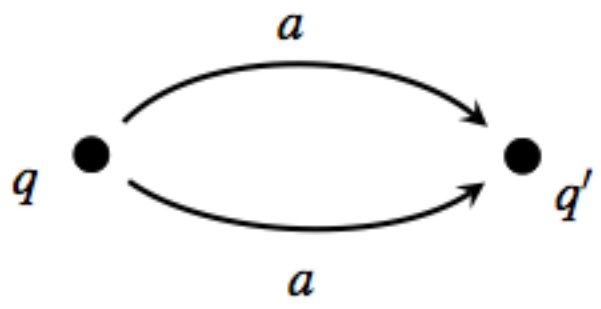
Lezione 3 MSC
Labeled Transition Systems (LTS)

Roberto Gorrieri

Grafi vs LTS

- Grafo che non è lts



- Grafi orientati - modello un po' troppo concreto: dato che una transizione è completamente determinata dal cambio di stato e dalla interazione dovuta all'azione eseguita, non c'è nessuna ragione osservabile per non identificare i due archi.
- Quando i due archi hanno lo stesso stato di partenza, lo stesso stato di arrivo e la stessa etichetta d'azione, allora i due archi devono essere identificati.
- Inoltre, spesso i grafi si intendono finiti, mentre gli lts possono avere infiniti stati.

Automi vs LTS

- Automi di solito considerati a stati finiti, mentre LTS possono avere infiniti stati.
- Automi partizionano l'insieme degli stati in stati di accettazione (finali) e non, mentre LTS non fa questa distinzione (tutti gli stati possono essere considerati finali).
- Automi di solito hanno uno stato iniziale, mentre negli LTS non sempre viene indicato.

Azioni (Labels)

- Le azioni sono le attività basiche che possono essere fatte e sono usate per etichettare le transizioni

Definition 2.1. (Actions) Let $\mathscr{L}$ be a countable set of *input* actions, ranged over by $a, b, \ldots$. Let $\overline{\mathscr{L}}$ be the set of co-actions, ranged over by $\overline{a}, \overline{b}, \ldots$, usually called the *outputs*. The set $\mathscr{L} \cup \overline{\mathscr{L}}$, ranged over by $\alpha, \beta, \ldots$, is the set of *visible actions*.

Let $Act = \mathscr{L} \cup \overline{\mathscr{L}} \cup \{\tau\}$, such that $\tau \notin \mathscr{L} \cup \overline{\mathscr{L}}$, be the set of *actions* (or *labels*), ranged over by μ. Action τ denotes an invisible, internal activity. □

Labeled Transition Systems

Definition 2.2. (Labeled transition systems) A labeled transition system (LTS for short) is a triple $TS = (Q, A, \rightarrow)$ where

- Q is the nonempty, countable set of *states*, ranged over by q (possibly indexed);
- $A \subseteq Act$ is the countable set of *labels* (or *actions*), ranged over by μ (possibly indexed);
- $\rightarrow \subseteq Q \times A \times Q$ is the *transition relation*.

Given a transition $(q, \mu, q') \in \rightarrow$, q is called the *source*, q' the *target* and μ the *label* of the transition. A *rooted* labeled transition system is a pair (TS, q_0) where $TS = (Q, A, \rightarrow)$ is an LTS and $q_0 \in Q$ is the *initial state* (or *root*). Sometimes we write $TS = (Q, A, \rightarrow, q_0)$ for a rooted LTS. □

- **Contabile** = finito o infinito numerabile (come l'insieme N dei numeri naturali)
- La relazione di transizione → risulta essere contabile.

Definition vs graphical representation (1)

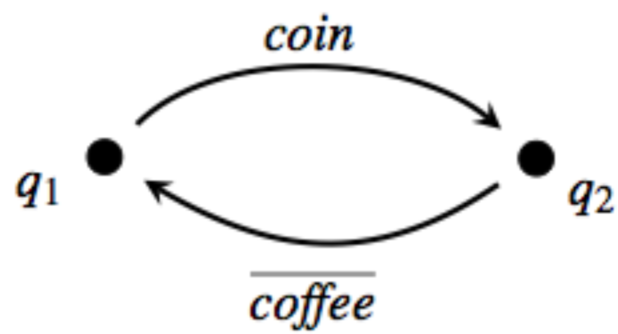
- Given an lts, there is an obvious possible graphical representation:
  - Each state q is represented as a node, labeled by q
  - Each transition (q, a, q’) is represented as an arc form q to q’ labeled by a.

