def Dati α, M proc. stoc. a tempo discreto su $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, \mathbb{P})$, definiamo $(G_n(\alpha, M))_{n\in\mathbb{N}}$ dato da

$$G_n = G_n(\alpha, M) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (M_k - M_{k-1})$$

$\Downarrow$ trasformazione di M attraverso α

prop. Se M è una <u>martingala</u> e <u>α è predicibile</u> e limitato, allora $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala t.c.

$$\mathbb{E}[G_n(\alpha, M)] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Viceversa, se vale $(*)$ $\forall$ α predicibile e limitato e M è adattato, allora M è una marting.

dim Per def. $G_n \in m\mathcal{F}_n$ e $G_n \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$.

$$G_{n+1} = G_n + \alpha_{n+1}(M_{n+1} - M_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[G_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \underbrace{\mathbb{E}[G_n | \mathcal{F}_n]}_{G_n} + \underbrace{\mathbb{E}[\overset{m\mathcal{F}_n \text{ e limit.}}{\alpha_{n+1}} (M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n]}_{\alpha_{n+1}\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n]}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\| \\ 0}} \quad \underline{M \text{ mart.}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Y \in m\mathcal{G} \text{ e limitata} \\ \Downarrow \\ \mathbb{E}[Y \cdot X \mid \mathcal{G}] = Y\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \end{array}}$$

$= G_n$

$$\mathbb{E}[G_n] = \mathbb{E}[G_1] = \mathbb{E}[\alpha_1 (M_1 - M_0)]$$

$\Uparrow$

G_n ha media costante

$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}[\alpha_1 (M_1 - M_0) \mid \mathcal{F}_0]}_{\alpha_1 \cdot \underbrace{\mathbb{E}[M_1 - M_0 \mid \mathcal{F}_0]}_{\substack{\| \\ 0}}}\Big]$$

Torre

$$= 0$$

<u>Viceversa</u>: dobbiamo provare

$$\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{E}[M_n \cdot \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_{n-1} \cdot \mathbb{1}_A]$$

$$\forall \ A \in \mathcal{F}_{n-1}$$

Poniamo:

$$\alpha_k := \begin{cases} \mathbb{1}_A & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases} \qquad (\underline{n \text{ fissato}})$$

- $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è predicibile (α_k cost se $k \neq n$, $\alpha_n \in m\mathcal{F}_{n-1}$)
- $G_n(\alpha, M) = \mathbb{1}_A (M_n - M_{n-1})$
- x IPOTESI :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A (M_n - M_{n-1})] = 0 \qquad \#.$$

• Modelli di mercato a tempo discreto :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità finito (cardinalità di Ω finita)
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $N \in \mathbb{N}$, e una sequenza di tempi

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$$

t_0 oggi, T scadenza

- $\exists$ titolo non rischioso (c/c, obbligazione, ...) B con evoluzione

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n = B_{n-1}(1 + r_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

r_n determ.

$$\underset{\Uparrow}{\,}\quad]-1,+\infty[\quad (\Rightarrow B_n > 0)$$

- $\exists$ d titoli rischiosi $S^1, S^2, \ldots, S^d$

con evoluzione

$$\begin{cases} S_0^i \in \mathbb{R}_{>0} \\ S_n^i = S_{n-1}^i (1 + \mu_n^i), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Variabile aleatoria

ritorno relativo per il periodo $[t_{n-1}, t_n]$

$$\mu_n^i = \frac{S_n^i - S_{n-1}^i}{S_{n-1}^i}$$

$\mu_n^i \in [-1, +\infty[$

(S^i non negativo)

- $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}_n^\mu$,

$\mu = (\mu^1, \ldots, \mu^d)$ processo stocastico

Ponendo $S = (S^1, \ldots, S^d)$.

$$(S_k,\ k = 1, \ldots, n) \longleftrightarrow (\mu_k,\ k = 1, \ldots, n)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{F}_n^\mu = \mathcal{F}_n^S$$

