• Valore atteso condizionato :

• Dato un evento $B : \mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}|_B (A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad , \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$\mathbb{E}|_B [\underbrace{X}_{\text{v.a.}}] = \mathbb{E}[X \mid B] \leftarrow \underline{\text{NUMERO}}$$

$$:= \int_\Omega X \, d\mathbb{P}|_B$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \underbrace{\int_\Omega X \cdot \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P}}_{\int_B X \, d\mathbb{P}}$$

• Introduciamo $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sotto-σ-algebra.

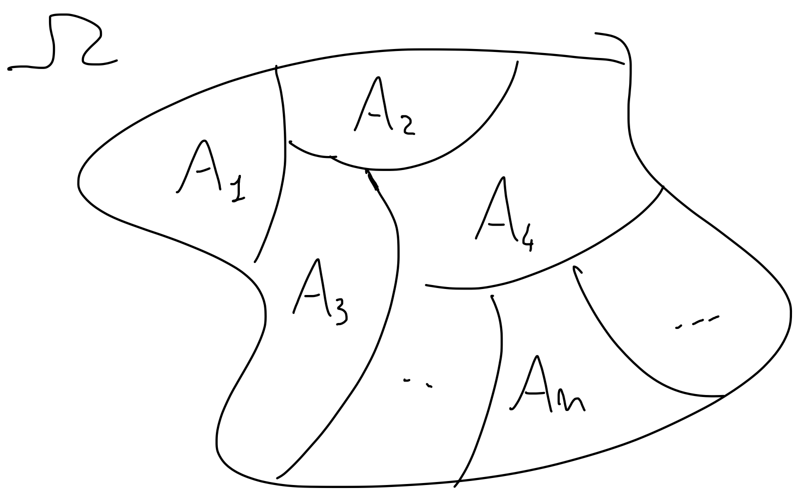
Vogliamo definire $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$

<u>es. 1</u> $\mathcal{G} = \{ \emptyset, \Omega, \underset{\neq \emptyset}{B}, B^c \}$, $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}](\underset{\in \Omega}{\omega}) := \begin{cases} \mathbb{E}[X \mid B] & \text{se } \omega \in B \\ \mathbb{E}[X \mid B^c] & \text{se } \omega \in B^c \end{cases}$$

oss: $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \in m\mathcal{G}$ (ovvio)

es. $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{P})$ dove $\mathcal{P} = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ partizione di Ω $\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega, \; A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \right)$



$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathcal{G} \ni G = \biguplus_{k \in \mathbb{N}} A_{i_k}}$$

Assumiamo $\mathbb{P}(A_i) > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Y v.a.

$$\underbrace{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}](\omega)}_{Y \,:=} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \underbrace{\mathbb{E}[X \mid A_i]}$$

$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$: v.a ($\in m\mathcal{F}$)

$\mathbb{E}[X \mid A_i]$: numero (è ben definito se $\mathbb{P}(A_i) > 0$)

oss.

(i) $\boxed{Y \in m\mathcal{G}}$ (ovvio)

(ii)
$$\int_G Y \, dP = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_{i_k}} Y \, d\mathbb{P}$$

$G = \biguplus A_{i_k}$

$Y = \mathbb{E}[X \mid A_{i_k}] = \frac{1}{\mathbb{P}(A_{i_k})} \int_{A_{i_k}} X \, d\mathbb{P}$ (su A_{i_k})

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \cancel{\mathbb{P}(A_{i_k})} \cdot \cancel{\frac{1}{\mathbb{P}(A_{i_k})}} \int_{A_{i_k}} X \, d\mathbb{P}$$

$$= \int_G X \, d\mathbb{P} \, , \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]}$$

prop.) Se Ω è numerabile, ogni $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebra è generata da una partizione numerabile.

teo) Sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\left(\mathbb{E}[|X|] < +\infty \Downarrow \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R} \right)$

Sia poi $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra.

