Corso di Ottimizzazione Combinatoria
Prova scritta del 20 Giugno 2024
Tempo a disposizione: ore 1:45.

Si ricorda che:

- Per quanto possibile, occorre scrivere in bella calligrafia (il testo illeggibile non verrà preso in considerazione).
- Su tutti i fogli che vi abbiamo consegnato occorre riportare cognome, nome e numero di matricola.
- Occorre riportare in modo chiaro tutti i passi che portano alla determinazione del risultato.
- Il numero dell'esercizio che si sta svolgendo va sempre riportato in modo chiaro.
- Non è consentita la consultazione di appunti, libri, etc.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, etc.
- Non è concesso chiedere alcunché ai docenti e agli altri studenti.
- Occorre consegnare anche la brutta copia ai docenti.

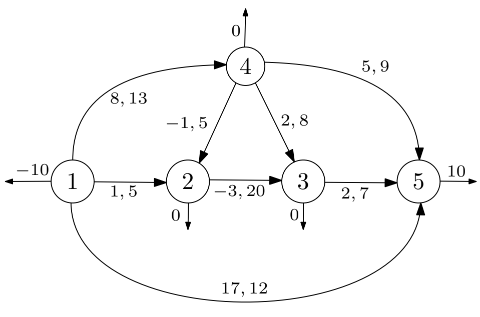
Esercizio 1. *(Punti 10)*
L'azienda informatica A che assembla e vende hardware acquista in blocco tutti i componenti hardware nel magazzino dell'azienda concorrente B al momento della cessazione dell'attività di B. L'inventario sul magazzino di B risulta in una lista di n componenti $1, \ldots, n$. L'azienda A compila poi un'altra lista $C_1, \ldots, C_m$, dove ciascun C_j è un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$ e rappresenta l'insieme dei componenti necessari a realizzare il computer j. Ciascun computer j darebbe luogo, se venduto, ad un ricavo pari a e_j Euro per l'Azienda A. Ciascun componente $i \in \{1, \ldots, n\}$ può essere ovviamente utilizzato solo una volta. Si aiuti l'azienda A a decidere come utilizzare i componenti acquistati da B in modo da massimizzare i ricavi.

Esercizio 2. *(Punti 7)*
Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della prima colonna.

$$\max\ x + 2y$$

$$\begin{array}{cccc}
x \geq 0 & x \leq 2 & 2x - y + 1 \geq 0 & y - x + 2 \geq 0 \\
y \geq 0 & y \leq 1 & x - y + 1 \geq 0 & y - 2x + 4 \geq 0
\end{array}$$

Esercizio 3. *(Punti 8)*
Si risolva il seguente problema di flusso di costo minimo tramite l'algoritmo di Cancellazione di Cicli. Si indichino in modo preciso il valore ottimo e la soluzione ottima.



Esercizio 4. *(Punti 5)*
Nell'ambito dell'Esercizio 1, si supponga che i componenti non utilizzati da A per la realizzazione di computer possano poi essere venduti sul mercato, e che in tal caso il componente $i \in \{1, \ldots, n\}$ dia luogo al ricavo r_i. Si modifichi il programma lineare in modo che tenga conto di quest'eventualità.

CORREZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA DEL 20 GIUGNO 2024

ESERCIZIO 1

L'azienda informatica A che assembla e vende hardware acquista in blocco tutti i componenti hardware nel magazzino dell'azienda concorrente B al momento della cessazione dell'attività di B. L'inventario sul magazzino di B risulta in una lista di n componenti $1, \ldots, n$. L'azienda A compila poi un'altra lista $C_1, \ldots, C_m$, dove ciascun C_j è un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$ e rappresenta l'insieme dei componenti necessari a realizzare il computer j. Ciascun computer j darebbe luogo, se venduto, ad un ricavo pari a e_j Euro per l'Azienda A. Ciascun componente $i \in \{1, \ldots, n\}$ può essere ovviamente utilizzato solo una volta. Si aiuti l'azienda A a decidere come utilizzare i componenti acquistati da B in modo da massimizzare i ricavi.

SI TRATTA DEL CLASSICO PROBLEMA DI SELEZIONE DI SOTTOINSIEME, NEL CASO SPECIFICO DI RIEMPIMENTO. POSSIAMO PROCEDERE DI CONSEGUENZA.

