- Stefano Pagliarani (stefano.pagliarani9@unibo.it)
  - Processi di Markov
  - Martingale

  $\Big]\to$ a tempo discreto

- Applicazioni: teoria dell'arbitraggio (derivati fin.)
  machine learning

- **Derivato finanziario**: contratto il cui valore dipende dal valore di un certo titolo finanziario SOTTOSTANTE

- **Es: opzioni**: permette di comprare / vendere il sottostante ad un prezzo fissato ad un certo tempo futuro

  - TIPO DI SOTTOSTANTE

- PREZZO FISSATO (STRIKE) K

- SCADENZA $T > 0$

- TIPO DI CONTRATTO :

CALL / PUT

comprare — vendere

EUROPEA / AMERICANA

Solo al tempo T — ad ogni $t \in [0, T]$

CS

S = valore di un'azione Apple

S_0 = valore al tempo $0 = 200\ \$$

OPZIONE CALL (EUROPEA) : $K = 210\ \$$

$T = 2$ settimane

- un possibile scenario :

$$S_T = 230$$

$$X_T = 230 - 210 = 20$$

valore della Call in T

- altro scenario :

$S_T = 180$

$X_T = 0$

- **PAYOFF**: valore dell'opzione (derivato) contrattuale

- In generale: (per opzione call europea)

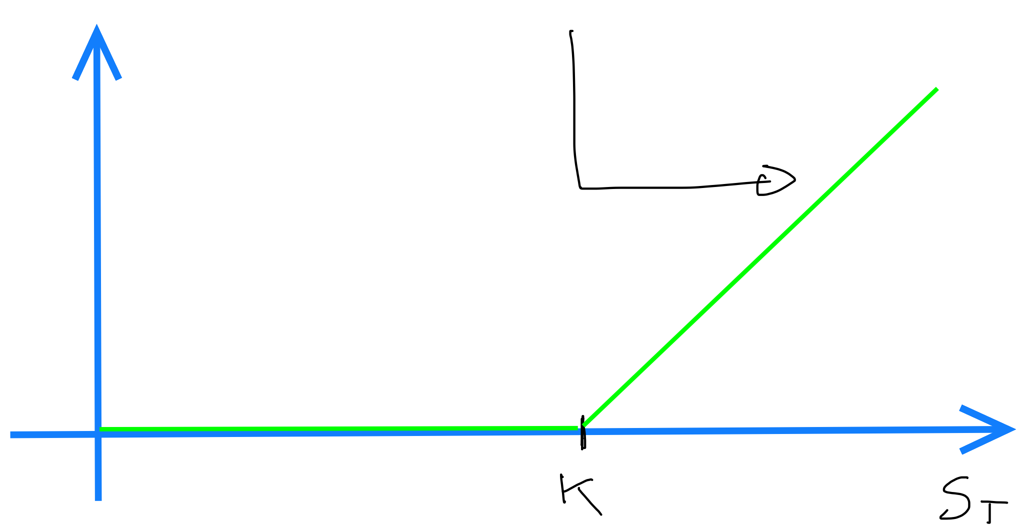
  1 - $S_T > K$

  $X_T = S_T - K > 0$

  2 - $S_T \leq K$

  $X_T = 0$

$\Longrightarrow X_T = (S_T - K)^+$



- <u>put</u> europea:

