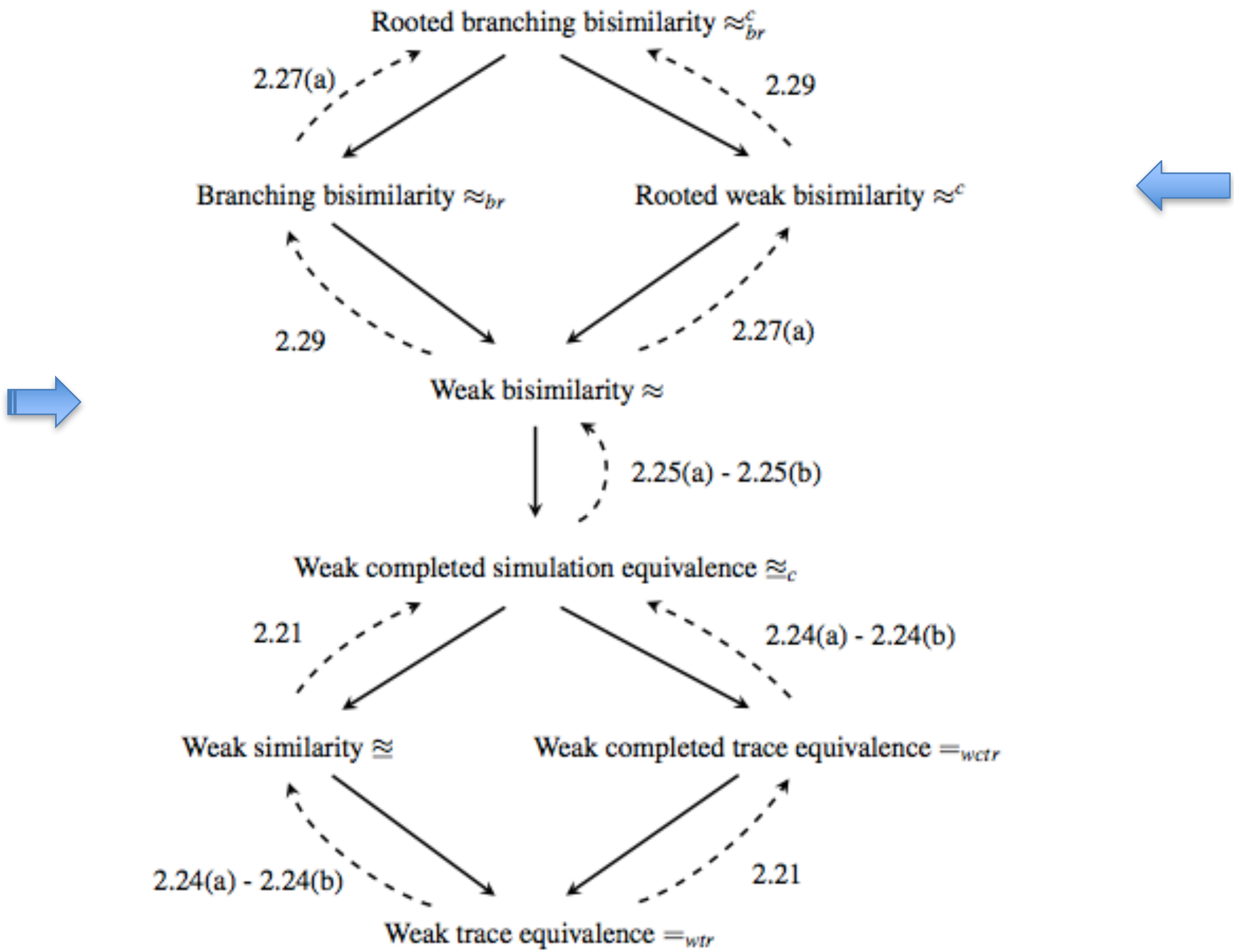
Lezione 8 MSC
Equivalenze deboli – parte 2 (di 2)

Roberto Gorrieri


Rooted branching bisimilarity $\approx_{br}^{c}$
2.27(a)
2.29
Branching bisimilarity $\approx_{br}$
Rooted weak bisimilarity $\approx^{c}$
2.29
2.27(a)
Weak bisimilarity $\approx$
2.25(a) - 2.25(b)
Weak completed simulation equivalence $\eqsim_{c}$
2.21
2.24(a) - 2.24(b)
Weak similarity $\eqsim$
Weak completed trace equivalence $=_{wctr}$
2.24(a) - 2.24(b)
2.21
Weak trace equivalence $=_{wtr}$

