondo accessibile a partire da w. La seconda formula, invece, dice che l'oggetto denotato da j soddisfa il predicato 'essere necessariamente maggiore di 5'; dunque essa è vera se in ogni mondo accessibile a partire da w il predicato 'essere maggiore di 5' è vero dell'oggetto denotato da j in w.

Si noti che, come vedremo più avanti, non ci sarà alcuna differenza tra la formula $A[t/x]$ e la formula $\lambda x A.t$ qualora t sia un termine rigido oppure qualora in A non occorrano operatori modali. Di fatto, per i soli termini rigidi, l'operatore λ può essere visto come un operatore esplicito di sostituzione che, rispetta il seguente assioma di β-conversione:

$$\lambda x.A.t \leftrightarrow A[t/x]$$

Dal punto di vista della logica modale quantificata questo assioma è perfettamente accettabile fintanto che t sia un termine rigido o fintanto che in A non occorra alcun operatore modale.[2] Esso va però bloccato quando t è una descrizione e in A occorrono degli operatori modali. In questo modo l'operatore λ ci permette di caratterizzare meglio l'interazione tra descrizioni individuali e operatori modali: esso ci permette di decidere se sia necessario prima spostarsi nei mondi accessibili per poi determinare cosa denotino le descrizioni in quei mondi o, vice versa, se sia necessario prima determinare cosa denotino le descrizioni individuali e poi spostarsi nei mondi accessibili. La soluzione che adotteremo per escludere le istanze di β-conversione in cui t è una descrizione individuale è quella di imporre che nelle formule atomiche possano occorrere solamente termini che sono designatori rigidi, ovvero le variabili e le costanti individuali. Le descrizioni potranno occorrere in una formula unicamente come termini applicati tramite l'operatore di astrazione. In questo modo l'espressione

$$\lambda x P x . j \leftrightarrow P x[j/x]$$

non è una formula (ben formata) e, dunque, non è un'istanza dell'assioma di β-conversione.[3]

5.2 Sintassi

Definizione 5.1. Un *linguaggio del primo ordine con operatore di astrazione*, $\mathscr{L}^\lambda$, contiene tutti i simboli di un linguaggio del primo ordine con identità (cf. Def. 3.1) e inoltre contiene il seguente simbolo logico:

- operatore di astrazione (astrattore): λ

Definizione 5.2. Le λ*-formule (ben formate)* sono così definite:

- $\perp$ è una λ-formula;

[2] L'approccio proposto in [Fitting e Mendelsohn, 1998] è più generale di quello qui presentato in quanto non assume che i termini non rigidi denotino (un qualche oggetto) in ciascun mondo possibile e, perciò, fa fallire la β-conversione anche rispetto alla negazione.

[3] Se non si limitasse la β-conversione l'operatore λ risulterebbe essere eliminabile; ad esempio, come sostenuto in Feys [1964], esso è eliminabile dalle logiche modali considerate da Carnap [1956].

- se P^n è un simbolo relazionale n-ario e $f_1, \dots, f_n$ sono variabili o costanti individuali, allora $P^n f_1, \dots, f_n$ è una λ-formula (atomica);

- se f e g sono variabili o costanti individuali allora $f = g$ è una λ-formula (atomica);

- se A è una λ-formula allora anche $\neg A$, $\Box A$ e $\Diamond A$ lo sono;

- se A e B sono λ-formule allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \to B)$ lo sono;

- se A è una λ-formula e x una variabile allora $\forall x A$ e $\exists x A$ sono λ-formule;

- se A è una λ-formula, x una variabile e t un termine allora $\lambda x A.t$ è una λ-formula;

- nient'altro è una λ-formula.

La variabile x è detta *vincolata* in $\forall x A$, $\exists x A$ e in $\lambda x A$, inoltre la λ-formula A è l' *ambito* del quantificatore/astrattore. Un'occorrenza di una variabile che non è vincolata da un quantificatore/astrattore è detta *libera*. Una λ-formula è un *enunciato* se non contiene variabili libere. Infine, l'occorrenza del termine t nella λ-formula $\lambda x A.t$ è detta *occorrenza applicata* da (l'operatore) λx.

Scriveremo $\lambda x y A.st$ al posto di $\lambda x \lambda y A.t.s$ e useremo le stesse abbreviazioni e metavariabili introdotte nel Capitolo 3. Inoltre ometteremo le parentesi sulla base delle usuali convenzioni (assumendo che λ leghi al pari degli altri operatori unari).

Le definizioni di lunghezza di una λ-formula, di sottoformula e di sostituzione di variabili in termini sono come quelle date nel Capitolo 3 (cf. Def. 3.3, 3.4 e 3.5) con l'aggiunta dei seguenti casi per l'operatore λ:

- $\mathsf{ln}(\lambda x A.t) = \mathsf{ln}(A) + 1$.

- $\mathsf{Sf}(\lambda x A.t) = \{\lambda x A.t\} \cup \mathsf{Sf}(\mathsf{A})$.

Definizione 5.3 (Sostituzione di variabili libere in λ-formule)**.** Con $A[f/x]$ denotiamo la λ-formula ottenuta a partire da A sostituendo ogni occorrenza libera di x con un'occorrenza di f dove f è una variabile o una costante individuale. La definizione è per induzione sulla costruzione di A ed è come in Definizione 3.6 con l'aggiunta del seguente caso per l'operatore λ:

- $(\lambda yB.s)[f/x] \equiv \begin{cases} \lambda yB.(s[f/x]) & \text{se } y \equiv x \\ \lambda y(B[f/x]).(s[f/x]) & \text{se } y \not\equiv x \text{ e } y \not\equiv f \\ \lambda z((B[z/y])[f/x]).(s[f/x]) & \text{se } y \not\equiv x \text{ e } y \equiv f \\ z \text{ non in } \forall yB \text{ né in } f & \end{cases}$

Osservazione 5.4. È importante ricordare che, a differenza di quanto fatto nel Capitolo 3 per le formule del linguaggio $\mathscr{L}$, una descrizione individuale j può occorrere in una λ-formula A solo come termine applicato di un operatore di astrazione λx, e non direttamente come uno dei *relata* di un simbolo relazionale n-ario. In conseguenza di ciò non è possibile applicare l'operazione di sostituzione per rimpiazzare le occorrenze libere di una variabile x con una descrizione individuale j perché il risultato potrebbe non essere una λ-formula. Ad esempio, se applicassimo alla λ-formula atomica Px la sostituzione $[j/x]$ otterremmo l'espressione Pj che non è una λ-formula.

5.3 Semantica

La semantica per il linguaggio $\mathscr{L}^\lambda$ è quasi identica alla semantica per il linguaggio $\mathscr{L}$. In particolare, rimangono invariate le definizioni di TK/K-struttura 3.7/3.24, di TK/K-modello 3.8/3.26, di TK/K-modello normale 3.9/3.27 e di assegnamento 3.10. La differenza principale rispetto alla semantica per il linguaggio $\mathscr{L}$ è nella definizione di soddisfazione dato che dobbiamo aggiungere una clausola di soddisfazione per l'operatore di astrazione λ.

Definizione 5.5 (Soddisfazione)**.** La nozione di *soddisfazione* di una formula A in un punto w di un K-modello $\mathscr{M} = \langle W, R, U, D, I\rangle$ sotto un w-assegnamento σ, $\sigma \models^{\mathscr{M}}_{w} A$, è definita estendendo le clausole di soddisfazione date in Definizione 3.29 (o in Definizione 3.11 per i TK-modelli) con la seguente clausola per l'operatore di astrazione λ:

$$\sigma \models^{\mathscr{M}}_{w} \lambda xB.t \qquad \text{sse} \qquad \sigma^{x \rhd I^{\sigma}_{w}(t)} \models^{\mathscr{M}}_{w} B$$

Tabella 5.1: Alcune λ- formule notevoli e TK-struttura

λ-formule TK-valide:	λ-formule non TK-valide:
$\forall x A \to \lambda x A.t$	$\forall x \Box A \to \Box \lambda x A.j$
$\lambda xy(x=y).fg \to \Box(\lambda xy\ (x=y).fg$ per f,g rigidi	$\lambda xy(x=y).ij \to \Box(\lambda xy\ (x=y).ij$
$f=g \to (\Box f=g)$ per f,g rigidi	

Definizione 5.6. Le nozioni di verità in un (punto di un) modello e di validità (su una classe di strutture) sono come nella Definizione 3.12.

Lemma 5.7. *I Lemmi sulla relazione tra sostituzioni e soddisfazione che abbiamo dimostrato nel Capitolo 3.2.3 per la semantica di Tarski-Kripke rispetto al linguaggio $\mathscr{L}$ (e nel Lemma 3.31 per la semantica di Kripke) sono validi anche rispetto al linguaggio con operatore di astrazione $\mathscr{L}^\lambda$. La uniche due differenze nelle dimostrazioni, entrambe dipendenti dal fatto che abbiamo a che fare con λ-formule invece che con formule, sono che:*

- *se A è un atomo $Pt_1,\ldots,t_n$ siamo certi che $t_1,\ldots,t_n$ siano tutti designatori rigidi (ovvero variabili o costanti individuali);*
- *nel passo induttivo avremo anche il caso in cui $A \equiv \lambda x B.t$.*

5.4 Calcoli assiomatici

Definizione 5.8 (Calcolo $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}$)**.** Il calcolo assiomatico per la logica minimale con quantificazione classica e operatore di astrazione λ è ottenuto prendendo i primi 2 gruppi di assiomi/regole per $\mathsf{Q}_=.\mathsf{K}$ (cf. Capitolo 3.3.1) e i seguenti 3 gruppi di assiomi (dove, ricordiamo, f e g sono variabili o costanti individuali e t è un termine arbitrario):

3. Riflessività dell'identità:

Rif	$f = f$

4. Assiomi per i termini rigidi:

Lbz	$f = g \to (A[f/x] \to A[g/x])$
ND	$f \neq g \to \Box(f \neq g)$

5. Assiomi/regole per l'operatore λ:

α-conv	$\lambda x A.t \leftrightarrow \lambda y A[y/x].t$, per y non in $\lambda x A.t$
β-conv	$\lambda x A.f \leftrightarrow A[f/x]$
$V\lambda$	$\lambda x A.t \leftrightarrow A$, per x non libera in A
λ-comm	$\lambda x(A \to B).t \leftrightarrow (\lambda x A.t \to \lambda x B.t)$
$\lambda\forall$-comm	$(\lambda x \forall y A.t) \leftrightarrow (\forall y \lambda x A.t)$, per $y \not\in \{x, t\}$
λ-func	$\lambda xy(x = y).tt$
λ-intr	$\dfrac{A}{\lambda x A.t}$

Definizione 5.9 (Calcolo $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K}$)**.** Il calcolo assiomatico per la logica minimale con quantificazione libera e operatore di astrazione λ è ottenuto prendendo i primi 2 gruppi di assiomi/regole per $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$ (cf. Capitolo 3.3.5) e i rimanenti 3 gruppi presentati nella Definizione 5.8.

Definizione 5.10. Indicheremo con:

1. L_{λ} una qualsiasi logica che estenda $\mathsf{Q}_{\lambda}.\mathsf{K}$;

2. $\mathsf{L}^{\circ}_{\lambda}$ una qualsiasi logica che estenda $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K}$;

3. L^{*}_{λ} una qualsiasi logica che estenda $\mathsf{Q}_{\lambda}.\mathsf{K}$ oppure $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K}$.

Le nozioni di *dimostrazione* in L^{*}_{λ}, *teorema* in L^{*}_{λ}, *derivazione* in L^{*}_{λ} e di *regola ammissibile* in L^{*}_{λ} sono definite come nel Capitolo 3.3.1. Inoltre vale il seguente teorema:

Teorema 5.11. *Siano A, B λ-formule e Δ un insieme di λ-formule,*

$$\Delta \cup \{A\} \vdash_{\mathsf{L}^{*}_{\lambda}} B \qquad \textit{sse} \qquad \Delta \vdash_{\mathsf{L}^{*}_{\lambda}} A \to B$$

Teorema 5.12 (Validità per L^{*}_{λ})**.** *Abbiamo i seguenti risultati di validità:*

1. *$\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{L}$ è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture per L.*
2. *$\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{L}+\mathsf{CBF}$ è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture per L con dominio (interno) crescente*
3. *$\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{L}+\mathsf{BF}$ è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture per L con dominio (interno) decrescente.*
4. *$\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{L}+\mathsf{CBF}+\mathsf{BF}$ è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture per L con dominio (interno) costante.*
5. *$\mathsf{Q}_{\lambda}.\mathsf{L}$ è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture per L con singolo dominio crescente (o rispetto alla classe di tutte le TK-strutture).*
6. *$\mathsf{Q}_{\lambda}.\mathsf{L}+\mathsf{BF}$ è valida rispetto alla classe di tutte le K-strutture per L con singolo dominio costante.*

Dimostrazione. Esercizio. □

5.4.1 Alcuni teoremi di L^*_{λ}

Presentiamo ora alcuni teoremi e regole ammissibili di L^*_{λ}.

1. $(\lambda x(\neg A).t) \leftrightarrow (\neg\lambda x A.t)$

1)	$\vdash_{\mathsf{L}^*_{\lambda}} \lambda x.(A \to \bot).t \leftrightarrow (\lambda x A.t \to \lambda x\bot.t)$	λ-comm
2)	$\vdash_{\mathsf{L}^*_{\lambda}} \lambda x\bot.t \leftrightarrow \bot$	$V\lambda$
3)	$\vdash_{\mathsf{L}^*_{\lambda}} \lambda x(A \to \bot).t \leftrightarrow (\lambda x A.t \to \bot)$	$Taut$, 1, 2

2. $(\lambda x(A \wedge B).t) \leftrightarrow (\lambda x A.t \wedge \lambda x B.t)$

   Esercizio.

3. $(\lambda x(A \vee B).t) \leftrightarrow (\lambda x A.t \vee \lambda x B.t)$

   Esercizio.

4. $(\lambda x \exists y A.t) \leftrightarrow (\exists y \lambda x A.t)$, per $y \notin \{x, t\}$

   Esercizio.

5. $\lambda x A.t \vee \lambda x \neg A.t$

   Esercizio.

6. $(\lambda y(f = y).t \wedge \lambda z(g = z).t) \to f = g$

1)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} f = y \wedge g = y \to f = g$	Teorema
2)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} \lambda y(f = y \wedge g = y \to f = g).t$	λ-intr, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} \lambda y(f = y \wedge g = y).t \to \lambda y(f = g).t$	λ-comm, 2
4)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} \lambda y(f = g).t \to f = g$	$V\lambda$
5)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} \lambda y(f = y \wedge g = y).t \to f = g$	$Taut$, 3, 4
6)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} (\lambda y(f = y).t \wedge \lambda y(g = y).t) \to$ $\lambda y(f = y \wedge g = y).t$	5.4.1.2
7)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} (\lambda y(f = y).t \wedge \lambda y(g = y).t) \to f = g$	$Taut$, 5, 6

7. $\lambda x(x = f).t \wedge \lambda x A.t \to A[f/x]$

1)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} x = f \wedge A[x/x] \to A[f/x]$	Lbz
2)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} \lambda x(x = f \wedge A \to A[f/x]).t$	λ-intr, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} \lambda x(x = f).t \wedge \lambda x A.t \to \lambda x(A[f/x]).t$	λ-dist, 5.4.1.2, 2
4)	$\vdash_{\mathsf{L}_\lambda^*} \lambda x(x = f).t \wedge \lambda x A.t \to A[f/x]$	$V\lambda$, 3

8. $$\frac{A \to B}{\lambda x A.t \to \lambda x B.t}$$

   Esercizio.

9. $$\frac{A}{A[f/x]}$$

Esercizio.

5.5 Risultati di completezza

Presentiamo ora i risultati di completezza per le logiche modali L^*_λ basate sul linguaggio $\mathscr{L}^\lambda$. Come fatto nel Capitolo 4 per le logiche basate sul linguaggio $\mathscr{L}$, utilizzeremo il metodo del modello canonico e considereremo prima le logiche senza BF e poi le logiche con BF. In entrambi i casi la dimostrazione sarà del tutto analoga a quella presentata nel Capitolo 4, infatti l'unica differenza sarà che, nella definizione di insieme j-$\mathscr{L}$-ricco e nella costruzione della catena di enunciati all'interno della dimostrazione dei lemmi di Lindenbaum-Henkin e del diamante, dovremo considerare λ-enunciati di forma $\lambda x(x = x).j$ invece che enunciati atomici di tipo $j = j$ (che non sono ben formati nel linguaggio $\mathscr{L}^\lambda$).

5.5.1 Logiche senza la Barcan formula

Continueremo a utilizzare le definizioni e i lemmi preliminari presentati nel Capitolo 4.1 con la sola eccezione della nozione di insieme j-$\mathscr{L}$-ricco (vedi Def. 4.2) che per il linguaggio $\mathscr{L}^\lambda$ deve essere definito come segue (il lettore può facilmente vedere come adattare il Lemma 4.11.5 e la definizione di j-$\mathscr{L}$-induttività).

Definizione 5.13. Un insieme Δ di λ-enunciati (definiti su un linguaggio $\mathscr{L}$) è *j-$\mathscr{L}$-ricco* sse se, per qualche descrizione j, l'enunciato $\lambda x(x = x).j \in \Delta$, allora $\lambda x(x = c).j \in \Delta$ per qualche costante individuale $c \in Cost(\mathscr{L})$.[4]

Lemma 5.14 (Di Lindenbaum-Henkin per L^*_λ). *Sia Δ un insieme L^*_λ-consistente e sia C un insieme non vuoto infinito numerabile di costanti che non occorrono in $\mathscr{L}^\lambda$. Allora esiste un insieme Γ di enunciati di $\mathscr{L}^C$ tale che*

1. $\Delta \subseteq \Gamma$*;*

[4] In [Fitting, 2006] la j-$\mathscr{L}$-richezza è definita a partire da una formula arbitraria di tipo $\lambda x A.j$ invece che per un atomo di identità $\lambda x(x = x).j$. Dato il Teorema di L^*_λ 5.4.1.7, le due definizioni sono equivalenti.

2. *Γ è L^C-consistente;*
3. *Γ è $\mathscr{L}^C$-completo;*
4. *Γ è $\exists$-$\mathscr{L}^C$-ricco;*
5. *Γ è j-$\mathscr{L}^C$-ricco.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.11. $\square$

Definizione 5.15 (Modello canonico per L^*_λ)**.** Sia L una logica modale quantificata definita sul linguaggio $\mathscr{L}^\lambda$ e sia V un insieme infinito numerabile di costanti individuali tali che:[5]

$$V \supset Cost(\mathscr{L}_\lambda) \quad \text{e} \quad |V - Cost(\mathscr{L}_\lambda)| = \aleph_0$$

Un *modello canonico (normale)* per L è una quintupla

$$\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^C, U, D, I\rangle$$

tale che:

- W^{L} è la classe di tutti gli insiemi L_w-saturi w, dove $\mathscr{L}_w = \mathscr{L}^C$ per qualche insieme di costanti C tali che $Cost(\mathscr{L}^C) \neq \emptyset$, $C \subset V$ e $|V - Cost(\mathscr{L}^C)| = \aleph_0$;
- $wR^c v$ se e solo se
  - $\square^-(w) \subseteq v$ e
  - per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$, $[c]_w = [c]_v$, dove, per ciascun $v \in W^L$, $[c]_v = \{b \in Cost(\mathscr{L}_v) : (c = b) \in v\}$;
- $U_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\}$;
- $D_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}_w) \wedge \exists y(y = c) \in w\}$;
- per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, l'interpretazione I_w è così definita:
  - $I_w(c) = [c]_w$;

[5] Per semplicità, non trattiamo separatamente i casi $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K}$ e $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}$. Nel caso in cui $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}$, risulta che $D_w = U_w$ per ogni $w \in W^{\mathsf{L}}$ dato che $\exists y(y = c)$ è un teorema per ogni costante individuale c.

- $I_w(j) = [c]_w$ per qualche c tale che $\lambda x(x = c).j \in w$ (per qualche variabile x);
- $I_w(P^n) = \{\langle [c_1]_w, ..., [c_n]_w \rangle : P^n c_1, ..., c_n \in w\}$;
- $I_w(=) = \{\langle [c]_w, [c]_w \rangle : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\}$.