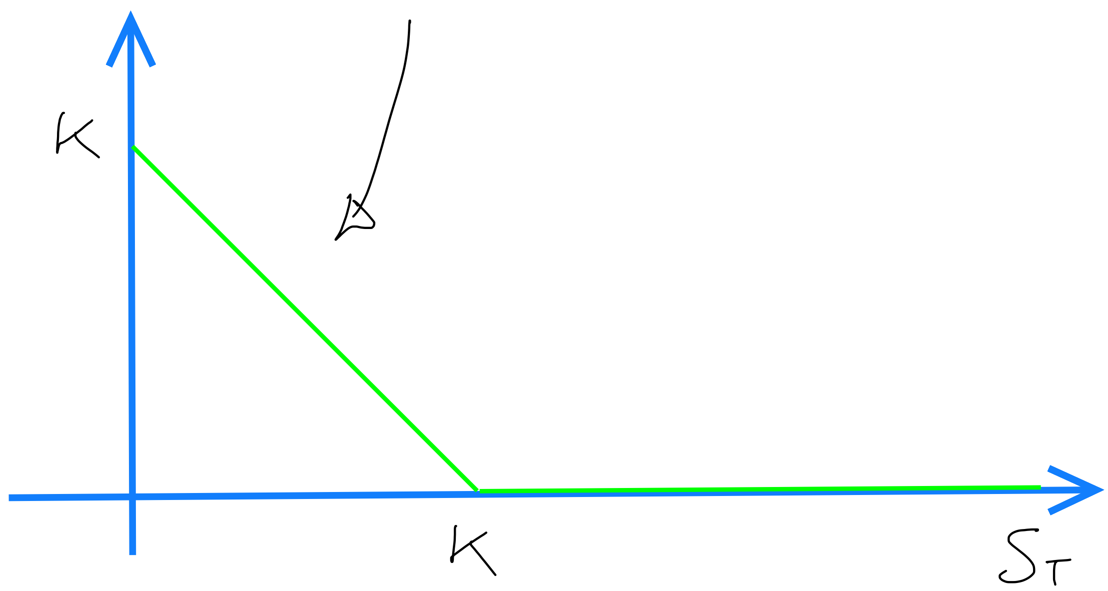
  1 - $S_T \geq K$

  $X_T = 0$

2 - $S_T < K$

$X_T = K - S_T$

$\Rightarrow X_T = (K - S_T)^+$



$\downarrow$ (caso americano)

