- Put - Call parity:

P.N.A.

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{C_t}_{\text{prezzo Call}} = \underbrace{P_t}_{\text{prezzo Put}} + \underbrace{S_t}_{\text{prezzo sottostante}} - \underbrace{K e^{-r(T-t)}}_{\text{parte cash (investita nel titolo non-rischioso)}} \quad \forall \ t \leq T$$

- $$e^{-r(T-t)} = \underbrace{\frac{B_t}{B_T}}_{\text{fattore di sconto}}$$

- vale per un B generale

N.B La formula non dipende dal modello

- Per noi S_t, C_t, P_t univocam. determ.

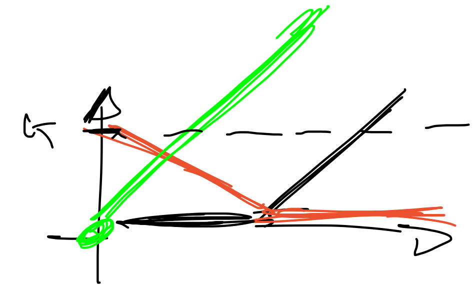
- In realtà: $\underbrace{S_t^{BID}}_{\text{offerta (buyer)}}$, $\underbrace{S_t^{ASK}}_{\text{domanda (seller)}}$

corollario Se vale il P.N.A, allora $\forall \ t \in [0,T]$ vale:

$$(S_t - K e^{-r(T-t)})^+ \leq C_t \leq S_t$$ } certamente

$\left(K \cdot e^{-r(T-t)} - S_t\right)^+ \leq P_t \leq e^{-r(T-t)} K$)

- stime model - independent



dim | P.N.A $\Rightarrow C_t, P_t \geq 0$ $(*)$

PUT-CALL PARITY + $(*)$

$\Downarrow$

$C_t \geq S_t - K \cdot e^{-r(T-t)}$

$\Downarrow (*)$

$C_t \geq \left(S_t - K \cdot e^{-r(T-t)}\right)^+$

$S_T \geq (S_T - K)^+ = C_T$

$\Downarrow$ P.N.A.

$S_t \geq C_t$

P.N.A + $(*)$

$\Downarrow$

$P_t \geq K e^{-r(T-t)} - S_t$

$\Downarrow (*)$

$P_t \geq \left(K e^{-r(T-t)} - S_t\right)^+$

$$P_T = (K - S_T)^+ \leq K = \frac{K}{B_T} \cdot B_T$$

$$\Downarrow \text{ P.N.A}$$

$$P_t \leq \frac{K}{B_T} \cdot B_t = K e^{-r(T-t)} \qquad \#$$

• Modelli uniperiodali : (Toy model)

- Fissiamo $0 \leq T$ tempi
- NIENTE TRADING tra 0 e T (!)
- 1 titolo non rischioso B :

$$B_0 = 1 \,, \qquad B_T = e^{rT} \quad \text{(senza perdere gener.)}$$

- 1 titolo rischioso S :

$$\text{v.a.} \leftarrow S_T = \begin{cases} S^+ & \text{se } E_1 \\ S^- & \text{se } E_2 \end{cases}$$

$$\Big(\underbrace{E_1 \cup E_2 = \Omega}_{\text{evento certo}} \,, \quad \underbrace{E_1 \cap E_2 = \emptyset}_{\text{evento impossibile}} \Big)$$

$$\mathbb{P}(E_1) = p \,, \qquad \mathbb{P}(E_2) = 1 - p$$

$\boxed{\text{esempio}}$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$E_1 = \{1, 3, 5\} \,, \qquad E_2 = \{2, 4, 6\}$$

Ciò che conta: $\left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(S_T = S^+) = p \\ \mathbb{P}(S_T = S^-) = 1-p\end{array}\right\}$ legge di S_T

t	tit. non risch.	titolo risch.
0	1	?
T	e^{rT}	S_T

$$\tilde{S}_0 := \frac{1}{B_T}\mathbb{E}[S_T] = e^{-rT}\left(S^+ \cdot p + S^-(1-p)\right)$$

$\Downarrow$

Prezzo risk-neutral $\quad \left(\tilde{S}_0 \cdot e^{rT} = \mathbb{E}[S_T]\right)$

es: $r = 0 \rightarrow \tilde{S}_0 = \mathbb{E}[S_T]$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[S_T - \tilde{S}_0] = 0$$

- Bisogna conoscere p (in finanza difficile)
- gli umani non sono neutrali al rischio

t	B	S
0	1	S_0
T	e^{rT}	S_T

$S_0 \rightarrow$ osservabile sul mercato (determinato)

DOMANDA: Qual'è $\mathbb{Q}$ probabil. su $\{E_1, E_2\}$ t.c.

$$S_0 = \tilde{S}_0 \quad (\text{secondo } \mathbb{Q})$$

$$\begin{aligned} S_0 &= e^{-rT}\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T] \\ &= e^{-rT}\left(S^+ q + S^-(1-q) \right) \end{aligned}$$

$$\left[\mathbb{Q}(E_1) =: q \,, \quad \mathbb{Q}(E_2) = 1-q \right]$$

$$\to S_0 = q\left(e^{-rT} \cdot S^+ - e^{-rT} S^- \right) + e^{-rT} S^-$$

$$\to \boxed{\begin{aligned} q &= \frac{e^{rT} S_0 - S^-}{S^+ - S^-} \\ 1-q &= \frac{S^+ - e^{rT} S_0}{S^+ - S^-} \end{aligned}} \qquad (\text{se } S^+ \neq S^-)$$

$$\Downarrow$$

Probabilità neutrale al rischio

N.B $\mathbb{Q}$ non è una probabilità statistica!

è una misura di probabilità, $p \in [0,1]$?