Lemma 5.16 (Lemma del diamante per L^*_λ)**.** *Se w è un insieme L_w-saturo di λ-enunciati tale che $\Diamond A \in w$ allora esiste un inseme di λ-enunciati v tali che:*

1. *v è L_v-saturo, dove $\mathscr{L}_v$ è $\mathscr{L}^C_w$ per qualche insieme di costanti individuali C tali che $(C \cap Cost(\mathscr{L}_w)) = \emptyset$;*
2. *$A \in v$;*
3. *$v \supseteq \Box^-(w)$;*
4. *$Cost(\mathscr{L}_w) \subseteq Cost(\mathscr{L}_v)$;*
5. *per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$, $[c]_w = [c]_v$.*

Dimostrazione. Sia C un insieme non vuoto e numerabile di costanti non in $\mathscr{L}_w$, e sia $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ una enumerazione di tutti i λ-enunciati del linguaggio $\mathscr{L}^C_w$ in cui ciascuno di tali enunciati occorre *infinite volte*. Definiamo la seguente catena di $\mathscr{L}^C_w$-enunciati:

- $\Gamma_0 = \Box^-(w) \cup \{A\}$;
- Dati Γ_n e A_n, sia $\{c_1, \ldots, c_k\}$ l'insieme di tutte le costanti in C che occorrono in Γ_n. Ragioniamo per casi:

  1. Se A_n contiene costanti di C non incluse in $\{c_1, \ldots, c_k\}$

  $$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$$

  2. Altrimenti, ragioniamo nuovamente per casi:

     (a) Se, $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ non è L^C_w-consistente, allora

     $$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$$

(b) Se, invece, $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ è L_w^C-consistente, allora procediamo sulla base della forma di A_n distinguendo tre sottocasi:

(i) Se $A_n \equiv \exists x B$, allora:

(i.A) Se per qualche $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$, abbiamo che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L_w^C-consistente, allora

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$$

(i.B) Se, invece per nessuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$, abbiamo che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L_w^C-consistente, allora si considera una qualche costante $b \in (C - \{c_1, \ldots, c_k\})$ e si impone:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[b/x]\} \cup \{\exists y(y = b)\} \cup \\ \cup \left\{(b \neq c) : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\right\}.$$

(ii) Se $A_n \equiv \lambda x(x = x).j$, allora:

(ii.A) Se per qualche $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$ l'insieme $\Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\} \cup \{\lambda x(x = c).j\}$ è L_w^C-consistente, allora

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\} \cup \{\lambda x(x = c).j\}$$

(ii.B) Se, invece, per nessuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$ l'insieme $\Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\} \cup \{\lambda x(x = c).j\}$ è L_w^C-consistente, si considera una costante $b \in (C - \{c_1, \ldots, c_k\})$ e si pone:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\} \cup \{\lambda x(x = b).j\} \cup \left\{(b \neq c) : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\right\}$$

(iii) Altrimenti, si pone:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$$

Lemma 5.17. *Ciascun elemento di suddetta catena è* L_w^C*-consistente.*

Dimostrazione. La dimostrazione, per induzione su n, procede come la dimostrazione del Lemma 4.15.

Presentiamo unicamente il caso 2(b)(iiB). Assumiamo, per *reductio*, ch,e per qualche $b \in (C - \{c_1, \ldots, c_k\})$, l'insieme

$\Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\} \cup \{\lambda x(x = b).j\}$ sia L_w^C-inconsistente. Esisteranno allora $D_1, \ldots, D_m$ in Γ_n tali che:

1) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} \bigwedge_{i=1}^m D_i \wedge \lambda x(x = x).j \wedge \lambda x(x = b).j \to \bot$

Da cui:

2) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} \bigwedge_{i=1}^m D_i \wedge \lambda x(x = x).j \to \neg\lambda x(x = b).j$ — $Taut$, 1

3) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} \bigwedge_{i=1}^m D_i \wedge \lambda x(x = x).j \to \lambda x(x \neq b).j$ — Teor 5.4.1.1, 2

4) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} \bigwedge_{i=1}^m D_i \wedge \lambda x(x = x).j \to \lambda x(x \neq y).j$ — Lemma 4.10.2, 3 [y nuova]

5) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} \bigwedge_{i=1}^m D_i \wedge \lambda x(x = x).j \to \lambda xy(x \neq y).jj$ — λ-intr, λ-comm, $V\lambda$, 4

6) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} \lambda xy(x = y).jj$ — λ-func

7) $\vdash_{\mathsf{L}_w^C} \bigwedge_{i=1}^m D_i \wedge \lambda x(x = x).j \to \bot$ — $Taut$, 5, 6

Ma questo contraddice l'ipotesi che $\Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\}$ sia L_w^C-consistente.

Si assuma ora, sempre per *reductio*, che l'insieme:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\} \cup \{\lambda x(x = b).j\} \cup \left\{(b \neq c) : c \in Cost(\mathscr{L}_w)\right\}$$

non sia L_w^C-consistente. Da questo segue che esistano costanti $c_{i_1}, \ldots, c_{i_j} \in Cost(\mathscr{L}) \cup \{c_1, \ldots, c_k\}$ tali che:

1) $\Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j, \lambda x(x = b).j\} \vdash_{\mathsf{L}_w^C} \neg(\bigwedge_{h=1}^j b \neq c_{i_h})$

2) $\Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j, \lambda z(z = b).j\} \vdash_{L_w^C} \bigvee_{h=1}^j b = c_{i_h}$ — $Taut$, 1

Dunque, per il Lemma 4.3.4, per qualche c_{i_k}, l'insieme

$$\Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\} \cup \{\lambda x(x = b).j\} \cup \{(b = c_{i_k})\}$$

è L_w^C-consistente, ma questo contraddice l'ipotesi che non esista alcuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w) \cup \{c_1, \ldots, c_h\}$ tale che $\Gamma_n \cup \{\lambda x(x = x).j\} \cup \{\lambda x(x = c).j\}$ sia L_w^C-consistente. Possiamo dunque concludere che l'insieme Γ_{n+1} costruito nel caso 2(b)(ii.B) è L_w^C-consistente. □

Possiamo dunque porre

$$v = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

Infatti, grazie al Corollario 4.9 del lemma delle catene, sappiamo che tale insieme è L_w^C-consistente.

Sia inoltre $C' \subseteq C$ l'insieme di tutte le costanti in C occorrenti negli enunciati in v. Definiamo il linguaggio $\mathscr{L}_v$ come $\mathscr{L}_w \cup C'$.

A questo punto procediamo come nella dimostrazione del Lemma 4.14 per mostrare che valgono i punti 1 (v è $\mathscr{L}_v$-saturo) e 5 del lemma del diamante (nuovamente, i punti 2, 3 e 4 valgono per costruzione). □

Lemma 5.18. *Modelli canonici per L_λ° (L_λ) esistono e sono basati su K-strutture a domini interni variabili ed esterni crescenti (TK-strutture).*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.16. □

Lemma 5.19. *Le costanti individuali sono designatori rigidi nei modelli canonici, ovvero:*

$$\sigma \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} A[c/x] \quad sse \quad \sigma^{x \triangleright [c]_w} \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} A$$

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.17. □

Lemma 5.20 (Lemma del modello canonico per L_λ^*)**.** *Sia $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ un modello canonico per L, con $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_\lambda^\circ.\mathsf{K}$ oppure $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}$. Per ogni $w \in W^L$, per ogni λ-enunciato A di $\mathscr{L}_w$ e per ogni w-assegnamento σ*

$$\sigma \models_w^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}} A \quad sse \quad A \in w$$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza dell'enunciato A. Presentiamo unicamente il caso in cui $A \equiv \lambda x B.t$ (con $I_w^\sigma(t) = [c]_w$ per una data costante c) e rimandiamo il lettore alla dimostrazione del Lemma 4.18 per i rimanenti casi.

$\sigma \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} \lambda x B.t$	sse	Def. 5.5
$\sigma^{x \rhd I^{\sigma}_{w}(t)} \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} B$	sse	$I^{\sigma}_{w}(t) = [c]_w$
$\sigma^{x \rhd [c]_w} \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} B$	sse	Lemma 5.19
$\sigma \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} B[c/x]$	sse	I.I.
$B[c/x] \in w$	sse	$I^{\sigma}_{w}(t) = [c]_w$
$B[c/x] \in w$ e $\lambda z(z = c).t \in w$	sse	w è j-$\mathscr{L}_w$-ricco (Def. 5.13)+ 5.4.1.7
$\lambda x B.t \in w$		

□

Teorema 5.21 (Esistenza di (T)K-modelli)**.**

- *Per ciascun insieme* L°*-consistente di* λ*-enunciati* Δ *esiste un K-modello (di* Δ*) che è anche un K-modello di* L°*.*

- *Per ciascun insieme* L*-consistente di* λ*-enunciati* Δ *esiste un TK-modello (di* Δ*) che è anche un TK-modello di* L*.*

Dimostrazione. Identica alla dimostrazione del Teorema 4.19. □

Teorema 5.22.

- $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le K-strutture;*

- $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{CBF}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le K-strutture a domini crescenti;*

- $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{D}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture seriali (e a domini crescenti);*

- $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{T}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive (e a domini crescenti);*

- $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K4}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture transitive (e a domini crescenti);*

- $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{S4}(+\mathsf{CBF})$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive e transitive (e a domini crescenti).*

Dimostrazione. Analoga alle dimostrazioni di completezza date nel Capitolo 4.2.2. □

Teorema 5.23.

- $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le TK-strutture;*
- $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{D}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture seriali;*
- $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{T}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive;*
- $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K4}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture transitive;*
- $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{S4}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive e transitive.*

Dimostrazione. Analoga alle dimostrazioni di completezza date nel Capitolo 4.2.3. □

5.5.2 *Logiche che estendono* $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$

Lemma 5.24. *Sia w un mondo del modello canonico $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ oppure $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$, allora, se $\{B_1,\ldots,B_n\}$ è un insieme finito di $\mathscr{L}_w$-enunciati tali che*

$$\Box^-(w)\cup\{B_1,\ldots,B_n\}\vdash_{\mathsf{L}_w} A[c/x]$$

per ciascun c tale che $\exists y(y=c)\in w$, allora

$$\Box^-(w)\cup\{B_1,\ldots,B_n\}\vdash_{\mathsf{L}_w} \forall x A$$

Dimostrazione. Identica alla dimostrazione del Lemma 4.31. □

Per le logiche con BF basate su quantificazione classica abbiamo come teorema $\exists x\lambda y(y=x).j$ e, perciò, le descrizioni individuali non pongono alcun problema e possiamo procedere in modo analogo a quanto fatto nel Capitolo 4.3.3.

Definizione 5.25 (Modello canonico per $\mathsf{L}\supseteq\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$)**.** Sia L una logica che estende $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ avente linguaggio $\mathscr{L}$ e sia C un insieme infinito numerabile di costanti.

Un *modello canonico (normale)* per L è una quadrupla

$$\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, U, I\rangle$$

tale che:

- W^{L} è la classe di tutti gli insiemi L^C-saturi w;
- $wR^c v$ se e solo se
  - $\Box^-(w) \subseteq v$ e
  - per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$, dove per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, $[c]_w = \{b \in Cost(\mathscr{L}^C) : (c = b) \in w\}$;
- $U_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$;
- per ciascun $w \in W^{\mathsf{L}}$, l'interpretazione I_w è così definita:
  - $I_w(c) = [c]_w$;
  - $I_w(j) = [c]_w$ per qualche c tale che $\lambda x(x = c).j \in w$;
  - $I_w(P^n) = \{\langle [c_1]_w, ..., [c_n]_w \rangle : P^n c_1, ..., c_n \in w\}$;
  - $I_w(=) = \{\langle [c]_w, [c]_w \rangle : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$.

Lemma 5.26 (Lemma del diamante per $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$)**.** *Se w è un insieme L^C-saturo di enunciati tale che $\Diamond A \in w$ allora esiste un insieme di enunciati v tali che:*

1. *v è L^C-saturo;*
2. *$A \in v$;*
3. *$v \supseteq \Box^-(w)$;*
4. *per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$, $[c]_w = [c]_v$.*

Dimostrazione. L'esistenza dell'insieme L^C-saturo v che estende l'insieme $\Box^-(w)$ è dovuta essenzialmente al Lemma 4.31, si veda anche il Lemma 4.56. La condizione 4 vale poiché $c_1 = c_2 \to \Box(c_1 = c_2) \in w$ e $c_1 \neq c_2 \to \Box(c_1 \neq c_2) \in w$ per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}_w)$. □

Teorema 5.27.

1. $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le TK-strutture a universo costante;*
2. $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{D} + \mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture seriali a universo costante;*

3. $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{T}+\mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive a universo costante;*

4. $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{K4}+\mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture transitive a universo costante;*

5. $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{S4}+\mathsf{BF}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive e transitive a universo costante;*

6. $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{B}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive e simmetriche a universi costanti;*

7. $\mathsf{Q}_\lambda.\mathsf{S5}$ *è completa rispetto alla classe delle TK-strutture riflessive, transitive e simmetriche a universi costanti.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione dei Teoremi 4.20 e 4.22. □

5.5.3 *Logiche che estendono* $\mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K}+\mathsf{BF}+\mathsf{j\text{-}NRT}$

Come già visto nel Capitolo 4.3.2, invece, le cose sono più complesse se consideriamo logiche $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$ dato che, per poter utilizzare il Lemma 5.24, dobbiamo assicurarci che sia possibile dimostrare il lemma del diamante senza avere bisogno di aggiungere nuove costanti per trovare il testimone ad un enunciato contenente una descrizione quale $\lambda x(x=x).j$. La soluzione di questo problema sarà del tutto analoga a quella utilizzata nel Capitolo 4.3.2 e si baserà sull'aggiunta della seguente regola:

j-NRT:

$$\frac{A_0 \to \Box(A_1 \to \cdots \to \Box(A_k \to \lambda y(y \neq x).j)\ldots)}{A_0 \to \Box(A_1 \to \cdots \to \Box(A_k \to \lambda y(y \neq y).j)\ldots)} \quad x \text{ non libera in } A_0,\ldots,A_k$$

Teorema 5.28 (Validità per $\mathsf{L}^\circ_\lambda+\mathsf{BF}+\mathsf{j\text{-}NRT}$)**.** *Se* $\mathsf{L}^\circ_\lambda+\mathsf{BF}+\mathsf{j\text{-}NRT}$ *è la logica ottenuta estendendo* $\mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{L}$ *con gli schemi* BF *e* j-NRT*, allora essa è valida rispetto alla classe di tutte le strutture per* $\mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{L}$ *con dominio interno decrescente e dominio esterno costante.*

Dimostrazione. Si veda la dimostrazione del Teorema 4.41. □

Definizione 5.29. Sia Δ un insieme di enunciati del linguaggio $\mathscr{L}$.

- Δ è j-$\Diamond$-$\mathscr{L}$-*ricco* sse

  se $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge \lambda x(x = x).j)\ldots)$ allora

  $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge \lambda x(x = c).j)\ldots)$ per qualche $c \in Cost(\mathscr{L})$

- Δ è j-$\Box$-$\mathscr{L}$-*induttivo* sse

  se $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to \lambda x(x \neq c).j)\ldots)$ per ogni $c \in Cost(\mathscr{L})$, allora

  $\Delta \vdash_{\mathsf{L}} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to \lambda x(x \neq x).j)\ldots)$

Lemma 5.30. *Sia Δ un insieme di enunciati L-consistente, $\mathscr{L}$-completo e j-$\Diamond$-$\mathscr{L}$-ricco. Allora Δ è j-$\Box$-$\mathscr{L}$-induttivo.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.43. $\Box$

Lemma 5.31 (Di Lindenbaum-Henkin per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$)**.** *Sia Δ un insieme L-consistente e sia C un insieme infinito numerabile di costanti che non occorrono in $\mathscr{L}$. Allora esiste un insieme Γ di enunciati di $\mathscr{L}^C$ tale che*

1. *$\Delta \subseteq \Gamma$;*
2. *Γ è L^C-consistente;*
3. *Γ è $\mathscr{L}^C$-completo;*
4. *Γ è $\exists$-$\mathscr{L}^C$-ricco;*
5. *Γ è j-$\Diamond$-$\mathscr{L}^C$-ricco.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.44. $\Box$

Lemma 5.32. *Sia w j-L^C-saturo per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$, ove C è un insieme al massimo infinito numerabile di costanti individuali. Se $\{B_1, \ldots, B_m\}$ è un insieme finito di $\mathscr{L}^C$-enunciati tali che*

$$\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to \lambda x(x \neq c).j)\ldots)$$

per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, allora

$$\Box^-(w) \cup \{B_1, \ldots, B_m\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to \lambda x(x \neq x).j)\ldots)$$

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.45. □

Definizione 5.33 (Modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$)**.** Sia $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ una logica con linguaggio $\mathscr{L}$ e sia C un insieme infinito numerabile di costanti individuali tali che $C \cap Cost(\mathscr{L}) = \emptyset$. Un *modello canonico normale* per L è una quintupla

$$\mathscr{M}^{\mathsf{L}} = \langle W^{\mathsf{L}}, R^c, U, D, I \rangle$$

tale che:

- W^{L} è la classe di tutti gli insiemi j-L^C-saturi;
- $wR^c v$ se e solo se per ogni $w, v \in W^{\mathsf{L}}$
  - $\Box^-(w) \subseteq v$
  - $\{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\} \supseteq \{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in v\}$
  - per ogni $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$, ove $[c]_w = \{b \in Cost(\mathscr{L}^C) : (c = b) \in w\}$;
- $U_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$;
- $D_w = \{[c]_w : c \in Cost(\mathscr{L}^C) \wedge \exists y(y = c) \in w\}$;
- l'interpretazione I_w è così definita:
  - $I_w(c) = [c]_w$
  - $I_w(j) = [c]_w$ per qualche c tale che $\lambda x(x = c).j \in w$
  - $I_w(P^n) = \{\langle [c_1]_w, \ldots, [c_n]_w \rangle : P^n c_1, \ldots, c_n \in w\}$
  - $I_w(=) = \{\langle [c]_w, [c]_w \rangle : c \in Cost(\mathscr{L}^C)\}$.

Lemma 5.34 (Lemma del diamante per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$)**.** *Sia* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$. *Se w è un insieme j-L^C-saturo di enunciati tale che $\Diamond A \in w$ allora esiste un insieme di enunciati v tali che:*

1. *v è j-L^C-saturo;*
2. *$A \in v$;*

3. *$v \supseteq \Box^-(w)$;*

4. *se wRv allora $\{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\} \supseteq \{c \in Cost(\mathscr{L}^C) : \exists x(x = c) \in w\}$;*

5. *per ciascuna $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, $[c]_w = [c]_v$.*

Dimostrazione. Sia $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$ una enumerazione di tutti gli enunciati del linguaggio $\mathscr{L}^C$. Definiamo la seguente catena di $\mathscr{L}^C$-enunciati:

1. $\Gamma_0 = \Box^-(w) \cup \{A\}$;

2. Siano dati Γ_n e A_n, vogliamo definire Γ_{n+1}.

   (a) Se $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ non è L^C-consistente, allora

   $$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$$

   (b) Se, invece, $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ è L^C-consistente, allora procediamo sulla base della forma di A_n distinguendo tre sottocasi:

(i) Se$A_n \equiv \exists x B$, allora:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$$

ove $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$, è tale che $\Gamma_n \cup \{\exists x B\} \cup \{B[c/x]\} \cup \{\exists y(y = c)\}$ è L^C-consistente.

(ii) Se $A_n \equiv F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge \lambda x(x = x).j) \ldots)$, allora:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \{F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge \lambda x(x = c).j) \ldots)\}$$

ove $c \in Cost(\mathscr{L}^C)$ è tale che l'insieme Γ_{n+1} è L^C-consistente.

(iii) Altrimenti,

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$$

Lemma 5.35. *Ciascun elemento di suddetta catena è* L^C*-consistente.*

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su n. Il caso 2(b)(i) è già stato dimostrato nel Lemma 4.34 e, dunque, è sufficiente considerare il caso 2(b)(ii).
Assumiamo, per assurdo, che non esista una costante $c \in Cost(\mathscr{L}^c)$ tale che $\Gamma_n \cup \{A_n\} \cup \{F_0 \wedge \Diamond(F_1 \wedge \cdots \wedge \Diamond(F_k \wedge \lambda x(x = c).j)\ldots)\}$ sia L^C-consistente. Dunque, per ogni $c \in \mathscr{L}^C$,
$\Gamma_n \cup \{A_n\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to \lambda x(x \neq c).j)\ldots)$.
Ma Γ_n è $\Box^-(w) \cup \{D_1, \ldots, D_m\}$ per un qualche insieme finito di enunciati $\{D_1, \ldots, D_k\}$. Per il Lemma 5.32, segue che
$\Gamma_n \cup \{A_n\} \vdash_{\mathsf{L}^C} F_0 \to \Box(F_1 \to \cdots \to \Box(F_k \to \lambda z(z \neq z).j)\ldots)$. Ma questo contraddice la L^C-consisitenza di $\Gamma_n \cup \{A_n\}$. □

Possiamo dunque porre

$$v = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

Infatti, grazie al Corollario 4.9 del lemma delle catene, sappiamo che tale insieme è L^C-consistente e possiamo facilmente verificare che esso gode delle proprietà richieste (cf. Lemma 4.14). □

Lemma 5.36. *Modelli canonici normali per* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j\text{-}NRT}$ *esistono e sono basati su K-strutture a domini interni decrescenti ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Lemma 4.35. □

Lemma 5.37 (Del modello canonico per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j\text{-}NRT}$)**.** *Sia* $\mathscr{M}^{\mathsf{L}}$ *un modello canonico per* $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j\text{-}NRT}$*. Per ogni* $w \in W^{\mathsf{L}}$*, per ogni enunciato* A *di* $\mathscr{L}^C$ *e per ogni* w*-assegnamento* σ

$$\sigma \models^{\mathscr{M}^{\mathsf{L}}}_{w} A \quad sse \quad A \in w$$

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Lemma 5.20. □

Teorema 5.38 (Esistenza di K-modelli per $\mathsf{L}^\circ \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j\text{-}NRT}$)**.** *Sia* $\mathsf{L}^\circ \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j\text{-}NRT}$*. Per ciascun insieme* L°*-consistente di* λ*-enunciati* Δ *esiste un K-modello di* Δ *a domini interni decrescenti e a domini esterni costanti che è anche un K-modello di* L°*.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 4.37. □

Teorema 5.39.

