

Guía para Clase

Autor: Javier Clavijo, Figuras, salvo indicación: Mariano Harguinteguy

Utilizar bajo los términos de la licencia

CC-BY-SA-4.0: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Geometría del Elipsoide y cálculos Geodésicos.

La forma de la tierra

Es fácil para un observador informado arribar a un modelo esférico para la forma de la tierra. Partiendo de esta definición, podría desarrollar la solución de los diversos problemas que plantea la medición sobre la superficie de la esfera – los llamados problemas geodésicos – y construir una poligonal cerrada sobre la tierra, verificando si el error obtenido al regresar al punto de origen es compatible con la precisión de los instrumentos.

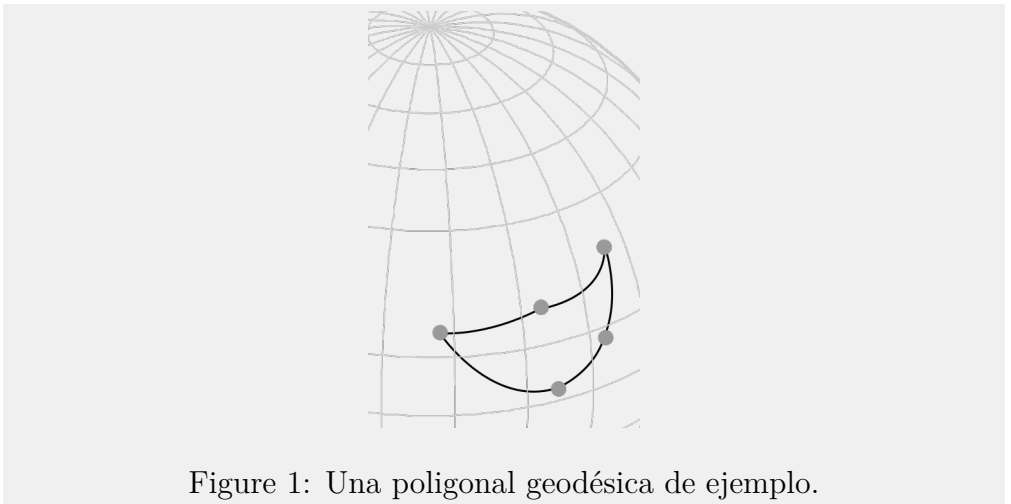


Figure 1: Una poligonal geodésica de ejemplo.

También podría diseñar experiencias relativamente simples para medir la distancia recorrida en un grado de latitud o de longitud, o incluso verificar la forma en que varían los ángulos de la vertical del lugar con respecto al norte. Estas experiencias aplicadas a distintos puntos ubicados en la tierra en forma arbitraria pueden dar información clave sobre la forma de la tierra.

Cualquiera de estas metodologías le llevará al hallazgo de que el modelo esférico no se ajusta perfectamente a la tierra. En el primer caso obtendrá un error de cierre mayor al que correspondería con el instrumental utilizado, mientras que en el segundo observará que la estimación del radio terrestre varía con la latitud.

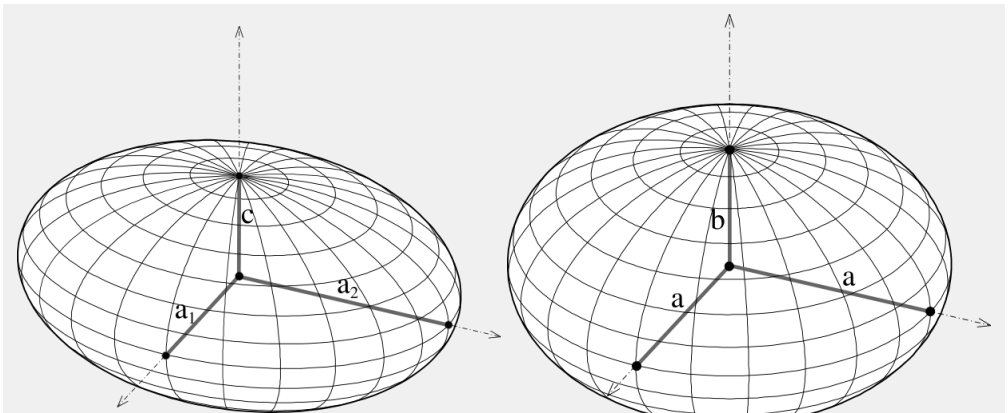
Del análisis de estas mediciones, y a partir de la consideración de la influencia de la rotación terrestre sobre la distribución de su masa y sobre su propio