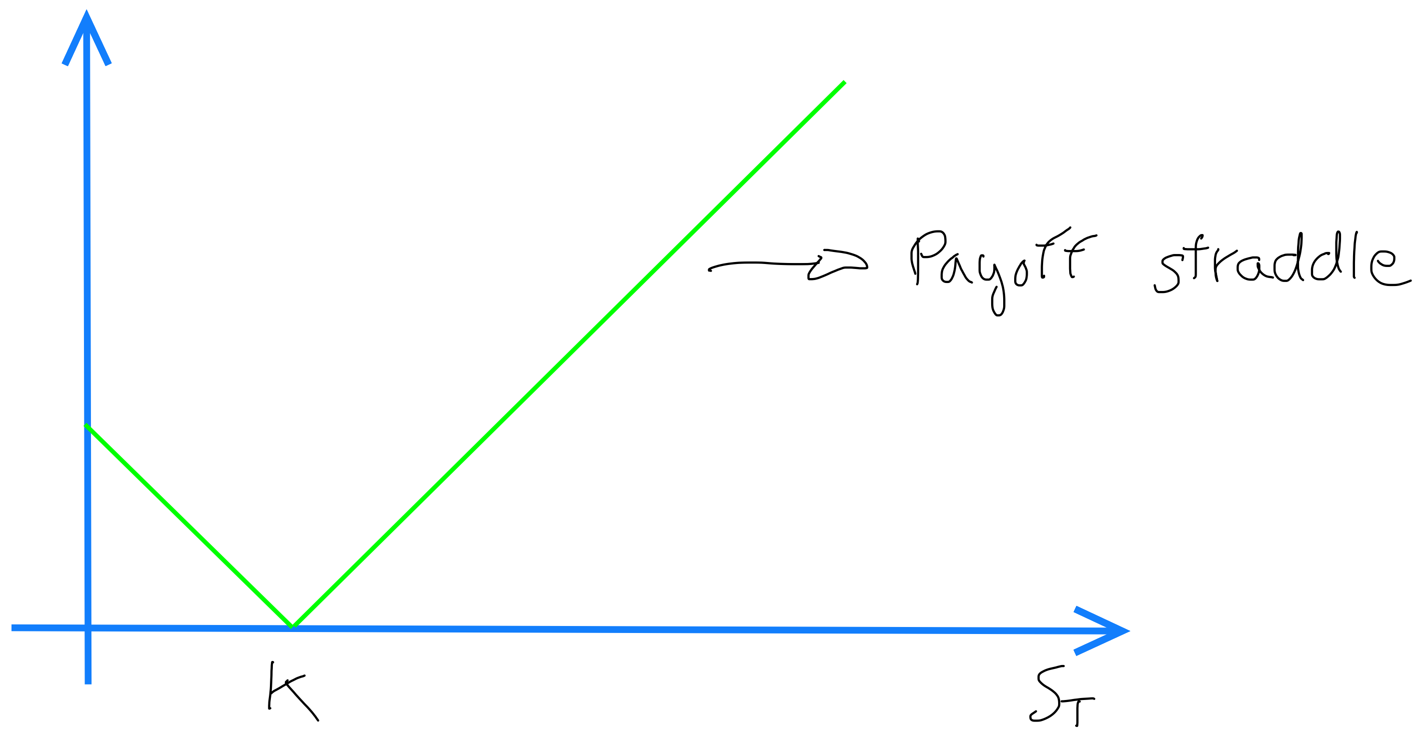
S_t

- Opzioni Straddle: CALL + PUT

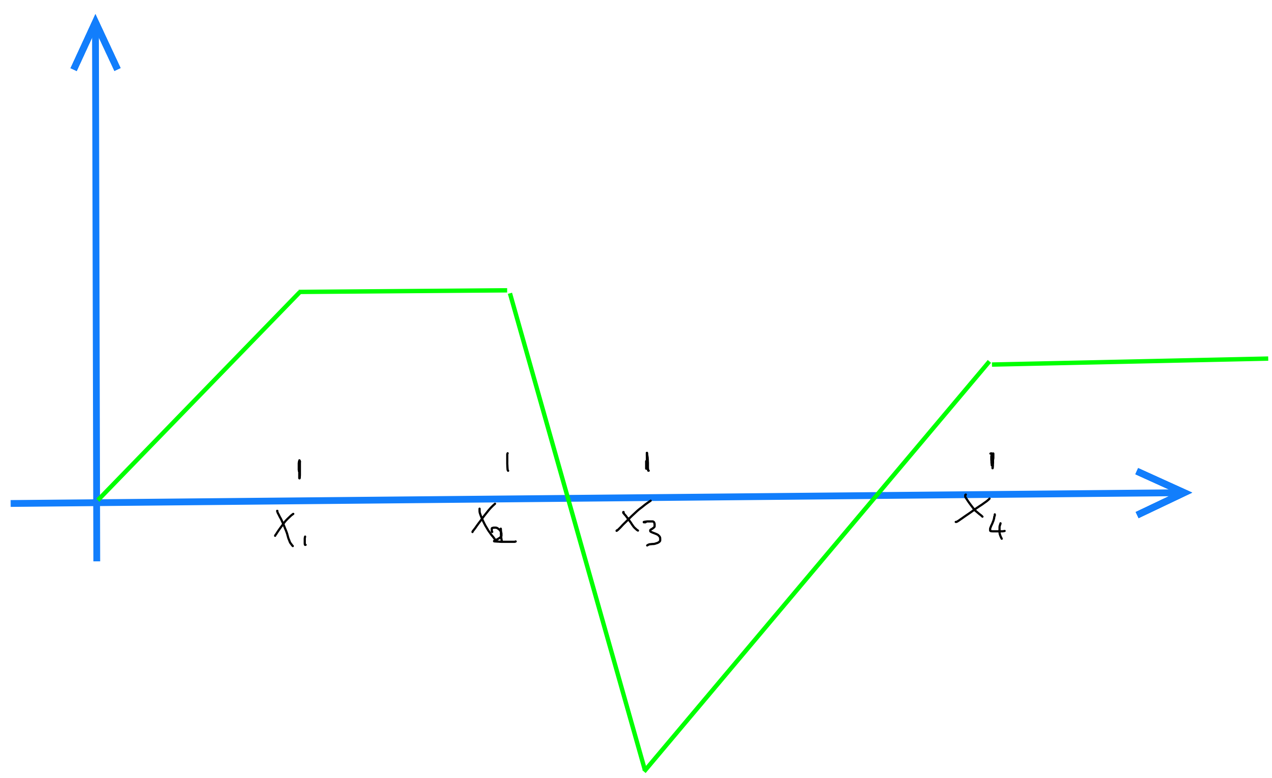
(stessi sottostante, scadenza e strike)