Weak bisimulation

Definition 2.20. (Weak bisimulation) For any lts $TS = (Q, A \cup \{\tau\}, \rightarrow)$, where $\tau \notin A$, a *weak bisimulation* is a relation $R \subseteq (Q \times Q)$ such that both R and its inverse R^{-1} are weak simulations. More expicitly, a weak bisimulation is a relation R such that if $(q_1, q_2) \in R$ then for all $\alpha \in A$

- $\forall q_1'$ such that $q_1 \xrightarrow{\alpha} q_1'$, $\exists q_2'$ such that $q_2 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q_2'$ and $(q_1', q_2') \in R$
- $\forall q_1'$ such that $q_1 \xrightarrow{\tau} q_1'$, $\exists q_2'$ such that $q_2 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} q_2'$ and $(q_1', q_2') \in R$

and symmetrically

- $\forall q_2'$ such that $q_2 \xrightarrow{\alpha} q_2'$, $\exists q_1'$ such that $q_1 \overset{\alpha}{\Longrightarrow} q_1'$ and $(q_1', q_2') \in R$
- $\forall q_2'$ such that $q_2 \xrightarrow{\tau} q_2'$, $\exists q_1'$ such that $q_1 \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} q_1'$ and $(q_1', q_2') \in R$

States q and q' are *weakly bisimilar* (or *weak bisimulation equivalent*), denoted with $q \approx q'$, if there exists a weak bisimulation R such that $(q, q') \in R$. $\square$

In other words, weak bisimulation equivalence is the union of all weak bisimulations:

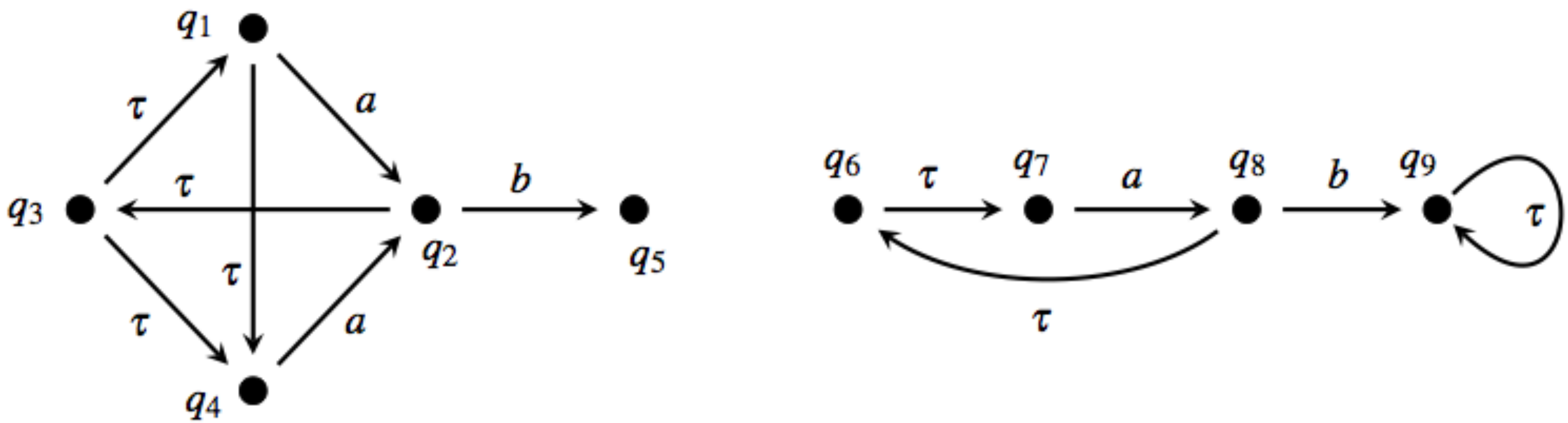
$$\approx = \bigcup \{R \subseteq Q \times Q \mid R \text{ is a weak bisimulation}\}.$$

Esercizio (1)

R = {(q1,q6), (q2, q8), (q4, q7), (q5,q9), (q3,q6)} è una weak bisimulation?

