Nel capitolo II abbiamo detto che i contesti temporali non sono trattabili in termini puramente estensionali. In questo paragrafo ci concentreremo sull'impiego della semantica dei mondi possibili nella creazione delle cosiddette *logiche temporali*[11]. Queste logiche impiegano operatori modali per esprimere il carattere "temporalmente orientato" degli enunciati del linguaggio naturale, permettendo così di rendere conto, in termini formali, delle differenze di significato tra enunciati come 'Giulia nuotò', 'Giulia aveva nuotato', 'Giulia nuoterà' e 'Giulia avrà nuotato'.

Introduciamo il linguaggio $\mathcal{L}$ delle logiche temporali, cominciando dall'*alfabeto*. All'insieme delle lettere proposizionali $\{p, q, r, \ldots\}$ e ai connettivi vero-funzionali $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$, affianchiamo i due operatori intensionali H e G. Come vedremo, il loro comportamento è per certi versi analogo a quello dell'operatore $\Box$ descritto nel capitolo II. Data una formula α, leggeremo $H\alpha$ come: 'si è sempre dato il caso che α' (o, equivalentemente: 'non si è mai dato il caso che non α'). La formula afferma che è vero che α in ogni istante passato; leggeremo invece $G\alpha$ come: 'si darà sempre il caso che α' (o: 'non si darà mai il caso che non α'). Si afferma così che è vero che α in ogni istante futuro. In letteratura H e G vengono talvolta chiamati operatori tensionali[12] *forti* e possono essere impiegati per definire i due operatori

[11] Il loro sviluppo si deve al lavoro di Arthur Prior. Vedi, in particolare, Prior (1957, 1967, 1968).
[12] Dall'inglese *tense operators*.

P[13] e F – detti operatori tensionali *deboli*. Assumiamo che $P\alpha$ sia equivalente a $\neg H \neg \alpha$ e che $F\alpha$ sia equivalente a $\neg G \neg \alpha$. Data una formula α, $P\alpha$ starà per: 'si è dato il caso che α in almeno un istante passato' (o: 'è stato vero in almeno un istante passato che α'); $F\alpha$ starà invece per: 'si darà il caso che α in almeno un istante futuro' (o: 'sarà vero in almeno un istante futuro che α'). Poiché arricchiamo $\mathcal{L}$ con i soli operatori H e G, le formule $P\alpha$ e $F\alpha$ andranno lette come semplici abbreviazioni di $\neg H \neg \alpha$ e $\neg G \neg \alpha$[14]. Completiamo l'alfabeto adottando le parentesi tonde come segni ausiliari.

L'*insieme delle formule* di $\mathcal{L}$ è il più piccolo insieme tale che:

- tutte le lettere proposizionali sono formule;
- se α è una formula, allora $\neg \alpha$ è una formula;
- se α e β sono formule, allora $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ e $\alpha \rightarrow \beta$ sono formule;
- se α è una formula, allora $H\alpha$ e $G\alpha$ sono formule.

Abbiamo adesso tutti gli strumenti per distinguere l'enunciato 'Giulia nuotò' da 'Giulia aveva nuotato'. Mentre il primo avrà la forma Pp (dove, ovviamente, p sta per 'Giulia nuota'), il secondo potrà essere formalizzato come PPp. Analogamente, distingueremo fra 'Giulia nuoterà' e 'Giulia avrà nuotato' formalizzando il primo come Fp e il secondo come FPp.

