Ejercicio Curva Loxodrómica en proyección MERCATOR.

En un primer paso se busca hallar coordenadas geográficas de puntos sobre una linea loxodrómica. La linea loxodrómica es aquella que mantiene un rumbo constante, es decir que avanza manteniendo un mismo ángulo con respecto a los meridianos.

Para tener una idea empírica de la construcción de esta curva se presenta un ejemplo a continuación, utilizando trayectorias de circulo máximo, corrigiendo la dirección cada un ángulo determinado en longitud.

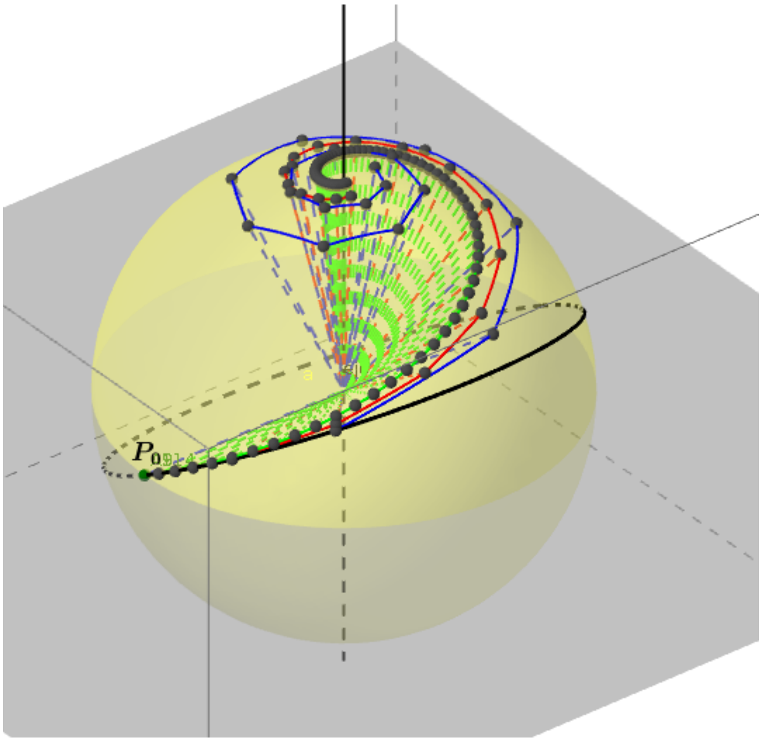


Figure 1: negro: Trayectoria Ortodrómica, Azul: Cambio de Rumbo cada 50°, Rojo: cambio de Rumbo cada 25°, Verde: cambio de Rumbo cada 5°

Cuanto mas pequeño es el $\Delta\lambda$ tomado mas se asemeja esta trayectoria construida a la loxodrómica, igualándose para un $\delta\lambda$ infinitesimal.

En este caso, puede construirse un triángulo esférico utilizando un punto de partida, un rumbo fijo y un avance de dL en distancia, donde para un dL infinitesimal el lado inferior se aproxima a un sector de paralelo, es decir que sus ángulos con respecto a los meridianos del punto de origen y destino son 90°.