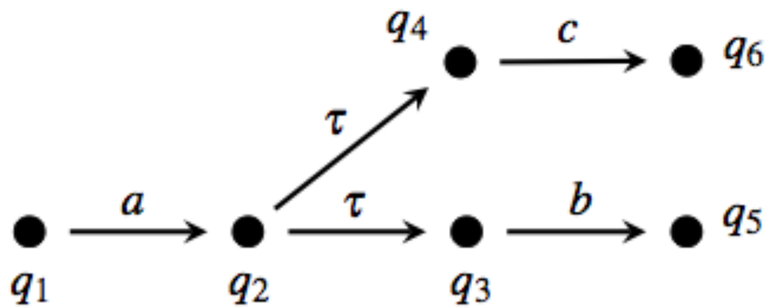
Come è fatta la più grande weak bisimulation? Oltre alle coppie identiche (q, q) e a quelle in R^{-1}, contiene la coppia (q1,q7) (e simmetricamente (q7, q1))? E (q3, q7)? E (q1, q4)? ....

(a) (b)



Esercizio (2) –tau-free lts's

- Un lts è tau-free se nessuna transizione è etichettata da tau.
- Esiste un lts weak bisimile ad a.(b + tau.b) che sia tau-free? SI
- Osserva che non è possibile trovare un lts senza transizioni tau che sia weak bisimile a questo: (né a.(b+c) né a.b +a.c né la somma tra i due; punto cruciale è lo stato q2)



- Esercizio: esiste un lts weak bisimile a quelli del lucido precedente che sia tau-free? (NO! Osserva lo stato q8)
- Allora non possiamo sempre eliminare le transizioni tau!

Abstract lts per weak bis (1)

Exercise 2.68. (Abstract lts) Continuing Exercise 2.49, given an lts $TS = (Q, A \cup \{\tau\}, \rightarrow)$, where $\tau \notin A$, define its associated abstract lts $ATS = (Q, A \cup \{\varepsilon\}, \Rightarrow'')$, where $\Rightarrow'' = \{(q, \delta, q') \mid \delta \in A \cup \{\varepsilon\} \wedge (q, \delta, q') \in \Rightarrow\}$. Prove that $q \approx q'$ in TS if and only if $q \sim q'$ in ATS. □

Another consequence of Exercise 2.68 is that, from a complexity point of view, computing weak bisimulation equivalence over finite-state lts's is just a bit harder than computing (strong) bisimulation equivalence: as mentioned above, one has first to derive the abstract lts by computing the (partial) transitive closure $\Rightarrow''$ of the transition relation $\rightarrow$ (by means of the classic Floyd-Warshall algorithm [Flo62] that runs in $O(n^3)$, where n is the number of states) and then to check (strong) bisimulation equivalence, which is in $O(m \log n)$ time [PT87], where m is the number of transitions.

Abstract lts per weak bis (2)

A consequence of Exercise 2.68 is that it is possible to offer an alternative, yet equivalent, definition of weak bisimulation as follows: A weak bisimulation is a relation R such that if $(q_1, q_2) \in R$ then for all $\delta \in A \cup \{\varepsilon\}$

- $\forall q_1'$ such that $q_1 \stackrel{\delta}{\Longrightarrow} q_1'$, $\exists q_2'$ such that $q_2 \stackrel{\delta}{\Longrightarrow} q_2'$ and $(q_1', q_2') \in R$
- $\forall q_2'$ such that $q_2 \stackrel{\delta}{\Longrightarrow} q_2'$, $\exists q_1'$ such that $q_1 \stackrel{\delta}{\Longrightarrow} q_1'$ and $(q_1', q_2') \in R$

which is exactly the definition of strong bisimulation on the abstract lts (*cf.* also Exercise 2.53).

È esattamente la definizione di strong bisimulation sull' abstract lts del lucido precedente. Quindi questa definizione di weak bis eredita tutte le proprietà che abbiamo dimostrato per strong bis (ad es., la più grande weak bisimulation è una relazione d'equivalenza, oppure caratterizzazione di weak bisimilarity come (massimo) punto fisso di una opportuna definizione ricorsiva).