1. $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})+\mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe di tutte le K-strutture a domini interni decrescenti (costanti) e a domini esterni costanti;*
2. $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{D}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})+\mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture seriali a domini interni decrescenti (costanti) e a domini esterni costanti;*
3. $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{T}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})+\mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive a domini interni decrescenti (costanti) e a domini esterni costanti;*
4. $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K4}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})+\mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture transitive a domini interni decrescenti (costanti) e a domini esterni costanti;*
5. $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{S4}+\mathsf{BF}(+\mathsf{CBF})+\mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive e transitive a domini interni decrescenti (costanti) e a domini esterni costanti;*
6. $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{B}+\mathsf{CBF}+\mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive e simmetriche a domini interni ed esterni costanti;*
7. $\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{S5}+\mathsf{CBF}+\mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$ *è completa rispetto alla classe delle K-strutture riflessive, transitive e simmetriche a domini interni ed esterni costanti.*

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema 4.22. □

Capitolo 6

Logiche modali indiciate

6.1 Modalità de dicto *e* de re

Nel Capitolo 5 abbiamo considerato logiche modali quantificate basate su un linguaggio contenente l'operatore di astrazione λ. Questo ci ha permesso di esprimere due possibili letture di un enunciato quale 'il numero dei pianeti è maggiore di 5': la formula $\Box(\lambda x Px.j)$ può essere letta come 'è necessario che l'oggetto denotato dall'espressione "il numero dei pianeti" sia maggiore di 5'. La formula $\lambda x(\Box Px).j$, invece, può essere letta come 'l'oggetto denotato dall'espressione "il numero dei pianeti" ha neccessariamente la proprietà di essere maggiore di 5'. Nel primo caso abbiamo una cosiddetta lettura *de dicto* (si dice di un enunciato che è necessariamente vero) e nel secondo una lettura *de re* (si dice di un oggetto che ha necessariamente una certa proprietà).

Se lo scopo è quello di definire l'approccio più generale possibile alle logiche modali quantificate, è ragionevole sostenere che il modo in cui le formule modali *de re* vengono trattate nelle usuali logiche modali (con o senza λ) è insoddisfacente poiché basato sulla relazione di 'identità attraverso mondi': per vedere se un certo oggetto o ha necessariamente una certa proprietà $\lambda x Px$ in un mondo w si va nei mondi accessibili a partire da w e si controlla se in quei mondi lo stesso oggetto o gode di tale proprietà o meno. Ma questo ha senso unicamente se l'oggetto o continua a esistere (quantomeno nel dominio esterno) in tutti i mondi accessibili a partire da w. Se così non fosse, infatti, non sarebbe né vero né falso che o gode della proprietà $\lambda x P x$ in quei mondi (accessibili) in cui o non esiste. Per questo motivo nella definizione di (T)K-frame abbiamo imposto che wRv implichi che $U_w \subseteq U_v$. Ma, almeno per certe interpretazioni degli operatori modali, ad esempio quella temporale, non è ragionevole ritenere che un oggetto debba automaticamente continuare a esistere in tutti i mondi (accessibili): per vedere se un oggetto gode o meno necessariamente di una qualche proprietà dovrebbe essere sufficiente considerare i soli mondi accessibili in cui tale oggetto continua a esistere; senza però assumere che questi coincidano con l'insieme di tutti i mondi accessibili. Dunque l'assunzione che gli oggetti esistano in tutti i mondi accessibili a partire da un dato mondo pare essere restrittiva. Inoltre una conseguenza di tale assunzione è che, pur essendo a prima vista mutualmente indipendenti, le formule

$$CBF := \Box\forall x A \to \forall x \Box A \quad \text{e} \quad GF := \exists x \Box A \to \Box\exists x A$$

non possono essere distinte l'una dall'altra in quanto esse sono valide nelle stesse classi di (T)K-strutture.

Un'altra limitazione di un approccio basato sull'identità attraverso mondi è che essa impone che ciascun singolo oggetto o venga automaticamente mappato su un unico oggetto in ogni mondo accessibile (ovvero su o stesso) e due oggetti diversi non possono essere mappati su un medesimo oggetto in alcun mondo accessibile. Sembra però possibile che un singolo oggetto o in w sia rappresentato da due o più oggetti in un mondo accessibile, oppure che due oggetti distinti in w siano rappresentati da un singolo oggetto in un mondo accessibile a partire da w (cf. [Lewis, 1986]). Essendo tali possibilità escluse, le formule

$$NI := s = t \to \Box s = t \qquad \text{e} \qquad ND := s \neq t \to \Box s \neq t$$

e le formule

$$\lambda x(\Box A).t \to \Box(\lambda x A.t) \qquad \text{e} \qquad \Box(\lambda x A.t) \to \lambda x(\Box A).t$$

non possono essere distinte tra loro in quanto entrambe sono valide su ogni (T)K-struttura per le stesse classe di termini (ovvero per le variabili e le constanti individuali). Una conseguenza immediata della validità della seconda coppia di formule per i termini rigidi è che, come mostrato in [Fitting e Mendelsohn, 1998, Prop. 10.2.4], per essi non sia possibile distinguere tra modalità *de dicto* e modalità *de re*.

Tali limitazioni dipendono dal fatto che, sulla base dell'identità attraverso mondi, le modalità *de re* si comportano in modo analogo alle modalità *de dicto*. Infatti in entrambi i casi la nozione di soddisfazione è analoga alla verità in logica modale proposizionale: una formula $\Box A$ è vera in un mondo w (rispetto a certi oggetti) se e solo se A è vera in tutti i mondi accessibili a partire da esso (rispetto agli stessi oggetti). Per questo motivo in entrambe i casi la validità di una formula dipende unicamente dalle proprietà della relazione di accessibilità tra mondi. L'unica differenza tra una formula *de dicto* e una *de re* consiste nei mondi in cui bisogna determinare l'oggetto denotato da alcuni termini: nel caso *de dicto* saranno i mondi accessibili e nel caso *de re* sarà il mondo di partenza.

Anche se è naturale basare la soddisfazione di una formula *de dicto* sulla base di quanto fatto in logica modale proposizionale (in entrambi i casi stiamo attribuendo una proprietà modale a un enunciato), lo stesso non vale per le modalità *de re*: esse attribuiscono una proprietà modale a un oggetto e non a un enunciato. In questo caso ad essere rilevanti dovrebbero essere gli oggetti che rappresentano l'oggetto di cui vogliamo parlare e non unicamente i mondi che rappresentano (ovvero sono accessibili a partire da) il mondo in cui tale formula modale *de re* viene valutata. Però, l'assunzione dell'identità attraverso mondi appiattisce queste due alternative dato che si assume che un dato oggetto sia sempre e solo rappresentato da quello stesso oggetto, e non da un arbitrario insieme di oggetti.

Da un certo punto di vista questo sarebbe come limitare la nostra attenzione a logiche modali proposizionali in cui la relazione di accessibilità tra mondi goda sempre e solo della proprietà riflessiva. Come per le logiche modali proposizionali è utile partire assumendo che la relazione di accessibilità tra mondi sia una relazione arbitraria per poi poter considerare particolari relazioni di accessibilità, così, per avere delle logiche modali quantificate che permettano un trattamento non ristretto delle modalità *de re*, è necessario partire utilizzando una relazione arbitraria tra oggetti (dei diversi mondi) per poi rendere valide o meno certe formule considerando casi particolari di tale relazione. Come per le modalità proposizionali la riflessività (e dunque la logica T) è un caso particolare di una famiglia più ampia di logiche, così per le modalità *de re* deve essere l'identità attraverso mondi (e dunque l'identificazione di formule quali CBF e GF).

In questo capitolo introdurremo un approccio alternativo alle logiche modali quantificate che permette di avere un trattamento più generale e matematicamente soddisfacente delle formule modali *de re*. Tale approccio, noto come 'logiche modali indiciate' e introdotto in [Corsi, 2009], è basato sul sostituire gli usuali operatori modali $\Box$ e $\Diamond$ con degli operatori (chiamati 'operatori indiciati') contenenti un indice composto da insiemi di coppie di termini del linguaggio:

$$|{}^{t_1}_{x_1}\cdots{}^{t_n}_{x_n}| \qquad \text{e} \qquad \langle{}^{t_1}_{x_1}\cdots{}^{t_n}_{x_n}\rangle$$

In questo modo, se le variabili libere in A sono un sottoinsieme di $\{x_1,\ldots,x_n\}$, avremo la seguente formula modale *de re*:

$$|{}^{t_1}_{x_1}\cdots{}^{t_n}_{x_n}|A$$

che possiamo leggere come:

è necessario per gli oggetti $t_1,\ldots,t_n$ che essi soddisfino la formula A,

dove l'assunzione che le variabili libere in A siano un sottoinsieme delle variabili occorrenti nel denominatore dell'operatore indiciato $|{}^{t_1}_{x_1}\cdots{}^{t_n}_{x_n}|$ permetterà di evitare problemi tecnici derivanti dal passaggio dall'identità attraverso mondi a una relazione arbitraria. Inoltre assumeremo che le variabili libere nella formula A siano vincolate dalle variabili occorrenti nel denominatore di $|{}^{t_1}_{x_1}\cdots{}^{t_n}_{x_n}|$ e, dunque, le variabili libere in $|{}^{t_1}_{x_1}\cdots{}^{t_n}_{x_n}|A$ coincideranno con le variabili occorrenti nel numeratore dell'operatore $|{}^{t_1}_{x_1}\cdots{}^{t_n}_{x_n}|$. In particolare questo vorrà dire che nella formula $|{}^{t_1}_{x_1}\cdots{}^{t_n}_{x_n}|A$ le sostituzioni andranno effettuate nel numeratore dell'operatore indiciato e non nella sottoformula A. In questo modo, tra le altre cose, gli operatori indiciati svolgeranno il ruolo svolto nel Capitolo 5 dall'operatore λ nel bloccare la permutazione delle sostituzioni con gli operatori modali per le descrizioni individuali.

Da un punto di vista semantico avremo una nozione di struttura più generale rispetto alle (T)K-strutture poiché oltre alla relazione R di accessibilità tra mondi avremo, per ogni coppia di mondi $\langle w,v\rangle$, una relazione $T_{\langle w,v\rangle} \subseteq U_w \times U_v$ tra coppie di oggetti degli universi di tali mondi (tale relazione sarà chiamata 'relazione di transizione' o anche 'relazione di controparte'). Qualora la coppia $\langle o_1, o_2\rangle$ sia in $T_{\langle w,v\rangle}$ diremo che l'oggetto o_2 è una controparte, o una v-transizione, dell'oggetto o_1. Avendo noi sostituito l'ipotesi dell'identità attraverso mondi con una arbitraria relazione di transizione, non saremo costretti a imporre alcuna interrelazione tra gli universi dei mondi e la relazione di accessibilità tra mondi.

La verità (rispetto a un assegnamento) della formula $|^{t_1}_{x_1}\cdots^{t_n}_{x_n}|A$ in un mondo w sarà così definita:

> $|^{t_1}_{x_1}\cdots^{t_n}_{x_n}|A$ è vera in w (rispetto agli oggetti assegnati in w alle variabili in $t_1,\dots,t_n$) se e solo se A è vera in ciascun mondo accessibile v per ciascuna n-upla di oggetti di v che sono controparti degli oggetti denotati, rispettivamente, da $t_1,\dots,t_n$ in w.

In particolare, nel caso unario un oggetto godrà necessariamente di una certa proprietà se e solo se ogni oggetto che è una sua controparte (ovvero che lo rappresenta in un qualche mondo accessibile) gode di tale proprietà.

Si noti che, qualora l'operatore indiciato contenga l'insieme vuoto di coppie di indici (per comodità scriveremo $|\star|$), tale clausola di verità risulterà identica alla clausola per l'operatore $\Box$ che abbiamo visto nei capitoli precedenti. Ma questo è perfettamente accettabile dato che, se $|\star|A$ è una formula, sappiamo che A è un enunciato e, dunque, abbiamo a che fare con una formula modale *de dicto* per cui deve valere l'usuale clausola di soddisfazione per l'operatore $\Box$.

La differenza tra le logiche modali indiciate e le usuali logiche modali quantificate si vedrà solo quando avremo a che fare con una formula modale *de re*: in questo caso dovremo basarci sulla relazione di transizione tra oggetti degli universi e non unicamente sulla relazione di accessibilità tra mondi. In particolare, assumendo che la relazione di transizione sia la funzione di identità tra oggetti, otterremo il trattamento delle modalità *de re* che abbiamo nelle logiche modali quantificate basate sul linguaggio con l'operatore λ. In questo modo le modalità *de re* basate sull'identità attraverso mondi saranno un caso particolare di una famiglia più ampia di logiche modali quantificate. Queste considerazioni sono sufficienti a far vedere che le logiche modali indiciate sono una generalizzazione delle logiche modali quantificate considerate nel Capitolo 5. Infatti assumendo che $o_1 T_{\langle w,v\rangle} o_2$ sse $o_1 = o_2$ l'unico ruolo svolto dagli operatori indiciati sarà quello, svolto da λ nel Capitolo 5, di determinare dove vada determinato l'oggetto denotato da una descrizione individuale j: nel mondo di partenza per una formula quale $|^{j}_{x}|Px$ e nei mondi accessibili per una formula quale $|\star|Pj$.

6.2 Sintassi

Definizione 6.1. Un *linguaggio con operatori indiciati, $\mathscr{L}^i$*, contiene tutti i simboli di un linguaggio del primo ordine con identità con la sola eccezione delle costanti individuali (cf. Def. 3.1), che verranno reintrodotte a partire dal Capitolo 6.6, e inoltre, al posto di $\Box$ e $\Diamond$, contiene i seguenti operatori (modali) indiciati:

$$|^{t_1}_{x_1}\cdots^{t_n}_{x_n}| \qquad \text{e} \qquad \langle^{t_1}_{x_1}\cdots^{t_n}_{x_n}\rangle$$

dove $x_1, \ldots x_n$ sono variabili distinte e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini (ovvero, per il momento, variabili o descrizioni definite) e $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 6.2 (i-formule)**.** L'insieme delle *formule* di $\mathscr{L}^i$ (*i-formule*), e l'insieme $fv(A)$ delle variabili libere in una i-formula A sono definite induttivamente come segue:

- $\bot$ — $fv(\bot) = 0$
- $P^n t_1, \ldots, t_n$ — $fv(P^n t_1, \ldots t_n) = fv(t_1) \cup \ldots \cup fv(t_n)$
- $t_i = t_j$ — $fv(t_i = t_j) = fv(t_i) \cup fv(t_j)$
- $\neg A$ — $fv(\neg A) = fv(A)$
- $(A \circ B)$ dove $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ — $fv(A \circ B) = fv(A) \cup fv(B)$

- QxA $\quad fv(QxA) = fv(A) - \{x\}$
  dove $Q \in \{\forall, \exists\}$

- $|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}|A$ $\quad fv(|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}|A) = fv(t_1) \cup \dots \cup fv(t_n)$
  dove $fv(A) \subseteq \{x_1, \dots x_n\}$

- $\langle^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}\rangle A$ $\quad fv(\langle^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}\rangle A) = fv(t_1) \cup \dots \cup fv(t_n)$
  dove $fv(A) \subseteq \{x_1, \dots x_n\}$

Nient'altro è una i-formula ben formata.

Utilizzeremo le stesse convenzioni e abbreviazioni linguistiche introdotte nel Capitolo 3.1. Inoltre, utilizzeremo $|\star|$ e $\langle\star\rangle$ per gli operatori indiciati da nessun indice e utilizzeremo $|x_1, \dots x_n|$ e $\langle x_1, \dots x_n\rangle$ come abbreviazione per gli operatori $|^{x_1}_{x_1} \dots ^{x_n}_{x_n}|$ e $\langle^{x_1}_{x_1} \dots ^{x_n}_{x_n}\rangle$, rispettivamente.

Definizione 6.3 (Sostituzione di variabili libere in i-formule)**.** Con $A[t/x]$ denotiamo la i-formula ottenuta a partire da A sostituendo ogni occorrenza libera di x con un'occorrenza di t. La definizione è per induzione sulla costruzione di A ed è come in Definizione 3.6 per le formule atomiche e per gli operatori non-modali $\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$. Per gli operatori modali indiciati, invece, è così definita:

- $(|^{s_1}_{y_1} \dots ^{s_n}_{y_n}|B)[t/x] \equiv |^{s_1[t/x]}_{y_1} \dots ^{s_n[t/x]}_{y_n}|B$
- $(\langle^{s_1}_{y_1} \dots ^{s_n}_{y_n}\rangle B)[t/x] \equiv \langle^{s_1[t/x]}_{y_1} \dots ^{s_n[t/x]}_{y_n}\rangle B$

Osservazione 6.4. È importante osservare due caratteristiche particolari delle formule modali indiciate:

- Data la Definizione 6.2 abbiamo che le occorrenze libere di variabili in $|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}|A$ e in $\langle^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}\rangle A$ sono tutte e sole le occorrenze di variabili in $t_1, \dots, t_n$, ovvero le occorrenze nel numeratore dell'operatore indiciato.

- Data la Definizione 6.3 una formula modale indiciata $|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}|A$ (oppure $\langle^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}\rangle A$) si comporta come una formula atomica rispetto alla sostituzione: la sostituzione viene operata direttamente nei termini che occorrono nel numeratore dell'operatore indiciato e non nella formula nel campo di azione di tale operatore.

6.3 *Semantica delle transizioni*

Introduciamo ora la semantica delle transizioni. Per brevità considereremo unicamente strutture di transizioni in cui a ogni mondo è associato un singolo universo e non presenteremo le strutture con transizioni a doppio dominio (cf. [Corsi e Orlandelli, 2013]). Inoltre, ricordiamo che stiamo considerando un linguaggio senza costanti individuali. Le costanti individuali verranno aggiunte in seguito (Capitolo 6.6) quando caratterizzeremo la distinzione tra termini rigidi e non rigidi nelle logiche modali indiciate.

Definizione 6.5 (T-struttura)**.** Una *struttura con transizioni* (T-struttura) è una quadrupla:

$$\mathscr{F}^t = \langle W, R, U, T \rangle$$

dove

- $W \neq \emptyset$ è un insieme non vuoto di mondi;
- $R \subseteq W \times W$ è una relazioni di accessibilità tra i mondi in W;
- U è una funzione che associa ad ogni mondo $w \in W$ un insieme non vuoto U_w detto *universo di* w;
- I domini di due mondi w, v sono relati tra loro da una *relazione di transizione*, $T_{\langle w,v \rangle}$, tale che:

  $$\text{se} \qquad wRv, \qquad \text{allora} \qquad T_{\langle w,v \rangle} \subseteq U_w \times U_v$$

  Presi due oggetti $a \in U_w$ e $b \in U_v$, qualora $aT_{\langle w,v \rangle}b$, diremo che b è una *(v-)controparte* (o una *transizione*) di a.
- $T = \biguplus_{w,v \in W}\{T_{\langle w,v \rangle}\}$. T rappresenta l'unione (disgiunta) di tutte le coppie di oggetti tali che il secondo è una controparte del primo; viene presa come unione disgiunta poiché una stessa coppia di oggetti potrebbe essere nella relazione di controparte rispetto a coppie distinte di mondi.

Definizione 6.6 (T-modello)**.** Un *T-modello* $\mathscr{M}$ (basato su un T-struttura $\mathscr{F}^t = \langle W, R, U, T\rangle$), è una coppia $\mathscr{M} = \langle \mathscr{F}^t, I\rangle$ dove I è una funzione che associa a ciascun mondo una funzione di interpretazione per i simboli descrittivi del linguaggio (ricordiamo che per il momento abbiamo escluso le costanti individuali). In particolare,

$$I_w(P^n) \subseteq (U_w)^n \qquad I_w(j) \in U_w$$

Definizione 6.7 (T-modello normale)**.** Un T-modello $\langle W, R, U, T, I\rangle$ è detto *normale* se e solo se

$$\text{per ciascun } w \in W,\ I_w(=) = \{\langle o, o\rangle : o \in U_w\}.$$

Quando questo non creerà ambiguità, useremo *T-modello* o, più semplicemente, *modello* per riferirci ai T-modelli normali.

Definizione 6.8 (Assegnamento)**.** Dato un mondo w di un T-modello $\langle W, R, U, T, I\rangle$, un *$w$-assegnamento* è una funzione $\sigma : Var \longrightarrow U_w$ che mappa ciascuna variabile su un oggetto dell'universo U_w.

Dato un w-assegnamento σ e un oggetto $o \in U_w$, useremo $\sigma^{x \rhd o}$ per l'assegnamento che si comporta come σ su tutte la variabili diverse da x e che mappa x su o. Useremo $\sigma(t)$ come abbreviazione per $I_w^\sigma(t)$.

