dim | (F.F.T.A.P)

II PARTE: $\nexists$ arbitraggi $\Rightarrow$ $\exists$ E.M.M. $\mathbb{Q}$ rispetto a B

- assumiamo $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ (senza perdere generalità) $\forall\ \omega \in \Omega$
- Trovare $\mathbb{Q} > 0$ tale che (prop. preced.)

$$\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cdot (\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})\right]}_{=:\ G^{(\alpha)} = \tilde{V}_N^{(\alpha,\beta)} - \tilde{V}_0^{(\alpha,\beta)}} = 0$$

$\forall\ \alpha = (\alpha_n)_{n=1,\dots,N}$ predicibile (a valori in $\mathbb{R}^d$)

- Poniamo:

  - $m := \# \Omega$, $(\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\})$
  - $Y_i := Y(\omega_i)$, $i = 1, \dots, m$ con Y v.a. reale

$$\underset{\text{v.a.}}{Y} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{R}^m}{(Y_1, \dots, Y_m)}$$

$\rightarrow \quad \mathbb{E}^{Q}[Y] = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot Q(\{\omega_j\})$

$\nexists$ arbitraggi

$\Downarrow$

$\forall \alpha$ predic. $\quad G^{(\alpha)} \notin \mathbb{R}^m_+ := \{ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} : y_i \geq 0 \ \ \forall i \}$

$\downarrow$

v.a. ≥ 0 e > 0 per almeno un ω

(definiz. di arbitraggio)

- Poniamo:

  - $\mathcal{L} := \{ G^{(\alpha)} \mid \alpha$ predicibile $\}$

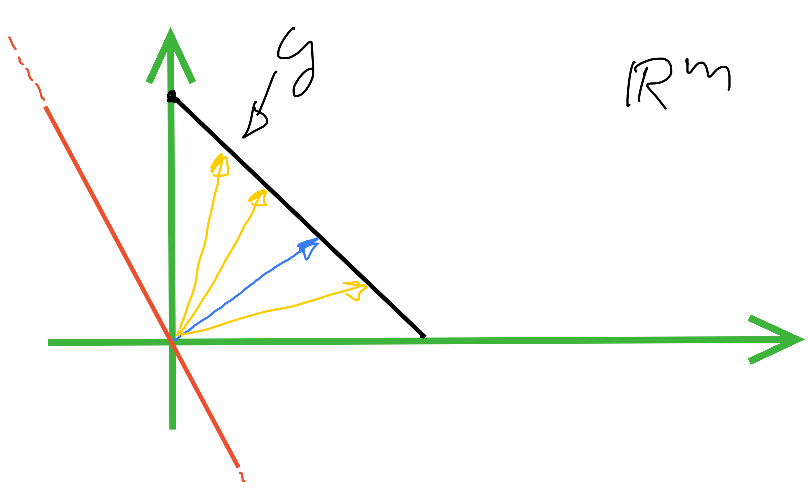
    $\downarrow$

    v.a $\longleftrightarrow$ elem. di $\mathbb{R}^m$

    (sottospazio lineare di $\mathbb{R}^m$)

  - $\mathcal{G} := \{ y \in \mathbb{R}^m_+ \mid y_1 + \dots + y_m = 1 \}$

    (compatto e convesso di $\mathbb{R}^m$)



Abbiamo: $\mathcal{L} \cap \mathcal{G} = \emptyset$

$$\Downarrow !$$

$\exists\, \xi \in \mathbb{R}^m$ t.c. :

(a) $\xi \cdot y = 0 \quad \forall\, y \in \mathcal{L}$

(b) $\xi \cdot x > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{G}$

- (b) $\longrightarrow$ $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) := \xi_i \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j \right)^{-1} > 0$

  e $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$

  ($\mathbb{Q}$ probabilita $\sim \mathbb{P}$)

- (a) $\longrightarrow$ $\underbrace{\xi \cdot G^{(\alpha)}}_{\parallel} = 0 \quad \forall\, \alpha$ predicibile

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\xi_j}_{\substack{\parallel \\ \mathbb{Q}(\{\omega_j\})}} \cdot G^{(\alpha)}(\omega_j) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[G^{(\alpha)} \right] \qquad \#$$

- **Derivati di tipo Europeo:**

  - (S, B) mercato discreto, stesse ipotesi di prima.

$\boxed{\text{def}}$ Un DERIVATO EUROPEO è una v.a.

$X \in m\mathcal{F}_N$.

- a volte $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$
- ricordiamo $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}^S_N \; (= \mathcal{F}^\mu_N)$
- X è il payoff del derivato
- $X \in m\mathcal{F}_N \to$ derivato dipende da S.

– PATH-INDEPENDENT : $X \in m\,\sigma(S_N)$

$$\Downarrow \text{(Doob th.)}$$

$$X = F(S_N), \quad F \; m\mathcal{B}$$

(vanilla : call, put ; straddle, digitali, ...)