Proprietà

Come per la bisimulazione forte, vale che:

1. L'identità è una weak bisimulation
2. L'inversa di una weak bis è una weak bis
3. La composizione relazionale di due weak bis è una weak bis (per dimostrarlo serve anche la seguente:
   se (q1,q2) in R e q1=k$\Rightarrow$ q1', allora esiste q2' tale che
   q2=k$\Rightarrow$ q2' con (q1',q2') in R – sia per k in A, sia per k = ε)
4. L'unione arbitraria di weak bis è una weak bis

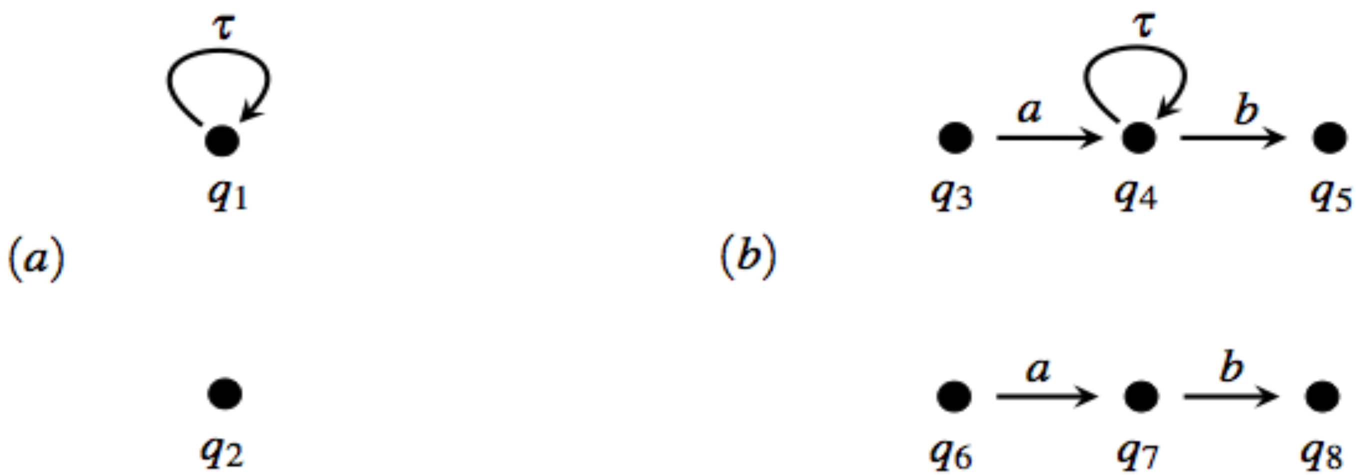
   Allora, ≈ è una relazione d'equivalenza (per 1.+2.+3.) ed anche la più grande weak bis (per 4.).

Dimostrare queste 4 proprietà per esercizio.

Esercizio

- Dato il termine CCS A = a.0 + tau.b.A, costruire il suo lts associato.
- Costruirsi anche il suo Abstract lts.
- Verifica che il termine CCS B = tau.a.0 + b.B non è weak bisimulation equivalent ad A, attraverso la costruzione del suo abstract lts.