PARAMETRI

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SE } i \in C_j \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

VARIABILI

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{SE IL COMPUTER } j \text{ VIENE COSTRUITO} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot e_j$$

VINCOLI

$$x_j \in \mathbb{N} \qquad \forall j$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \qquad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij} \leq 1 \qquad \forall i$$

ESERCIZIO 2

Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della prima colonna.

$$\max\ x + 2y$$

$$\begin{array}{cccc} x \geq 0 & x \leq 2 & 2x - y + 1 \geq 0 & y - x + 2 \geq 0 \\ y \geq 0 & y \leq 1 & x - y + 1 \geq 0 & y - 2x + 4 \geq 0 \end{array}$$

LE MATRICI DA CUI PARTIRE SONO:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PER OGNI ITERATA FACCIAMO VEDERE SOLO I DATI PIÙ IMPORTANTI

I $B = \{1, 2\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad h = 2 \qquad K = 4$$

II $B = \{1, 4\}$

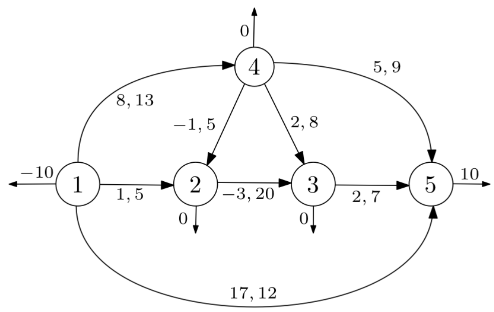
$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad h = 1 \qquad K = 3$$

III $B = \{3, 4\}$

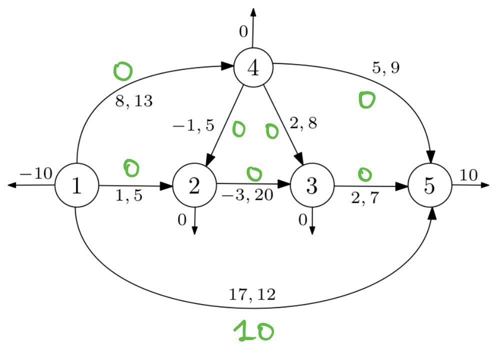
$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

OTTIMO!

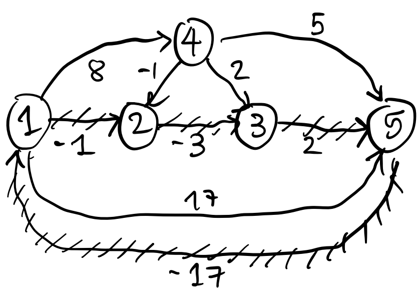
ESERCIZIO 3

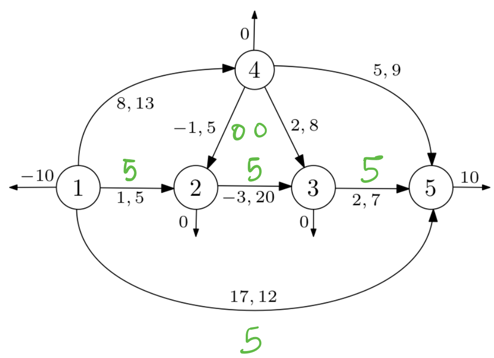


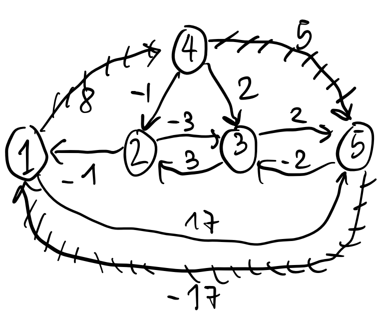
DOPO L'APPLICAZIONE DI EK AL GRAFO DI CUI SOPRA OTTENIAMO LA SITUAZIONE SEGUENTE (DOVE I FLUSSI SONO SEGNATI IN VERDE):