  For instance, the lts TS = ({q}, {a}, {(q,a,q)}) is graphically represented as

(It is not unique … i.e.,
many representations for a definition)

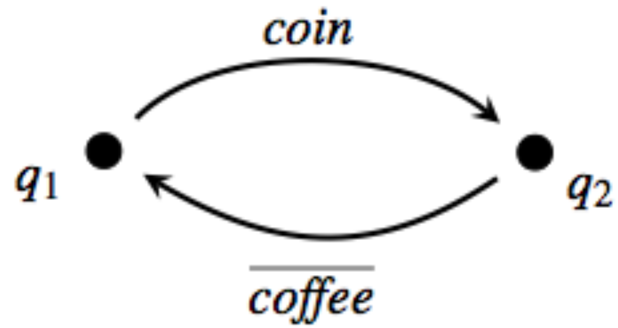
Definition vs graphical representation (2)

Given a graphical representation, we can derive its (minimal) formal definition.



Formally, the labeled transition system (*lts* for short) depicted in Figure 2.2 is the triple $TS = (Q, A, \rightarrow)$, where $Q = \{q_1, q_2\}$, $A = \{coin, \overline{coffee}\}$ and $\rightarrow = \{(q_1, coin, q_2), (q_2, \overline{coffee}, q_1)\}$.

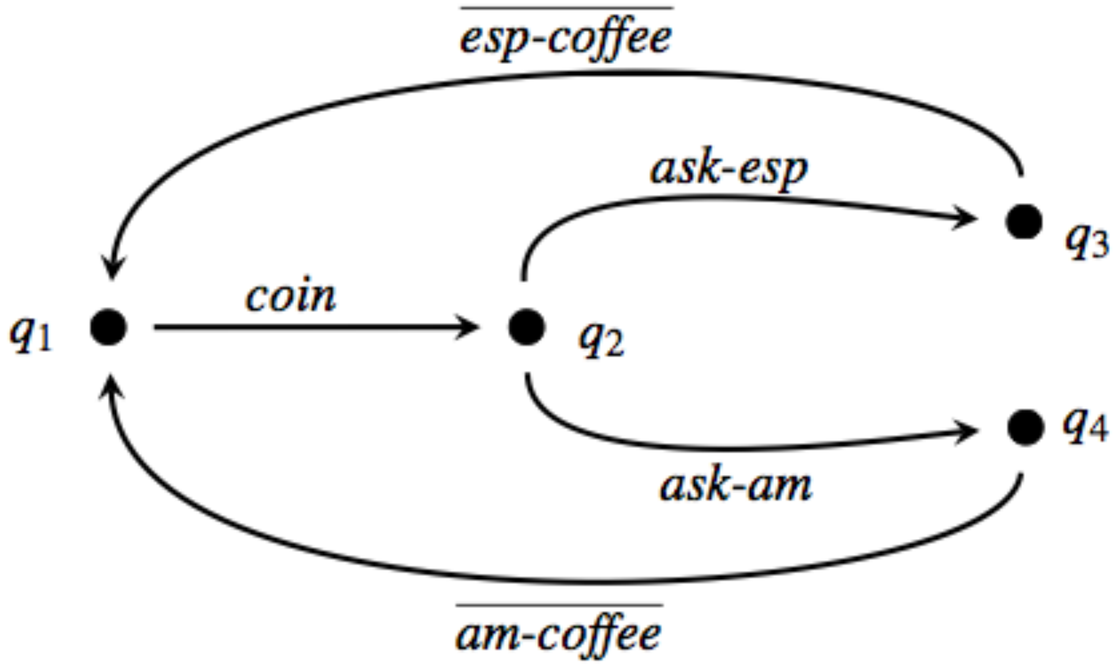
Definition vs graphical representation (3)



- Se ad A di TS del lucido precedente aggiungo un azione b, allora TS' = (Q, AU{b},→) è ancora rappresentato graficamente dallo stesso lts! (cioè, più definizioni per una stessa rappresentazione!)
- Buona norma: evitare di mettere in A azioni non usate da nessuna transizione (minima definizione).
- Esercizio: Cosa succede se a TS aggiungo uno stato non usato in nessuna transizione?