– PATH-DEPENDENT : $X \notin m\,\sigma(S_N)$

$$\Downarrow \text{(Doob th.)}$$

$$X = F(S_1, \ldots, S_N), \quad F \in m\mathcal{B}$$

(asiatiche, con barriera, look-back, ...)

es. (opzioni asiatiche)

– aritmetiche : $X = F\left(\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} S_j\right)$

– geometriche : $X = F\left(\left(\prod_{j=0}^{N} S_j\right)^{\frac{1}{N+1}}\right)$

ex:

fixed-strike
$$\begin{cases} F(A) = (\underbrace{A}_{\text{media}} - \underbrace{K}_{\text{strike fisso}})^+ & (\text{Call}) \\ F(A) = (K - A)^+ & (\text{Put}) \end{cases}$$

floating-strike
$$\begin{cases} F(A, S_N) = (S_N - A)^+ \\ F(A, S_N) = (A - S_N)^+ \end{cases}$$

es. (opzioni con barriera)

$$X = F(S_N) \cdot \mathbb{1}_B \qquad (d=1)$$

es: $B = \{ \omega \in \Omega : S_n \geq b > 0$ per almeno un $n = 1, \dots, N \}$

es. (opzioni look-back)

$$X = S_N - \min_{0 \leq n \leq N} S_n$$

- 2 probemi:
  - valutazione (pricing): NO-ARBITRAGE
  - preferenze di rischio (avversione o propensione) sotto $\mathbb{P}$!

!

es: $V = \mathbb{E} - \gamma \text{ var}$

$\Downarrow$
0

- altri

- copertura : ⊖ replicazione (quando è possibile)
(hedging)

- super-replicazione

- **Problema di replicazione:**

  trovare $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ t.c.

$$V_N^{(\alpha,\beta)} = X \quad \mathbb{P}\text{- q.c.}$$

es. $d=1$, $N=1$,

$$\mathbb{P}(\mu_1 = a) = p_1$$
$$\mathbb{P}(\mu_1 = b) = p_2$$
$$\mathbb{P}(\mu_1 = c) = 1 - p_1 - p_2$$

- $\nexists\, (\alpha,\beta) \in \mathcal{A}$ replic.
- $\exists$ E.M.M $\underset{\text{(F.F.A.P)}}{\Longrightarrow}$ $\nexists$ arbitraggi

def. Sia $X \in m\mathcal{F}_N$. Se $\exists$ E.M.M $\mathbb{Q}$ (rispetto a B), definiamo

$$H_n^{\mathbb{Q}} := \frac{B_n}{B_N}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_n \right], \quad n = 0, \ldots, N$$

$\Downarrow$

Prezzo risk - neutral sotto $\mathbb{Q}$.

oss. $H_N^{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X \mid \mathcal{F}_N] = X$

oss. (!) $\tilde{H}_n^{\mathbb{Q}} := \dfrac{H_n^{\mathbb{Q}}}{B_n}, \quad n = 0, \ldots, N$

è una $\mathbb{Q}$-martingala

Infatti: $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\underbrace{\tilde{H}_N^{\mathbb{Q}}}_{= X/B_N} \mid \mathcal{F}_n] \overset{\text{x def di } H_n^{\mathbb{Q}}}{=} \dfrac{H_n^{\mathbb{Q}}}{B_n} = \tilde{H}_n^{\mathbb{Q}}$

$H_n^{\mathbb{Q}}$ è l'unico prezzo t.c. $\tilde{H}_n^{\mathbb{Q}}$ è marting.

$\Downarrow$

$H_n^{\mathbb{Q}}$ è l'unico prezzo che rende $\mathbb{Q}$

E.M.M. per $(S^1, \ldots, S^d, B, H^{\mathbb{Q}})$

↳ derivato

$\boxed{\text{(F.F.T.A.P)}}$ $\Downarrow$

$(S, B, H^{\mathbb{Q}})$ è arbitrage-free

oss. $\exists\, \mathbb{Q}' \neq \mathbb{Q} \Rightarrow H^{\mathbb{Q}'} \neq H^{\mathbb{Q}}$

! nessuno di questi 2 introduce arbitraggi nel mercato

semplicemente Q' non è E.M.M. per (S, B, H^Q)

- Assumiamo $X \in m\mathcal{F}_N$ replicabile

$\Downarrow$

se $\exists\, Q$ E.M.M., $V_N^{(\alpha,\beta)} = X = H_N^Q$ Q-q.c.

$\Downarrow$ (P.N.A)

$\forall n < N$ $\underbrace{V_n^{(\alpha,\beta)}} = H_n^Q$ Q-q.c.

$\Downarrow$

non dipende da Q !