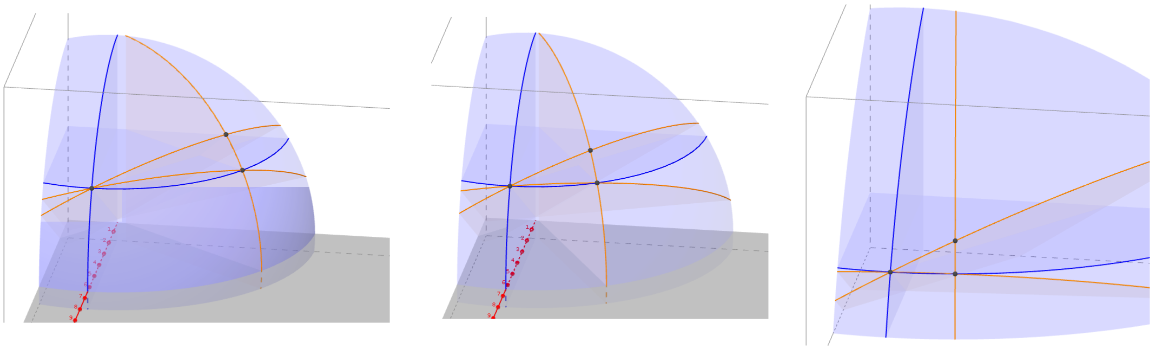
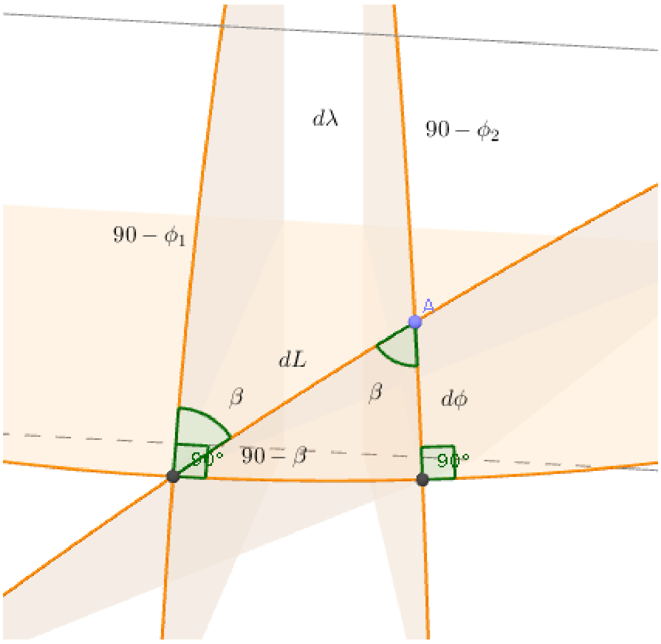


Figure 2: Ejemplo de Construcción del triángulo infinitesimal.

Dados estos supuestos, el triángulo a analizar queda formado de la siguiente manera:



Para obtener el $\Delta\phi$ correspondiente a un avance en distancia (dL) puede aplicarse el teorema del seno:

$\frac{seno(\frac{dL}{r})}{seno(90)} = \frac{seno(d\phi)}{seno(90-\beta)}$

Considerando que dL y $d\phi$ son suficientemente pequeños como para que el valor del ángulo y el seno sean equivalentes, e integrando obtenemos:

$\Delta\phi = \int_0^L cos\beta \frac{dL}{r}$

$\Delta\phi = \frac{cos\beta}{r} L$

Luego, Operando sobre el triángulo polar para hallar $\Delta\lambda$ siendo conocida la expresión de ϕ_2 para un determinado dL :

$\frac{seno(\frac{dL}{r})}{seno(d\lambda)} = \frac{seno(90-\phi_2)}{seno(\beta)}$

$\frac{\frac{dL}{r}}{d\lambda} = \frac{seno(90-(\phi_1+\Delta\phi))}{seno(\beta)}$

$\Delta\lambda = \int_0^L \frac{seno(\beta)}{seno(90-(\phi_1+\Delta\phi))}\frac{dL}{r}$

$\Delta\lambda = \int_0^L \frac{seno(\beta)}{cos(\phi_1+(\frac{cos\beta}{r}L)))}\frac{dL}{r}$

$\int_0^L \frac{seno(\beta)}{cos(\phi_1+(\frac{cos\beta}{r}L)))}\frac{dL}{r} = tan(\beta)\left(ln\left(cos(\frac{Lcos(\beta)+\phi_1 r}{2r}) + sin(\frac{Lcos(\beta)+\phi_1 r}{2r})\right) - ln\left(cos(\frac{Lcos(\beta)+\phi_1 r}{2r}) - sin(\frac{Lcos(\beta)+\phi_1 r}{2r})\right)\right)\Big|_0^L$

Aplicando las expresiones de $\Delta\phi$ y $\Delta\lambda$ para un punto de arranque y acimut arbitrarios, podemos hallar puntos sobre una trayectoria loxodrómica, fijando intervalos de distancia L regulares.

Una vez encontradas las coordenadas geográficas, el objetivo del ejercicio es proyectarlas al sistema Mercator utilizando un datum esférico, y verificar si la representación es recta como corresponde a la mencionada proyección.

Se adjunta una planilla Excel con el ejercicio resuelto