3.3.1 *Semantica delle logiche temporali*

È intuitivo dire che il valore di verità di molti enunciati del linguaggio naturale è sensibile allo scorrere del tempo. Assumendo che in questo preciso istante l'enunciato 'Giulia nuota' esprima una verità, non è detto che lo stesso valga per un istante precedente o per uno successivo. In altri termini, dal fatto che p è vera non segue che lo siano anche Pp o Fp. Analogamente, dal fatto che sia falso che Giulia sta nuotando non segue che non possa averlo fatto in passato o che non lo farà in futuro; non si può cioè escludere che ci sia un istante passato o futuro in cui 'Giulia nuota' esprime una verità. Diremo allora che può darsi il caso che p sia falsa senza che lo siano anche Pp o Fp. Alla luce di tali considerazioni, le logiche temporali suggeriscono che i valori di verità siano assegnati relativamente a un *modello temporale* $\mathcal{M} = \langle \mathrm{T}, <, \mathrm{I} \rangle$, dove T è un insieme non vuoto di istanti, $<$ è una relazione binaria in T e I è una funzione che, preso come argomento un istante, assegna uno

[13] Da non confondere con l'operatore che formalizza 'è permesso che', presentato nel § 3.2.

[14] Naturalmente, nulla vieta di ampliare l'alfabeto delle logiche temporali introducendo i soli operatori tensionali deboli. Le formule $H\alpha$ e $G\alpha$ potranno poi essere impiegate per abbreviare, rispettivamente, $\neg P \neg \alpha$ e $\neg F \neg \alpha$.

e un solo valore di verità (V o F) a ciascuna formula atomica di $\mathcal{L}$. $t < t'$ si leggerà: 't precede t''. In letteratura si è soliti chiamare la coppia ordinata $\langle T, < \rangle$ *frame temporale*. Il modello temporale è simile al modello $\mathcal{M} = \langle W, R, I \rangle$, descritto nel presentare le logiche modali aletiche (capitolo II). In sostanza, per ottenere un modello temporale è sufficiente trattare i mondi possibili come istanti e la relazione R come un relazione di precedenza temporale. Un frame temporale $\langle T, < \rangle$ è dunque del tutto analogo ai frame delle logiche modali aletiche e deontiche.

Definiamo la *verità di una formula in un istante t del modello temporale* $\mathcal{M}$ come segue:

[Ip] una formula atomica p è vera all'istante t sse $I(p, t) = V$

[I¬] $I(\neg\alpha, t) = V$ sse $I(\alpha, t) = F$

[I∧] $I(\alpha \wedge \beta, t) = V$ sse $I(\alpha, t) = I(\beta, t) = V$

[I∨] $I(\alpha \vee \beta, t) = V$ sse $I(\alpha, t) = V$ oppure $I(\beta, t) = V$

[I→] $I(\alpha \rightarrow \beta, t) = V$ sse $I(\alpha, t) = F$ oppure $I(\beta, t) = V$

[IH] $I(H\alpha, t) = V$ sse $I(\alpha, t') = V$ per ogni istante t' tale che $t' < t$

[IG] $I(G\alpha, t) = V$ sse $I(\alpha, t') = V$ per ogni istante t' tale che $t < t'$

La clausola [IH] afferma che la formula $H\alpha$ è vera in un istante t del modello $\mathcal{M}$ se e solo α è vera in ogni istante passato t'. La clausola [IG], invece, stabilisce che la formula $G\alpha$ è vera in un istante t del modello $\mathcal{M}$ se e solo se α è vera in ogni istante futuro t'. Poiché, come detto sopra, $P\alpha$ e $F\alpha$ abbreviano $\neg H\neg\alpha$ e $\neg G\neg\alpha$, da queste clausole segue che:

[IP] $I(P\alpha, t) = V$ sse $I(\alpha, t') = V$ per almeno un istante t' tale che $t' < t$

[IF] $I(F\alpha, t) = V$ sse $I(\alpha, t') = V$ per almeno un istante t' tale che $t < t'$

La prima clausola impone che la formula $P\alpha$ sia vera in un istante t del modello $\mathcal{M}$ se e solo se esiste almeno un istante passato t' in cui α è vera. La clausola [IF], invece, stabilisce che la formula $F\alpha$ è vera in un istante t del modello $\mathcal{M}$ se e solo se esiste almeno un istante futuro t' in cui α è vera.

