• Unicità :

X, Y v.a. $\quad X \overset{\mathbb{P}\text{ q.c.}}{=} Y \overset{\text{def.}}{\iff} \mathbb{P}(X = Y) = 1$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\downarrow$

$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$

$X \overset{d.}{=} Y \iff \mu_X = \mu_Y$

leggi / distribuz.

• X, Y processi stocastici : stesse definizioni con

$(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}) \rightsquigarrow ((\mathbb{R}^N)^I, \mathcal{B}^I) \to$ SPAZIO DELLE TRAIETTORIE

def X, Y processi a tempo discreto si dicono <u>indistinguibili</u> se $X = Y$ $\mathbb{P}$-q.c.

$$\left(\mathbb{P}(X_n = Y_n \ \forall n \in I) = 1 \right)$$

oss. $X = Y$ $\mathbb{P}$-q.c. $\iff X_n = Y_n$ q.c. $\forall n \in I$

$\boxed{\Rightarrow}$ ovvia $(X_n = Y_n) \supset \underbrace{(X_k = Y_k \ \forall k \in I)}$

$\mathbb{P}(\cdot) = 1 \Leftarrow \mathbb{P}(\cdot) = 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathbb{P}(X \neq Y)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \neq Y_n) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{\mathbb{P}(X_n \neq Y_n)}^{=0} = 0$$

oss. In generale quanto sopra non vale:

vale solo $\boxed{\Longrightarrow}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ vale per es. se X, Y sono a tempo continuo con traiettorie continue

- In generale: se $X_n = Y_n$ q.c. $\forall n$

X e Y si dicono MODIFICAZIONI

- Quindi:

$$\text{INDISTINGUIBILI} \Longrightarrow \text{MODIFICAZIONI}$$

$$\cancel{\Longleftarrow}$$

def X e Y si dicono uguali in legge (in distribuzione), $X \overset{d}{=} Y$, se

$$\mu_{(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})} = \mu_{(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_n})}$$

LEGGI FINITO DIMENSIONALI

$\forall\ i_1 < \dots < i_n$, con $i_1, \dots, i_n \in I$

es: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proc. stoc.

$$\mu_{\underbrace{(X_2, X_5)}} = \mu_{\underbrace{(Y_2, Y_5)}}$$

$\hookrightarrow$ v.a. 2-dim.

oss. $X_n \overset{d}{=} Y_n \quad \forall n \quad \cancel{\Rightarrow} \quad X \overset{d}{=} Y$

$(\mu_{X_n} = \mu_{Y_n})$

es. $(X_n)_n$ definito come prima

$$X'_n := X_1 \qquad \forall n$$

$$\mu_{X_n} = \frac{1}{2} \cdot \delta_1 + \frac{1}{2} \cdot \delta_{-1} = \mu_{X_1}$$

$$\left(X_n := \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } \omega_n \text{ dispari} \end{cases} \right)$$

Senz'altro $X_n \overset{d}{=} X'_n \quad \forall n$

$$(X_1, X_2) \overset{d}{\neq} (X'_1, X'_2) = (X_1, X_1)$$

$$\underbrace{\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (1,-1)\big)}_{= \frac{1}{4}} \neq \mathbb{P}\big(\underbrace{(X_1, X_1) = (1,-1)}_{= \emptyset}\big) = 0$$

oss. Può valere $X \overset{d}{=} Y$ anche se sono definiti su spazi di probabilità diversi.

- **Martingale:**

def Un processo $X = (X_n)_{n \in I}$ a tempo discreto si dice una MARTINGALA, rispetto a una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_n$, se:

(i) $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall\, n \in I$

(X è integrabile / sommabile)

(ii) $\forall\, n < N$ con $n, N \in I$ vale

$$\mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{F}_n] = X_n$$

- D'ora in avanti $I = \mathbb{N}_0, \mathbb{N}, \{0, \dots, N\}$ o $\{1, \dots, N\}$

oss. In questi casi:

(ii) $\iff \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \quad \forall\, n \in I$

$\boxed{\implies}$ ovvia $(N = n+1)$

$\boxed{\impliedby}$ es: $N = n+2$

$$\mathbb{E}[X_{n+2} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\Big[\overbrace{\mathbb{E}[X_{n+2} \mid \mathcal{F}_{n+1}]}^{X_{n+1}} \Big| \mathcal{F}_n\Big]$$

$\Uparrow$

PROPRIETÀ TORRE

$(\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1})$

$$= \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$$

oss X martingala

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[\underbrace{X_n}] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{F}_n]}] = \mathbb{E}[X_N]$$

$$\Downarrow$$

X costante in media

es: se $I = \mathbb{N}_0$, $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] \quad \forall n$

oss. X martingala rispetto a $(\mathcal{F}_n)_n$

$(\mathcal{G}_n)_n$ t.c. $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n \quad \forall n$.