Divergenza (fair) vs Deadlock

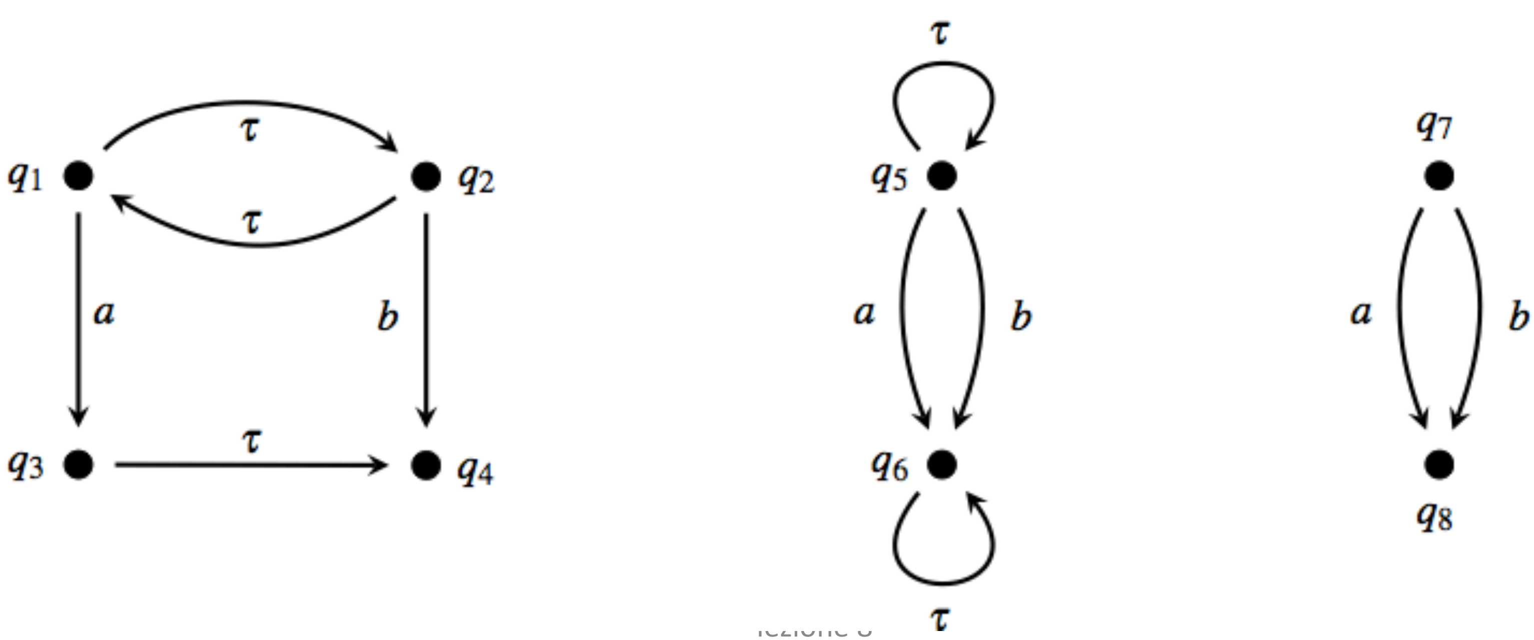


•Weak bisimulation (e anche weak trace equiv) non distingue divergence/livelock dal deadlock!
• Weak behavioral equivalences astraggono non solo da un ammontare finito di lavoro interno (singola transizione tau), ma anche da ammontare infinito (divergenza)!
•I due lts's a destra sono eguagliati a dispetto del fatto che quello sopra, in principio, può divergere e mai eseguire b! L'intuizione è che i cicli di tau non possono essere eseguiti per sempre quando un'alternativa è presente: weak bisimilarity assume che ogni computazione sia fair: se b è possibile infinitely often, allora b prima o poi sarà scelta ed eseguita.

Divergenza - Livelock

Definition 2.21. (Divergent state and livelock) A state q is *divergent*, denoted $q \Uparrow$, if there exist an infinite path $q_1 \xrightarrow{\tau} q_2 \xrightarrow{\tau} \ldots$ of τ-labeled transitions with $q_1 = q$. An lts $TS = (Q, A \cup \{\tau\}, \rightarrow)$ is *divergence-free* if no state $q \in Q$ is divergent.

A state q is a *livelock* if for all reachable q', i.e., for all q' such that $q \longrightarrow^* q'$, q' can do at least one τ-labeled transition and cannot do any observable transitions, i.e., $q' \xrightarrow{\tau}$ and $q' \overset{\alpha}{\nrightarrow}$ for all observable α. $\square$



Divergenza – Livelock (2)

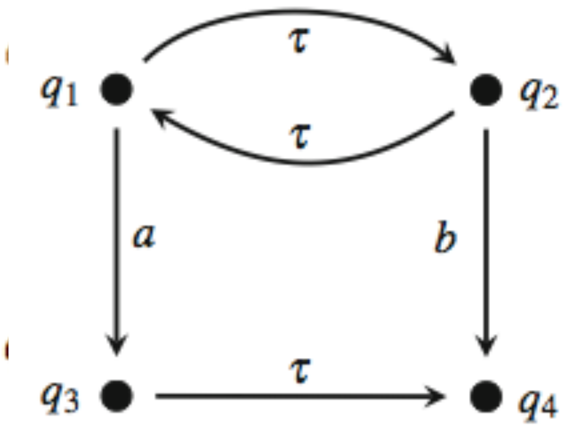
Technically, the subset of divergent states can be characterized as the largest fixed-point of the functional $F : \wp(Q) \to \wp(Q)$ defined as:

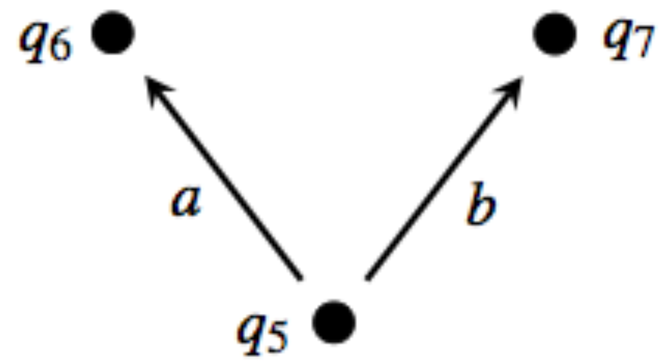
$$F(S) = \{q_1 \mid \exists q_2 \text{ such that } q_1 \xrightarrow{\tau} q_2 \text{ and } q_2 \in S\}$$