Esercizio

- Definire il (minimo) labeled transition system rappresentato graficamente come:



Convenzioni di notazione

Notation: In the following $q \xrightarrow{a} q'$ denotes $(q, a, q') \in \longrightarrow$. Moreover,

$$
\begin{array}{lll}
q \xrightarrow{a} & \text{if and only if} & \exists q'. q \xrightarrow{a} q' \\
q \overset{a}{\nrightarrow} & \text{if and only if} & \nexists q'. q \xrightarrow{a} q' \\
q \longrightarrow & \text{if and only if} & \exists a \in A, \exists q'. q \xrightarrow{a} q' \\
q \nrightarrow & \text{if and only if} & \nexists a \in A, \nexists q'. q \xrightarrow{a} q'
\end{array}
$$

Alternativamente:

$$
\begin{array}{lll}
q \longrightarrow & \text{if and only if} & \exists \mu \in A, q \xrightarrow{\mu} \\
q \nrightarrow & \text{if and only if} & \forall \mu \in A, q \overset{\mu}{\nrightarrow}
\end{array}
$$

Cammino e raggiungibilità

Definition 2.3. Given an LTS $TS = (Q, A, \rightarrow)$, and two states $q, q' \in Q$, a *path* (or *computation*) of length n from q to q' is a sequence of transitions $q_1 \xrightarrow{\mu_1} q'_1$ $q_2 \xrightarrow{\mu_2} q'_2$ $\ldots$ $q_n \xrightarrow{\mu_n} q'_n$ such that $q = q_1$, $q' = q'_n$ and $q'_i = q_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, n$, usually denoted as

$$q_1 \xrightarrow{\mu_1} q_2 \xrightarrow{\mu_2} \ldots q_n \xrightarrow{\mu_n} q_{n+1}.$$

When $n = 0$, the path is *empty* and $q = q' = q_1$. If $q_i \neq q_j$ for all $i \neq j$ ($i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$), then the path is *acyclic*, otherwise it is *cyclic*. The rooted LTS (TS, q_0) is *acyclic* if it contains no cyclic path starting from q_0. The LTS TS is *acyclic* if it contains no cyclic path. We say that q' is *reachable* from q if a path exists from q to q'; we denote by Q_q the set of all the states in Q reachable from q. A computation may also be infinite: the infinite sequence $q_1, q_2, q_3, \ldots$, such that $q_i \xrightarrow{\mu_i} q_{i+1}$ for each $i \in \mathbb{N}$, yields the infinite path $q_1 \xrightarrow{\mu_1} q_2 \xrightarrow{\mu_2} q_3 \ldots$. □

Esempio

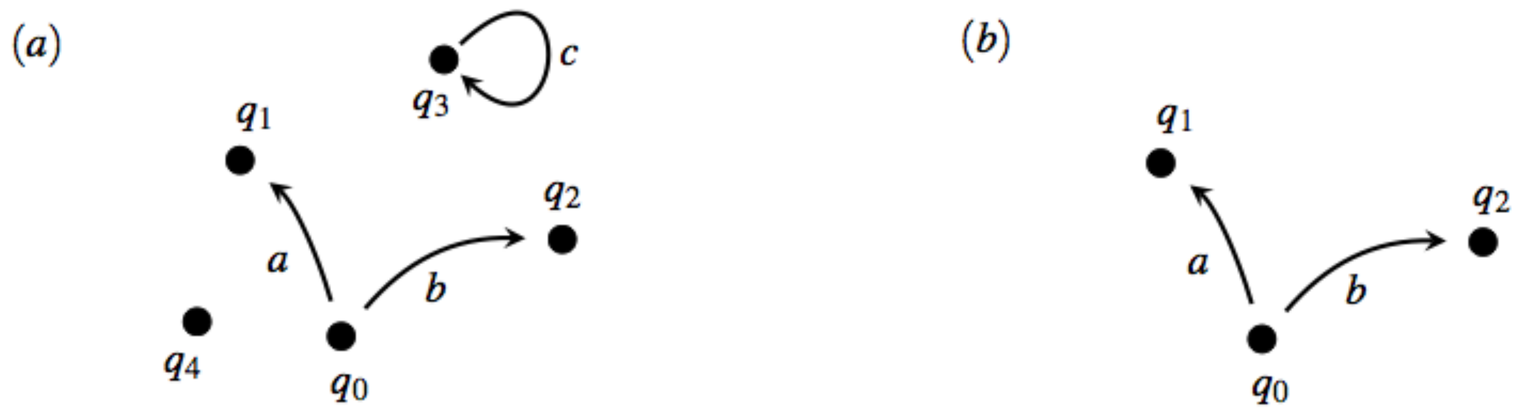


Fig. 2.6 Reachable lts

- Lo LTS a sinistra non è aciclico, perché contiene un cammino ciclico (su q_3), mentre lo LTS a destra è aciclico.
- N.B.: il rooted (in q_0) LTS a sinistra è aciclico, perché nessun cammino ciclico parte dalla radice.