Definizione 6.9 (Soddisfazione)**.** Definiamo per induzione quando una i-formula A è *soddisfatta* in un mondo w di un T-modello $\mathscr{M} = \langle W, R, U, T, I\rangle$ sotto un w-assegnamento σ. Nel caso scriveremo $\sigma \models_w^{\mathscr{M}} A$. I casi per le formule atomiche e per gli operatori estensionali $\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ sono come nella Definizione 3.11. Per le modalità indiciate, invece, abbiamo:

$\sigma \models_w^{\mathscr{M}} \lvert{}^{t_1}_{x_1} \ldots {}^{t_n}_{x_n}\rvert B$	sse	per ogni v tale che wRv, per ogni v-assegnamento τ tale che $\sigma(t_i) T_{\langle w,v\rangle} \tau(x_i)$ per ogni i, $1 \leq i \leq n$, $\quad \tau \models_v^{\mathscr{M}} B$
$\sigma \models_w^{\mathscr{M}} \langle{}^{t_1}_{x_1} \ldots {}^{t_n}_{x_n}\rangle B$	sse	per qualche v tale che wRv, per qualche v-assegnamento τ tale che $\sigma(t_i) T_{\langle w,v\rangle} \tau(x_i)$ per ogni i, $1 \leq i \leq n$, $\quad \tau \models_v^{\mathscr{M}} B$

Quando non crea ambiguità nell'utilizzare le clausole di soddisfazione per $\lvert{}^{t_1}_{x_1} \ldots {}^{t_n}_{x_n}\rvert B$ e per $\langle{}^{t_1}_{x_1} \ldots {}^{t_n}_{x_n}\rangle B$ indicheremo solo la condizione su $T_{\langle w,v\rangle}$ lasciando implicito che questa valga per ogni v tale che wRv.

Inoltre, quando non creerà ambiguità, scriveremo: $\sigma \models_w A$ invece che $\sigma \models_w^{\mathcal{M}} A$. Infine, se $\vec{t} \equiv t_1, \dots t_n$ e $\vec{x} \equiv x_1, \dots, x_n$, scriveremo $\sigma(\vec{t})T_{\langle w,v\rangle}\tau(\vec{x})$ al posto di $\sigma(t_1)T_{\langle w,v\rangle}\tau(x_1), \dots, \sigma(t_n)T_{\langle w,v\rangle}\tau(x_n)$

Definizione 6.10. Le nozioni di *verità* in un (punto di un) T-modello e di *validità* (su una classe di T-strutture) sono date come nella Definizione 3.12.

Lemma 6.11. *I Lemmi sulla relazione tra sostituzioni e soddisfazione che abbiamo dimostrato nel Capitolo 3.2.3 per la semantica di Tarski-Kripke rispetto al linguaggio $\mathcal{L}$ sono validi anche per la semantica delle transizioni rispetto alle i-formule. L'unica differenza nelle dimostrazioni che procedono per induzione sulla lunghezza di A è che nel caso degli operatori modali indiciati (così come per le formule atomiche) non abbiamo bisogno di utilizzare l'ipotesi di induzione dato che gli operatori indiciati si comportano come le formule atomiche rispetto alla sostituzione.*
Ad esempio, presentiamo il caso in cui $A \equiv |^{s_1}_{y_1} \dots ^{s_n}_{y_n}|B$ dell'analogo del Lemma 3.19, ovvero mostriamo che se t è tale che $I^\sigma_w(t) = o$, allora

$$\sigma \models_w (|^{s_1}_{y_1} \dots ^{s_n}_{y_n}|B)[t/x] \qquad \textit{sse} \qquad \sigma^{x\rhd o} \models_w |^{s_1}_{y_1} \dots ^{s_n}_{y_n}|B$$

Assumiamo $y_1, \dots, y_n \equiv \vec{y}$ e $s_1, \dots, s_n \equiv \vec{s}$ e $s_1[t/x], \dots, s_n[t/x] \equiv \vec{s}[t/x]$.

$\sigma \models_w (\lvert^{\vec{s}}_{\vec{y}}\rvert B)[t/x]$	*sse*	*Def.* 6.3
$\sigma \models_w \lvert^{\vec{s}[t/x]}_{\vec{y}}\rvert B$	*sse*	*Def.* 6.9
per ogni τ *t.c.:* $\sigma(\vec{s}[t/x])T_{\langle w,v\rangle}\tau(\vec{y})$, $\tau \models_v B$	*sse*	$I^\sigma_w(t) = o$
per ogni τ *t.c.:* $\sigma^{x\rhd o}(\vec{s})T_{\langle w,v\rangle}\tau(\vec{y})$, $\tau \models_v B$	*sse*	*Def.* 6.9
$\sigma^{x\rhd o} \models_w \lvert^{\vec{s}}_{\vec{y}}\rvert B$		

6.4 Calcoli assiomatici

Definizione 6.12 (Calcolo $\mathsf{Q_{im}.K}$)**.** Il calcolo assiomatico $\mathsf{Q_{im}.K}$ per la logica modale indiciata minimale è definito dai seguenti assiomi e regole.

1. Assiomi/regole modali proposizionali:

   $Taut$ ogni $\mathcal{L}^i$-istanza di una tautologia proposizionale

K^i	$\lvert x_1 \dots x_n \rvert (A \to B) \to (\lvert x_1 \dots x_n \rvert A \to \lvert x_1 \dots x_n \rvert B)$
$Def^i_\Diamond$	$\langle x_1 \dots x_n \rangle A \leftrightarrow \neg \lvert x_1 \dots x_n \rvert \neg A$
MP	$\dfrac{A \quad A \to B}{B}$
N^i	$\dfrac{A}{\lvert x_1 \dots x_n \rvert A}$ dove $fv(A) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$

2. Assiomi/regole per i quantificatori:

UI	$\forall x A \to A$
UD	$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$, per x non libera in A
$Def_\exists$	$\exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A$
Gen	$\dfrac{A}{\forall x A}$

3. Riflessività dell'identità:

Rif	$t = t$

4. Assiomi/regole per i termini:

Lbz	$t = s \to (A[t/x] \to A[s/x])$
$Sost$	$\dfrac{A}{A[t/x]}$

5. Assiomi/regole sulle modalità indiciate:

Prm	$\lvert x_1 \dots x_n \rvert A \to \lvert x_{i_1} \dots x_{i_n} \rvert$ dove $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ è una permutazione di $x_1 \dots x_n$
$Lngt$	$\lvert x_1 \dots x_n \rvert A \to \lvert x_1 \dots x_n\, y \rvert A$
Rg^v	$\lvert {}^{y_1}_{x_1} \dots {}^{y_n}_{x_n} \rvert A \to \lvert y_1 ... y_k \rvert (A[y_1/x_1, ..., y_n/x_n])$ dove $y_1 ... y_k$ sono $y_1 \dots y_n$ senza ripetizioni

Osservazione 6.13. Negli assiomi/regole in cui occorrono essenzialmente degli operatori indiciati è possibile usare $\lvert \vec{x} \rvert A$ invece che $\lvert {}^{\vec{t}}_{\vec{x}} \rvert A$ poiché $\lvert {}^{\vec{t}}_{\vec{x}} \rvert A$ è derivabile da$\lvert \vec{x} \rvert A$ grazie alla regola $Sost$.
Inoltre non è necessario restringere Lbz (né UI) ai soli termini rigidi dato che le sostituzioni non commutano con gli operatori indiciati.

Indicheremo con $\mathsf{L_{im}}$ una qualsiasi logica che estenda $\mathsf{Q_{im}.K}$. Le nozioni di *dimostrazione* in $\mathsf{L_{im}}$, *teorema* in $\mathsf{L_{im}}$, *derivazione* in $\mathsf{L_{im}}$ e di *regola ammissibile* in $\mathsf{L_{im}}$ sono definite come nel Capitolo 3.3.1.

La seguente regola è ammissibile in $\mathsf{L_{im}}$:

$$RM^i \qquad \frac{A \to B}{|\vec{x}|A \to |\vec{x}|B}$$

Inoltre vale il seguente teorema.

Teorema 6.14. *Siano A, B i-formule e Δ un insieme di i-formule,*

$$\Delta \cup \{A\} \vdash_{\mathsf{L_{im}}} B \qquad \textit{sse} \qquad \Delta \vdash_{\mathsf{L_{im}}} A \to B$$

Teorema 6.15 (Validità)**.** *Ogni teorema di* $\mathsf{Q_{im}.K}$ *è valido.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla derivazione di A. Dobbiamo far vedere che ogni assioma di $\mathsf{Q_{im}.K}$ è valido e che ogni sua regola preserva la validità. Consideriamo alcuni casi significativi e lasciamo gli altri come esercizio.

• $A \equiv Prm$. Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista una $\mathscr{F}^t$ su cui Prm non sia valida. Esisterà allora un w-assegnamento σ di un mondo w di un $\mathscr{F}^t$-modello tale che:

1)	$\sigma \not\models_w |x_1 \dots x_n|B \to |x_{i_1} \dots x_{i_n}|B$	
2)	$\sigma \models_w |x_1 \dots x_n|B$	Def. 6.9, 1
3)	$\sigma \not\models_w |x_{i_1} \dots x_{i_n}|B$	Def. 6.9, 1
4)	$\forall v\,(wRv \Rightarrow \forall \tau\,(\sigma(x_j)T_{\langle w,v\rangle}\tau(x_j)_{1\le j\le n} \Rightarrow \tau \models_v B))$	Def. 6.9, 2
5)	$wRs \,\&\, \sigma(x_{i_j})T_{\langle w,s\rangle}\mu(x_{i_j})_{1\le i_j\le n} \,\&\, \mu \not\models_s B$	Def. 6.9, 3

Chiaramente s e μ sono tali da soddisfare le condizioni poste sui generici v e τ in 4, dunque abbiamo che $\mu \models_s B$. Ma questo contraddice quanto detto in 5.

•$A \equiv Lngt$. Supponiamo che esista una $\mathscr{F}^t$ su cui $Lngt$ non sia valida. Esisterà allora un w-assegnamento σ di un mondo w di un $\mathscr{F}^t$-modello tale che:

1)	$\sigma \not\models_w |\vec{x}|B \to |\vec{x}\,z|B$	
2)	$\sigma \models_w |\vec{x}|B$	Def. 6.9, 1
3)	$\sigma \not\models_w |\vec{x}\,z|B$	Def. 6.9, 1
4)	$\forall v\,(wRv \Rightarrow \forall \tau\,(\sigma(\vec{x})T_{\langle w,v\rangle}\tau(\vec{x}) \Rightarrow \tau \models_v B))$	Def. 6.9, 2
5)	$wRs \,\&\, \sigma(\vec{x})T_{\langle w,s\rangle}\mu(\vec{x}) \,\&\, \sigma(z)T_{\langle w,s\rangle}\mu(z) \,\&\, \mu \not\models_s B$	Def. 6.9, 3

Dato che s e μ rispettano le condizioni poste in 4, $\mu \models_s B$. Ma questo contraddice 5.

• $A \equiv Rg^{v}$. Nuovamente per assurdo, se Rg^{v} non fosse valida avremmo che:

1)	$\sigma \models_w |^{y_1}_{x_1} \dots ^{y_n}_{x_n}|B \to |y_1 \dots y_k|(B[y_1/x_1 \dots y_n/x_n])$	
2)	$\sigma \models_w |^{y_1}_{x_1} \dots ^{y_n}_{x_n}|B$	Def. 6.9, 1
3)	$\sigma \not\models_w |y_1 \dots y_k|(B[y_1/x_1 \dots y_n/x_n])$	Def. 6.9, 1
4)	$\forall v\,(wRv \Rightarrow \forall \tau\,(\sigma(y_i)T_{\langle w,v\rangle}\tau(x_i)_{1\leq i\leq n} \Rightarrow \tau \models_v B))$	Def. 6.9, 2
5)	$wRs \,\&\, \sigma(y_i)T_{\langle w,s\rangle}\mu(y_i)_{1\leq i\leq k} \,\&\, \mu \not\models_s B[y_1/x_1,\dots,y_n/x_n]$	Def. 6.9, 3

Per il Lemma 6.11 (cf. Lemma 3.17), sappiamo che:

$$(\dagger) \qquad \mu \not\models_s B[y_1/x_1,\dots,y_n/x_n] \quad \text{sse} \quad \mu^{x_1 \rhd \mu(y_1),\dots,x_n \rhd \mu(y_n)} \not\models_s B$$

Dato che $y_1,..,y_k$ sono le variabili $y_1,\dots,y_n$ senza ripetizioni, allora il mondo s e l'assegnamento $\mu^{x_1 \rhd \mu(y_1),\dots,x_n \rhd \mu(y_n)}$ rispettano le condizioni poste in 4. Dunque abbiamo che: $\mu^{x_1 \rhd \mu(y_1),\dots,x_n \rhd \mu(y_n)} \models_s B$, ma, dato (†), questo contraddice quanto detto in 5.

• Consideriamo ora il caso in cui A sia stata ottenuta tramite la regola $Sost$. La dimostrazione è per induzione su $\ln(A)$. Considereremo unicamente il caso in cui $A \equiv |^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_k}_{x_k}|B$.

Supponiamo per assurdo che:

$$(i) \quad \models |^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_k}_{x_k}|B \qquad\qquad (ii) \quad \not\models (|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_k}_{x_k}|B)[s/x]$$

Da ii segue che esiste un w-assegnamento di un mondo w di un $\mathscr{F}^t$-modello tale che: $\sigma \not\models_w (|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_k}_{x_k}|B)[s/x]$. Inoltre, data la Definizione 6.3, $(|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_k}_{x_k}|B)[s/x] \equiv |^{t_1[s/x]}_{x_1} \dots ^{t_k[s/x]}_{x_k}|B$. Supponiamo che $t_i \equiv x$ per qualche i tale che $1 < i < k$, allora $\sigma \not\models_w |^{t_1}_{x_1} \dots ^{s}_{x_i} \dots ^{t_k}_{x_k}|B$. Da questo segue che:

$$(iii) \quad wRv \,\&\, \sigma(t_j)T_{\langle w,v\rangle}\tau(x_j)_{j\neq i \,\&\, 1\leq j\leq k} \,\&\, \sigma(s)T_{\langle w,v\rangle}\tau(x_i) \,\&\, \tau \not\models_v B$$

Al contempo da i segue che per ogni s-assegnamento μ di ogni mondo s di ogni $\mathscr{F}^t$-modello abbiamo che: $\mu \models_s |^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_k}_{x_k}|B$. Questo implica che $\forall t\,(sRt \Rightarrow \forall \nu\,(\mu(t_i)T_{\langle s,t\rangle}\nu(x_i)_{1\leq i\leq n} \Rightarrow \nu \models_t B))$. Nel caso in cui $s = w$, $t = v$, $\nu = \tau$ e $\mu = \sigma^{x \rhd \sigma(s)}$, abbiamo che:

$$(iv) \quad wRv \,\&\, \sigma^{x \rhd \sigma(s)}(t_i)T_{\langle w,v\rangle}\tau(x_i) \,\&\, \tau \models_v B$$

Ma, dato che $\sigma^{x \rhd \sigma(s)}(x) = \sigma(s)$, iv contraddice iii. □

6.4.1 *Formule rilevanti*

D^i $\qquad |\vec{x}|A \rightarrow \langle\vec{x}\rangle A$

T^i $\qquad |\vec{x}|A \rightarrow A$

4^i $\qquad |\vec{x}|A \rightarrow |\vec{x}|\,|\vec{x}|A$

B^i $\qquad A \rightarrow |\vec{x}|\langle\vec{x}\rangle A$

Rnm

$$|\vec{x}|A \rightarrow |^{\vec{y}}_{\vec{x}}|A[\vec{y}/\vec{x}])$$

Rg

$$|^{f_1}_{x_1}\ldots^{f_n}_{x_n}\,^{\vec{t}}_{\vec{z}}|A \rightarrow |y_1\ldots y_k\,^{\vec{t}}_{\vec{z}}|(A[f_1/x_1,\ldots,f_n/x_n])$$

posto che $y_1,..,y_k$ siano tutte le variabili in $f_1,\ldots,f_n$.[1]

Crg (Conversa di Rg)

$$|y_1\ldots y_k\,^{\vec{t}}_{\vec{z}}|(A[f_1/x_1,\ldots,f_n/x_n]) \rightarrow |^{f_1}_{x_1}\ldots^{f_n}_{x_n}\,^{\vec{t}}_{\vec{z}}|A$$

posto che $y_1,\ldots,y_k$ siano tutte le variabili in $t_1,\ldots,t_n$.

Crg^v (Converso di Rg^v)

$$|y_1\ldots y_k|(A[y_1/x_1,\ldots y_n/x_n]) \rightarrow |^{y_1}_{x_1}\ldots^{y_n}_{x_n}|A$$

posto che $y_1,..,y_k$ siano tutte le variabili in $y_1,\ldots,y_n$, senza ripetizioni.

BF^i

$$\forall y|\vec{x}\,y|A \rightarrow |\vec{x}|\forall y A$$

CBF^i

$$|\vec{x}|\forall y A \rightarrow \forall y|\vec{x}\,y|A$$

GF^i

$$\exists y|\vec{x}\,y|A \rightarrow |\vec{x}|\exists y A$$

[1] Dove f_i è un termine rigido, ovvero una variabile o una costante individuale (se presente nel linguaggio), e t_i un termine arbitrario.

Shrt (Accorciamento)

$$|\vec{x}\,y|A \to |\vec{x}|A$$

SIV (Sostituzione che identifica variabili)

$$|v_1 \dots v_k|(A[y/x_1, y/x_2, t_3/x_3, \dots, t_n/x_n]) \to |^{y\ y\ t_3}_{x_1 x_2 x_3} \cdots ^{t_n}_{x_n}|A$$

posto che $v_1, \dots, v_k$ siano tutte le variabili in $y, t_3, \dots, t_n$.

NI^i (Necessità dell'identità)

$$x = y \to |x\,y|x = y$$

ND^i (Necessità della diversità)

$$x \neq y \to |x\,y|x \neq y$$

FCS (Piena commutatività delle sostituzioni)

$$|v_1 \dots v_k\, {}^{\vec{t}}_{\vec{z}}|(A[f_1/x_1, \dots, f_n/x_n]) \leftrightarrow |^{f_1}_{x_1} \cdots ^{f_n}_{x_n}\, ^{\vec{t}}_{\vec{z}}|A$$

posto che tutte le variabili occorrenti in $A[f_1/x_1, \dots, f_n/x_n]$ siano incluse in $v_1, \dots, v_k$.

6.4.2 *Alcune derivazioni*

1. $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} Rnm$

1)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |^{\vec{y}}_{\vec{x}}|A \to |\vec{y}|(A[\vec{y}/\vec{x}])$	Rg^v
2)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} (|^{\vec{y}}_{\vec{x}}|A \to |\vec{y}|(A[\vec{y}/\vec{x}])[\vec{x}/\vec{y}]$	*Sost*, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|A \to |^{\vec{y}}_{\vec{x}}|A[\vec{y}/\vec{x}])$	Def. 6.3, 2

2. $Lngt \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} CBF^i$

1)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|\forall y A \to |\vec{x}\,y|\forall y A$	*Lngt*
2)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \forall y A \to A$	*UI*
3)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}\,y|\forall y A \to |\vec{x}\,y|A$	RM^i, 2
4)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|\forall y A \to |\vec{x}\,y|A$	*Taut*, 1, 3
5)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|\forall y A \to \forall y|\vec{x}\,y|A$	*Gen*, 4

3. $CBF^i \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} Lngt$
   1) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} A \to A$ — $Taut\ (y \not\in fv(A))$
   2) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} A \to \forall y A$ — $Gen, UD, VQ, 1$
   3) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|A \to |\vec{x}|\forall y A$ — $RM^i, 2$
   4) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|\forall y A \to \forall y|\vec{x}\,y|A$ — CBF^i
   5) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|A \to \forall y|\vec{x}\,y|A$ — $Taut, 3, 4$
   6) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \forall y|\vec{x}\,y|A \to |\vec{x}\,y|A$ — UI
   7) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|A \to |\vec{x}\,y|A$ — $Taut, 5, 6$
4. $Shrt \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} GF^i$
   1) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} A \to \exists y A$ — $UI, Def_\exists$
   2) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}\,y|A \to |\vec{x}\,y|\exists y A$ — $RM^i, 1$
   3) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}\,y|\exists y A \to |\vec{x}|\exists y A$ — $Shrt$
   4) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}\,y|A \to |\vec{x}|\exists y A$ — $Taut, 2, 3$
   5) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \exists y|\vec{x}\,y|A \to |\vec{x}|\exists y A$ — $Gen,\ Def_\exists, 4$
5. $GF^i \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} Shrt$
   1) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \exists y A \to A$ — $VQ, Def_\exists\ (y \not\in fv(A))$
   2) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}|\exists y A \to |\vec{x}|A$ — $RM^i, 1$
   3) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \exists y|\vec{x}\,y|A \to |\vec{x}|\exists y A$ — GF^i
   4) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \exists y|\vec{x}\,y|A \to |\vec{x}|A$ — $Taut, 2, 3$
   5) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}\,y|A \to \exists y|\vec{x}\,y|A$ — $UI, Def_\exists$
   6) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |\vec{x}\,y|A \to |\vec{x}|A$ — $Taut, 4, 5$

6. $SIV \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} NI^i$

1)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}}\ x = x$	Rif
2)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}}\ \lvert x \rvert x = x$	N, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}}\ \lvert x \rvert((x = y)[x/x, x/y]) \to \lvert^{x\,x}_{x\,y}\rvert x = y$	SIV
4)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}}\ \lvert x \rvert x = x \to \lvert^{x\,x}_{x\,y}\rvert x = y$	Def. 6.3, 2
5)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}}\ \lvert^{x\,x}_{x\,y}\rvert x = y$	MP, 2, 3
6)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}}\ \lvert^{x\,x}_{x\,y}\rvert x = y \to (x = y \to \lvert^{x\,y}_{x\,y}\rvert x = y)$	Lbz
7)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}}\ x = y \to \lvert^{x\,y}_{x\,y}\rvert x = y$	MP 5, 6

7. $NI^i \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} SIV$ Sia Bx, y una formula atomica data.