Allora, $\exists$ Y v.a. tale che:

(i) $Y \in m\mathcal{G}$

(ii) $\forall G \in \mathcal{G}$, $\int_G X \, d\mathbb{P} = \int_G Y \, d\mathbb{P}$

Inoltre se Z è v.a. che soddisfa (i)-(ii) allora $Z = Y$ q.c. (unicità!)

def) Una v.a. Z che soddisfa (i)-(ii) si dice una versione del valore atteso condizionato di X data $\mathcal{G}$, si scrive

$$\text{“} Z =: \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \text{”}$$

oss Se $\mathbb{P}(G) = 0$ allora la (ii) è ovvia! $(0=0)$

Se $\mathbb{P}(G) > 0$, allora (ii)

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{E}[Y \mid G] = \mathbb{E}[X \mid G]$$

- Proprietà:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\big]$$

$\vdots$

oss $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$, $Z = Y$ q.c. $(\in m\mathcal{G})$

$$\not\Downarrow$$

$$Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

$(Z \notin m\mathcal{G}$ in generale$)$

def Z v.a., $\mathbb{E}[X \mid Z] := \mathbb{E}[X \mid \sigma(Z)]$

oss Z ha valori discreti

$\Downarrow$

$$\sigma(Z) = \sigma\Big(\underbrace{\{Z = z_i\},\quad i \in \mathbb{N}}\Big)$$

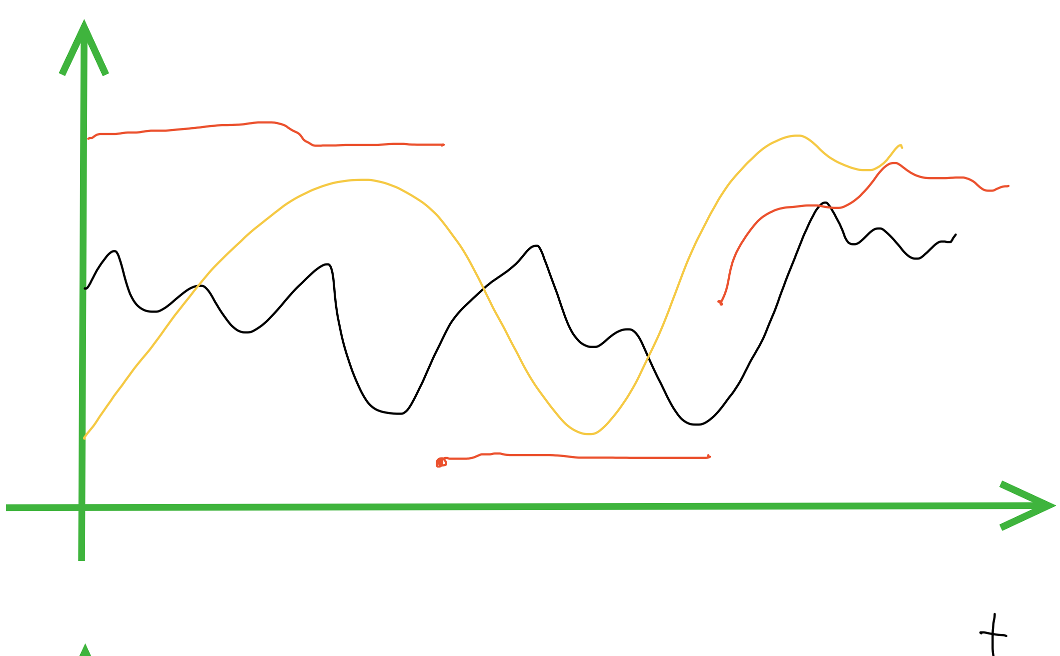
partizione numerabile di Ω

$\Downarrow$

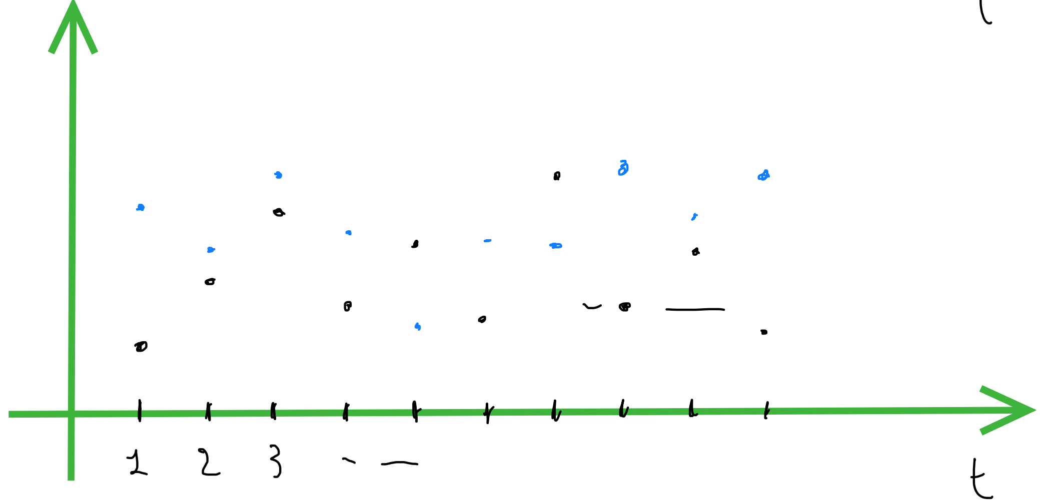
definiz. diretta per casi:

$$\mathbb{E}[X \mid Z](\omega) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(Z = z_i)}(\omega)\, \mathbb{E}[X \mid Z = z_i]$$