Concludiamo la lista di nozioni semantiche riportando le condizioni di validità di una formula, del tutto simili a quelle delle logiche modali aletiche esaminate nel capitolo II. Una formula α si dice *valida in un modello temporale* $\mathcal{M} = \langle T, <, I \rangle$, in simboli $\mathcal{M} \models \alpha$, se e solo se α è vera in ogni istante $t \in T$. α è *valida in un frame temporale* $\langle T, < \rangle$, in simboli $\langle T, < \rangle \models \alpha$, se e solo se, per ogni interpretazione I, $\langle T, <, I \rangle \models \alpha$. Data una proprietà Q della relazione $<$, diciamo che α è *valida nella classe dei frame temporali* $\langle T, < \rangle$ *tali che* $<$ *soddisfa* Q (notazione: $<_Q \models \alpha$) se e solo se, per ogni frame $\langle T, <_Q \rangle$ e per ogni interpretazione I, $\langle T, <_Q, I \rangle \models \alpha$. Infine, α è *valida* (notazione: $\models \alpha$) se e solo se α è valida in tutti i frame temporali.

3.3.2 *Sistemi assiomatici per le logiche temporali*

Per ottenere il sistema noto in letteratura come $\mathbf{K}_t$, oltre a tutti gli assiomi della logica proposizionale estensionale, assumeremo i seguenti schemi di formule:

$$H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta)$$

che chiamiamo assioma di distributività di H;

$$G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta)$$

e cioè l'assioma di distributività di G;

$$\alpha \to HF\alpha$$

la cui lettura intuitiva è: 'se si dà il caso che α, allora si è sempre dato il caso che si sarebbe dato il caso che α' (oppure: 'se è vero che α, allora è sempre stato vero che sarebbe stato vero che α');

$$\alpha \to GP\alpha$$

che afferma che, se si dà il caso che α, allora sarà sempre il caso che si è dato il caso che α (in altre parole: se è vero che α, allora sarà sempre vero che è stato vero che α).

Oltre al modus ponens, infine, adottiamo le due seguenti regole:

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash H\alpha}$$

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash G\alpha}$$

che affermano che, se si deriva α dai soli assiomi, allora si derivano – rispettivamente – $H\alpha$ e $G\alpha$[15]. È possibile dimostrare che in $\mathbf{K}_t$ una formula è derivabile se e solo se è valida ($\mathbf{K}_t$ è un sistema corretto e completo)[16].

Analogamente a quanto avviene nel caso delle logiche modali aletiche, al variare delle proprietà assegnate alla relazione $<$ varia l'insieme delle formule valide. Ad esempio, la formula:

$$H\alpha \to HH\alpha$$

è valida in tutti i frame con $<$ transitiva. In altre parole, la formula è valida in tutti i frame in cui $<$ soddisfi la seguente condizione (dove t, t' e t'' sono elementi di

[15] Queste regole sono l'analogo temporale della regola di necessitazione Nec.

[16] Per la dimostrazione rimandiamo a Rescher e Urquhart (1971) e Goldblatt (1987).

T): per ogni t, t', t'', se $t < t'$ e $t' < t''$ allora $t < t''$. Se aggiunta agli assiomi di $\mathbf{K}_t$, si ottiene il sistema $\mathbf{K4}_t$, in cui sono derivabili tutte e sole le formule valide in tutti i frame temporali transitivi. Come vedremo nel prossimo paragrafo, le proprietà attribuibili alla relazione < sono di grande interesse filosofico: permettendo di ampliare $\mathbf{K4}_t$ con ulteriori assiomi, consentono di esprimere in termini rigorosi diverse concezioni del tempo.

3.3.3 *Futuro ramificato: lettura peirceana e lettura ockhamista*

Molti filosofi ritengono che la caratterizzazione lineare del tempo sia particolarmente adatta a descrivere un universo causalmente deterministico, un universo, cioè, le cui leggi fisiche – dato lo stato presente del mondo come condizione iniziale – determinino interamente ciò che accadrà nel futuro[17]. Una logica in cui siano ammesse ramificazioni al futuro, invece, si presterebbe alla descrizione di un universo causalmente *indeterministico*: all'istante presente non sarebbe affatto determinato quale linea futura, fra le molte possibili, si realizzerà[18].