1)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} x = y \to (Bx, x \to Bx, y)$	Lbz
2)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \lvert x\,y \rvert x = y \to (\lvert x y \rvert Bx, x \to \lvert x\,y \rvert Bx, y)$	RM^i, 1
3)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} x = y \to \lvert x\,y \rvert x = y$	NI^i
4)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} x = y \to (\lvert x\,y \rvert Bx, x \to \lvert x\,y \rvert Bx, y)$	$Taut$, 2, 3
5)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} (x = y \to (\lvert x\,y \rvert Bx, x \to \lvert x\,y \rvert Bx, y))[x/x, x/y]$	$Sost$, 4
6)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} x = x \to (\lvert^{x\,x}_{x\,y}\rvert Bx, x \to \lvert^{x\,x}_{x\,y}\rvert Bx, y)$	Def. 6.3, 5
7)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} x = x$	Rif
8)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \lvert^{x\,x}_{x\,y}\rvert Bx, x \to \lvert^{x\,x}_{x\,y}\rvert Bx, y$	MP, 6, 7
9)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} \lvert x \rvert Bx, x \to \lvert x\,y \rvert Bx, x$	$Lngt$
10)	$\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} (\lvert x \rvert Bx, x \to \lvert x\,y \rvert Bx, x)[x/x, x/y]$	$Sost$, 9

11) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |x|Bx, x \to |^{x\ x}_{x\ y}|Bx, x$ Def. 6.3, 10

12) $\vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} |x|Bx, x \to |^{x\ x}_{x\ y}|Bx, y$ $Taut$, 8, 11

8. $FCS \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} Rg$, $\quad FCS \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} Crg$, $\quad FCS \vdash_{\mathsf{Q_{im}.K}} Shrt$

   Se vale FCS, allora per le formule che non contengono descrizioni individuali gli indici negli operatori sono trascurabili e si ha un sistema equivalente ad un sistema modale di Tarski-Kripke (modulo ND^i).[2] Nei sistemi basati sulla semantica di Trski-Kripke sono teoremi delle proposizioni equivalenti a Rg, Crg, NI^i; dunque essi saranno derivabili anche in $\mathsf{Q_{im}.K}$ a partire da FCS.

6.5 *Corrispondenza*

Mostreremo ora che esistono certe classi di T-strutture $\mathscr{C}$ e alcune i-formule A tali che le prime 'corrispondono' alle seconde. Ovvero ci occupiamo di i-formule A e di classi di T-strutture $\mathscr{C}$ tali che:

$$\text{per ogni } \mathscr{F}^t\ (\mathscr{F}^t \models A \quad \text{sse} \quad \mathscr{F}^t \in \mathscr{C})$$

Per individuare una classe di T-struttura $\mathscr{C}$ porremo delle condizioni sulla relazione di transizione e, in alcuni casi, anche su quella di accessibilità. Ad esempio, vedremo che lo schema

$$(T^i) \qquad\qquad |\vec{x}|A \to A$$

corrisponde alla seguente classe di T-strutture:

$$\mathscr{C} = \{\langle W, R, D, T\rangle : T \text{ e } R \text{ sono riflessive}\}$$

Teorema 6.16 (BF^i)**.** *BF^i è valida su una $\mathscr{F}^t$ se e solo se T è suriettiva. Ovvero:*

$$\mathscr{F}^t \models \forall y|\vec{x}\, y|A \to |\vec{x}|\forall y A \quad \textit{sse}$$

$$\forall w, v \in W(wRv \Rightarrow (\forall o_2 \in U_v \exists o_1 \in U_w(o_1 T_{\langle w,v\rangle} o_2)))$$

[2] Per le formule che contengono descrizioni individuali, invece, gli operatori indiciati non sono trascurabili dato che essi svolgono lo stesso ruolo svolto da λ.

Dimostrazione. Per semplicità di notazione poniamo che $\vec{x} = x$.[3]

$\Leftarrow$) Supponiamo, per assurdo, che esista una T-struttura $\mathscr{F}^t$ suriettiva su cui BF^i non sia valida. Dovrà allora esistere un mondo w di un $\mathscr{F}^t$-modello $\mathscr{M}$ tale che per qualche σ:

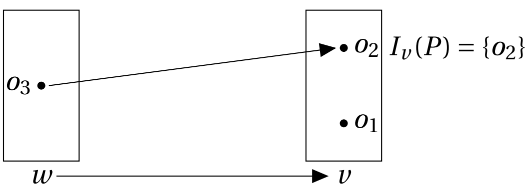
1) $\sigma \not\models_w \forall y|x\,y|A \to |x|\forall y A$
2) $\sigma \models_w \forall y|x\,y|A$ 1
3) $\sigma \not\models_w |x|\forall y A$ 1
4) $\forall o_1 \in U_w\, (\sigma^{y \triangleright o_1} \models_w |x\,y|A)$ 2
5) $\forall o_1 \in U_w, \forall v\, (wRv \,\&\, \forall \tau\, (\sigma^{y \triangleright o_1}(x,y)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(x,y) \Rightarrow \tau \models_v A))$ 4
6) $wRs \,\&\, \sigma(x)\, T_{\langle w,s\rangle}\, \mu(x) \,\&\, \mu \not\models_s \forall y A$ 3
7) $wRs \,\&\, \sigma(x)\, T_{\langle w,s\rangle}\, \mu(x) \,\&\, o_2 \in U_s \,\&\, \mu^{y \triangleright o_2} \not\models_s A$ 6

Essendo $\mathscr{F}^t$ suriettiva, $\forall o_3 \in U_s\, \exists o_4 \in U_w\, (o_4\, T_{\langle w,s\rangle}\, o_3)$. Questo, dato 7, implica che esista un $o_4 \in U_w$ tale che $o_4\, T_{\langle w,s\rangle}\, o_2$. Da 5 abbiamo che se s e $\mu^{y \triangleright o_2}$ sono tali che valgono (i) $\sigma^{y \triangleright o_1}(x)\, T_{\langle w,s\rangle}\, \mu^{y \triangleright o_2}(x)$ e (ii) $o_4\, T_{\langle w,s\rangle}\, o_2$, allora (iii) $\mu^{y \triangleright o_2} \models_s A$. Sappiamo che (ii) vale per quanto appena detto e la validità di (i) è assicurata da 7. Dunque possiamo concludere che $\mu^{y \triangleright o_2} \models_s A$. Ma questo è in contraddizione con 7, dunque BF^i deve essere valida su $\mathscr{F}^t$.

$\Rightarrow$) Procediamo per contrapposizione. Assumiamo che $\mathscr{F}^t$ non sia suriettiva e mostriamo che allora $\mathscr{F}^t \not\models BF^i$; in particolare mostriamo che:

$$\mathscr{F}^t \not\models \forall x|x|Px \to |\star|\forall x Px$$

Sia $\mathscr{M}$ il seguente modello basato su una $\mathscr{F}^t$ non suriettiva:



Dato che $I_v(P) \subsetneq D_v$, $\tau \not\models_v \forall x Px$. Allora, poiché wRv, abbiamo che:

$$\text{(i)} \qquad \not\models_w |\star|\forall x Px$$

Per costruzione di $\mathscr{M}$, abbiamo che:

$$\text{(ii)} \qquad \models_w \forall x|x|Px$$

[3] In seguito useremo questa semplificazione senza esplicitarlo.

A partire da (i) e (ii) possiamo concludere che:

$$\nvDash_w \forall x|x|Px \to |\star|\forall xPx$$

$\square$

Teorema 6.17 (GF^i)**.** *GF^i è valida su una $\mathscr{F}^t$ se e solo se T è totalmente definita. Ovvero:*

$$\mathscr{F}^t \models \exists y|x_1...x_n\, y|A \to |x_1...x_n|\exists yA \quad \textit{sse}$$

$$\forall w,v \in W\,(wRv \Rightarrow (\forall o_1 \in U_w\, \exists o_2 \in U_v\,(o_1\, T_{\langle w,v\rangle}\, o_2)))$$

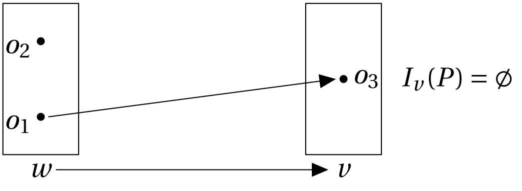
Dimostrazione.

$\Leftarrow$) Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista una $\mathscr{F}^t$ totalmente definita tale che un mondo w di un qualche $\mathscr{F}^t$-modello falsifichi GF^i. Allora ci sarà un w-assegnamento σ tale che:

1)	$\sigma \nvDash_w \exists y|x\,y|A \to |x|\exists yA$	
2)	$\sigma \models_w \exists y|x\,y|A$	1
3)	$\sigma \nvDash_w |x|\exists yA$	1
4)	$o_1 \in U_w \,\&\, \sigma^{y \rhd o_1} \models_w |x\,y|A$	2
5)	$o_1 \in U_w \,\&\, \forall v\, \forall \tau\,(wRv \,\&\, \sigma^{y \rhd o_1}(x,y)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(x,y) \Rightarrow \tau \models_v A)$	4
6)	$wRs \,\&\, \sigma(x)\, T_{\langle w,s\rangle}\, \mu(x) \,\&\, \mu \nvDash_s \exists yA$	3
7)	$wRs \,\&\, \sigma(x)\, T_{\langle w,s\rangle}\, \mu(x) \,\&\, \forall o_2 \in U_s\,(\mu^{y \rhd o_2} \nvDash_s A)$	6

Essendo $\mathscr{F}^t$ totalmente definita, sappiamo che $o_1\, T_{\langle w,s\rangle}\, o_3$, per qualche $o_3 \in U_s$. Dato 7, $\mu^{y \rhd o_3} \nvDash_s A$. Da 5 abbiamo che se s e $\mu^{y \rhd o_3}$ sono tali che (i) $\sigma^{y \rhd o_1}(x)\, T_{\langle w,s\rangle}\, \mu^{y \rhd o_3}(x)$ e (ii) $o_1\, T_{\langle w,s\rangle}\, o_3$, allora (iii) $\mu^{y \rhd o_3} \models_s A$. Per quanto appena visto (ii) vale. La validità di (i) è assicurata da 7. Allora risulta che $\mu^{y \rhd o_3} \models_s A$, ma questo contraddice il fatto che $\mu^{y \rhd o_3} \nvDash_s A$. Dunque GF^i deve essere valida su $\mathscr{F}^t$.

$\Rightarrow$) Procediamo per contrapposizione. Consideriamo il seguente modello basato su una T-struttura non totalmente definita:



Sia $\sigma(x) = o_2$, allora $\sigma \models_w |x|P(x)$ e, dunque,

$$\text{(i)} \qquad \sigma \models_w \exists x|x|P(x)$$

Inoltre per ogni v-assegnamento $\tau, \tau \not\models_v \exists x P(x)$ e, perciò,

$$\text{(ii)} \qquad \sigma \not\models_w |\star|\exists x P(x)$$

Da (i) e (ii) possiamo concludere che:

$$\sigma \not\models_w \exists x|x|P(x) \to |\star|\exists x P(x)$$

Abbiamo così provato che GF^i non è valida su $\mathscr{F}^t$. □

Teorema 6.18 (NI^i)**.** *NI^i è valida su una $\mathscr{F}^t$ se e solo se T è funzionale:*

$$\mathscr{F}^t \models x = y \to |x\,y|(x = y) \quad \textit{sse} \quad \forall w, v\,((o_1 T_{\langle w,v\rangle} o_2 \,\&\, o_1 T_{\langle w,v\rangle} o_3) \Rightarrow o_2 = o_3)$$

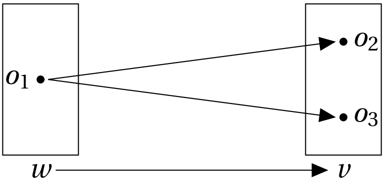
Dimostrazione.

$\Leftarrow$) Per assurdo sia $\mathscr{F}^t$ funzionale e sia $\mathscr{M}$ un $\mathscr{F}^t$-modello contenente un mondo w tale che, per un w-assegnamento σ,

1) $\sigma \not\models_w x = y \to |x\,y|(x = y)$
2) $\sigma \models_w x = y$ 1
3) $\sigma \not\models_w |x\,y|(x = y)$ 1
4) $\sigma(x) = \sigma(y)$ 2
5) $wRv \,\&\, \sigma(x) T_{\langle w,v\rangle} \tau(x) \,\&\, \sigma(y) T_{\langle w,v\rangle} \tau(y) \,\&\, \tau(x) \neq \tau(y)$ 3

Da 4 e 5 segue che $\sigma(x) T_{\langle w,v\rangle} \tau(y)$. Essendo $\mathscr{F}^t$ funzionale, da questo e dal fatto che $\sigma(x) T_{\langle w,v\rangle} \tau(x)$ segue che $\tau(x) = \tau(y)$. Ma questo contraddice quanto detto in 5.

$\Rightarrow$) Consideriamo la seguente $\mathscr{F}^t$ non funzionale:



Sia σ un w-assegnamento tale che $\sigma(x) = \sigma(y) = o_1$, allora:

$$\text{(1)} \qquad \sigma \models_w x = y$$

Sia inoltre τ un v-assegnamento tale che $\tau(x) = o_2$ e $\tau(y) = o_3$, questo comporta che $\tau \not\models_v x = y$. Da questo, per costruzione di T, abbiamo che:

$$(2) \qquad \sigma \not\models |x\,y|(x = y)$$

Da 1 e 2 segue che:

$$\sigma \not\models_w x = y \rightarrow |x\,y|(x = y)$$

Dunque possiamo concludere che NI^i non è valida su $\mathscr{F}^t$. □

Teorema 6.19 (ND^i). *ND^i è valida su $\mathscr{F}^t$ sse T è non convergente:*

$$\mathscr{F}^t \models x \neq y \rightarrow |x\,y|(x \neq y) \quad sse \quad \forall w, v\, ((o_2\, T_{\langle w,v\rangle}\, o_1 \,\&\, o_3\, T_{\langle w,v\rangle}\, o_1) \Rightarrow o_2 = o_3)$$

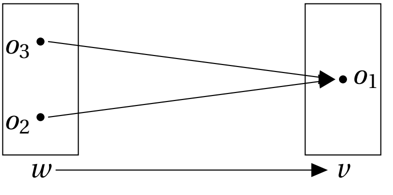
Dimostrazione.

$\Leftarrow$) Per assurdo sia $\mathscr{F}^t$ non convergente tale che esistono un mondo w di un $\mathscr{F}^t$-modello e un w-assegnamento σ tali che:

1)	$\sigma \not\models_w x \neq y \rightarrow \lvert x\,y\rvert(x \neq y)$	
2)	$\sigma \models_w x \neq y$	1
3)	$\sigma \not\models_w \lvert x\,y\rvert(x \neq y)$	1
4)	$\sigma(x) \neq \sigma(y)$	2
5)	$\exists v \exists \tau\, (wRv \,\&\, \sigma(x)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(x) \,\&\, \sigma(y)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(y) \,\&\, \tau \models_v x = y)$	3
6)	$\exists v \exists \tau\, (wRv \,\&\, \sigma(x)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(x) \,\&\, \sigma(y)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(y) \,\&\, \tau(x) = \tau(y))$	5

Dato che $\mathscr{F}^t$ è non convergente, da 6 segue che $\sigma(x) = \sigma(y)$. Ma questo contraddice quanto detto in 4. Dunque ND^i è valida su $\mathscr{F}^t$.

$\Rightarrow$) Consideriamo la seguente $\mathscr{F}^t$ non convergente:



Sia σ un w-assegnamento tale che $\sigma(x) = o_2$ e $\sigma(y) = o_3$, allora:

$$(i) \qquad \sigma \models_w x \neq y$$

Sia τ un v-assegnamento tale che $\tau(x) = \tau(y) = o_1$, allora: $\tau \models_v x = y$. Da questo, per costruzione di T, segue che

$$\text{(ii)} \qquad \sigma \nvDash_w |x\, y|(x \neq y)$$

Da (i) e (ii) segue che:

$$\sigma \nvDash_w x \neq y \to |x\, y|(x \neq y)$$

Dunque possiamo concludere che ND^i non è valida su $\mathscr{F}^t$. □

Concludiamo questa sezione presentando i risultati di corrispondenza per le versioni indiciate degli assiomi modali proposizionali D, T, 4 e B. In ciascuno di questi casi il risultato è analogo a quello che abbiamo in logica modale proposizionale (vedi Proposizione 2.7), solo che sia la relazione di accessibilità che la relazione di transizione dovranno soddisfare la proprietà rilevante.

Teorema 6.20.

D) *Lo schema* D^i *è valido su* $\mathscr{F}^t$ *sse* R *e* T *sono seriali, ovvero:*
$$\forall w \in W \exists v \in W (wRv) \qquad e \qquad \forall o_1 \in U_w \exists o_2 \in U_v\ (o_1 T_{\langle w,v \rangle} o_2)$$

T) *Lo schema* T^i *è valido su* $\mathscr{F}^t$ *sse* R *e* T *sono riflessive.*

4) *Lo schema* 4^i *è valido su* $\mathscr{F}^t$ *sse* R *e* T *sono transitive.*

B) *Lo schema* B^i *è valido su* $\mathscr{F}^t$ *sse* R *e* T *sono simmetriche.*

Dimostrazione. Esercizio. □

6.6 Rigidità

Consideriamo ora il linguaggio $\mathscr{L}^i$ esteso con costanti individuali. Come nei capitoli precedenti f e g sono metavariabili per termini rigidi, ovvero per variabili o costanti individuali.

Proposizione 6.21. *La formula ben formata Rg:*

$$|^{f_1}_{x_1} \dots ^{f_n}_{x_n}\, ^{\vec{t}}_{\vec{z}}|A \to |y_1 \dots y_k\, ^{\vec{t}}_{\vec{z}}|(A[f_1/x_1, \dots, f_n/x_n])$$

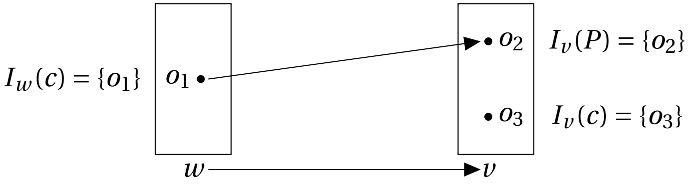
dove $y_1, \dots, y_k$ *sono tutte le variabili che occorrono in* $f_1, \dots, f_n$*,*

non è valida.

Dimostrazione. È sufficiente costruire un contromodello per la seguente istanza di Rg :

$$|^c_x|Px \to |\star|Pc$$

Sia $\mathscr{M}$ il seguente T-modello:



Preso un qualsiasi w-assegnamento σ, risulta che $\sigma \models_w |^c_x|Px$. Infatti l'unica controparte di $I_w(c)$, ovvero o_2, soddisfa P in v. D'altra parte l'oggetto designato da c in v, ovvero o_3, non soddisfa P, dunque $\sigma \not\models_w |\star|Pc$. □

Il problema è che, non avendo noi posto alcun vincolo sull'interpretazione dei termini, il fatto che due mondi siano relati non comporta alcun vincolo sulla relazione di transizione tra gli oggetti che son designati da uno stesso termine: nel linguaggio abbiamo descrizioni definite, ma non costanti individuali. Per questo motivo le azioni di

1. determinare l'oggetto designato da un termine in un mondo per poi spostarsi in un mondo ad esso relato e lì identificare le controparti di tale oggetto e

2. spostarsi direttamente in un mondo relato e andare lì a determinare l'oggetto denotato dal termine

non producono lo stesso risultato.

È però possibile alterare la semantica in maniera tale da rendere la i-formula Rg valida. Innanzitutto dato che Rg^v è una formula valida, sappiamo che le variabili non pongono alcun problema per la validità di Rg; perciò ci sarà sufficiente alterare la semantica delle costanti individuali (che possiamo ora reinserire nel linguaggio).

Per impedire la possibilità di costruire un contromodello per Rg dobbiamo fare in modo tale che, presi due mondi w, v tali che wRv, l'oggetto denotato da una costante c nel mondo v sia una delle v-controparti dell'oggetto denotato da c in w. Per realizzare ciò introduciamo la seguente definizione:

Definizione 6.22 (Rigidità)**.** Una costante c è *rigida* in un $\mathscr{F}^t$-modello $\mathscr{M}$ se e solo se per ogni coppia di mondi $w, v \in W$ risulta che:

$$wRv \quad \Rightarrow \quad I_w(c)\, T_{\langle w,v\rangle}\, I_v(c)$$

Ovvero, se wRv, l'oggetto designato da c in v è una delle v-controparti dell'oggetto designato da c in w.

È immediato verificare che qualora il termine c che compare nell'istanza di Rg usata in 6.21 sia una costante rigida, non sarà più possibile costruire un contromodello per tale formula. Infatti la rigidità comporta che tra le v-controparti dell'oggetto denotato dal temine in w ci sia anche l'oggetto denotato dallo stesso termine in v; da questo segue che ogni modello che falsifichi il conseguente dell'implicazione debba falsificarne anche l'antecedente. Per rendere valida Rg non dobbiamo fare altro che considerare solo i modelli in cui tutte le costanti individuali sono rigide.

Definizione 6.23 (R-modello)**.** Chiameremo R-modello ($\mathscr{M}^r$) ogni $\mathscr{F}^t$-modello in cui tutte le costanti individuali sono rigide.