$\boxed{\text{es.}}$ $d = 1$, $\mu_n = h_n^1 + h_n^2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^S = \mathcal{F}_n^\mu \neq \mathcal{F}_n^{(h^1, h^2)}$$

$$\left(\{ (h_n^1, h_n^2) = (x_1, x_2) \} \notin \sigma(\mu_n) \right)$$

oss. S_0^i costante $\forall\ i = 1, \dots, d$

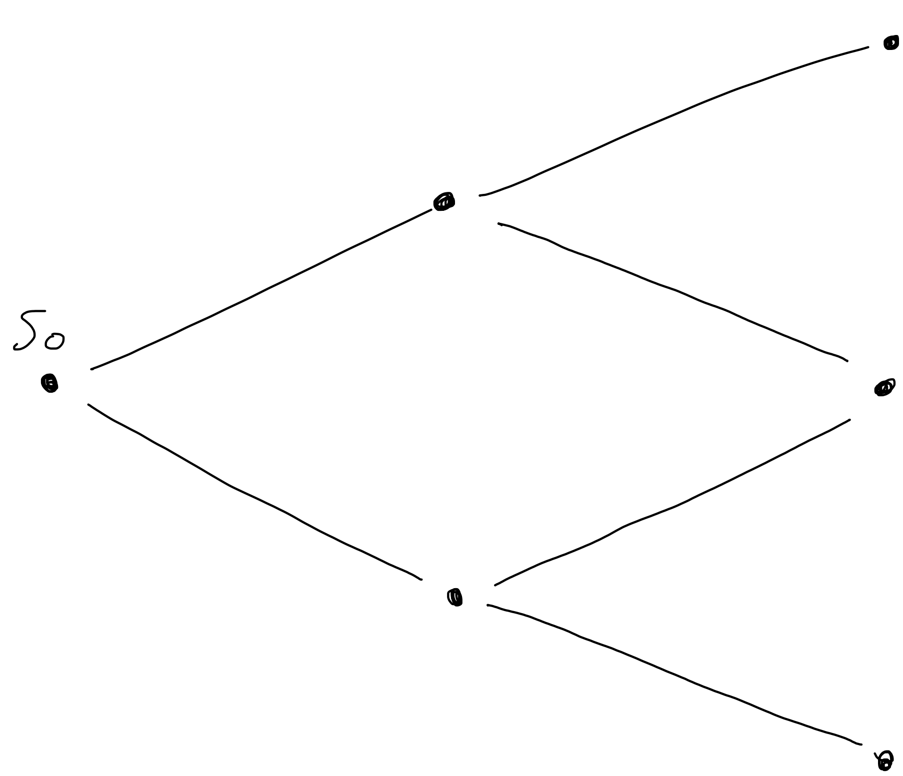
$$\Downarrow$$

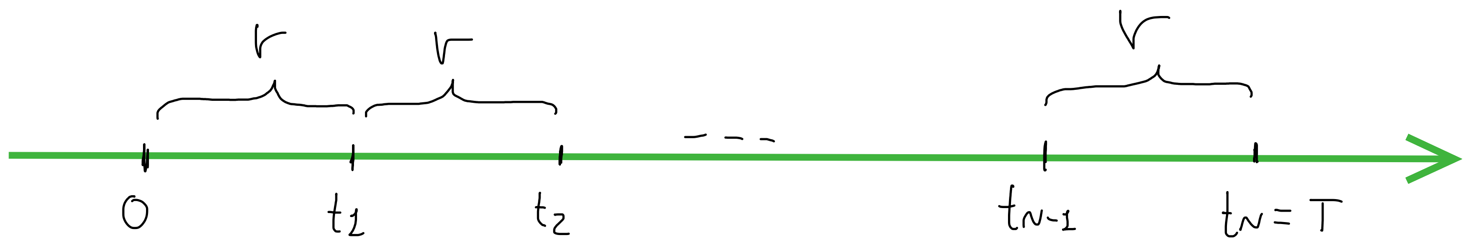
$$\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0) = \{ \emptyset, \Omega \}$$