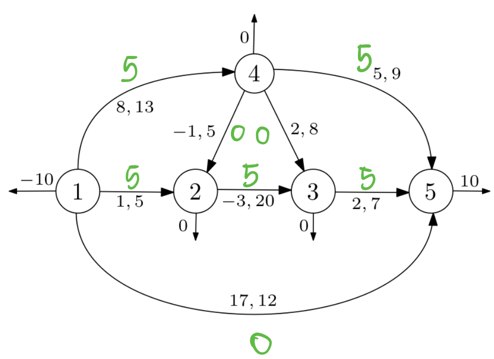


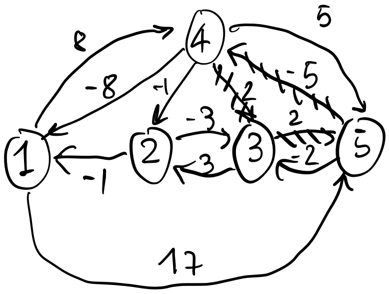
A QUESTO PUNTO COSTRUIAMO ITERATIVAMENTE I GRAFI RESIDUI, PER POI RIPORTARE A DESTRA IL FLUSSO AGGIORNATO

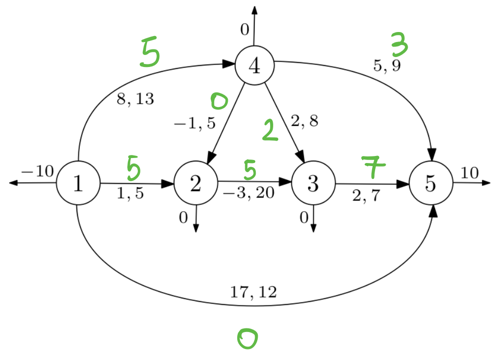


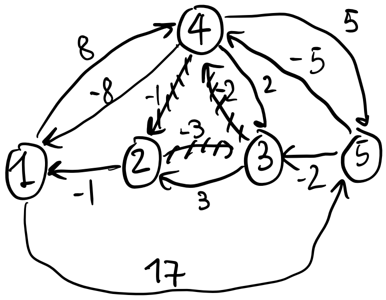


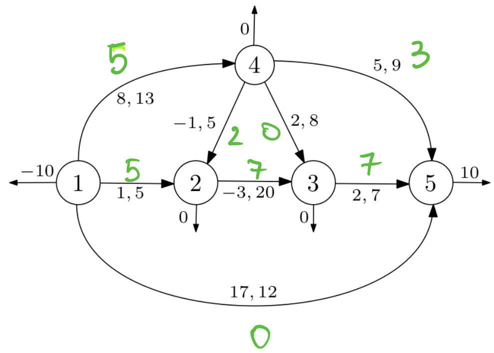


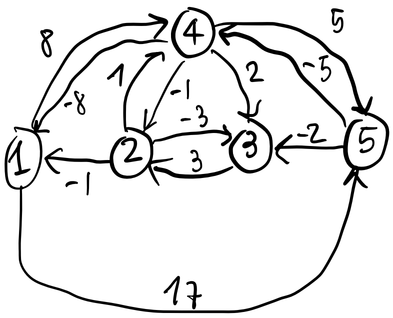












NON CI SONO CICLI DI COSTO NEGATIVO

VALORE OTTIMO: $5 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 7 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 =$

$= 40 + 15 + 5 - 2 - 21 + 14 =$

$= 51$

ESERCIZIO 4

Nell'ambito dell'Esercizio 1, si supponga che i componenti non utilizzati da A per la realizzazione di computer possano poi essere venduti sul mercato, e che in tal caso il componente $i \in \{1, \ldots, n\}$ dia luogo al ricavo r_i. Si modifichi il programma lineare in modo che tenga conto di quest'eventualità.

BASTA AGGIUNGERE UNA VARIABILE y_i CHE INDICA IL FATTO CHE L'OGGETTO i È VENDUTO. SI TRATTA OVVIAMENTE DI UNA VARIABILE LOGICA. LA FUNZIONE OBIETTIVO DIVENTA

$$\max \sum_{j=1}^{m} x_j e_j + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot r_i$$

MENTRE I VINCOLI DI RIEMPIMENTO DIVENTANO I SEGUENTI

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \cdot a_{ij} + y_i \leq 1 \quad \forall i$$