$$X_T = \underbrace{(S_T - K)^+}_{\text{CALL}} + \underbrace{(K - S_T)^+}_{\text{PUT}}$$

$$= |S_T - K|$$

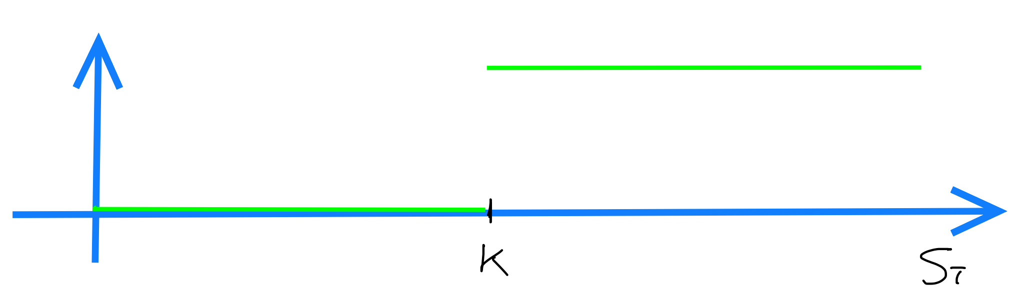


es. (COMBINAZIONE DI CALL E PUT)



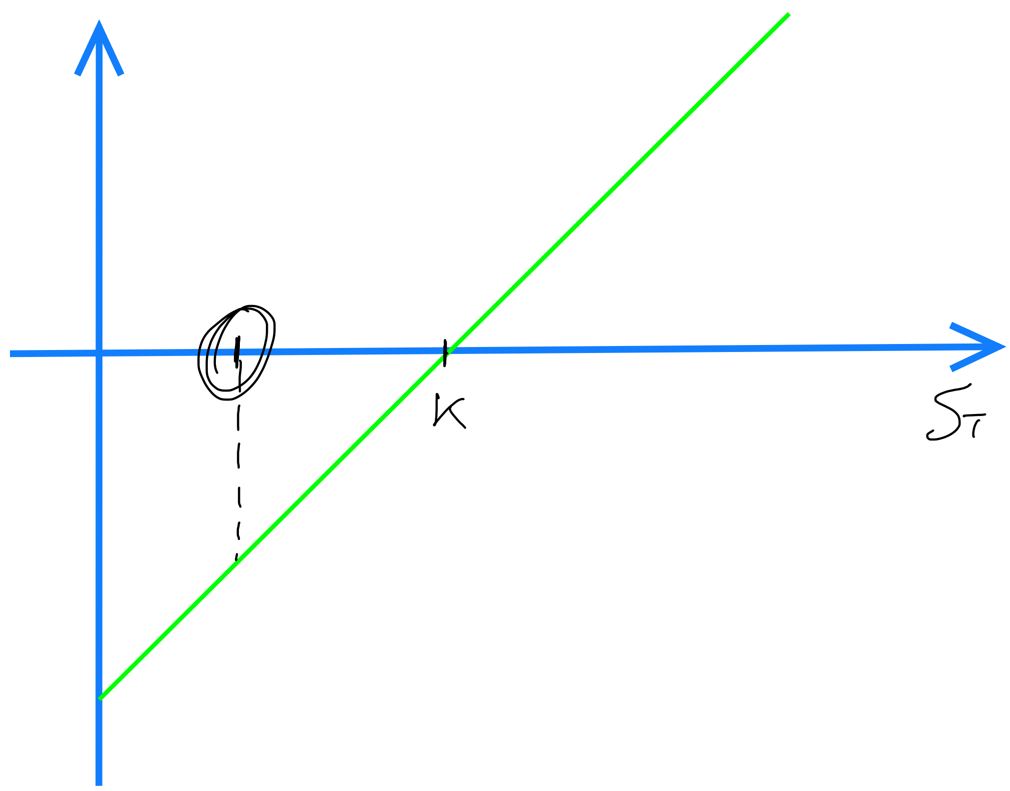
es. (opzioni digitali - binarie)