- Procedimento iterativo su lts a stati finiti:
- $F^0(Q) = Q$
- $F^{n+1}(Q) = \{q1 \mid q1 \text{ –tau-> } q2 \text{ e } q2 \text{ in } F^n(Q)\}$
- inizialmente si considerano tutti gli stati come potenzialmente divergenti, e poi si applica la funzione F in modo iterativo per raffinare l'insieme. Quando la catena di insiemi si stabilizza, allora si ottiene il risultato.

Exercise 2.71. Characterize the set of livelocks of a lts $TS = (Q, A, \to)$ as the largest fixed-point of a suitable functional $G : \wp(Q) \to \wp(Q)$. □

Esempio





Q = {q1, q2, q3, q4}

Calcoliamo gli stati divergenti

$F^0(Q) = Q$

$F^1(Q) = \{q1, q2, q3\}$

$F^2(Q) = \{q1, q2\} = F^3(Q)$

Esercizio: esiste una weak bisimulation che contenga la coppia (q1, q5)?

Weak bisimulation up to ≈

Definition 2.22. (Weak bisimulation up to $\approx$) Given an LTS $TS = (Q, A \cup \{\tau\}, \rightarrow)$, where $\tau \notin A$, a weak bisimulation up to $\approx$ is a relation $R \subseteq Q \times Q$ such that if $(q_1, q_2) \in R$ then for all $\alpha \in A$

- $\forall q_1'$ such that $q_1 \xrightarrow{\alpha} q_1'$, $\exists q_2'$ such that $q_2 \xRightarrow{\alpha} q_2'$ and $q_1' \sim R \approx q_2'$,
- $\forall q_1'$ such that $q_1 \xrightarrow{\tau} q_1'$, $\exists q_2'$ such that $q_2 \xRightarrow{\varepsilon} q_2'$ and $q_1' \sim R \approx q_2'$,

and, symmetrically,

- $\forall q_2'$ such that $q_2 \xrightarrow{\alpha} q_2'$, $\exists q_1'$ such that $q_1 \xRightarrow{\alpha} q_1'$ and $q_1' \approx R \sim q_2'$,
- $\forall q_2'$ such that $q_2 \xrightarrow{\tau} q_2'$, $\exists q_1'$ such that $q_1 \xRightarrow{\varepsilon} q_1'$ and $q_1' \approx R \sim q_2'$. $\square$

Prova che se R è una weak bisimulation up to ≈, allora ≈ R ≈ è una weak bisimulation, e quindi che R è contenuta in ≈ !

Weak bisimulation up to ≈ (2)

- Perché si usa ~ in un verso e non ≈ ?

Exercise 2.50. Assume that in Definition 2.19 we replace $\sim$ with $\approx$. Then check that R may be *not* a subset of $\approx$! (*Hint:* Consider $R = \{(\tau.a.\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$: it would satisfy the new definition of bisimulation up to $\approx$, but $\tau.a.\mathbf{0} \not\approx \mathbf{0}$.) □

Con questa definizione "alternativa" otterremmo che

$$\begin{array}{ccccccc}
\tau.a.\mathbf{0} & & & \mathcal{R} & & & \mathbf{0} \\
\downarrow & & & & & & \Downarrow \\
a.\mathbf{0} & \approx & \tau.a.\mathbf{0} & \mathcal{R} & \mathbf{0} & \approx & \mathbf{0}
\end{array}$$

ovvero, R potrebbe non essere contenuta in ≈ !

Rooted weak bisimilarity

In the next Chapters, we will see that a useful variant weak equivalence is *rooted weak bisimilarity*. In its definition, we use an auxiliary relation $q \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} q'$ defined as $q \stackrel{\varepsilon}{\Longrightarrow} q_1 \xrightarrow{\tau} q_2 \stackrel{\varepsilon}{\Longrightarrow} q'$.