- A volte assumeremo:

$$\mathcal{F}_N = \mathcal{F} \quad (= \mathcal{P}(\Omega))$$

es. (Modello Binomiale)





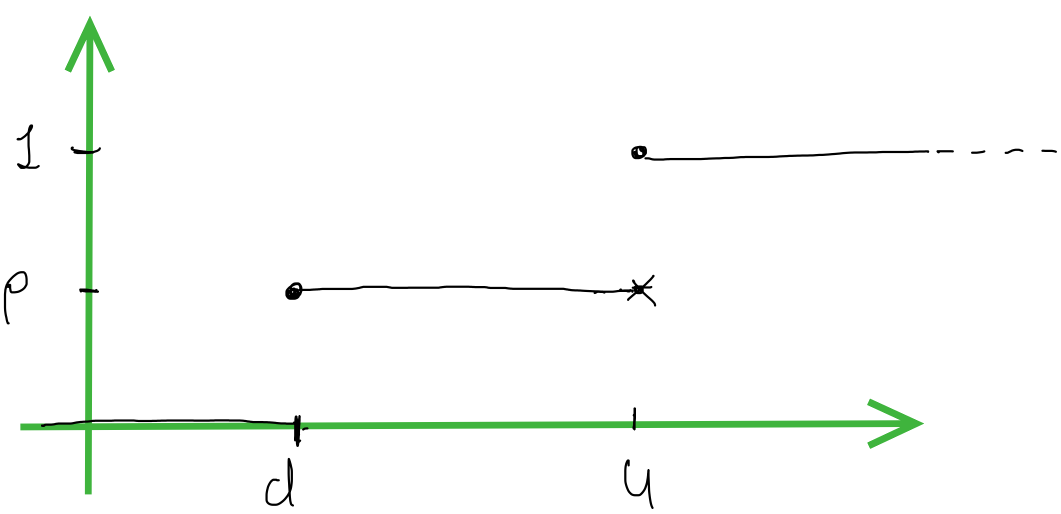
$r_n = r \quad \forall\, n \geq 1$

$d = 1$ (1 titolo rischioso)

<u>IPOTESI</u> <u>CHIAVE</u>:

- $\mu_{n+1} \sim p\,\delta_u + (1-p)\,\delta_d$,

  con $u \underset{(>)}{\geq} d \underset{(>)}{\geq} 0$, $\quad p \in [0,1]$



- $(\mu_n)_n$ sono indipend.

<u>Oss</u>: $\mathbb{P}(\mu_n = u-1) = p$

$\mathbb{P}(\mu_n = d-1) = 1-p$

! legge di $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ è la legge prodotto di μ_1 N volte

– <u>Costruzione</u> <u>canonica</u>:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ?$

$\Omega = \{u, d\}^N$, es: $(u, u, \underset{\omega_3}{d}, \underset{\omega_4}{u}, d, d, \dots, u) \in \Omega$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu_n(\omega) := \omega_n - 1$$