$$X_T = \begin{cases} 1 & \text{se } S_T > K \\ 0 & \text{se } S_T \leq K \end{cases}$$



es) Futures (non opzioni!)

$X_T = S_T - K$ $\qquad\qquad$ $Y_T = (S_T - K)^+$



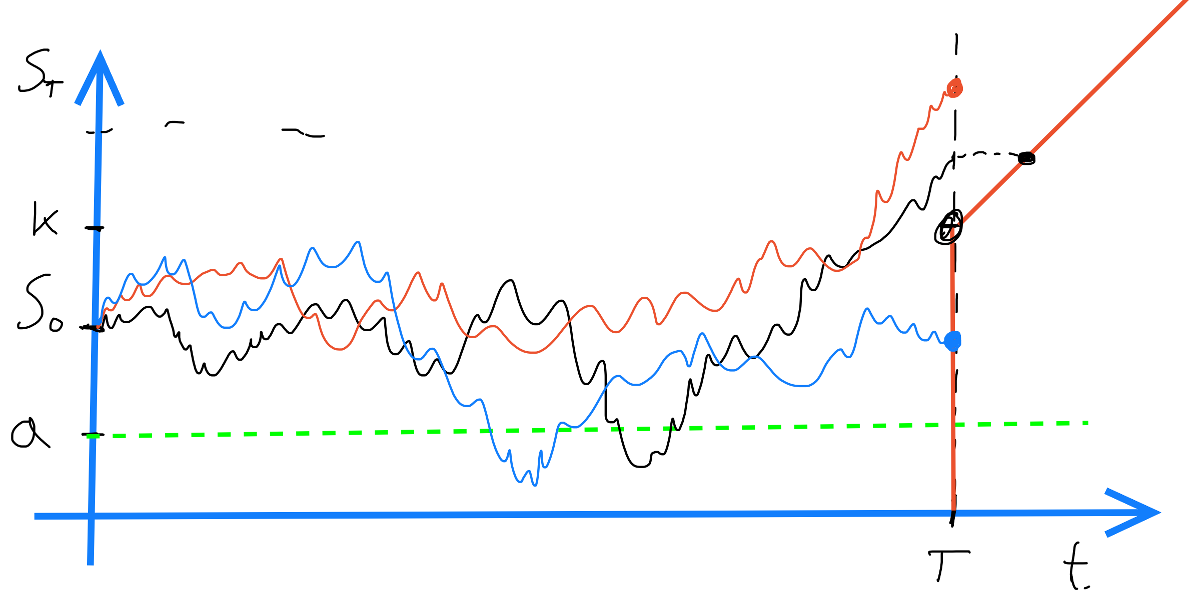
es) opzioni asiatiche:

$S_T \rightsquigarrow$ media temporale di $(S_t)_{t \in [0,T]}$

(aritmetica, geometrica)

es) opzioni con barriera:

a barriera dal basso



es 1 (effetto leva)

Pago 1 \$ per una CALL con strike

$K = S_0 = 10$.