Definition 2.20. Given an lts $TS = (Q, A \cup \{\tau\}, \rightarrow)$, two states q_1 and q_2 are rooted weak bisimilar, denoted $q_1 \approx^c q_2$, if for all $\mu \in A \cup \{\tau\}$

- $\forall q_1'$ such that $q_1 \xrightarrow{\mu} q_1'$, $\exists q_2'$ such that $q_2 \stackrel{\mu}{\Longrightarrow} q_2'$ and $q_1' \approx q_2'$
- $\forall q_2'$ such that $q_2 \xrightarrow{\mu} q_2'$, $\exists q_1'$ such that $q_1 \stackrel{\mu}{\Longrightarrow} q_1'$ and $q_1' \approx q_2'$ □

- Osserva che la prima tau di q1 viene corrisposta da una freccia =tau=> da q2, cioè q2 non può star fermo ma deve fare almeno un tau!
- Osserva che dopo il primo passo la relazione diventa la normale weak bisimilarity, ovvero a tau successivi posso rispondere stando fermo.
- Serve per garantire la congruenza dell'operatore di + in CCS.

Utilità di rooted weak bisimilarity

- Osserva che $\tau.a.0 \approx a.0$
  ma purtroppo non è vero che $\tau.a.0+b.0 \approx a.0+b.0$
  cioè weak bis non è una congruenza per il +
  Infatti alla mossa $\tau.a.0+b.0$ –tau-> a.0, a.0+b.0 può rispondere solo con a.0+b.0 $=\varepsilon=>$a.0+b.0, ma i due stati a.0 e a.0+b.0 non sono (weak) bisimili.

- Osserva che non è vero che $\tau.a.0 \approx^c a.0$!

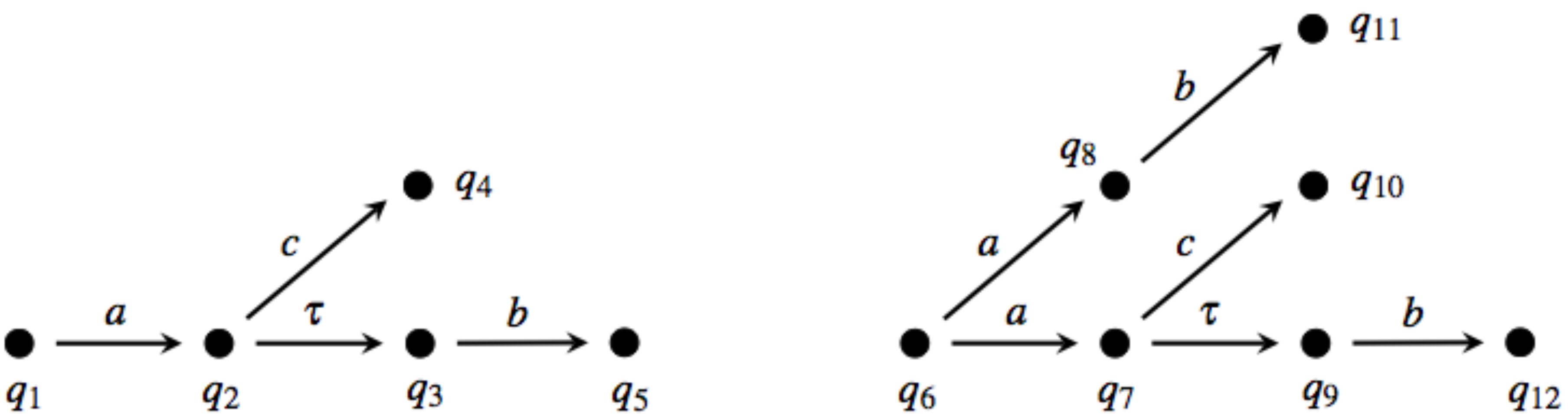
- La definizione di rooted weak bisimilarity è stata scelta per essere la coarsest congruence per l'operatore di + contenuta in weak bis equiv.

Esercizi

- Prova che rooted weak bisimilarity implica weak bisimilarity.
- Riconsidera i vari lts's dei lucidi precedenti: quali sono weak bis, ma non rooted weak bis?
- Prova che rooted weak bis è una relazione d'equivalenza
- Se p=tau=>q e q=tau=>p, possiamo concludere che p è rooted weak bisimile a q?
- Dimostra che $p \approx q$ sse $\mu.p \approx^c \mu.q$ per ogni μ (per la dim da destra a sinistra serve una generalizzazione dell'esercizio sopra).