• Processi stocastici:



$f(t) \rightsquigarrow X_t(\omega)$



$a_n \rightsquigarrow X_n(\omega)$

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

def Un proc. stoc. a tempo discreto è una famiglia $X = (X_n)_{n \in I}$ di variabili aleatorie, dove $I \subset \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

es: $I = \mathbb{N}_0, \mathbb{N}, \{0, 1, \ldots, N\}, \ldots$

- $X_n \in m\mathcal{F} \quad \forall\, n \in I$

$$\begin{array}{c} (\Omega, \mathcal{F}) \\ \downarrow \\ (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}) \end{array}$$

- Da ora $I = \mathbb{N}_0$ se non diversamente specificato

- $\forall\, \omega \in \Omega$ la funzione

$$I \ni n \longmapsto X_n(\omega)$$

si dice una traiettoria di X

- Possiamo vedere X come

$$X : \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}^N)^I := \{\text{successioni } (x_n)_{n \in I}\}$$
$$\omega \longmapsto (X_n(\omega))_{n \in I}$$

- Si può provare che:

$$X_n \in m\mathcal{F} \quad \forall\, n \in I$$

$$\Updownarrow$$

$$X \in m(\mathcal{F}, \underbrace{\mathcal{B}^I}_{\substack{\shortparallel \\ \text{“}\sigma\text{-algebra prodotto di } \mathcal{B}\text{”}}})$$

<u>es:</u> I finito, diciamo $I = \{1, \dots, N\}$,

$$\mathcal{B}^I = \underbrace{\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}}_{N \text{ volte}}$$

$$= \sigma\left(\{H_1 \times H_2 \times \dots \times H_N\},\ H_i \in \mathcal{B},\ i = 1, \dots, N\right)$$

! n indice temporale

ω determina tutto il fenomeno, che si sviluppa nel tempo

<u>es.</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = \{\text{“}T\text{”}, \text{“}C\text{”}\}$ $\rightarrow$ lancio moneta

$\mathcal{F}_n = \mathcal{P}(\Omega_n)$, $\underbrace{\mathbb{P}_n(\{T\}) = \frac{1}{2} \quad \forall n}_{\uparrow \atop \text{per fissare le idee}}$

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n \times \dots = \Omega^{\mathbb{N}}$$

<u>es:</u> $(T, T, C, T, C, \dots) \in \Omega$

$(C, C, T, C, T, T, \dots) \in \Omega$

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n \otimes \cdots = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\mathbb{P} := \underbrace{\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_n \otimes \cdots}_{\Downarrow} = (\mathbb{P}_1)^{\mathbb{N}}$$

lanci indipendenti

<u>es:</u> $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0 \quad \forall\, \omega \in \Omega$

$$\mathbb{P}\left(\{(\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_n})\}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\forall\, \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n} \in \{\text{"T"}, \text{"C"}\}$$

<u>Consideriamo:</u>

$$\underset{\substack{\| \\ (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)}}{X_n(\overset{\substack{\Omega \\ \cup}}{\omega})} := \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_n = T \\ -1 & \text{se } \omega_n = C \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\Omega \ni \omega \longmapsto (1, -1, -1, 1, \ldots) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$$

- $X = (X_n)_n$ è un proc. discreto
- Altro processo:

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

! Il giocatore non può mai verificare gli eventi $\{\omega\}$

$$Z_n := \begin{cases} \sum_{m=n}^{+\infty} X_m & \text{se è conv.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \in m\mathcal{F}$$

def Una famiglia $(\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ di σ-algebre tali che

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F} \quad \forall \; n < m$$

si dice una FILTRAZIONE

- $(\mathcal{F}_n)_n$ è $\nearrow$ (crescente)
- $\mathcal{F}_n$ rappresenta gli eventi osservabili fino al tempo n.
- Tutti gli eventi osservabili in n lo sono anche in $m > n$

def Un processo stoc. a tempo discreto X si dice adattato a $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrazione se

$$X_n \in m\mathcal{F}_n \quad \forall \; n \in I$$

- adattato significa osservabile

es. X, Y, Z come nell'esempio precedente.