Per caratterizzare il passato come lineare adottiamo la formula:

(LP) $FP\alpha \rightarrow P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$

che è valida in tutti i frame temporali tali che, per ogni t, t', $t'' \in$ T, se $t < t''$ e $t' < t''$ allora $t < t'$ oppure $t = t'$ oppure $t' < t$. Se il passato è lineare, dal fatto – per esempio – che Giulia avrà nuotato segue che Giulia nuotò, che Giulia nuota o che Giulia nuoterà. Per rappresentare la linearità del futuro, invece, impieghiamo la formula seguente:

(LF) $PF\alpha \rightarrow P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$

La formula è valida in tutti i frame in cui valga che, per ogni t, t', $t'' \in$ T, se $t'' < t$ e $t'' < t'$ allora $t < t'$ oppure $t = t'$ oppure $t' < t$. Sotto l'ipotesi che il futuro sia lineare, dal fatto che Giulia avrebbe nuotato segue che Giulia nuotò, che Giulia nuota o che Giulia nuoterà. Introducendo entrambe le formule[19] come assiomi in $\mathbf{K4}_t$ si ottiene il sistema $\mathbf{L}_t$, che è corretto e completo per la classe di tutti i frame con < transitiva, irriflessiva e tricotomica. Comunque dati due istanti t, $t' \in$ T, < è

[17] Sulla nozione di determinismo causale vedi Hoefer (2010).

[18] Sui rapporti tra ramificazione del futuro e indeterminismo vedi Belnap, Perloff e Xu (2001), Belnap (2005, 2007), Borghini e Torrengo (2012) e Torre (2011). Per una recente critica all'idea che il modello ramificato sia più adatto a caratterizzare un universo non deterministico vedi Benovsky (2013).

[19] In alternativa, si può introdurre la sola formula: $FP\alpha \vee PF\alpha \rightarrow P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$.

irriflessiva se e solo se non si dà il caso che $t < t$; è tricotomica se e solo se $t < t'$ oppure $t = t'$ oppure $t' < t$[20].

Per caratterizzare il futuro come ramificato, ampliamo $\mathbf{K4}_t$ con l'assioma LP. La formula LF, invece, non sarà ammessa tra gli assiomi del nostro sistema. A seconda di quale logica del tempo si intenda costruire, andranno poi aggiunti altri assiomi. Dato il carattere introduttivo di questo volume, non approfondiremo qui il punto; ci concentreremo piuttosto su aspetti relativi alla semantica. Per valutare la verità di una data formula, faremo adesso ricorso a un frame "ad albero". Si consideri la Fig. 1. Il "tronco", la cui sommità è l'istante presente t_0, è costituito dagli istanti passati $t_{-1}, t_{-2}, \ldots$, mentre i "rami" che si dipartono da t_0 stanno per tutti i diversi modi in cui il futuro potrebbe realizzarsi. In termini formali[21], definiamo un *frame ad albero* $\mathcal{T}$ come la coppia ordinata $\langle \mathrm{T}, < \rangle$, dove T è un insieme non vuoto di istanti e $<$ è una relazione binaria in T transitiva, irriflessiva e lineare al passato[22]. Assumiamo inoltre che non esistano linee temporali fra loro parallele; assumiamo cioè che $<$ rispetti la seguente condizione (dove t, t' e t'' sono elementi di T): per ogni t, t', esiste almeno un istante t'' tale che ($t'' < t$ o $t'' = t$) e ($t'' < t'$ o $t'' = t'$).