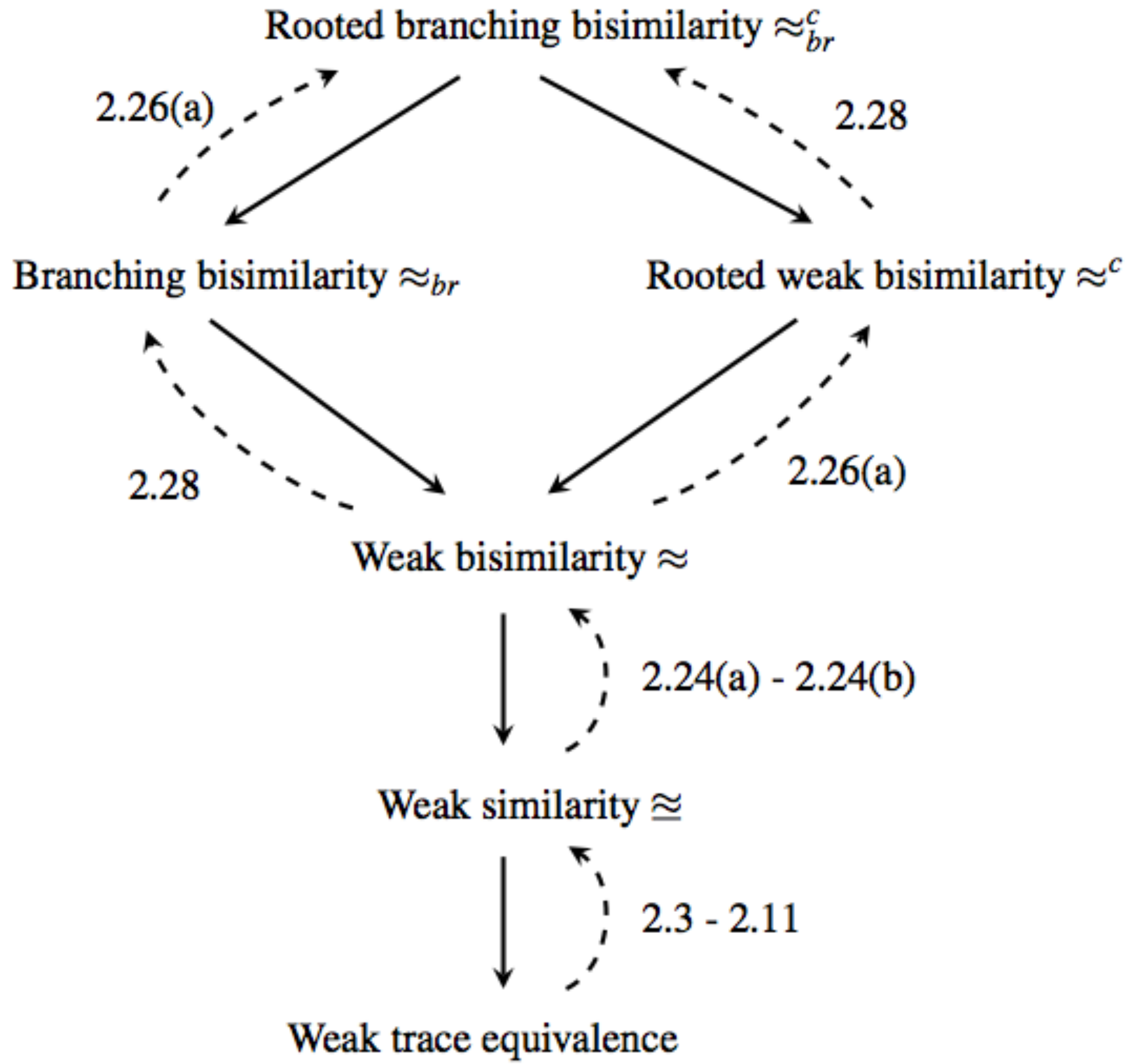
(Rooted) Weak bisimilarity rispetta the timing of choices?

- q1 e q6 sono weak bisimili! Trova una weak bisimulation opportuna.
- Tuttavia, dallo stato q1, dopo a, posso fare sia b che c, mentre dallo stato q6, dopo a, potrei finire su q8, dove solo b è possibile.



Branching bisimulation

- Sul libro, sezione 2.4, trovate la definizione di questa relazione che è più fine di weak bisimulation e rispetta appieno “the timing of choices”.


Rooted branching bisimilarity $\approx^c_{br}$
2.26(a)
2.28
Branching bisimilarity $\approx_{br}$
Rooted weak bisimilarity $\approx^c$
2.28
2.26(a)
Weak bisimilarity $\approx$
2.24(a) - 2.24(b)
Weak similarity $\lessapprox$
2.3 - 2.11
Weak trace equivalence