- Se $S_T = 13 \to X_T = 3$

GUADAGNO $= X_T - X_0 = 3 - 1 = 2$

(+ 200 %)

- Se $S_T = 9,5 \to X_T = 0$

GUADAGNO $= X_T - X_0 = 0 - 1 = -1$

(- 100 %)

- 2 problemi:
  - valutazione (pricing)
  - copertura (hedging)

- Leggi di capitalizzazione:
  - semplice: $B_T = B_0 (1 + r T)$

CAPIT. INIZ.

durata

tasso semplice

$$= B_0 + \underbrace{B\, r\, T}_{\text{INTERESSI}}$$

es: $r = 0{,}05 = 5\%$

annuale $\rightarrow$ T espresso in anni

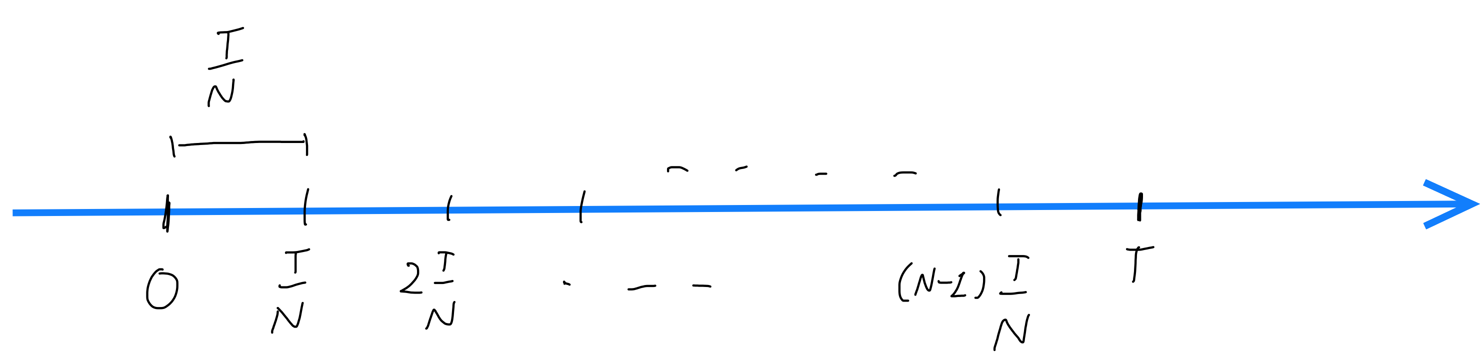
- composta continua:

$$B_T = B_0 \cdot e^{rT}$$

es: $100\,(0{,}05 \cdot 2 + 1)$

$$\wedge$$

$$\left[100\,(0{,}05 \cdot 1 + 1)\right](0{,}05 \cdot 1 + 1)$$



$$B_{\frac{T}{N}} = \underbrace{B_0\left(1 + r\frac{T}{N}\right)}$$

$$B_{2\frac{T}{N}} = B_{\frac{T}{N}}\left(1 + r\frac{T}{N}\right) = B_0\left(1 + r\frac{T}{N}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$B_T = B_{(N-1)\frac{T}{N}}\left(1 + r\frac{T}{N}\right) = B_0\left(1 + r\frac{T}{N}\right)^N$$

$$= B_0 \left[\left(1 + r\frac{T}{N} \right)^{\frac{N}{Tr}} \right]^{Tr}$$

$$\Big\downarrow \; N \mapsto +\infty$$

$$B_0 \, e^{Tr}$$

- **Principio di non arbitraggio:**

$$X_T \leq Y_T \implies X_t \leq Y_t \quad \forall \; t < T$$

certamente

es. supponiamo che P.N.A non valga:

$$X_T \leq Y_T \quad \text{ma} \quad Y_0 < X_0$$

1 - tempo 0: vendo X (allo scoperto) $(+X_0)$

compro Y $(-Y_0)$

realizzo $X_0 - Y_0 > 0$

2 - tempo T: compro X $(-X_T)$

vendo Y $(+Y_T)$

realizzo $Y_T - X_T \geq 0$

in totale: $\underbrace{X_0 - Y_0}_{>0} + \underbrace{Y_T - X_T}_{\geq 0} > 0$

oss. P.N.A. $\longrightarrow$ $X_T = Y_T$ certam. $(X_T \le Y_T,\ Y_T \le X_T)$

$$\Downarrow$$

$$X_t = Y_t \quad \text{certam.} \quad \forall\, t < T$$

- S titolo sottostante (rischioso)
- B titolo non rischioso (c/c banc., obbligaz)

$$B_t = e^{rt} \longrightarrow \text{CAPITALIZ. COMPOSTA}$$

- C prezzo opzione call (S, T, K)
- P " " put (S, T, K)