In termini intuitivi, ciascuno dei possibili cammini del tempo dal tronco verso i rami costituirà una *storia del mondo* di volta in volta diversa da ogni altra. A seconda di quale sia il percorso che il tempo "imboccherà" una volta raggiunto il presente (t_0), vedremo infatti realizzate linee temporali fra loro diverse. Nel complesso, tali linee esauriscono lo spettro di tutti i diversi modi in cui può darsi il corso degli eventi (da un passato comune a tutte le storie verso un futuro da realizzare). Caratterizziamo in termini formali la nozione di storia: dato un sottoinsieme h di T, h è una *storia* in $\mathcal{T}$ se e solo se h è massimale fra i sottoinsiemi linearmente ordinati di T.

L'enunciato 'Si darà il caso che α' ammette ora due letture. Secondo la prima, detta *lettura peirceana*[23], l'enunciato dice che *in ciascuna storia* esiste un istante futuro in cui α è vera. Seguendo Venema (2001), ampliamo l'alfabeto del linguaggio $\mathcal{L}$ con un nuovo operatore intensionale: $F_{\Box}$. Data una formula α, leggeremo $F_{\Box}\alpha$ come: 'sarà il caso che α quale che sia la storia che si realizzerà' (detto altrimenti: 'è inevitabile che α'). Chiamiamo il linguaggio così ottenuto $\mathcal{L}^{\mathcal{P}}$. Per ottenere un modello temporale peirceano $\mathcal{P}$, associamo al frame ad albero una fun-

[20] Per una panoramica sulle logiche del tempo lineare rimandiamo a Goranko e Galton (2015).

[21] In quanto segue adotteremo, con leggere modifiche e modeste integrazioni, la notazione e le definizioni di Venema (2001: 214-215).

[22] Ricordiamo la condizione che $<$ deve soddisfare affinché l'assioma (LP) sia valido: per ogni $t, t', t'' \in \mathrm{T}$, se $t < t''$ e $t' < t''$ allora $t < t'$ oppure $t = t'$ oppure $t' < t$.

[23] La logica peirceana è stata introdotta da Prior (1967). Per la sua assiomatizzazione rimandiamo a Burgess (1980) e Zanardo (1990).

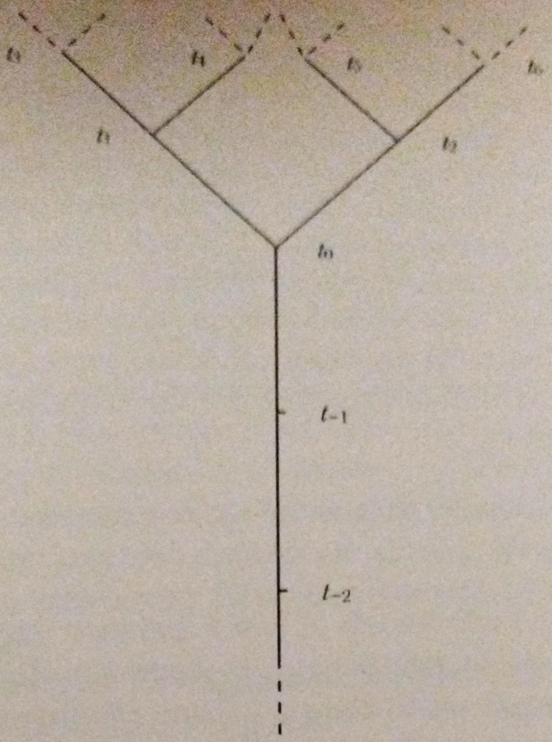

Fig. 1

zione, I, che per ogni istante di T attribuisce uno e un solo valore di verità (V o F) ad ogni formula atomica di $\mathcal{L}^{\mathcal{P}}$. Diremo che una formula $F_{\Box}\alpha$ è *vera all'istante t del modello $\mathcal{P}$* se e solo se:

[I$F_{\Box}$] per ogni storia contenente t esiste almeno un istante t' tale che $t < t'$ per cui vale che $\mathrm{I}(\alpha, t') = \mathrm{V}$

Tornando alla Fig. 1, diremo che la formula $F_{\Box}\alpha$ è vera all'istante t_0 se e solo se α è vera in almeno un istante futuro di ciascuna storia passante per t_0. $F_{\Box}\alpha$ è vera in t_0, ad esempio, nel caso in cui α sia vera in t_1, in t_5 e in t_6.