$$\Downarrow$$

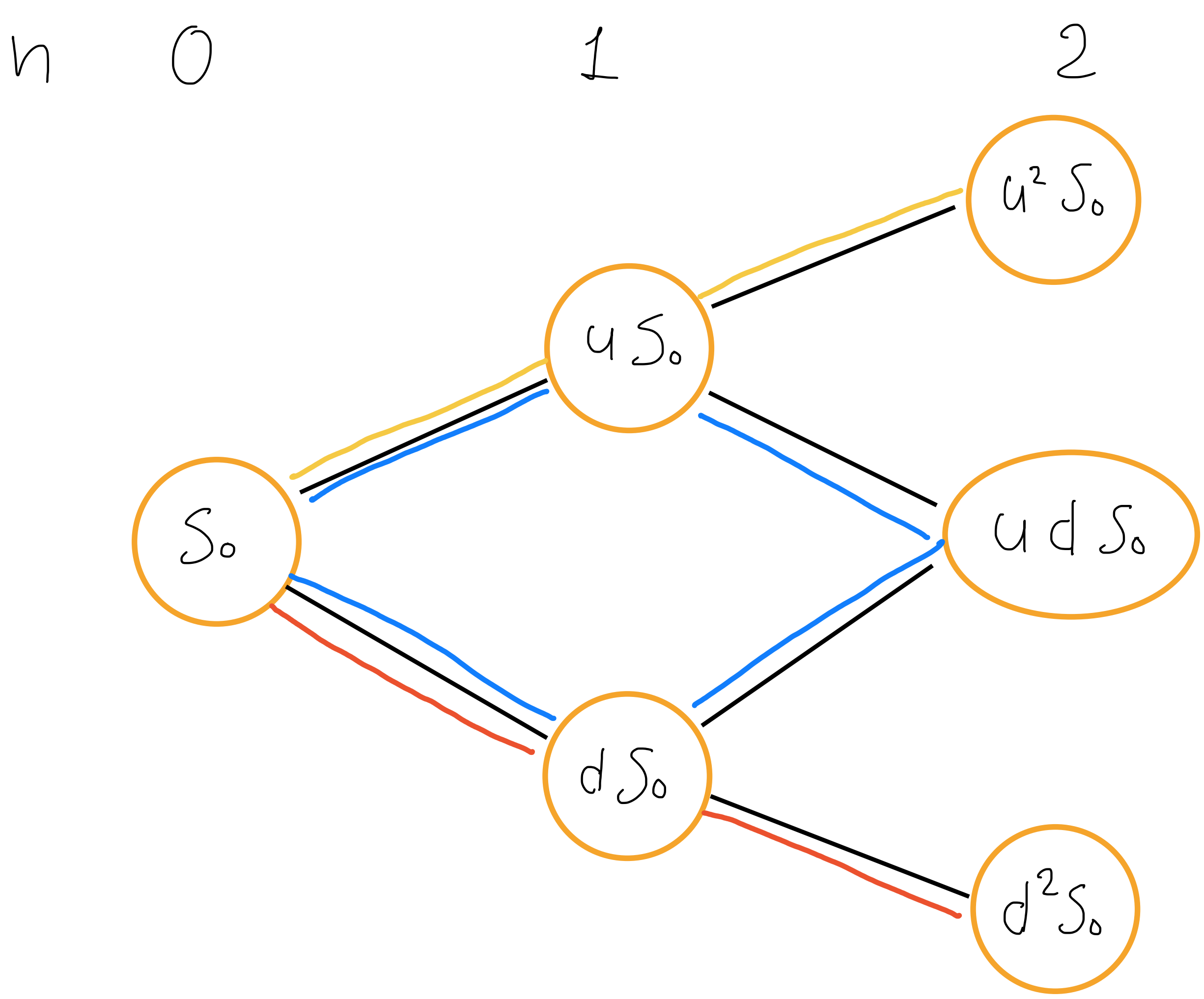
$$\mu_n(\omega) + 1 = \omega_n$$

$E_n := \{\omega \in \Omega : \omega_n = u\} = \{1 + \mu_n = u\}$

$E_n^c = \{\omega \in \Omega : \omega_n = d\} = \{1 + \mu_n = d\}$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(E_n) := p, & n = 1, \dots, N \\ (E_n)_n & \text{indipendenti} \end{cases}$$

$\rightarrow$ determinano $\mathbb{P}$ su tutto Ω



$$S_1 \in \{ u S_0 , d S_0 \}$$

$$S_2 \in \{ u^2 S_0 , u d S_0 , d^2 S_0 \}$$

$$\vdots$$

$$S_n \in \{ u^n S_0 , u^{n-1} d S_0 , \dots , u d^{n-1} S_0 , d^n S_0 \}$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{S_n = u^k d^{n-k} S_0}_{\substack{\parallel \\ (Y_n = k)}}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$Y_n := \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{E_j} \implies Y_n \sim Bin(n, p)$$

def Una strategia (o portafoglio) è un processo stoc.