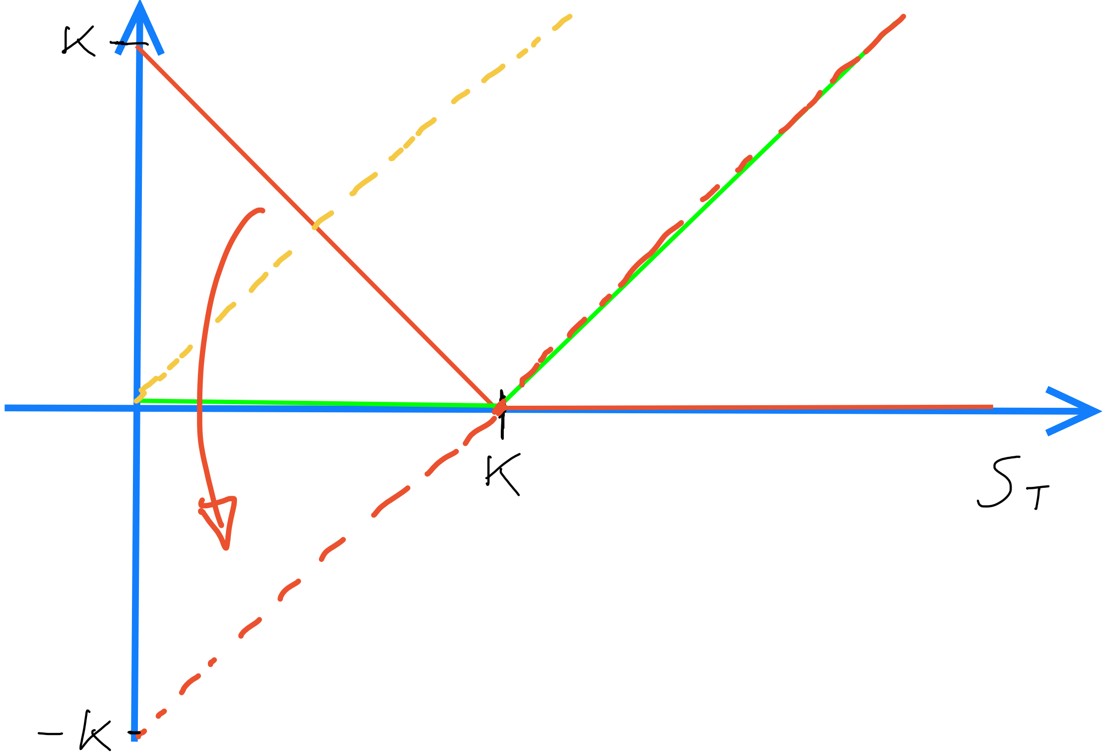
propos. (Put - Call parity)

Se vale P.N.A. allora:

$$\boxed{C_t = P_t + S_t - K \cdot e^{-r(T-t)} \quad \forall\, t \in [0,T]}$$

dim
$$S_T = \underbrace{(S_T - K)^+}_{\shortparallel} - \underbrace{(K - S_T)^+}_{\shortparallel} + K$$

$$= C_T - P_T + \frac{K}{B_T} \cdot B_T$$



$\downarrow$

n° quote del titolo B

$\Downarrow$ P.N.A.

$$S_t = C_t - P_t + \underbrace{\frac{K}{B_T} \cdot B_t}_{= K \cdot e^{-r(T-t)}} \qquad \#$$