Límite de suma de Riemann

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma(f, P, (\xi_i)) = I$$

$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$ definida en $[a, b]$: $P \supset P_\epsilon$ se cumple que $0 \leq |\sigma(f, P, (\xi_i)) - I| < \epsilon$

Toda función no acotada no será integrable en ese intervalo

Supongamos que f es no acotada en $[a, b]$. Para cualquier partición P de E, siempre puede encontrarse un intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ donde f es no acotada. Sin pérdida de generalidad, en una partición cualquiera P, consideremos a σ_k como una suma integral a la que se le ha omitido el punto k-ésimo:

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, i \neq k$$

Puesto que f no va a estar acotada en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, pueden encontrarse puntos ξ_k que pertenezcan a él y que cumplan $f(\xi_k) > M$ sea M cualquier número prefijado. Entonces en particular podemos tomar $M > 0$, ξ_k, y $\Delta x_k > 0$ (es decir la longitud del intervalo $\neq 0$) tal que: $|f(\xi_k)| \geq \frac{|\sigma_k|+M}{\Delta x_k}$ $|f(\xi_k)|\Delta x_k \geq |\sigma_k| + M$

Además, la suma integral asociada a P va a ser:

$$\sigma(f, P, \xi_i) = \sigma_k + f(\xi_k)\Delta x_k$$

Aplicando módulo a ambas partes:

$$|\sigma(f, P, \xi_i)| = |\sigma_k + f(\xi_k)\Delta x_k|$$

$$|\sigma(f, P, \xi_i)| \geq |f(\xi_k)|\Delta x_k - |\sigma_k|$$

Sustituyendo $|f(\xi_k)|\Delta x_k$ por $|\sigma_k| + M$ encontrado anteriormente:

$$|\sigma(f, P, \xi_i)| \geq |\sigma_k| + M - |\sigma_k|$$

$$|\sigma(f, P, \xi_i)| \geq M$$

Esta demostración prueba que la suma integral de f no acotada puede hacerse tan grande como se quiera y por tanto no tendrá límite finito, lo que quiere decir que toda f no acotada es no integrable.

Establecido esto:

Demostración: $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow \overline{I} = \underline{I}$

Demostremos que si $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$ tal que $P \supset P_\epsilon$, se cumple que $|\sigma(f, P, (\xi_i)) - I| < \epsilon \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0 \Rightarrow \underline{I} = \overline{I}$

Primeramente, demostremos que:

Demostración: $\lim_{\lambda \to 0}(S) = \overline{I}$ **y** $\lim_{\lambda \to 0}(s) = \underline{I}$

Sea el intervalo $[a, b]$ y sean P_1 y P_2 dos particiones del mismo. Digamos que P_2 es más fina que P_1, es decir, $P_2 \supset P_1$ Sea los puntos X_{k-1} y X_k de ambas particiones y el punto X' en P_2 tal que $X_{k-1} \leq X' \leq X_k$ Puesto que estamos trabajando en una función acotada y sus intervalos también lo estarán, podemos elegir M y m los supremos del intervalo $[X_{k-1}, X']$ y $[X', X_k]$ respectivamente, y sea M_k el supremo del intervalo $[X_{k-1}, X_k]$:

$S(f, P_2) - S(f, P_1) = M(X' - X_{k-1}) + m(X_k - X') - M_k(X_k - X_{k-1})$ por la definición de Sumas de Darboux

Pero $m \leq M_k$ y $M \leq M_k$ (M_k es el supremo del intervalo completo y por tanto el mayor de los dos)

Por tanto es posible reemplazar m y M por M_k y cambiar el = por $\leq$, obteniéndose:

$$S(f, P_2) - S(f, P_1) \leq M_k(X' - X_{k-1}) + M_k(X_k - X') - M_k(X_k - X_{k-1})$$

Sacando factor común M_k y simplificando:

$$S(f, P_2) - S(f, P_1) \leq M_k(X_k - X_{k-1}) - M_k(X_k - X_{k-1}) = 0$$
$$S(f, P_2) - S(f, P_1) \leq 0$$

Por tanto,

$$P_2 \supset P_1 \Rightarrow S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$$

Esto significa que mientras más fina sea la partición, menor será la suma superior que le corresponde. Por tanto, mientras más disminuye λ (la longitud del intervalo mayor) menor es la suma superior.

$$P_{n+1} \supset P_n \Rightarrow S(f, P_{n+1}) \leq S(f, P_n),$$

Entonces la función va a ser monótona decreciente con λ que tiende a 0, por lo que su límite es su ínfimo. Pero como el ínfimo de las particiones de la Suma superior está definido como $\overline{I}$:

$$\lim_{\lambda \to 0}(S) = \overline{I}$$

Ahora, para la suma inferior, planteamos a m, M, y M_k como los ínfimos de los intervalos previamente dados, que sabemos que exiten por la acotación, y volvemos a expresar: $s(f, P_2) - s(f, P_1) = M(X' - X_{k-1}) + m(X_k - X') - M_k(X_k - X_{k-1})$ por la definición de Sumas de Darboux

Pero $m \geq M_k$ y $M \geq M_k$ (M_k es el ínfimo del intervalo completo y por tanto el menor de los dos)

Por tanto es posible reemplazar m y M por M_k y cambiar el $=$ por $\geq$, obteniéndose:

$$s(f, P_2) - s(f, P_1) \geq M_k(X' - X_{k-1}) + M_k(X_k - X') - M_k(X_k - X_{k-1})$$