$\bar{\mathcal{F}}_n := \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$

$(\bar{\mathcal{F}}_n)_n$ è una filtrazione. Vale:

- X, Y adattati a $(\bar{\mathcal{F}}_n)_n$
- Z non è adattato a $(\bar{\mathcal{F}}_n)_n$

• altro punto di vista: si può osservare $(X_n)_n$.
quali eventi sono osservabili al tempo n?

def Sia $X = (X_n)_{n \in I}$ proc. stoc.. Si dice FILTRAZIONE NATURALE di X la famiglia $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in I}$ data da

$$\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_i,\ i \leq n)$$

$$= \sigma(\{X_i \in H\},\ i \leq n,\ H \in \mathcal{B})$$

oss $(\mathcal{F}^X_n)_n$ è la più piccola filtrazione che rende X adattato

es (lancio di dadi) Stessa costruzione di prima con $\Omega_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{P}(\Omega_n)\,.$$

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}\,, \qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)\,.$$

<u>Poniamo</u>:

$$\mathcal{F}_n := \Big\{ \big(\omega \in \Omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in H \big), \; H \in \mathcal{P}(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n) \Big\}$$

<u>es</u>: $A := \{\text{faccia } 1 \text{ al } 2^\circ \text{ lancio}\}$

$$= \{ \omega \in \Omega : \omega_2 = 1 \}$$

$$= \{ \omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_2) \in \underbrace{\Omega_1 \times \{1\}}_{\in\, \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)} \}$$

$$\Longrightarrow A \in \mathcal{F}_2\,, \quad A \in \mathcal{F}_3\,, \quad \dots$$

$$A \notin \mathcal{F}_1$$

$$\mathcal{G}_n := \Big\{ \big(\omega \in \Omega : \omega_n \in H \big), \; H \in \mathcal{P}(\Omega_n) \Big\}$$

<u>es</u>: $B := \{\text{"esce faccia 1 al lancio 1"}\}$

$$= \{ \omega \in \Omega : \omega_1 = 1 \}$$

$$B \in \mathcal{G}_1 \, , \quad B \notin \mathcal{G}_2$$

$$\Downarrow$$

$(\mathcal{G}_n)_n$ non è una filtrazione

Definiamo:

$$X_n(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \omega_n \in \{2,4,6\} \\ -1 & \text{"} \quad \omega_n \in \{1,3,5\} \end{cases} \, , \quad n \in \mathbb{N}$$

$\forall \; H \in \mathcal{B}$,

$$\underset{\substack{\cap \\ m\mathcal{F}_n}}{(X_n \in H)} = \begin{cases} \Omega & \text{se } \{-1,1\} \subset H \\ \emptyset & \text{se } \{-1,1\} \cap H = \emptyset \\ (\omega : \omega_n \in \{2,4,6\}) & \text{se } 1 \in H, \, -1 \notin H \\ \underbrace{(\omega : \omega_n \in \{1,3,5\})}_{\substack{\shortparallel \\ \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{n-1} \times \{1,3,5\} \times \Omega_{n+1} \times \dots}} & \text{se } 1 \notin H, \, -1 \in H \end{cases}$$

$\Rightarrow (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è adattato

Definiamo:

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{\cup \\ m\mathcal{F}_k}}{X_k} \, , \quad n \in \mathbb{N}$$

$(\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n)$

$\Rightarrow X_k \in m\mathcal{F}_n \Rightarrow Y_n \in m\mathcal{F}_n$

$\Rightarrow (Y_n)_n$ adattato

Definiamo:

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n+1} X_k \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\cancel{\mathcal{A}}$$

$$m\mathcal{F}_n \qquad X_{n+1} \notin m\mathcal{F}_n$$

$$m\mathcal{F}_n \ni Z'_n := \sum_{k=1}^{n-1} X_k \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(Z'_1 := 0)$$

Z'_n è più che adattato: $Z'_n \in m\mathcal{F}_{n-1}$

(<u>PREDICIBILE</u>)

Assumiamo che il giocatore non veda i dadi: vede solo l'esito della sua scommessa X_n.

Quindi ha solo accesso a $(\mathcal{F}^X_n)_n$

<u>es:</u> A (come sopra) $\notin \mathcal{F}^X_n \quad \forall n$

$A' := \{$"esce un dispari al 3° lancio"$\}$

$A' \in \mathcal{F}^X_3 \quad , \quad A' \in \mathcal{F}^X_n \quad \forall n \geq 3$