Diremo inoltre che una formula è *r-valida* ($\models^r$) se e solo se è vera su tutti gli R-modelli.

Definizione 6.24 (Calcolo $\mathsf{R_{im}.K}$)**.** Chiameremo $\mathsf{R_{im}.K}$ il calcolo ottenuto estendendo $\mathsf{Q_{im}.K}$ con l'assioma Rg.

Teorema 6.25 (Validità di $\mathsf{R_{im}.K}$)**.** *Ogni teorema di* $\mathsf{R_{im}.K}$ *è r-valido. Ovvero per ogni i-formula A:*

$$\vdash_{R_{im}.K} A \qquad \Rightarrow \qquad \models^r A$$

Dimostrazione. Basta estendere la dimostrazione data per $\mathsf{Q_{im}.K}$ al caso in cui $A \equiv Rg$.

Supponiamo che esista un modello rigido $\mathscr{M}^r$ su cui Rg non sia vera. Esisterà allora un w-assegnamento σ tale che:[4]

[4] Per semplicità, consideriamo un'istanza di Rg non contenente descrizioni individuali in cui tutte le costanti vengono 'portate dentro il campo di azione dell'operatore'.

1) $\sigma \not\models^r_w |^{f_1}_{x_1} \ldots ^{f_n}_{x_n}| B \rightarrow |y_1 \ldots y_k|(B[f_1/x_1, \ldots, f_n/x_n])$
   dove $y_1, \ldots, y_k$ sono tutte le variabili in $f_1, \ldots, f_n$
2) $\sigma \models^r_w |^{f_1}_{x_1} \ldots ^{f_n}_{x_n}| B$
3) $\sigma \not\models^r_w |y_1 \ldots y_k|(B[f_1/x_1, \ldots, f_n/x_n])$
4) $\forall v\, (wRv \Rightarrow \forall \tau\, (\sigma(f_i)\, T_{\langle w,v\rangle} \tau(x_i)_{1 \leq i \leq n} \Rightarrow \tau \models^r_v B))$
5) $wRs \,\&\, \sigma(y_i)\, T_{\langle w,s\rangle} \mu(y_i)_{1 \leq i \leq k} \,\&\, \mu \not\models^r_s B[f_1/x_1, \ldots, f_n/x_n]$

Dobbiamo mostrare che 5 contraddice 4. Per fare questo risulterà comodo dividere le variabili dalle costanti all'interno di $f_1, \ldots, f_n$. Assumiamo che $f_1, \ldots, f_n \equiv y_1, \ldots, y_k, a_{k+1}, .., a_n$. Possiamo ora riscrivere $B[f_1/x_1, \ldots, f_n/x_n]$ come $B[y_1/x_1, \ldots, y_k/x_k, a_{k+1}/x_{k+1}, \ldots, a_n/x_n]$.

Dal Lemma 6.11 sappiamo che:

$$\mu \not\models^r_s B[y_1/x_1, \ldots, y_k/x_k, a_{k+1}/x_{k+1}, \ldots, a_n/x_n]$$

$$\text{sse}$$

$$\mu^{x_1 \rhd \mu(y_1), \ldots, x_k \rhd \mu(y_k)} \not\models^r_s B[a_{k+1}/x_{k+1}, \ldots, a_n/x_n]$$

D'altra parte grazie alla rigidità di $\mathcal{M}^r$ sappiamo che gli oggetti denotati nel mondo s dalle costanti $a_{k+1}, .., a_n$ sono delle s-controparti degli oggetti denotati nel mondo w dai medesimi termini. Se oltre a questo consideriamo il fatto che Rg^v è r-valida, risulta che l's-assegnamento:

$$\mu^\star =_{df} \mu^{x_1 \rhd \mu(y_1), \ldots, x_k \rhd \mu(y_k), x_{k+1} \rhd \mu(a_{k+1}), \ldots, x_n \rhd \mu(a_n)}$$

è tale che:

$$\sigma(y_i)\, T_{\langle w,s\rangle} \mu^\star(x_i)_{1 \leq i \leq k} \text{ e } \sigma(a_j)\, T_{\langle w,s\rangle} \mu^\star(x_j)_{k+1 \leq j \leq n}$$

Dunque il mondo s e l'assegnamento $\mu^\star$, soddisfando gli antecedenti di 4, sono tali che: $\mu^\star \models^r_s B$. Per il Lemma 6.11 risulta che:

$$\mu^\star \models^r_s B \quad \text{sse} \quad \mu \models^r_s B[f_1/x_1, \ldots, f_n/x_n]$$

Abbiamo così contraddetto quanto detto in 5. □

Proposizione 6.26. *La formula ben formata Crg:*

$$|y_1 \ldots y_k \, {}^{\vec{t}}_{\vec{z}}|(A[f_1/x_1, \ldots f_n/x_n]) \rightarrow |^{f_1}_{x_1} \ldots ^{f_n}_{x_n} \, {}^{\vec{t}}_{\vec{z}}| A$$

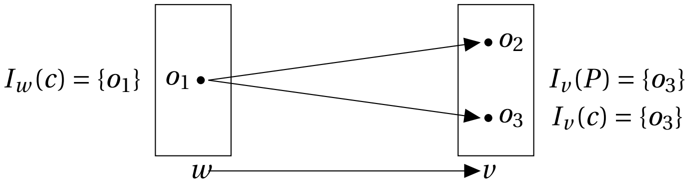
dove $y_1, \ldots, y_k$ sono tutte le variabili che occorrono in $f_1, \ldots, f_n$,

non è r-valida.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente istanza di Crg:

$$|\star|Pc \to |^{c}_{x}|Px$$

sia $\mathscr{M}^r$ tale che:



Il modello è rigido e $\models^r_v Pc$, perciò, $\models^r_w |\star|Pc$. Però il v-assegnamento $\tau^{x \rhd o_2}$ è tale che $\tau^{x \rhd o_2} \not\models^r_v Px$. Dato che o_2 è una v-controparte di $I_w(c)$, risulta che: $\not\models^r_w |^{c}_{x}|Px$. $\square$

In questo caso il problema è che la rigidità è una condizione necessaria, ma non sufficiente per la r-validità di Crg. Questo perché non è in grado di escludere che esistano delle v-controparti di $I_w(c)$ (diverse da $I_v(c)$) che non soddisfino P.

Inoltre, il problema non risiede unicamente nella designazione delle costanti individuali, ma anche in quello delle variabili. Infatti, se Crg fosse r-valida, dovrebbe esserlo anche il suo caso particolare Crg^v, ma questa non è r-valida come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 6.27. *La formula ben formata Crg^v:*

$$|y_1 \ldots y_k|(A[y_1/x_1, \ldots y_n/x_n]) \to |^{y_1}_{x_1} \ldots ^{y_n}_{x_n}|A$$

dove $y_1, .., y_k$ sono tutte le variabili $y_1, \ldots, y_n$, senza ripetizioni,

non è r-valida.

Dimostrazione. È sufficiente considerare il modello considerato nella Proposizione 6.26 e la seguente istanza di SIV (che è un caso particolare di Crg^v):

$$|y|((x_1 = x_2)[y/x_1, y/x_2]) \to |^{y}_{x_1}{}^{y}_{x_2}|x_1 = x_2$$

Sia σ un w-assegnamento tale che $\sigma(y) = o_1$. È immediato vedere che $\sigma \not\models^r_w |y|y = y \to |^{y}_{x_1}{}^{y}_{x_2}|x_1 = x_2$. $\square$

È facile vedere che per rendere r-valida Crg dobbiamo limitare la nostra attenzione ai modelli rigidi basati su t-strutture funzionali. In questo modo siamo sicuri che la (unica) controparte di un oggetto denotato da una costante o da una variabile sia anch'essa denotata dalla stessa costante individuale o variabile, rispettivamente.

Teorema 6.28 (Corrispondenza per Crg)**.** *Crg è r-valida su una $\mathscr{F}^t$ se e solo se T è una funzione parziale.*

Dimostrazione.

$\Leftarrow$) Per assurdo, sia $\mathscr{M}^r$ un modello rigido basato su una $\mathscr{F}^t$ parzialmente funzionale. Esisteranno allora un mondo w e un w-assegnamento σ tali che:

1) $\sigma \not\models^r_w |y_1 ... y_k|(A[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]) \rightarrow |^{t_1}_{x_1} ... ^{t_n}_{x_n}|A$
2) $\sigma \models^r_w |y_1 ... y_k|(A[t_1/x_1, ..., t_n/x_n])$ 1
3) $\sigma \not\models^r_w |^{t_1}_{x_1} ... ^{t_n}_{x_n}|A$ 1
4) $\forall v \forall \tau\, (wRv \,\&\, \sigma(y_i) T_{\langle w,v\rangle} \tau(y_i)_{1\leq i\leq k} \Rightarrow \tau \models^r_v A[t_1/x_1, ..., t_n/x_n])$ 2
5) $wRs \,\&\, \sigma(t_i) T_{\langle w,s\rangle} \mu(x_i)_{1\leq i\leq n} \,\&\, \mu \not\models^r_s A$ 3

Si consideri l's-assegnamento:

$$\mu^\star =_{df} \mu^{y_i \triangleright \mu(x_i)_{1\leq i\leq k}}$$

Tale assegnamento e il mondo s soddisfano gli antecedenti di 4. Se riscriviamo $[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$ come $[y_1/x_1, ..., y_k/x_k, s_{k+1}/x_{k+1}, ..., s_n/x_n]$, abbiamo che:

$$\mu^\star \models^r_s A[y_1/x_1, ..., y_k/x_k, s_{k+1}/x_{k+1}, ..., s_n/x_n]$$

Essendo $\mathscr{M}^r$ basato su una $\mathscr{F}^t$ parzialmente funzionale, per ogni i tale che $1 \leq i \leq k$, $\mu^\star(x_i) = \mu^\star(y_i)$ (sono entrambi controparti di $\sigma(y_i)$). Inoltre, per ogni i tale che $1 \leq i \leq k$, risulta che $\mu^\star(x_i) = \mu(x_i)$. Da questo segue:

$$\mu \models^r_s A[s_{k+1}/x_{k+1}, ..., s_n/x_n]$$

Dato che $\mathscr{M}^r$ è rigido, sappiamo che, per ogni j tale che $k+1 \leq j \leq n$, se $\sigma(s_j) T_{\langle w,s\rangle} \mu(x_j)$, allora $\mu(x_j) = I_s(s_j)$. Da questo, per il Lemma 6.11, risulta che:

$$\mu \models^r_s A[s_{k+1}/x_{x+1}, ..., s_n/x_n] \text{ sse } \mu^{x_j \triangleright I_s(s_j)_{k+1\leq j\leq n}} \models^r_s A \text{ sse } \mu \models^r_s A$$

Abbiamo così ottenuto una contraddizione con quanto stabilito in 5.

$\Rightarrow$) Si veda la dimostrazione della Proposizione 6.27. □

Teorema 6.29 (Corrispondenza per FCS)**.** *FCS è r-valida su una $\mathscr{F}^t$ se e solo se T è una funzione totale. Ovvero:*

$$\mathscr{F}^t \models |v_1 \ldots v_k\,{}^{\vec{t}}_{\vec{z}}|(A[f_1/x_1,\ldots,f_n/x_n]) \leftrightarrow |{}^{f_1}_{x_1} \ldots {}^{f_n}_{x_n}\,{}^{\vec{t}}_{\vec{z}}|A$$

dove $v_1,\ldots,v_k$ sono tutte le variabili occorrenti in $A[f_1/x_1,\ldots,f_n/x_n]$

$$\textit{sse} \quad \forall w,v\,(wRv \Rightarrow \forall o_1 \in U_w \exists! o_2 \in U_v\,(o_1\,T_{\langle w,v\rangle}\,o_2))$$

Dimostrazione. FCS equivale a $Rg + Crg + Shrt$. Dunque il teorema è una conseguenza immediata delle derivazioni 6.4.2.4 e 6.4.2.5, che mostrano che $Shrt$ e GF^i sono interderivabili, e dei Teoremi 6.28 e 6.17. □

6.7 *Completezza di* $\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$

Per dimostrare le completezza di $\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$ utilizzeremo una strategia utilizzata per la prima volta in [Braüner e Ghilardi, 2007]. Tale strategia consiste nel ridurre il problema a quello della completezza di una struttura di subordinazione,[5] in cui ad ogni punto della struttura di subordinazione viene associato un modello per una teoria (classica) del primo ordine che simuli la semantica delle transizioni. La dimostrazione procede attraverso i seguenti passaggi:

1. Innanzitutto, per brevità, si considera il linguaggio $\mathscr{L}^-$ ottenuto a partire da $\mathscr{L}^i$ eliminando i simboli logici $\neg, \wedge, \vee, \exists, \langle{}^{t_1}_{x_1} \ldots {}^{t_n}_{x_n}\rangle$ (sfruttando le usuali equivalenze).

2. Si costruisce un linguaggio classico del primo ordine $\mathscr{L}^c$ che permette di tradurre il linguaggio $\mathscr{L}^-$ (con costanti individuali).

3. Si definisce una teoria del primo ordine $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$ sul linguaggio $\mathscr{L}^c$ in maniera tale che, per ogni teorema A di $\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$, la $\mathscr{L}^c$-formula A^c sia un teorema di $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$.

[5] Il temine è stato introdotto in [Hughes e Cresswell, 1984, §7]; viene qui usato con un significato diverso.

4. Si definisce la nozione di $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$-modello e si definisce una *relazione ammissibile* tra gli assegnamenti di tali modelli in maniera tale che essa preservi la relazione di transizione tra due punti di un $\mathscr{F}^r$-modello.

5. Si mostra come ogni volta che che la $\mathscr{L}^c$-traduzione di una formula modale indiciata di $\mathscr{L}^-$ sia falsificata da un $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$-modello, sia possibile costruire un altro $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$-modello che falsifichi A^c tale che esista una relazione ammissibile tra i due.

6. Si costruisce uno $\mathscr{F}^r$-modello basato su una gerarchia di $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$-modelli definita in maniera tale che qualora una formula A^c non sia teorema di $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$, allora la i-formula A non sia teorema di $\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$.

6.7.1 Teoria classica del primo ordine $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$

Definizione 6.30 (Linguaggio del primo ordine $\mathscr{L}^c$)**.** Il linguaggio $\mathscr{L}^c$ è definito a partire dal linguaggio $\mathscr{L}^i$ come segue:

- $\mathscr{L}^c$ contiene tutto l'insieme di simboli descrittivi di $\mathscr{L}^i$.

- $\mathscr{L}^c$ contiene i simboli logici: $\bot, \to, \forall$. $\mathscr{L}^c$ contiene inoltre i simboli ausiliari:(,).

- Per ogni fbf di $\mathscr{L}^i$ del tipo:

  $$|x_1, ..., x_n|A$$

  $\mathscr{L}^c$ contiene la lettera predicativa n-aria:

  $$P_{|x_1,...,x_n|A}$$

Definizione 6.31 ($\mathscr{L}^-$-formula)**.** Una $\mathscr{L}^i$ formula in cui occorrano solamente gli operatori $\bot, \to, \forall$ e $|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}|$ è una $\mathscr{L}^-$-formula.

È immediato vedere che una $\mathscr{L}^i$-formula in cui ci siano occorrenze di $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\langle^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}\rangle$ è riscrivibile in una $\mathscr{L}^-$-formula equivalente. Ad esempio,

$$\langle^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}\rangle A$$

è semanticamente equivalente a

$$(|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}|A \to \bot) \to \bot$$

che è una $\mathscr{L}^-$ formula (a condizione che A lo sia). Per questo motivo, senza perdita di generalità, chiameremo i-formula una $\mathscr{L}^-$-formula.

Definizione 6.32 (Regola di c-traduzione)**.** A ogni formula A di $\mathscr{L}^-$ associamo la formula classica A^c di $\mathscr{L}^c$ secondo la seguente regola di c-traduzione:

- $(\bot)^c \quad = \quad \bot$
- $(Pt_1,...,t_n)^c \quad = \quad Pt_1,...,t_n$
- $(t_i = t_j)^c \quad = \quad t_i = t_j$
- $(B \to C)^c \quad = \quad B^c \to C^c$
- $(\forall x B)^c \quad = \quad \forall x(B^c)$
- $(|^{t_1}_{x_1} \dots ^{t_n}_{x_n}|B)^c \quad = \quad P_{|x_1 \dots x_n|B}\, t_1,...,t_n$

Definizione 6.33 ($\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$)**.** $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$ è una teoria classica del primo ordine i cui assiomi sono tutte le $\mathscr{L}^c$-formule dell'insieme:

$$\{A^c : \ \vdash_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}} A\}$$

e le cui regole di inferenza sono: MP, Gen e $Sost$.

È immediato verificare che gli assiomi di $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$ sono tutte (e sole) le c-traduzioni dei teoremi di $\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$ (rispetto al linguaggio $\mathscr{L}^-$). Inoltre le sue regole sono le regole di $\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$ fatta eccezione per N.

Lemma 6.34. *Siano* Γ *e* A *un insieme di i-formule e una i-formula, rispettivamente, e siano* Γ^c *e* A^c *le rispettive* c*-traduzioni. Allora:*

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}} A \qquad \textit{sse} \qquad \Gamma^c \vdash_{\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}} A^c$$

Dimostrazione. Data la Definizione 6.14, dobbiamo dimostrare che esiste un insieme finito di i-formule $B_1,...,B_n \in \Gamma$ e un corrispondente insieme $B_1^c,\dots,B_n^c \in \Gamma^c$ tali che:

$$\vdash_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}} B_1 \wedge ... \wedge B_n \to A \quad \text{sse} \quad \vdash_{\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}} B_1^c \wedge ... \wedge B_n^c \to A^c$$

$\Rightarrow$) Ogni c-traduzione di un teorema di $\mathsf{R_{im}.K}$ è per costruzione un assioma di $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$, dunque lo sarà anche il caso particolare in questione.

$\Leftarrow$) Procediamo per induzione sulla costruzione della $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$-derivazione. $B_1^c \wedge ... \wedge B_n^c \to A^c$ è un assioma oppure un teorema di $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$. Nel primo caso, per costruzione, $B_1 \wedge ... \wedge B_n \to A$ è un teorema di $\mathsf{R_{im}.K}$. Nel secondo caso, la formula è stata ottenuta attraverso *MP, Gen* oppure *Sost* a partire da teoremi di $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$. Queste regole appartengono anche a $\mathsf{R_{im}.K}$, dunque $B_1 \wedge ... \wedge B_n \to A$ è derivabile da teoremi di $\mathsf{R_{im}.K}$ attraverso regole di $\mathsf{R_{im}.K}$. □

Definizione 6.35 ($\mathsf{C_{R_{im}.K}}$-modelli)**.** Un modello per la teoria classica del primo ordine $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$ è una coppia $w = \langle U_w, I_w \rangle$ composta da un insieme non vuoto di oggetti U_w (il dominio di w) e da una funzione di interpretazione I_w tale che la chiusura universale dei teoremi di $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$ sia vera su U_w.

Useremo le lettere $w, v, ...$ per denotare $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$-modelli e $\sigma, \tau, ...$ per denotare w-assegnamenti. Con $\langle \sigma, U_w, I_w \rangle \models A^c$ (o, più semplicemente, con $\langle \sigma, w \rangle \models A^c$) indicheremo il fatto che A^c è *soddisfatta* nel $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$-modello w dal w-assegnamento σ. Definiremo le nozioni di verità e validità nel modo usuale.

6.7.2 Relazioni ammissibili

Definizione 6.36 ($T_{\langle w,v \rangle}$)**.** Siano w e v due qualsiasi $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$-modelli. Chiameremo *relazione ammissibile* ogni relazione $T_{\langle w,v \rangle} \subseteq U_w \times U_v$ che soddisfi i due seguenti requisiti:

1. Per ogni costante individuale c:

$$I_w(c)\, T_{\langle w,v \rangle}\, I_v(c)$$

2. Per ogni i-formula A contenente al più le variabili libere $y_1, ..., y_k$ e , per ogni w-assegnamento σ e per ogni v-assegnamento τ,

$$\text{se} \quad \sigma(y_i)\, T_{\langle w,v \rangle}\, \tau(y_i),\ 1 \leq i \leq k$$

$$\text{allora} \quad \langle \sigma, w \rangle \models P_{|y_1 ... y_k|A}\, y_1, ..., y_k \quad \Rightarrow \quad \langle \tau, v \rangle \models A^c.$$

Lemma 6.37 (Esistenza di relazioni ammissibili)**.** *Siano w e v due $\mathsf{C}_{\mathsf{R_{im}.K}}$-modelli e siano σ e τ rispettivamente un w-assegnamento e un v-assegnamento. Per ogni i-formula A contenente al più le variabili $x_1,...,x_n$, se:*

$$\langle\sigma, w\rangle \models P_{|x_1...x_n|A}x_1,...,x_n \quad \Rightarrow \quad \langle\tau, v\rangle \models A^c,$$

allora esiste una relazione ammissibile $T_{\langle w,v\rangle}$ tale che:

$$\sigma(x_i)T_{\langle w,v\rangle}\tau(x_i)_{1\leq i\leq n}.$$

Dimostrazione. Si definisca $T_{\langle w,v\rangle}$ come segue:

$$eT_{\langle w,v\rangle}e' \quad \text{sse} \quad \text{esiste un termine rigido } f \text{ t.c.: } I_w^\sigma(f) = e \text{ e } I_v^\tau(f) = e'$$

Dobbiamo mostrare che una relazione ammissibile così definita soddisfa le due condizioni della Definizione 6.36.