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_n, \beta_n)_{n=1,\dots,N}$$

$$\alpha_n = (\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d) \in \mathbb{R}^d$$

$$\beta_n \in \mathbb{R}$$

oss. α_n^i, β_n possono essere negativi

α_i^1 quantità di titoli S^1 posseduta nell'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$

! α_n, β_n sono decisi in t_{n-1}

$$\Downarrow$$

(α, β) predicibile $\left((\alpha_n, \beta_n) \in m\mathcal{F}_{n-1} \right)$

def Data (α, β) strategia il suo valore è

$$V_n := \alpha_n \cdot S_n + \beta_n B_n \quad , \quad n = 1, \ldots, N$$

prod. scalare su $\mathbb{R}^d$

$$\left(\sum \alpha_n^i S_n^i \right)$$

es. $d = 1$, $\alpha_n = \alpha_n^1 \equiv \alpha$, $\beta_n \equiv \beta$

$$V_n = \alpha S_n + \beta B_n \quad \forall \, n = 1, \ldots, N$$

$$(\alpha_n, \beta_n) \in m\mathcal{F}_{n-1}$$

$$\Downarrow \; n = 1$$

$$(\alpha, \beta) \in m\mathcal{F}_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{(\alpha, \beta) \text{ cost.}}}$$

es. $d = 1$, $\alpha_n = n$, $\beta_n = 0$, $n = 1, \ldots, N$

$$V_n = n \cdot S_n < (n+1) S_n$$

$$\Downarrow$$

non posso ribilanciare solamente con V_n

def Una strategia si dice autofinanziante se

$$V_{n-1} = \alpha_n \cdot S_{n-1} + \beta_n B_{n-1} \quad , \quad n = 2, \dots, N$$

Si definisce anche:

$$V_0 := \alpha_1 \cdot S_0 + \beta_1 \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{B_0} = \alpha_1 S_0 + \beta_1$$

- ESPLICITAMENTE:

$$\underbrace{\alpha_{n-1} \cdot S_{n-1} + \beta_{n-1} B_{n-1}}_{\text{un attimo prima di } t_{n-1}} = \underbrace{\alpha_n \cdot S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}}_{\text{un attimo dopo } t_{n-1}}$$

- (α, β) autofinanziante

$$\Downarrow$$

$$V_n - V_{n-1} = \alpha_n \cdot S_n + \beta_n B_n$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{incremento}} - (\alpha_n \cdot S_{n-1} + \beta_n B_{n-1})$$

$$= \underbrace{\alpha_n}_{\in m\mathcal{F}_{n-1}} \cdot (\underbrace{S_n - S_{n-1}}_{\substack{\text{incremento}\\ \text{di } S}}) + \underbrace{\beta_n}_{\in m\mathcal{F}_{n-1}} (\underbrace{B_n - B_{n-1}}_{\substack{\text{incremento}\\ \text{di } B}})$$

notazione $\mathcal{A}$ è l'insieme delle strategie (α, β) predicibili e autofinanzianti (ammissibili)

prop. Sia (α, β) autofinanziante, vale

$$V_n = \underbrace{V_{n-1}(1 + r_n)}_{\substack{\text{capitalizzaz.}\\ \text{di } V_{n-1} \text{ con tasso } r_n}} + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i \cdot S_{n-1}^i \underbrace{(\mu_n^i - r_n)}_{\text{spread}}$$

$\forall\ n = 1, \ldots, N$

oss $\forall\ n \in \mathbb{N}$, V_n dipende solo da V_0 e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

non dipende dai β_n.