In definitiva, secondo la logica peirceana è vero nel futuro tutto e solo ciò che inevitabilmente si realizzerà. Un'interessante conseguenza di questo approccio semantico è che tutti i contingenti futuri, come 'Domani ci sarà una battaglia navale', risulteranno falsi (per l'ovvia ragione che descrivono stati di cose che non è inevitabile si realizzino). Poiché le negazioni di simili enunciati sono a loro volta contingenti futuri, anche tutte le loro negazioni, come 'Domani non ci sarà una battaglia navale', risulteranno false. Il che significa che nella logica peirceana il principio del terzo escluso non può essere esteso a questa classe di enunciati: dato un contingente futuro α, la formula $F_{\square}\alpha \vee F_{\square}\neg\alpha$ risulterà falsa[24] (si noti che da questo non segue che sia falsa la formula $F_{\square}\alpha \vee \neg F_{\square}\alpha$).

La seconda lettura di 'Si darà il caso che α', detta *lettura ockhamista*[25], relativizza invece la verità dell'enunciato alla coppia ordinata $\langle t, h\rangle$. In altre parole, richiede che il suo valore di verità sia valutato non solo rispetto a un istante futuro, ma anche rispetto a *una specifica storia*. In una cornice ockhamista, quindi, domandarsi se $F\alpha$ sia vera o falsa significa domandarsi se, *in una data storia h*, esista un istante futuro in cui α è vera. Associamo al frame ad albero una funzione I^*, che per ogni istante di T e per ogni storia h associa uno e un solo valore di verità (V o F) ad ogni formula atomica del linguaggio $\mathcal{L}$. Otteniamo così il modello temporale ockhamista $O = \langle \mathrm{T}, <, \mathrm{I}^* \rangle$. Una formula $F\alpha$ è *vera all'istante t nella storia h del modello O* se e solo se:

[I^*F] la storia h contiene almeno un istante t' tale che $t < t'$ per cui vale che $\mathrm{I}^*(\alpha, t', h) = \mathrm{V}$

Si noti che, ampliando l'alfabeto di $\mathcal{L}$ con l'operatore intensionale $\square$, la logica ockhamista – al pari di quella peirceana – è in grado di modellare casi in cui quanto descritto da α si realizzerà quale che sia il ramo effettivamente "imboccato" dal futuro. Definiamo innanzitutto le condizioni alle quali una formula del tipo $\square\alpha$ è vera. Diremo che $\square\alpha$ è *vera all'istante t nella storia h del modello O* se e solo se:

[$\mathrm{I}^*\square$] $\mathrm{I}^*(\alpha, t, h') = \mathrm{V}$ per ogni storia h' contenente t

La formula $\square F\alpha$, al pari della formula $F_{\square}\alpha$ impiegata nella logica peirceana, si leggerà: 'sarà il caso che α quale che sia la storia che si realizzerà'[26]. Diremo infine che $\square F\alpha$ è *vera all'istante t nella storia h del modello O* se e solo se:

[$\mathrm{I}^*\square F$] per ogni storia h' contenente t esiste almeno un istante t' tale che $t < t'$ per cui vale che $\mathrm{I}^*(\alpha, t', h') = \mathrm{V}$

3.4 *Condizionali e mondi possibili*

In questo paragrafo ci occuperemo del trattamento logico del connettivo del linguaggio naturale *se … allora …* In filosofia la sua vero-funzionalità è stata a lungo

[24] Cf. Øhrstrøm e Hasle (2015). Per approfondimenti su questo punto rimandiamo a Prior (1967) e Øhrstrøm e Hasle (1995).

[25] Vedi Prior (1967). Rimandiamo a Zanardo (1985) e Reynolds (2002) per una loro assiomatizzazione.

[26] È possibile dimostrare che il linguaggio peirceano è un frammento di quello ockhamista. Vedi Prior (1967: 130) e Venema (2001: 215).