Chiusura riflessiva e transitiva di una relazione di transizione non etichettata

- Esercizio: dato un ts (Q,→) definito dalle transizioni non etichettate (q0,q1), (q1,q2), (q2,q3), (q3,q0) , derivare l'lts ottenuto per chiusura riflessiva, poi per chiusura simmetrica, poi per chiusura transitiva.
- Per chiusura riflessiva (transitiva) di → si intende la relazione →' tale che (i) → $\subseteq$ →', (ii) →' sia riflessiva (transitiva) e (iii) →' è la più piccola relazione che soddisfa (i) e (ii). Più in breve, bisogna che:
  (i) Se q→ q' , allora q→' q'
  (ii) $\forall$ q, q→' q ($\forall$ q →' q' e q' →' q'' deve esserci q →' q'')
- in questo esempio, la chiusura transitiva garantisce anche la chiusura riflessiva.

Chiusura riflessiva e transitiva di una relazione di transizione etichettata

Definition 2.4. (Reachability relation) Let A^*, ranged over by σ, be the set of all the strings on A, including the empty string ε. The concatenation of strings σ_1 and σ_2 yields $\sigma_1\sigma_2$, with the proviso that $\varepsilon\sigma = \sigma = \sigma\varepsilon$. We define the *reachability relation* $\to^* \subseteq Q \times A^* \times Q$ as the reflexive and transitive closure of $\to$, i.e., as the least relation induced by the following axiom and rules:

$$\frac{}{q \xrightarrow{\varepsilon}{}^{*} q} \qquad \frac{q_1 \xrightarrow{\mu} q_2}{q_1 \xrightarrow{\mu}{}^{*} q_2} \qquad \frac{q_1 \xrightarrow{\sigma_1}{}^{*} q_2 \quad q_2 \xrightarrow{\sigma_2}{}^{*} q_3}{q_1 \xrightarrow{\sigma_1\sigma_2}{}^{*} q_3}$$

We simply write $q_1 \to^* q_2$ to state that q_2 is *reachable* from q_1 when there exists a string σ such that $q_1 \xrightarrow{\sigma}{}^{*} q_2$. □

Definizioni alternative di stato raggiungibile

1. Uno stato q’ è raggiungibile da uno stato q se esiste un cammino da q a q’.
2. Uno stato q’ è raggiungibile da uno stato q se esiste σ tale che q –σ->* q’

Exercise 2.4. Let $\sigma = \mu_1 \dots \mu_n$ with $n \geq 0$. Prove, by induction on n, that $q \xrightarrow{\sigma}^* q'$ if and only if there exist $q_1, \dots, q_{n+1}$ such that $q = q_1$, $q' = q_{n+1}$ and

$$q_1 \xrightarrow{\mu_1} q_2 \xrightarrow{\mu_2} \dots q_n \xrightarrow{\mu_n} q_{n+1}.$$

This implies that, when $n \geq 1$, $q \xrightarrow{\sigma}^* q'$ if and only if a state q'' exists such that $q \xrightarrow{\sigma'}^* q'' \xrightarrow{\mu_n} q'$, with $\sigma' = \mu_1 \dots \mu_{n-1}$.