Innanzitutto $I_w(c)T_{\langle w,v\rangle}I_v(c)$ vale (per ciascuna costante c) per costruzione di $T_{\langle w,v\rangle}$.

Passiamo ora alla seconda condizione. Sia A una i-formula le cui variabili libere sono al massimo $y_1,...,y_k$. Siano π e μ rispettivamente un w-assegnamento e un v-assegnamento tali che:

B) $\pi_w(y_i)T_{\langle w,v\rangle}\mu(y_i)_{1\leq i\leq k}$
C) $\langle\pi, w\rangle \models P_{|y_1...y_k|A}y_1,...,y_k$

Dobbiamo mostrare che:

$$\langle\mu, v\rangle \models A^c$$

Per costruzione di $T_{\langle w,v\rangle}$, sappiamo che esistono termini rigidi (ovvero variabili o costanti individuali) $f_1,...,f_k$ tali che

D) $I_w^\sigma(f_i) = \pi(y_i)_{1\leq i\leq k}$

Se così non fosse, infatti, la condizione B non potrebbe essere soddisfatta. Allora, A e C implicano che:

$$\langle\pi^{y_i\rhd I_w^\sigma(f_i)_{1\leq i\leq k}}, w\rangle \models P_{|y_1...y_k|A}y_1,...,y_k$$

Il che è equivalente a:

$$\langle \sigma^{y_i \rhd I^{\sigma}_{w}(f_i)_{1\le i\le k}}, w\rangle \models P_{|y_1...y_k|A}\, y_1, ..., y_k$$

Da questo, per l'analogo classico del Lemma 3.19, otteniamo che:

$$(\star) \qquad \langle \sigma, w\rangle \models P_{|y_1...y_k|A}\, f_1, ..., f_k$$

Inoltre sappiamo che Rg è un assioma di $\mathsf{R_{im}.K}$, ovvero:

$$\vdash_{\mathsf{R_{im}.K}} |^{f_1}_{y_1} ... ^{f_k}_{y_k}|A \to |x_1...x_n|(A[f_1/y_1, ..., f_k/y_k])$$

dove $x_1, ..., x_n$ sono tutte le variabili occorrenti in $f_1, ..., f_n$.

Allora, per 6.33, abbiamo che la sua c-traduzione Rg^c è un assioma di $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$, ovvero:

$$\vdash_{\mathsf{C_{R_{im}.K}}} P_{|y_1...y_k|A}\, f_1, ..., f_k \to P_{|x_1...x_n|(A[f_1/y_1,...,f_k/y_k])}\, x_1, ..., x_n$$

Da questo e da $(\star)$, per MP, otteniamo che:

$$\langle \sigma, w\rangle \models P_{|x_1...x_n|(A[f_1/y_1,...,f_k/y_k])}(x_1, ..., x_n)$$

Per ipotesi del lemma sappiamo che questo implica che

$$\langle \tau, v\rangle \models (A[f_1/y_1, ..., f_k/y_k])^c$$

Il che equivale a:

$$\langle \tau, v\rangle \models A^c[f_1/y_1, ..., f_k/y_k]$$

Da questo, per l'analogo classico del Lemma 3.19, segue che:

$$\langle \tau^{y_i \rhd I^{\tau}_{v}(f_i)_{1\le i\le k}}, v\rangle \models A^c$$

Per costruzione di $T_{\langle w,v\rangle}$ sappiamo che $I^{\tau}_{v}(f_i) = \mu(y_i)$, dove i è tale che $1 \le i \le k$.
Allora, dato che tutte le variabili in A sono comprese in $y_1, ..., y_k$, possiamo concludere che $\langle \mu, v\rangle \models A^c$. $\square$

Lemma 6.38. *Siano w un $\mathsf{C_{R_{im}.K}}$-modello, σ un w-assegnamento e $|x_1...x_n|A$ una i-formula tale che $\langle \sigma, w\rangle \not\models P_{|x_1...x_n|A}\, x_1, ..., x_n$. Allora:*

1. *L'insieme di formule classiche del primo ordine:*

$$\Gamma = \{\neg A^c\} \cup \{B^c : \langle \sigma, w\rangle \models P_{|x_1 \dots x_n|B} x_1, \dots, x_n \}$$

dove B^c *contiene al più le variabili* $x_1, \dots, x_n$,

è $\mathsf{C}_{\mathsf{R_{im}.K}}$*-consistente.*

2. *Esistono un* $\mathsf{C}_{\mathsf{R_{im}.K}}$*-modello* v *e un* v*-assegnamento* τ *tali che:*

$$\langle \tau, v\rangle \models \Gamma.$$

3. *Esiste una relazione ammissibile* $T_{\langle w,v\rangle}$ *tale che:*

$$\sigma(x_i)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(x_i)_{1\leq i\leq n}.$$

Dimostrazione.

1. Si assuma *per reductio* che Γ sia $\mathsf{C}_{\mathsf{R_{im}.K}}$-inconsistente, ciò significa che esistono $B_1^c, \dots, B_k^c$ tali che:

$$\vdash_{\mathsf{C}_{\mathsf{R_{im}.K}}} B_1^c \wedge \dots \wedge B_k^c \to A^c$$

Per il Lemma 6.34, questo comporta che:

$$\vdash_{\mathsf{R_{im}.K}} B_1 \wedge \dots \wedge B_k \to A$$

Applicando RM^i, otteniamo che:

$$\vdash_{\mathsf{R_{im}.K}} |x_1 \dots x_n| B_1 \wedge \dots \wedge |x_1 \dots x_n| B_k \to |x_1 \dots x_n| A$$

Applicando il Lemma 6.34 (nella direzione opposta) otteniamo:

$$\vdash_{\mathsf{C}_{\mathsf{R_{im}.K}}} P_{|x_1 \dots x_n|B_1} x_1, \dots, x_n \wedge \dots \wedge P_{|x_1 \dots x_n|B_k} x_1, \dots, x_n \to P_{|x_1 \dots x_n|A} x_1, \dots, x_n$$

Dunque:

$$\langle \sigma, w\rangle \models P_{|x_1 \dots x_n|A} x_1, \dots, x_n$$

Ma questo contraddice l'ipotesi del lemma.

2. Per la teoria classica dei modelli sappiamo che se un insieme di formule classiche è consistente, allora ammette un modello. Dunque Γ, essendo consistente, ammette un modello.

3. Segue da quanto appena stabilito tramite il Lemma 6.37.

□

6.7.3 *Gerarchie di modelli e completezza*

Definizione 6.39. Sia $w = \langle \sigma, U_w, I_w \rangle$ una tripla composta da un $\mathsf{C}_{\mathsf{R_{im}}.\mathsf{K}}$-modello $\langle U_w, I_w \rangle$ e da un $\langle U_w, I_w \rangle$-assegnamento σ, chiameremo *gerarchia di modelli generata da w* una coppia $\langle S^w, \Sigma^w \rangle$, dove:

- S^w è un insieme definito per induzione come segue:

  1. $\langle \sigma, U_w, I_w \rangle \in S^w$
  2. Se $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \in S^w$, allora, per ogni formula ben formata di $\mathscr{L}^-$ del tipo $\forall x A$,
     (a) se $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \not\models \forall x A^c$, allora per qualche $o \in U_v$ tale che $\langle \mu^{x \triangleright o}, U_v, I_v \rangle \not\models A^c$, vale $\langle \mu^{x \triangleright o}, U_v, I_v \rangle \in S^w$;
     (b) se $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \models \forall x A^c$, allora per ogni $o \in U_v$ risulta che: (i) $\langle \mu^{x \triangleright o}, U_v, I_v \rangle \models A^c$ e (ii) $\langle \mu^{x \triangleright o}, U_v, I_v \rangle \in S^w$.
  3. Se $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \in S^w$, allora, per ogni formula ben formata di $\mathscr{L}$ del tipo $|\vec{x}|A$ tale che $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \not\models P_{|\vec{x}|A}\vec{x}$, per qualche tripla $\langle \tau, U_z, I_z \rangle$ tale che:
     (a) $\langle \tau, U_z, I_z \rangle \models \{B^c : \langle \mu, U_v, I_v \rangle \models P_{|\vec{y}|B}\vec{y}\} \cup \{\neg A^c\}$, e
     (b) $\mu(\vec{x})\, T_{\langle v,z \rangle}\, \tau(\vec{x})$

     risulta che $\langle \tau, U_z, I_z \rangle \in S^w$.

- Σ^w è un sottoinsieme di $S^w \times S^w$ tale che $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \Sigma \langle \tau, U_z, I_z \rangle$ se e solo se tali triple rispettano le condizioni poste al punto 3 della definizione di S^w.

Osservazione 6.40. L'esistenza delle triple che soddisfano il punto 2 è garantita dalla teoria classica dei modellli, di quelle che soddisfano il punto 3, invece, dal Lemma 6.38.

Teorema 6.41 (Completezza di $\mathsf{R_{im}.K}$)**.** *Tutte le i-formule r-valide sono anche teoremi di* $\mathsf{R_{im}.K}$. *Ovvero per ogni $\mathscr{L}^-$-formula A vale quanto segue:*

$$\models^r A \qquad \Rightarrow \qquad \vdash_{R_{im}.K} A$$

Dimostrazione. Proveremo il teorema per contrapposizione, ovvero proveremo che se $\mathsf{R_{im}.K} \nvdash A$ allora esiste un $\mathscr{F}^r$-modello $\mathscr{M}$ tale che: $\mathscr{M} \not\models A$.

Sia $\langle S^w, \Sigma^w \rangle$ una gerarchia di modelli generata da una tripla $w = \langle \sigma, U_w, I_w \rangle$ tale che $w \models \neg A^c$. Sia $\mathscr{M}$ un $\mathscr{F}^r$-modello costruito come segue:

- $W = \{\langle U_v, I_v \rangle :$ per qualche μ, $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \in S^w\}$:
- U è tale che $U(\langle U_v, I_v \rangle) = U_v$:
- $R \subseteq W \times W$ è tale che $\langle U_v, I_v \rangle R \langle U_z, I_z \rangle$, sse $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \Sigma \langle \tau, U_z, I_z \rangle$, per qualche μ, τ;
- $T = \{\langle o_1, o_2 \rangle :$ per qualche $\langle \mu, U_v, I_v \rangle$ e qualche $\langle \tau, U_z, I_z \rangle$, risulta che:

  $i)$ $o_1 \in U_v$

  $ii)$ $o_2 \in U_z$

  $iii)$ $\langle \mu, U_v, I_v \rangle \Sigma \langle \tau, U_z, I_z \rangle$

  $iv)$ $o_1 = \mu(x)$

  $v)$ $o_2 = \tau(x)$ e

  $vi)$ $\mu(x) T_{\langle v,z \rangle} \tau(x)$;
- I è tale che $I(\langle U_v, I_v \rangle) = I_v$.

Quello che dobbiamo mostrare è che l' $\mathscr{F}^r$-modello $\mathscr{M}$ così definito è tale che: $\mathscr{M} \not\models A$. Per fare questo dimostreremo il seguente lemma:

Lemma 6.42. *Per ogni $w \in W$ e per ogni $D \in \mathscr{L}$ abbiamo che:*

$$\sigma \models^r_w D \qquad sse \qquad \langle \sigma, U_w, I_w \rangle \models D^c$$

La dimostrazione è per induzione su D. Presentiamo solo il caso in cui:

$$D \equiv |^{t_m}_{y_m} \ldots ^{t_m}_{y_m}| B$$

Dove $(fv(t_1) \cup \ldots \cup fv(t_m)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

$\Leftarrow$) Si assuma che:

$$\sigma \nvDash^r_w |^{t_m}_{y_m} \ldots ^{t_m}_{y_m}| B$$

Sia inoltre $\pi = \sigma^{y_i \triangleright \sigma(t_i)_{1 \leq i \leq m}}$, allora, per il Lemma 6.11,

$$\pi \nvDash^r_w |y_1 \ldots y_m| B$$

Perciò, esistono un mondo $v \in W$ e un v-assegnamento τ tali che: (i) $\sigma(y_i) T_{\langle w,v \rangle} \tau(y_i)$ per ogni i tale che $1 \leq i \leq m$, e (ii) $\tau \nvDash^r_v B$. Per ipotesi d'induzione, da (ii) segue che:

$$\text{(iii)} \qquad \langle \tau, U_v, I_v \rangle \nvDash B^c$$

Per la Definizione 6.39, da (i) e (iii) segue che $\langle S^w, \Sigma^w \rangle$ è tale che esiste una tripla $\langle \pi, U_w, I_w \rangle \in S^w$ tale che:

$$\langle \pi, U_w, I_w \rangle \nvDash P_{|y_1 \ldots y_m| B}\, y_1, \ldots, y_m$$

Allora, per come è stato definito π, abbiamo che:

$$\langle \sigma, U_w, I_w \rangle \nvDash P_{|y_1 \ldots y_m| B}\, t_1, \ldots, t_m$$

$\Rightarrow$) Si assuma che:

$$\langle \sigma, U_w, I_w \rangle \nvDash P_{|y_1 \ldots y_m| B}\, t_1, \ldots, t_m$$

Sia $\pi = \sigma^{y_i \triangleright \sigma(t_i)_{1 \leq i \leq m}}$, allora:

$$\langle \pi, U_w, I_w \rangle \nvDash P_{|y_1 \ldots y_m| B}\, y_1, \ldots, y_m$$

Per la Definizione 6.39, esiste una tripla $\langle \tau, U_v, I_v \rangle \in S^w$ tale che:

$$\text{(1)} \quad \pi(y_i) T_{\langle w,v \rangle} \tau(y_i)_{1 \leq i \leq n} \qquad \text{(2)} \quad \langle \tau, U_v, I_v \rangle \nvDash B^c$$

Per ipotesi d'induzione, da 2 segue che:

$$\tau \nvDash_v B$$

Da questo e da 1 segue che:

$$\pi \not\models_w |y_1 \dots y_m| B$$

Per come è stato definito π questo equivale a:

$$\sigma \not\models_w |^{t_1}_{y_1} \dots ^{t_m}_{y_m}| B$$

□

6.8 *Completezza di* $\mathsf{Q_{im}.K}$

Il teorema di completezza per $\mathsf{Q_{im}.K}$ è ottenibile a partire dal corrispondente teorema per $\mathsf{R_{im}.K}$; l'unica differenza è che, non avendo più a che fare coi soli modelli rigidi, dobbiamo scaricare la condizione 6.36.1 dalla definizione di relazione ammissibile.

Definizione 6.43. Siano w e v due qualsiasi $C_{\mathsf{Q_{im}.K}}$-modelli. Chiameremo *relazione ammissibile* $T_{\langle w,v\rangle}$ ogni relazione $T_{\langle w,v\rangle} \subseteq U_w \times U_v$ tale che:

Per ogni fbf A di $\mathscr{L}^-$ contenente al più le variabili libere $y_1, \dots, y_k$, per ogni w-assegnamento σ e per ogni v-assegnamento τ,

$$\text{se} \quad \sigma(y_i)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(y_i)_{1\le i\le k},$$

$$\text{allora} \quad \langle \sigma, w\rangle \models P_{|y_1\dots y_k|A}\, y_1, \dots, y_k \quad \Rightarrow \quad \langle \tau, v\rangle \models A^c.$$

Lemma 6.44 (Esistenza di relazioni ammissibili)**.** *Siano w e v due $C_{\mathsf{Q_{im}.K}}$-modelli e siano σ e τ rispettivamente un w-assegnamento e un v-assegnamento. Per ogni formula A di $\mathscr{L}^-$ contenente al più le variabili $x_1, \dots, x_n$, se:*

$$\langle \sigma, w\rangle \models P_{|x_1\dots x_n|A}\, x_1, \dots, x_n \quad \Rightarrow \quad \langle \tau, v\rangle \models A^c,$$

allora esiste una relazione ammissibile $T_{\langle w,v\rangle}$ tale che:

$$\sigma(x_i)\, T_{\langle w,v\rangle}\, \tau(x_i)_{1\le i\le n}.$$

Dimostrazione. Si definisca $T_{\langle w,v\rangle}$ come segue:

$$eT_{\langle w,v\rangle}e' \quad \text{sse} \quad \text{esistono } \sigma, \tau \text{ e } x \text{ tali che: } \sigma(x) = e \text{ e } \tau(x) = e'$$

Dobbiamo mostrare che la relazione $T_{\langle w,v\rangle}$ così definita è una relazione ammissibile.
Sia A una formula di $\mathscr{L}^-$ le cui variabili libere siano al massimo $y_1, ..., y_k$.
Siano π e μ rispettivamente un w-assegnamento e un v-assegnamento tali che:

$A)$ $\pi(y_i)T_{\langle w,v\rangle}\mu(y_i)_{1\leq i\leq k}$
$B)$ $\langle \pi, w\rangle \models P_{|y_1...y_k|A}y_1, ..., y_k$

Dobbiamo mostrare che:

$$\langle \mu, v\rangle \models A^c$$

Per costruzione di $T_{\langle w,v\rangle}$, sappiamo che esistono variabili $x_1, ..., x_k$ tali che, per ogni i: $1 \leq i \leq k$, si ha che: (i) $\sigma(x_i) = \pi(y_i)$ e (ii) $\tau(x_i) = \mu(y_i)$. Allora:

$$\langle \pi^{y_i \rhd \sigma(x_i)_{1\leq i\leq k}}, w\rangle \models P_{|y_1...y_k|A}y_1, ..., y_k$$

Dato che $y_1, ..., y_k$ sono tutte le variabili (eventualmente) presenti in A, allora:

$$\langle \sigma^{y_i \rhd \sigma(x_i)_{1\leq i\leq k}}, w\rangle \models P_{|y_1...y_k|A}y_1, ..., y_k$$

e, perciò,

$$(\star) \qquad \langle \sigma, w\rangle \models P_{|y_1...y_k|A}x_1, ..., x_k$$

Inoltre sappiamo che Rg^v è un assioma di $\mathsf{Q_{im}.K}$, ovvero:

$$\vdash_{R_{im}.K} |^{x_1}_{y_1}...^{x_k}_{y_k}|A \to |x_1...x_n|(A[x_1/y_1, ..., x_k/y_k])$$

$$\text{dove } x_1, ..., x_n \text{ sono tutte le variabili in } x_1, ..., x_k$$

Allora, per 6.33, abbiamo che la sua c-traduzione $(Rg^v)^c$ è un assioma di $\mathsf{C_{Q_{im}.K}}$. Da questo e da $(\star)$, per MP, otteniamo che:

$$\langle \sigma, w\rangle \models P_{|x_1...x_n|(A[x_1/y_1,...,x_k/y_k])}x_1, ..., x_n$$

Per ipotesi del lemma sappiamo che:

$$\langle \sigma, w\rangle \models P_{|x_1\ldots x_n|(A[x_1/y_1,\ldots,x_k/y_k])}x_1,\ldots,x_n \quad \Rightarrow \quad \langle \tau, v\rangle \models (A[x_1/y_1,\ldots,x_k/y_k])^c$$

Allora otteniamo che $\langle \tau, v\rangle \models (A[x_1/y_1,\ldots,x_k/y_k])^c$, ma questo equivale a:

$$\langle \tau, v\rangle \models A^c[x_1/y_1,\ldots,x_k/y_k]$$

Da questo segue che:

$$\langle \tau^{y_i \rhd \tau(x_i)_{1\le i\le k}}, v\rangle \models A^c$$

Per costruzione di $T_{\langle w,v\rangle}$ sappiamo che $\tau(x_i) = \mu(y_i)$, dove i è tale che $1 \le i \le k$. Allora, dato che tutte le variabili in A sono comprese in $y_1,\ldots,y_k$, possiamo concludere che $\langle \mu, v\rangle \models A^c$. □

Utilizzando il Lemma 6.38 e la Definizione 6.39, siamo ora in grado di provare il teorema di completezza di $\mathsf{Q_{im}.K}$.

Teorema 6.45 (Completezza di $\mathsf{Q_{im}.K}$)**.** *Tutte le i-formule valide sono teoremi di* $\mathsf{Q_{im}.K}$.

Dimostrazione. Vedi la dimostrazione del teorema 6.41. □

6.9 Completezza di alcune estensioni

Definizione 6.46.

- La logica $\mathsf{R_{im}.D}$ ($\mathsf{Q_{im}.D}$) è ottenuta estendendo $\mathsf{R_{im}.K}$ ($\mathsf{Q_{im}.K}$) con lo schema D^i.

- La logica $\mathsf{R_{im}.T}$ ($\mathsf{Q_{im}.T}$) è ottenuta estendendo $\mathsf{R_{im}.K}$ ($\mathsf{Q_{im}.K}$) con lo schema T^i.

- La logica $\mathsf{R_{im}.K4}$ ($\mathsf{Q_{im}.K4}$) è ottenuta estendendo $\mathsf{R_{im}.K}$ ($\mathsf{Q_{im}.K}$) con lo schema 4^i.

- La logica $\mathsf{R_{im}.S4}$ ($\mathsf{Q_{im}.S4}$) è ottenuta estendendo $\mathsf{R_{im}.K}$ ($\mathsf{Q_{im}.K}$) con gli schemi T^i e 4^i.

- La logica $\mathsf{R_{im}.B}$ ($\mathsf{Q_{im}.B}$) è ottenuta estendendo $\mathsf{R_{im}.K}$ ($\mathsf{Q_{im}.K}$) con gli schemi T^i e B^i.