Sì, se $\underbrace{S^- \leq e^{rT} S_0 \leq S^+}$

"relazione di non arbitraggio"

- Perché $\mathbb{Q}$ è importante?
- C ulteriore titolo rischioso: (es: derivato)

$$C_T = \begin{cases} C^+ & \text{se } E_1 \\ C^- & \text{se } E_2 \end{cases}$$

t	B	S	C
0	1	S_0	$?$
T	e^{rT}	S_T	C_T

- Prezzo di C al tempo 0?

$$\tilde{C}_0 := e^{-rT}\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_T] = e^{-rT}\left(C^+ q + C^-(1-q)\right)$$

prezzo risk-neutral

dove q, $1-q$ come sopra

- Perché è importante?
- (α, β) una strategia di investimento in (S, B).

$$V := \underbrace{\alpha}_{\text{n° quote di } S} \cdot S + \underbrace{\beta}_{\text{n° quote di } B} \cdot B$$

Lo valore strategia (α, β)
(portafoglio)

$$V_0 = \alpha S_0 + \beta B_0 \longrightarrow \text{certa}$$

$$V_T = \alpha S_T + \beta B_T \longrightarrow \text{v.a}$$

- PROBLEMA: $\exists (\alpha, \beta) : V_T = C_T$?

Certam.

(REPLICAZIONE)

$$V_T = C_T$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha S^+ + \beta e^{rT} = C^+ & (\text{se } E_1) \\ \alpha S^- + \beta e^{rT} = C^- & (\text{se } E_2) \end{cases}$$

$$\left(S^+ \neq S^- \Rightarrow \exists ! \text{ soluz.} \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} \\ \beta = \dfrac{e^{-rT}(S^+ C^- - C^+ S^-)}{S^+ - S^-} \end{cases}$$

$$\underbrace{C_0}_{\Downarrow} := V_0 = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} S_0 + \frac{e^{-rT}(S^+ C^- - C^+ S^-)}{S^+ - S^-}$$

$\boxed{\text{prezzo di arbitraggio}}$

L'unico prezzo che non introduce arbitraggi (di replicazione)

- Non si usa $\mathbb{P}$ (prob. statistica)

oss. $C_0 = \tilde{C}_0$. Infatti:

$$C_0 = e^{-rT}\left[\frac{S_0 e^{rT}(C^+ - C^-)}{S^+ - S^-} + \frac{S^+ C^- - C^+ S^-}{S^+ - S^-}\right]$$

$$= e^{-rT}\left[C^+ \underbrace{\frac{S_0 e^{rT} - S^-}{S^+ - S^-}}_{\substack{\parallel \\ q}} + C^- \underbrace{\frac{S^+ - e^{rT} S_0}{S^+ - S^-}}_{\substack{\parallel \\ 1-q}}\right]$$

- Riassumendo: $\exists!$ probabilità $\mathbb{Q}$ neutrale al rischio, ed $\exists$ prezzo di arbitraggio (replicazione).

Tale prezzo coincide con quello risk-neutral

- Approccio alternativo alla valutazione:

$$\tilde{C}_0^{\mathbb{P}} := e^{-rT}\left(C^+ p + (1-p) C^-\right)$$

statisticam. più significativa!

  - occorre stimare p $(\mathbb{P})$
  - introduce arbitraggi
  - perché risk-neutral?

- Assumiamo ora:

$$\Omega = E_1 \uplus E_2 \uplus E_3$$

$$\mathbb{P}(E_1) = p_1, \quad \mathbb{P}(E_2) = p_2$$

$$\mathbb{P}(E_3) = 1 - p_1 - p_2$$

$$S_T = \begin{cases} S^+ & \text{se } E_1 \cup E_2 \\ S^- & \text{se } E_3 \end{cases}$$

$$C_T = \begin{cases} C^+ & \text{se } E_1 \\ C^- & \text{se } E_2 \cup E_3 \end{cases}$$

t	B	S	C
0	1	S_0	$?$
T	e^{rT}	S_T	C_T

Cerchiamo $\mathbb{Q}$ neutrale al rischio:

$$S_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T]$$

$$= e^{-rT}\left(S^+(q_1+q_2) + S^-(1-q_1-q_2)\right)$$

$\exists\ \infty$ soluzioni

OSS Se anche C_0 fosse osservato, allora

$$C_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_T]$$

$$= e^{-rT}\left(C^+ q_1 + C^-(1-q_1)\right)$$

se $\mathbb{Q}$ è unica ci devono essere 2 titoli rischiosi

- In generale: $\exists\ \infty$ prezzi risk-neutral $\tilde{C}_0$
- (α,β) strategia in (S, B)

$$V_T = \alpha S_T + \beta B_T = C_T \quad \text{certamente}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha S^+ + \beta e^{rT} = C^+ & (\text{se } E_1) \\ \alpha S^+ + \beta e^{rT} = C^- & (\text{se } E_2) \\ \alpha S^- + \beta e^{rT} = C^- & (\text{se } E_3) \end{cases}$$

$\nexists$ soluz se $C^+ \neq C^-$

$$\Downarrow$$

$\nexists (\alpha, \beta)$ strategia di replicazione

- <u>RIASSUNTO</u>: ci sono ∞ misure di prob. neutrali al rischio, $\nexists$ prezzi di replicazione
- <u>DOMANDA</u>: i prezzi risk-neutral introducono arbitraggi? NO
- Super-replicazione:

$$\begin{cases} \alpha S^+ + \beta e^{rT} = C^+ & (\text{se } E_1 \cup E_2) \\ \alpha S^- + \beta e^{rT} = C^- & (\text{se } E_3) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$V_T \geq C_T$ certamente

$(V_T > C_T \text{ se } E_2)$