- se $V_n^{(\alpha,\beta)} \neq H_n^Q$ per un n, allora $\exists$ arbitraggio $(V_N^{(\alpha,\beta)} = H_N^Q)$

$\Downarrow$ (F.F.T.A.P)

Q non è E.M.M. per (S, B, H^Q) ASSURDO

- Abbiamo provato

teo. Sia (S, B) arbitrage-free, e

$X \in m\mathcal{F}_N$ replicabile (con $(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}$ strategia replicante), allora:

$$V_n^{(\alpha,\beta)} = H_n^{Q} \quad \mathbb{P}\text{-q.c.} \quad \forall\, n = 0, \dots, N$$

$\forall\, Q$ E.M.M. (rispetto a qualsiasi num.)

"PREZZO DI ARBITRAGGIO di X"

oss.

X replicabile

$\Downarrow$

tutti i H^{Q} sono uguali

$\Downarrow$?

tutte le E.M.M. Q sono uguali ?

def Un mercato (S,B) si dice completo se ogni $X \in m\mathcal{F}_N$ è replicabile

H. $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$

- Assumiamo: (S,B) completo

$\Downarrow$ (sotto H.)

$X = \mathbb{1}_A$ è replicabile $\forall\, A \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_N$

$$\Downarrow$$

$$Q(A) = \mathbb{E}^{Q}[\underbrace{\mathbb{1}_A}_{\substack{\| \\ X}}] = B_N H_0^{Q}$$

teo precedente $\Longrightarrow$ $\textcircled{=}$ $B_N H_0^{Q'} = \mathbb{E}^{Q'}[\mathbb{1}_A] = Q'(A)$

$\Longrightarrow$ abbiamo provato parte del seguente ($\Longrightarrow$)

teo (S.F.T.A.P.) Se (S,B) mercato discreto arbitrage-free, allora, sotto M.,

(S,B) è completo $\Longleftrightarrow$ $\exists!$ E.M.M. Q

(dato un numeraire)

oss. $\exists$ Q è nelle ipotesi.

(S,B) completo $\not\Longrightarrow$ $\exists!$ E.M.M. Q
(in generale)

(S,B) completo $\Longrightarrow$ $\nexists$ EMM Q ($\exists$ arbitraggi)

oppure $\exists!$ Q ($\nexists$ arbitraggi)

es. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$N = 1$, $d = 1$, $r = 0$ $(B = 1)$

- $$S_1 = \begin{cases} S^+ & \text{se } \{\omega_1\} = E_1 \\ \neq & \\ S^- & \text{se } \{\omega_2, \omega_3\} = E_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^S = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$$

$$\neq \mathcal{F}$$

$$X = \begin{cases} X^+ & \text{se } \{\omega_1\} \\ X^- & \text{se } \{\omega_2\} \end{cases}$$

! X è replicabile :

$$\begin{cases} \alpha \cdot S^+ + \beta = X^+ & (\text{se } \{\omega_1\}) \\ \neq & \\ \alpha \cdot S^- + \beta = X^- & (\text{se } \{\omega_2\}) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\exists$ soluz. $\Rightarrow$ (S, B) completo

- $$S_1 := \begin{cases} S^+ & \text{se } \{\omega_1\} \\ \neq & \\ S^= & \text{se } \{\omega_2\} \\ \neq & \\ S^- & \text{se } \{\omega_3\} \end{cases} \neq \quad \Rightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^S = \mathcal{F}$$

$$X = \begin{cases} X^+ & \text{se } \{\omega_1\} \\ X^= & \text{se } \{\omega_2\} \\ X^- & \text{se } \{\omega_3\} \end{cases}$$

! X non è replicabile (in generale):

$$\begin{cases} \alpha S^+ + \beta = X^+ & (\text{se } \{\omega_1\}) \\ \alpha S^= + \beta = X^= & (\text{se } \{\omega_2\}) \\ \alpha S^- + \beta = X^- & (\text{se } \{\omega_3\}) \end{cases}$$

se $(S^+, S^=, S^-)$, $(1, 1, 1)$, $(X^+, X^=, X^-)$

sono linearm. indip $\Rightarrow \nexists$ soluz.

es: $(X^+, X^=, X^-) = (1, 0, 0)$

es. $d = 0$ (no titoli rischiosi) ($\mathcal{F}_n \equiv \{\emptyset, \Omega\}$)

X v.a ($\in m\mathcal{F}$)

↳ non è replicabile (posso solo investire in B)

es: $$X = \begin{cases} 100 & \text{se temp} \geq 15° \\ 0 & \text{se temp} < 15° \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad temp \geq 15^\circ \\ \underset{\substack{\vee \\ 0}}{C} & \text{se} \quad \text{"} \quad < 15^\circ \end{cases}$$

<u>assicurazione</u>