Sacando factor común M_k y simplificando:

$$s(f, P_2) - s(f, P_1) \geq M_k(X_k - X_{k-1}) - M_k(X_k - X_{k-1}) \leq 0$$
$$s(f, P_2) - s(f, P_1) \geq 0$$

Por tanto,

$$P_2 \supset P_1 \Rightarrow s(f, P_2) \geq s(f, P_1)$$

Como mientras más fina sea la partición, mayor será la suma inferior, esta función va a ser monótona creciente de forma análoga y su límite el supremo, que está definido como $\underline{I}$. Por tanto:

$$\lim_{\lambda \to 0}(s) = \underline{I}$$

Concluyendo, $\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = \lim_{\lambda \to 0}(S) - \lim_{\lambda \to 0}(s) = \overline{I} - \underline{I}$ Entonces, $\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0 \Rightarrow \overline{I} - \underline{I} = 0 \Rightarrow \overline{I} = \underline{I}$, al mismo tiempo que $\overline{I} = \underline{I} \Rightarrow \overline{I} - \underline{I} = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$

Por tanto :

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0 \iff \overline{I}=\underline{I}$$

Ahora, demostremos que f integrable por Riemann $\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$, lo cual a su vez va a implicar $\overline{I}=\underline{I}$:

Por hipótesis, $\forall\epsilon>0, \exists P_\epsilon$ tal que $P\supset P_\epsilon$ va a cumplirse:

$$I-\epsilon<\sigma(f,P,(\xi_i))<\epsilon+I$$

Ahora, sabemos que $\overline{I}$ es el ínfimo de las sumas superiores de las posibles particiones del intervalo, por tanto, $\overline{I}\leq S(f,P)$, e $\underline{I}$ es el supremo de las sumas inferiores de las posibles particiones del intervalo, por tanto $\underline{I}\geq s(f,P)$

Además, $S(f,P)=sup(\sigma(f,P,(\xi_i)))$, y $s(f,P)=inf(\sigma(f,P,(\xi_i)))$

De lo anterior se deduce que $inf(\sigma(f,P,(\xi_i)))=s(f,P)\leq\sigma(f,P,(\xi_i))\leq S(f,P)=sup(\sigma(f,P,(\xi_i)))$ Insertando este resultado en $I-\epsilon<\sigma(f,P,(\xi_i))<I+\epsilon$, se cumple que $I-\epsilon\leq s\leq S\leq I+\epsilon$

Ahora, dado que $s\leq S: S-s\leq 0$

Usamos $I-\epsilon\leq s$ y $S\leq I+\epsilon$, restando, $S-s\leq(I+\epsilon)-(I-\epsilon)=2\epsilon$

Uniendo ambas, $0\leq S-s\leq 2\epsilon$, y como $\epsilon>0$, podemos decir $-2\epsilon\leq S-s\leq 2\epsilon$, es decir:

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$$

Que a su vez implica que $\overline{I}=\underline{I}$

Concluyendo, $f(x)\in\mathcal{R}[a,b]\Rightarrow\overline{I}=\underline{I}$

Cualesquiera sean P_1 y P_2, $s(f,P_1)\leq S(f,P_2)$

Demostración: Sea $P\supset P_1$ y $P\supset P_2$, se cumple que:

$$s(f,P_1)\leq s(f,P)\leq S(f,P)\leq S(f,P_2)$$

Como fue demostrado anteriormente. Entonces por transitividad queda demostrado que $s(f,P_1)\leq S(f,P_2)$.

Demostración:$\overline{I}=\underline{I}\Rightarrow f\in\mathcal{R}[a,b]$

Es decir:

$$\underline{I}=\overline{I}\Rightarrow\forall\epsilon>0,\exists P_\epsilon: P\supset P_\epsilon \text{ tal que } |\sigma(f,P,(\xi_i))-I|<\epsilon$$

De las definiciones de integral superior e inferior se obtiene que:

$$s\leq\underline{I}\leq\overline{I}\leq S$$

Restando $\overline{I}\leq S$ y $s\leq\underline{I}$:

$$\overline{I}-\underline{I}\leq S-s$$

Sea el caso $\underline{I}=\overline{I}$, designaremos al valor común de $\underline{I}$ y $\overline{I}$ como la variable I, entonces:

$$s \leq I \leq S$$

Luego $0 \leq I - s \leq S - s$ (restando s), y como $S - s \geq S - I \geq 0$ (restando S en la inicial y multiplicando por -1), equivalente a $0 \leq S - I \leq S - s$, entonces:

$$\lim_{\lambda \to 0}(I - s) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \to 0}(S - I) = 0$$

Es decir que $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon : P \supset P_\epsilon$, entonces $I - s < \epsilon$ y $S - I < \epsilon$.

Se tiene que $s \leq \sigma(f, P, (\xi_i)) \leq S \Rightarrow -(S - I) \leq I - \sigma(f, P, (\xi_i)) \leq I - s$ (restándole a I, cada miembro)

Luego reemplazamos lo anterior y llegamos a: $-\epsilon \leq I - \sigma(f, P, (\xi_i)) \leq \epsilon$, lo cual multiplicando por -1, es equivalente a $-\epsilon \leq \sigma(f, P, (\xi_i)) - I \leq \epsilon$ lo que significa que:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma(f, P, (\xi_i)) = I$$

Hemos demostrado que $\overline{I} = \underline{I} \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, b]$

Ahora que tenemos el implica en ambos sentidos, hemos llegado a:

$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \overline{I} = \underline{I} \iff \lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$

Que es lo que queríamos demostrar.