This exercise shows that the definition of reachable state in Definition 2.3 is equivalent to the one based on reachability relation $\longrightarrow^*$ of Definition 2.4. □

LTS raggiungibile dallo stato iniziale

Definition 2.5. Given an LTS $TS = (Q, A, \to)$ and a state $q \in Q$, we define the sort of q as the set $sort(q) = \{\mu \in A \mid \exists q'. q \to^* q' \xrightarrow{\mu}\}$. We define the rooted LTS $TS_q = (Q_q, sort(q), \to_q, q)$, called the *reachable LTS from q*, where

- Q_q is the set of the states reachable from q, i.e., $Q_q = \{q' \in Q \mid q \to^* q'\}$, and
- $\to_q$ is the restriction of $\to$ on $Q_q \times sort(q) \times Q_q$. □

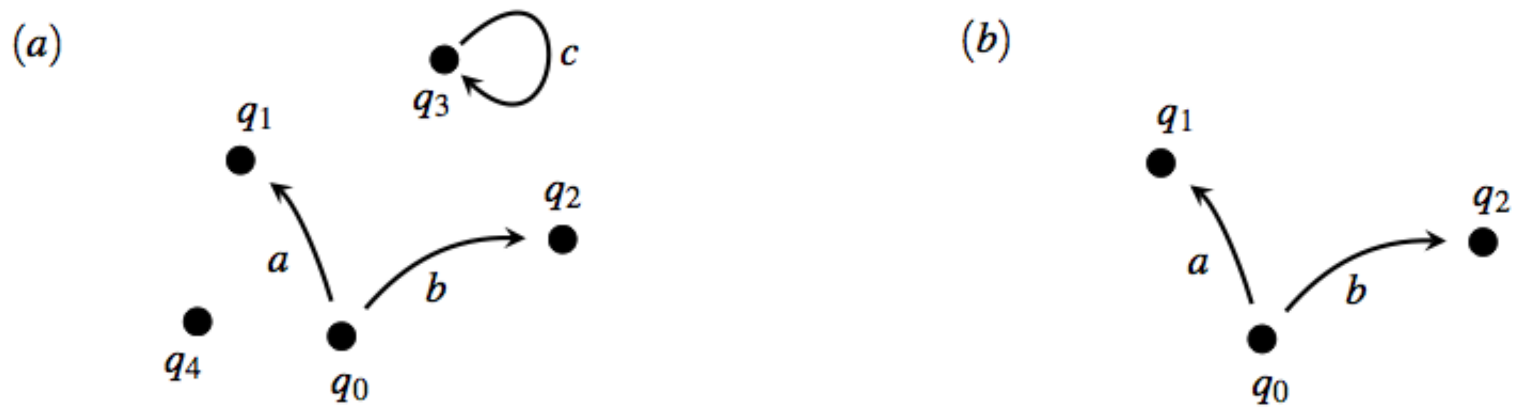


Fig. 2.6 Reachable lts

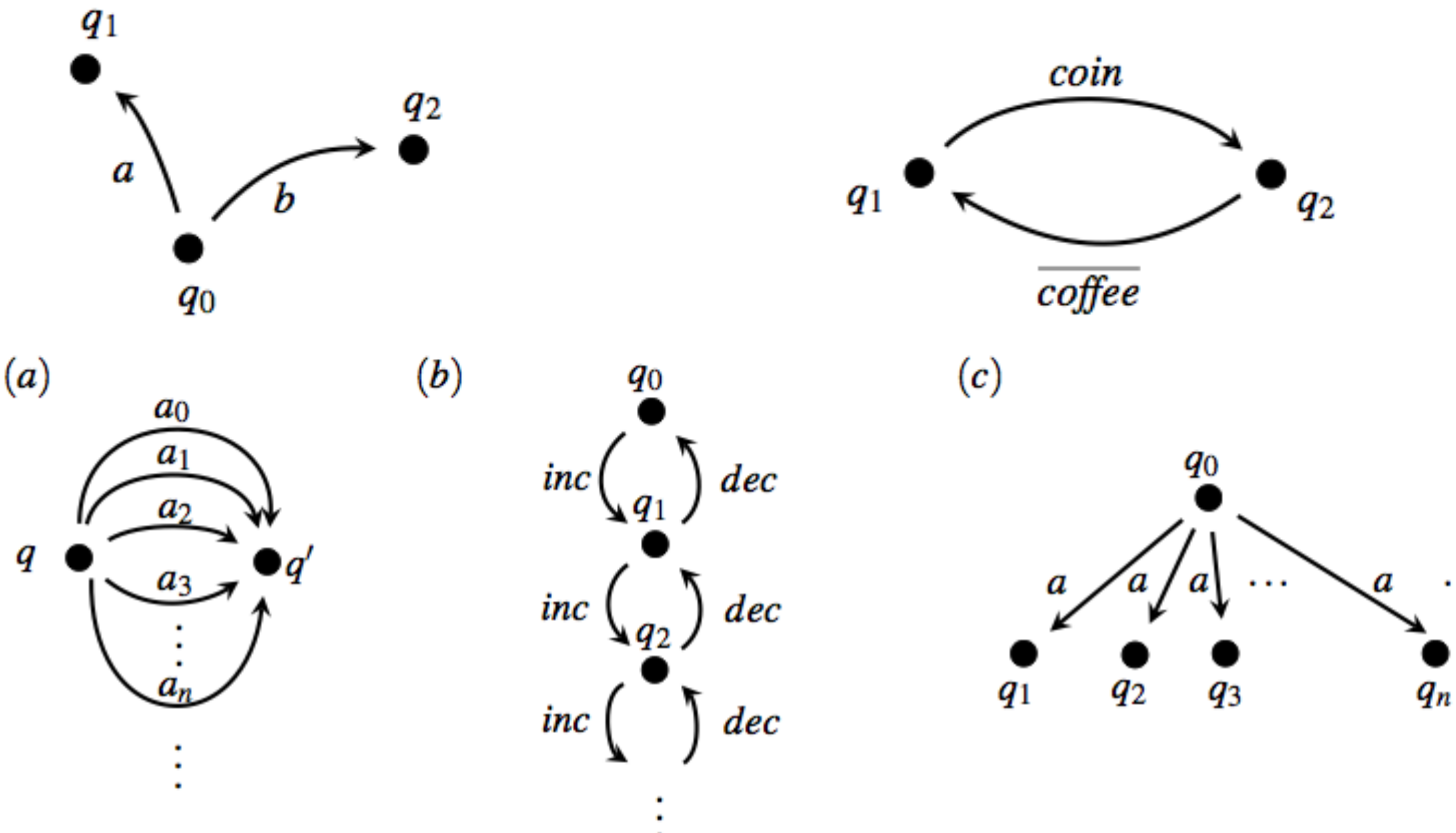
Definizione: Un rooted LTS è ridotto quando tutti gli stati sono raggiungibili dallo stato iniziale.

Classi di LTS's

Definition 2.7. An lts $TS = (Q, A, \to)$ is:

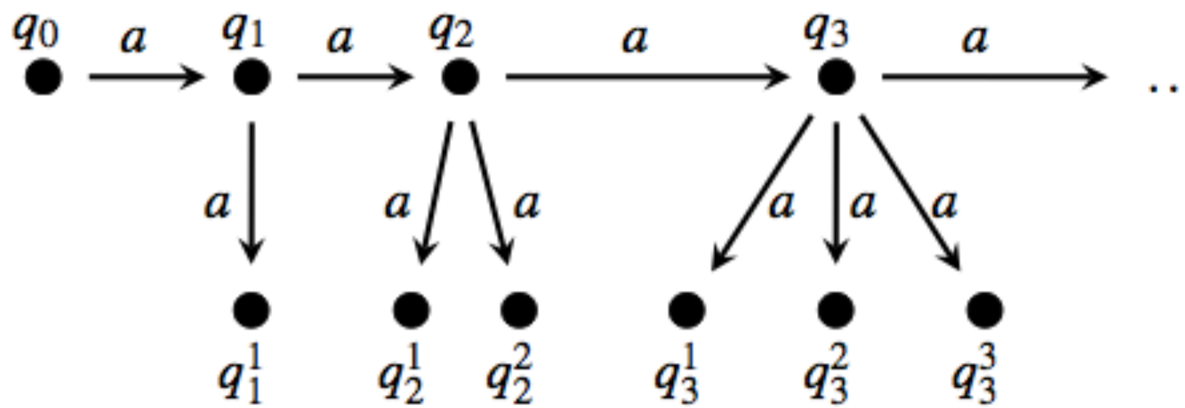
- *finite* if it is acyclic and Q and A are finite sets;
- *finite-state* if Q and A are finite sets;
- *boundedly-branching* if $\exists k \in \mathbb{N}$ such that $\forall q \in Q$ the set $T_q = \{(q, \mu, q') \mid \exists \mu \in A\ \exists q' \in Q.\ q \xrightarrow{\mu} q'\}$ has cardinality at most k; the least k satisfying the above condition is called the *branching-degree* of the lts;
- *finitely-branching* if the set $T_q = \{(q, \mu, q') \mid \exists \mu \in A\ \exists q' \in Q.\ q \xrightarrow{\mu} q'\}$ is finite for all $q \in Q$; if this is not the case, the lts is *infinitely-branching*;
- *image-finite* if the set $T_{q,\mu} = \{(q, \mu, q') \mid \exists q' \in Q.\ q \xrightarrow{\mu} q'\}$ is finite for all $q \in Q$ and for all $\mu \in A$;
- *deterministic* if $q \xrightarrow{\mu} q'$ and $q \xrightarrow{\mu} q''$ imply that $q' = q''$, for all $q \in Q$ and for all $\mu \in A$. $\square$