$$\mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{F}_n] \mid \mathcal{G}_n]$$

$$= \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}_n]$$

$$= X_n$$

(se X è $(\mathcal{G}_n)$ adattato)

$\Downarrow$

$X_n \in m\mathcal{G}_n$

$\Rightarrow$ X è martingala risp. a $(\mathcal{G}_n)_n$ se X è adattato risp. a $(\mathcal{G}_n)_n$

$\Rightarrow X$ è martingala rispetto a $(\mathcal{F}_n^X)_n$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_n \mid X_n] = \mathbb{E}[X_n \mid \sigma(X_n)]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n^X] \mid \sigma(X_n)\right]$$

$$(\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n^X)$$

$$= \mathbb{E}[X_n \mid \sigma(X_n)]$$

$$= X_n$$

$$\Leftarrow \underbrace{\mathbb{E}[X_n \mid X_n = x]}_{\text{funzione di } x \text{ misurabile}} = x \quad \forall n$$

es.

$(X_n)_n$ definito sopra (lanci del dado indipend.)

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n] \overset{\Uparrow}{=} \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0 \neq X_n$$

X_{n+1}, X_n indipend.

$\Downarrow$

X non è una martingala

def $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice una SUB-MARTINGALA (SUPER-MARTINGALA) rispetto a $(\mathcal{F}_n)_n$ se:

(i) $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$

(ii) X adattato risp. a $(\mathcal{F}_n)_n$

(iii) $X_n \leq \mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{F}_n] \quad \forall\, n, N \in I : n < N$
$(\geq)$

oss. X sub-martingala (super-mg)

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]}_{\substack{\geq \; (\leq) \\ X_n}}\Big]$$

$(\leq)$

$$\geq \mathbb{E}[X_n]$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_n] \nearrow \; (\searrow)$

es. X_n, Y_n proc. stoc. come sopra (lanci del dado, indipendenti)

$$X_n \sim p\,\delta_1 + (1-p)\,\delta_{-1}, \quad p \in [0,1]$$

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X] = \mathbb{E}[Y_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X]$$

ADDITIVITÀ $\longrightarrow$ $= \; \mathbb{E}[\underbrace{Y_n}_{\substack{\Uparrow \\ m\mathcal{F}^X_n}} \mid \mathcal{F}^X_n] + \mathbb{E}[\underbrace{X_{n+1} \mid \mathcal{F}^X_n}_{\text{indip.}}]$

$$= Y_n + \mathbb{E}[X_{n+1}]$$

$$= Y_n + 2p - 1$$

$$\Rightarrow Y \text{ è } \begin{cases} \text{sub-martingala} & p \geq \frac{1}{2} \\ \text{super-marting.} & p \leq \frac{1}{2} \\ \text{martingala} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

def Un processo A si dice PREDICIBILE risp. a $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrazione, se

$$A_n \in m\mathcal{F}_{n-1} \quad \forall\, n \in I$$

oss. PREDICIBILE $\Rightarrow$ ADATTATO

teorema (Decomposizione di Doob)

Sia $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ proc. adattato risp. $(\mathcal{F}_n)_n$ integrabile. Allora $\exists!$ (q.c.)

- $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ martingala t.c. $M_0 = X_0$
- $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ predicibile t.c. $A_0 = 0$ $\Uparrow$ certam.

tali che $X_n = M_n + A_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad (*)$

Inoltre, X è super-mart (sub) $\Leftrightarrow$ $A \downarrow$ $(\uparrow)$

dim

Unicità: $X_n - X_{n-1} = M_n - M_{n-1} + A_n - A_{n-1}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} = \cancel{\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1}} + \underbrace{\mathbb{E}[A_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]}_{= A_n} - A_{n-1}$$

$$= A_n - A_{n-1}$$

$$(**) \Rightarrow \begin{cases} A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} \\ M_n = M_{n-1} - (A_n - A_{n-1}) + (X_n - X_{n-1}) \\ \quad = M_{n-1} - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] + X_n \end{cases}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$.

ESISTENZA: Poniamo $A_0 \equiv 0$, $M_0 \equiv X_0$ e A_n, M_n per $n \in \mathbb{N}$ definiti da $(**)$

- $A_n \in m\mathcal{F}_{n-1}$ (predicibile)
- $(M_n)_n$ è una martinz. :

$$\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} - \cancel{\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]} + \cancel{\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]} .$$

- Ora, x la 1^a eq. in $(**)$

$$\underbrace{A_n - A_{n-1}}_{\geq 0} = \underbrace{\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_n}_{\geq 0} \iff X \text{ sub-mart.}$$

#