- La logica $\mathsf{R_{im}.S5}$ ($\mathsf{Q_{im}.S5}$) è ottenuta estendendo $\mathsf{R_{im}.K}$ ($\mathsf{Q_{im}.K}$) con gli schemi T^i, 4^i e B^i.

Teorema 6.47 (Completezza per estensioni di $\mathsf{R_{im}.K}$)**.**

- $\mathsf{R_{im}.D}$ *è completa rispetto alla classe degli R-modelli basati su T-strutture seriali;*

- $\mathsf{R_{im}.T}$ *è completa rispetto alla classe degli R-modelli basati su T-strutture riflessive;*

- $\mathsf{R_{im}.K4}$ *è completa rispetto alla classe degli R-modelli basati su T-strutture transitive;*

- $\mathsf{R_{im}.S4}$ *è completa rispetto alla classe degli R-modelli basati su T-strutture riflessive e transitive;*

- $\mathsf{R_{im}.B}$ *è completa rispetto alla classe degli R-modelli basati su T-strutture riflessive e simmetriche;*

- $\mathsf{R_{im}.S5}$ *è completa rispetto alla classe degli R-modelli basati su T-strutture riflessive, transitive e simmetriche.*

Dimostrazione. Per ciascuna logica $\mathsf{L_{im}}$ considerata nel teorema procediamo come nel Capitolo 6.7. Rimane solamente da mostrare che le gerarchie di $\mathsf{C_{L_{im}}}$-modelli $\langle S^w, \Sigma^w \rangle$ (vedi Definizione 6.39) determinano una T-struttura nella classe appropriata. Per fare questo mostreremo che gli assiomi $D^i, T^i, 4^i$ e B^i permettono di considerare una relazione ammissibile che sia seriale, riflessiva, transitiva e simmetrica, rispettivamente.

Se $D^i := |\vec{x}|A \to \langle \vec{x} \rangle A$ è un assioma di $\mathsf{L_{im}}$, possiamo mostrare che Σ^w è seriale come segue. Preso un qualsiasi $\langle \mu, v \rangle \in S^w$ sappiamo che $\langle \mu, v \rangle \nvDash P_{|\vec{x}|\perp}\vec{x}$. Dunque, per la definizione di Σ^w, esiste una tripla $\langle \tau, u \rangle \in S^w$ tale che $\langle \mu, v \rangle \Sigma \langle \tau, u \rangle$. Possiamo perciò concludere che l'R-modello costruito a partire da una gerarchia di $\mathsf{C_{L_{im}}}$-modelli (vedi Teorema 6.41) è basato su una T-struttura seriale.

Se $T^i := |\vec{x}|A \to A$ è un assioma di $\mathsf{L_{im}}$, allora è immediato vedere che esiste una gerarchia di modelli tale che, per ogni $\langle \mu, v \rangle \in S^w$, $\langle \mu, v \rangle \Sigma \langle \mu, v \rangle$. Infatti, se qualche enunciato di forma $|\vec{x}|A$ è soddisfatto da $\langle \mu, v \rangle$, allora, dato che $P_{|\vec{x}|A}\vec{x} \to A$ è un teorema di $\mathsf{C_{R_{im}.T}}$, anche A è soddisfatto da $\langle \mu, v \rangle$. Dunque esiste una relazione ammissibile $T_{\langle v,v \rangle}$ tale che $\mu(\vec{x})T_{\langle v,v \rangle}\mu(\vec{x})$ e, perciò, Σ^w è riflessiva.

Se $4^i := |\vec{x}|A \to |\vec{x}|\,|\vec{x}|A$ è un assioma di L_{im} dobbiamo mostrare che possiamo considerare una R^c transitiva. Si considerino $\langle \mu, v\rangle$, $\langle \tau, u\rangle$ e $\langle \xi, t\rangle \in S^w$ tali che $\langle \mu, v\rangle \Sigma \langle \tau, u\rangle$ e $\langle \tau, u\rangle \Sigma \langle \xi, t\rangle$. Se una qualche formula della forma $(|\vec{x}|A)^c$ è soddisfatto da $\langle \tau, v\rangle$ allora, per chiusura deduttiva, anche $(|\vec{x}|\,|\vec{x}|A)^c$ lo è. Perciò A^c è soddisfatto da $\langle \xi, t\rangle$ e possiamo costruire Σ^w sulla base di una relazione ammissibile transitiva.

Infine se $B^i := A \to |\vec{x}|\,\langle \vec{x}\rangle A$ è un assioma di L_{im} allora mostriamo che R^c può essere simmetrica. Si considerino $\langle \mu, v\rangle$ e $\langle \tau, u\rangle \in S^w$ tali che $\langle \mu, v\rangle \Sigma \langle \tau, u\rangle$. Grazie allo schema B^i abbiamo che per ogni $\mathscr{L}^-$-formula A le cui variabili libere sono incluse in $\vec{x}$, se $\langle \mu, v\rangle \models A^c$ e $\mu(\vec{x})\, T_{\langle v,u\rangle}\, \tau(\vec{x})$ allora $\langle \tau, u\rangle \not\models P_{|\vec{x}|\neg A}\vec{x}$. Perciò esiste una relazione ammissibile $T_{\langle u,v\rangle}$ tale che $\tau(\vec{x})\, T_{\langle u,v\rangle}\, \mu(\vec{x})$. Possiamo allora costruire Σ^w sulla base di una relazione ammissibile simmetrica. □

Teorema 6.48 (Completezza per estensioni di $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$)**.**

- $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{D}$ *è completa rispetto alla classe delle T-strutture seriali;*
- $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{T}$ *è completa rispetto alla classe delle T-strutture riflessive;*
- $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K4}$ *è completa rispetto alla classe delle T-strutture transitive;*
- $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{S4}$ *è completa rispetto alla classe delle T-strutture riflessive e transitive;*
- $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{B}$ *è completa rispetto alla classe delle T-strutture riflessive e simmetriche;*
- $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{S5}$ *è completa rispetto alla classe delle T-strutture riflessive, transitive e simmetriche.*

Dimostrazione. Si procede come per il Teorema 6.47 sulla base di quanto fatto nel Capitolo 6.8. □

Bibliografia

Barcan Marcus, R. (1990). A backward look at Quine's animadversions on modalities. In Barrett, R. e Gibson, R. (cur.), *Perspectives on Quine*, 230–243. Blackwell Oxford, Oxford.

Bencivenga, E. (2002). Free logics. In Gabbay, D. M. e Guenthner, F. (cur.), *Handbook of Philosophical Logic*, 147–196. Springer Netherlands, Dordrecht.

Braüner, T. e Ghilardi, S. (2007). First-order modal logic. In Blackburn, P., Benthem, J. V., e Wolter, F. (cur.), *Handbook of Modal Logic*, 549–620. Elsevier, Amsterdam.

Carnap, R. (1956). *Meaning and Necessity*. University of Chicago Press, Chicago.

Corsi, G. (2002). A unified completeness theorem for quantified modal logics. *Journal of Symbolic Logic*, 67(4):1483–1510.

Corsi, G. (2009). Necessary for. In Glymour, C., Wei, W., e Westerståhl, D. (cur.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 13th International Congress*, 162–184. College, London.

Corsi, G. e Orlandelli, E. (2013). Free quantified epistemic logic. *Studia Logica*, 101(6):1158–1183.

Feys, R. (1964). Carnap on modalities. In Schlipp, P. A. (cur.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, 285–298. Open Court, Chicago.

Fitting, M. (1999). On quantified modal logic. *Fundamenta Informaticae*, 39(1-2):105–121.

Fitting, M. (2006). FOIL axiomatized. *Studia Logica*, 84(1):1–22.

Fitting, M. e Mendelsohn, R. L. (1998). *First-order Modal Logic*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA.

Frixione, M., Iaquinto, S., e Vignolo, M. (2016). *Introduzione alle Logiche Modali*. Laterza, Roma-Bari.

Garson, J. (2013). *Modal Logic for Philosophers (seconda edizione)*. Cambridge University Press, Cambridge.

Hughes, G. E. e Cresswell, M. J. (1984). *A Companion to Modal Logic*. Methuen, London.

Hughes, G. E. e Cresswell, M. J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London.

Kripke, S. (1963). Semantical considerations on modal logic. *Acta Phil. Fennica*, 16:83–94.

Kripke, S. (1980). *Naming and Necessity*. Harvard University Press, Cambridge, Ma, USA.

Kripke, S. (2017). Quantified modality and essentialism. *Nous*, 51:221–234.

Lewis, D. (1986). *On the Plurality of Worlds*. Blackwell, Oxford.

Orlandelli, E. e Corsi, G. (2019). *Corso di Logica Modale Proposizionale*. Carocci, Roma.

Quine, W. V. O. (1953a). Reference and modality. In *From a Logical Point of View*, 139–159. Harvard University Press, Cambridge, Ma, USA.

Quine, W. V. O. (1953b). Three grades of modal involvment. *Proceedings of the XIth International Congress of Philosophy*, 14:65–81.

Stalnaker, R. C. e Thomason, R. H. (1968). Abstraction in first-order modal logic. *Theoria*, 34(3):203–207.

Thomason, R. H. (1970). Some completeness results for modal predicate calculi. In Lambert, K. (cur.), *Philosophical Problems in Logic: Some Recent Developments*, 56–76. Springer Netherlands, Dordrecht.

van Dalen, D. (2012). *Logic and structure (quinta edizione)*. Springer, Berlin.

Indice analitico

assegnamento
- in logica del primo ordine, 11
- rispetto a un K-modello, 33
- rispetto a un T-modello, 123
- rispetto a un TK-modello, 24

completezza
- $Q_{=}$.B + BF, 87
- $Q_{=}$.D + BF, 86
- $Q_{=}$.D, 70
- $Q_{=}$.K + BF, 86
- $Q_{=}$.K4 + BF, 87
- $Q_{=}$.K4, 70
- $Q_{=}$.K, 70
- $Q_{=}$.S4 + BF, 87
- $Q_{=}$.S4, 70
- $Q_{=}$.S5 + BF, 87
- $Q_{=}$.T + BF, 86
- $Q_{=}$.T, 70
- $Q^{\circ}_{=}$.B + BF(+CBF)+ $\Box$-NRT, 85
- $Q^{\circ}_{=}$.B + BF(+CBF), 78
- $Q^{\circ}_{=}$.D + (CBF), 67
- $Q^{\circ}_{=}$.D + BF(+CBF)+ $\Box$-NRT, 84
- $Q^{\circ}_{=}$.D + BF(+CBF), 77
- $Q^{\circ}_{=}$.K + BF + CBF, 77
- $Q^{\circ}_{=}$.K + BF + $\Box$-NRT, 84
- $Q^{\circ}_{=}$.K + BF, 77
- $Q^{\circ}_{=}$.K + CBF, 66
- $Q^{\circ}_{=}$.K4 + (CBF), 67
- $Q^{\circ}_{=}$.K4 + BF(+CBF)+ $\Box$-NRT, 85
- $Q^{\circ}_{=}$.K4 + BF(+CBF), 78
- $Q^{\circ}_{=}$.K, 66
- $Q^{\circ}_{=}$.S4 + (CBF), 67
- $Q^{\circ}_{=}$.S4 + BF(+CBF)+ $\Box$-NRT, 85
- $Q^{\circ}_{=}$.S4 + BF(+CBF), 78
- $Q^{\circ}_{=}$.S5 + BF(+CBF)+ $\Box$-NRT, 85
- $Q^{\circ}_{=}$.S5 + BF(+CBF), 78
- $Q^{\circ}_{=}$.T + (CBF), 67
- $Q^{\circ}_{=}$.T + BF(+CBF)+ $\Box$-NRT, 84
- $Q^{\circ}_{=}$.T + BF(+CBF), 78
- Q_{λ}.B + BF, 108
- Q_{λ}.D + BF, 107
- Q_{λ}.D, 106
- Q_{λ}.K + BF, 107
- Q_{λ}.K4 + BF, 108
- Q_{λ}.K4, 106
- Q_{λ}.K, 106
- Q_{λ}.S4 + BF, 108
- Q_{λ}.S4, 106
- Q_{λ}.S5 + BF, 108
- Q_{λ}.T + BF, 108
- Q_{λ}.T, 106
- Q°_{λ}.B + BF(+CBF)+ j-NRT, 113

Q°_{λ}.D(+CBF), 105
Q°_{λ}.D + BF(+CBF)+ j-NRT, 113
Q°_{λ}.K + BF(+CBF)+ j-NRT, 113
Q°_{λ}.K + CBF, 105
Q°_{λ}.K4(+CBF), 105
Q°_{λ}.K4 + BF(+CBF)+ j-NRT, 113
Q°_{λ}.K, 105
Q°_{λ}.S4(+CBF), 105
Q°_{λ}.S4 + BF(+CBF)+ j-NRT, 113
Q°_{λ}.S5 + BF(+CBF)+ j-NRT, 113
Q°_{λ}.T(+CBF), 105
Q°_{λ}.T + BF(+CBF)+ j-NRT, 113
Q_{im}.B, 155, 157
Q_{im}.D, 155, 157
Q_{im}.K4, 155, 157
Q_{im}.K, 155
Q_{im}.S4, 155–157
Q_{im}.S5, 157
Q_{im}.T, 155, 157
R_{im}.B, 155, 156
R_{im}.D, 155, 156
R_{im}.K4, 155, 156
R_{im}.K, 151
R_{im}.S4, 155, 156
R_{im}.S5, 156
R_{im}.T, 155, 156
$Q^{\circ}_{=}$.K + BF + CBF+ $\Box$-NRT, 84
forte, 47
conseguenza
K-conseguenza, 34
TK-conseguenza, 25
controparte, 122

derivabile, 38, 44
in L, 38
in L^*_{λ}, 96
diagramma delle logiche modali proposizionali, 9
dimostrazione
in L^p, 9
in L, 38
in L°, 44
in L^*_{λ}, 96
domini
costanti, 33
crescenti, 32
decrescenti, 32
singolo, 33

formule
di $\mathscr{L}$, 16
di $\mathscr{L}^-$, 144
di $\mathscr{L}^1$, 10
di $\mathscr{L}^{\lambda}$, 92
di $\mathscr{L}^c$, 144
di $\mathscr{L}^i$, 120
di $\mathscr{L}^p$, 5

gerarchia di modelli, 150

insieme
$\Box^-(w)$, 51
$\mathscr{L}$-completo, 49
L-chiuso, 49
L-consistente, 49
L-saturo, 49
$\exists$-$\mathscr{L}$-ricco, 49
$\forall$-$\mathscr{L}$-induttivo, 49
j-$\Box$-$\mathscr{L}$-induttivo, 79, 109
j-$\Diamond$-$\mathscr{L}$-ricco, 79, 109
j-$\mathscr{L}$-ricco, 49, 99
j-L-saturo, 79

intepretazione
di un termine, 24

lemma
BF-induttività, 72
$\Box^{-}(w)$, 51
α-conversione, 29
del diamante
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$, 68
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$, 58
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$, 110
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$, 74
per L^{*}_{λ}, 101
per $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$, 86
per $\mathsf{Q}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$, 107
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$, 82
del modello canonico
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$, 77
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$, 64
per L^{*}_{λ}, 104
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$, 84
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$, 112
delle catene, 52
di Lindenbaum-Henkin
con $\Box$-NRT, 80
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$, 109
per L^{*}_{λ}, 99
di esistenza di relazioni ammissibili, 147, 153
di Lindenbaum-Henkin, 53
sostituzione e soddisfazione, 30
sulle costanti, 52

Logica
$\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$, 139
logica
$\mathsf{K4}$, 8
B, 9
D, 8
K, 8
L^{*}_{λ}, 96
$\mathsf{L}^{\circ}_{\lambda}$, 96
L_{λ}, 96
L_{im} , 126
$\mathsf{Q3}$, 22
$\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$, 37
$\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{L}$, 37
$\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$, 43
$\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{L}$, 44
$\mathsf{Q}^{\circ}_{=}$, 14
$\mathsf{Q}_{=}$, 12
$\mathsf{Q}_{\lambda}.\mathsf{K}$, 95
$\mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K}$, 96
$\mathsf{S4}$, 9
$\mathsf{S5}$, 9
T, 8
$\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$, 124
lunghezza di una formula, 17

modalità
de dicto, 3, 115
de re, 3, 115
modello
$\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$-modello, 146
canonico, 48, 55
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$, 58
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$, 81
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{\lambda}.\mathsf{K} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$, 110
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$, 68
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K} + \mathsf{BF}$, 73

per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$, 85
per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}_{\lambda}.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$, 106
per L^*_{λ}, 100
di un insieme di enunciati, 25, 34
di una logica, 25, 34
K-modello, 33
K-modello normale, 33
per la logica classica, 11
per la logica libera, 13
R-modello, 139
relazionale, 6
T-modello, 123
T-modello normale, 123
TK-modello, 23
TK-modello normale, 24

proprietà
di R
riflessività, 7
serialità, 7
simmetria, 8
transitività, 7
di T
funzionalità, 135
non convergenza, 136
riflessività, 137
serialità, 137
simmetria, 137
surettività, 132
totalmente definita, 134
transitività, 137

quantificazione
classica, 11
libera, 13

regola
GP, 39
Gen, 12, 14, 37, 44, 125
MP, 8, 12, 37, 125
N, 8, 37
NRT, 39, 43
N^i, 125
PA, 39
RM, 39
$Sost$, 12, 37, 125
$Subs^{at}$, 42
$\Box$-NRT, 78
λ-intr, 96
j-NRT, 108
ammissibile
in L, 38
in L°, 44
in L^*_{λ}, 96
di c-traduzione, 145

relazione
ammissibile, 146, 153
di accessibilità, 6
di transizione, 122

rigidità, 139

schema
4, 8
4^i, 128
B, 8
BF, 19, 71
BF^i, 128
B^i, 128
CBF, 19
CBF^i, 128
Crg, 128
Crg^v, 128
D, 8
D^i, 128
$Def^i_{\Diamond}$, 125
$Def_{\Diamond}$, 37
$Def_{\diamond}$, 8

$Def_\exists$, 12, 14, 37, 44, 125
FCS, 129
GF, 19
K, 8, 37
K^i, 125
Lbz, 12, 37, 96, 125
Lbz^{at}, 37
$Lngt$, 125
ND, 37, 96
ND^i, 129
NE, 19
NI, 45, 89
NI^i, 129
$NRT\text{-}Ax$, 37
Prm, 14, 44, 125
Rg, 128
Rg^v, 125
Rif, 12, 37, 96, 125
SIV, 129
$Shrt$, 129
T, 8
T^i, 128
$Taut$, 8, 12, 37, 124
UD, 12, 37, 125
UD°, 14, 44
UI, 12, 37, 125
UI°, 14, 44
VQ, 14, 44
$V\lambda$, 96
α-conv, 96
β-conv, 96
β-conversione, 91
λ-comm, 96
λ-func, 96
$\lambda\forall$-comm, 96
semantica
attualista, 20
di Kripke, 32
di Tarski-Kripke, 23
possibilista, 20
soddisfazione
in logica classica, 11
in logica libera, 13
in un K-modello, 33
in un T-modello, 123
in un TK-modello, 24, 94
rispetto a un K-modello, 94
sostituzione
nei termini, 17
nelle $\mathscr{L}$-formue, 18
nelle $\mathscr{L}^\lambda$-formule, 93
nelle $\mathscr{L}^i$-formule, 121
sottoformule, 17
struttura
di subordinazione, 143
K-struttura, 32
relazionale, 6
T-struttura, 122
TK-struttura, 23

teorema
di L, 38
di L°, 44
di L^*_λ, 96
di esistenza
di (T)K-modelli, 105
di K-modelli, 66
di K-modelli per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}$, 77
di K-modelli per $\mathsf{L}^\circ \supseteq \mathsf{Q}^\circ_\lambda.\mathsf{K}+\mathsf{BF}+\mathsf{j\text{-}NRT}$, 112
di K-modelli per $\mathsf{L} \supseteq \mathsf{Q}^\circ_=.\mathsf{K}+\mathsf{BF}+\Box\text{-}\mathsf{NRT}$, 84
di TK-modelli, 70
di una logica L^p, 9
di validità
per L°, 45
per L^*_λ, 96

per $\mathsf{L}^{\circ}_{\lambda} + \mathsf{BF} + \mathsf{j}\text{-}\mathsf{NRT}$, 108
per $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{K}$, 43
per $\mathsf{Q}_{=}.\mathsf{L}(+\mathsf{BF})$, 43
per $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{K}$, 45
per $\mathsf{Q}^{\circ}_{=}.\mathsf{L} + \mathsf{BF} + \Box\text{-}\mathsf{NRT}$, 78
per $\mathsf{Q}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$, 126
per $\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}$, 139
teoria $\mathsf{C}_{\mathsf{R}_{\mathsf{im}}.\mathsf{K}}$, 145
termine, 16
non rigido, 16
rigido, 16

universo
costante, 23

validità
di una $\mathscr{L}^1$-formula, 12
di una $\mathscr{L}^p$-formula, 7
su una K-struttura, 34
su una T-struttura, 124
su una TK-struttura, 25
variabile
libera, 11
vincolata, 11
verità
di una $\mathscr{L}^1$-formula, 12
di una $\mathscr{L}^p$-formula, 6
in un K-modello, 34
in un TK-modello, 25
in un mondo di un K-modello, 34
in un mondo di un TK-modello, 25
in un T-modello, 124