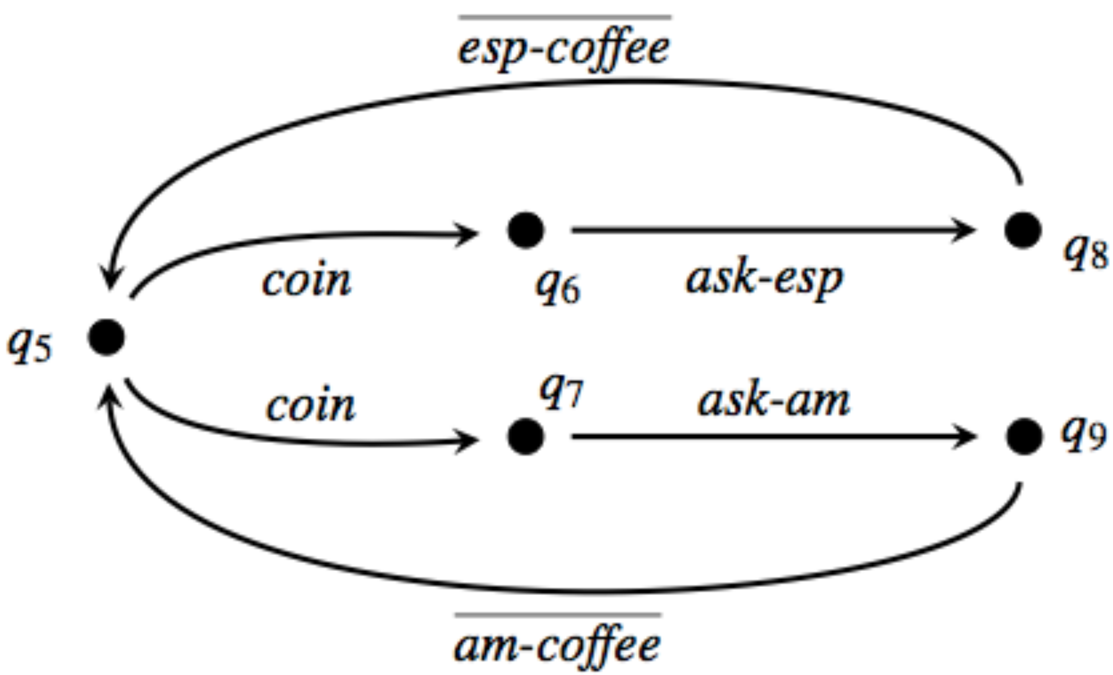
Alcuni lts's



q1
q2
a
b
q0
coin
q1
q2
coffee
(a)
(b)
(c)
a0
a1
a2
a3
an
q
q'
q0
inc
dec
q1
inc
dec
q2
inc
dec
q0
a
a
a
...
a
..
q1
q2
q3
qn

Altri lts's


q_0
a
q_1
q_2
q_3
...
q_1^1
q_2^1
q_2^2
q_3^1
q_3^2
q_3^3


$\overline{esp\text{-}coffee}$
$coin$
q_6
$ask\text{-}esp$
q_8
q_5
$coin$
q_7
$ask\text{-}am$
q_9
$\overline{am\text{-}coffee}$

Esercizi

- Dimostra che un lts finito è tale per cui esiste un k tale che ogni cammino ha lunghezza inferiore a k.
- Dimostra che un lts finito è pure finite-state. Vale il contrario?
- Dimostra che un lts finite-state è boundedly-branching. Vale il contrario?
- Dimostra che un lts boundedly-branching è finitely-branching. Vale il contrario?
- Dimostra che un lts finitely-branching è image-finite. Vale il contrario?
- Dimostra che un lts deterministico è image-finite. Vale che determinismo implica finitely-branching?