campo gravitatorio, a la luz de las teorías desarrolladas por Isaac Newton, la geodesia desarrolló un modelo geométrico más apropiado que el intuitivo. Este modelo es el de el elipsoide de revolución.

El elipsoide de revolución

El elipsoide es una superficie cuádrica, definida en forma canónica por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



CC BY-SA 4.0, Reelaborado a partir del trabajo en <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=45585493>

Figure 2: Un elipsoide tri-axial y uno de revolución.

El elipsoide de revolución utilizado en geodesia es en particular el caso en que $a_1 = a_2$, tomando su nombre del hecho de que puede ser construido a partir de hacer girar la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

perteneciente al plano XZ , alrededor del eje Z , coincidente con el eje menor de la elipse.

Los ejes a y b bastan para definir a la elipse y al elipsoide de revolución correspondiente. Sin embargo, existen otros parámetros que se utilizan normalmente para definir sus propiedades.

parámetro	símbolo	expresión
aplastamiento	α, f	$\frac{a-b}{a}$
inversa de aplastamiento	$1/f$	$1/f = \frac{a}{a-b}$
exentricidad lineal	E	$\sqrt{a^2 - b^2}$
primera exentricidad	e	$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$
segunda exentricidad	e'	$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$



Geometría del elipsoide

Coordenadas

Para trabajar sobre el elipsoide con un enfoque orientado ala geodesia, partiremos de la definición de la latitud en base a la linea perpendicular a la superficie a la que podemos llamar vertical elipsoidal, y definiremos la longitud y el azimut en forma análoga a como se hace al trabajar con coordenadas geográficas esféricas.

Estas definiciones serán el punto de partida para resolver en forma teórica los problemas geodésicos, dentro de los cuales ingresaran como parámetro las longitudes de los ejes a, b en lugar de un único radio.

Latitud	ángulo entre la vertical elipsoidal y el plano XY
Longitud	ángulo diedro entre el plano meridiano que contiene al punto analizado y el plano meridiano de origen –Un plano meridiano es aquel que contiene al eje Z–
azimut a->b	ángulo diedro entre el plano meridiano del lugar a y el plano vertical que contiene al vector tangente a la trayectoria geodésica que une los puntos a y b sobre la superficie del elipsoide.



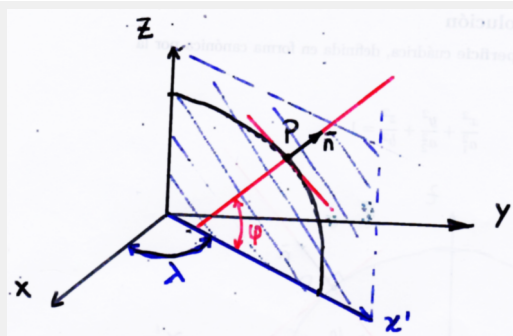


Figure 3: Latitud, Longitud, y el plano meridiano

Latitud elipsoidal.

Hoja de ruta

Para analizar la geometría del elipsoide de revolución, trabajaremos con la parametrización que nos resulta útil en la cartografía, que es la de latitud y longitud.

Comenzaremos viendo cómo se define el radio de una superficie en su intersección con un plano. Luego, veremos dos demostraciones, el teorema de Meusnier y los máximos y mínimos de la curvatura, que nos describen cómo se comportan los radios de este tipo de curvas en cualquier superficie.

Ya presentamos los parámetros que se usan normalmente para describir la forma de un elipsoide de revolución genérico.

Luego mostraremos en forma sencilla que los radios mayor y menor del elipsoide de revolución en un punto tienen que ser inevitablemente el radio de la sección meridiana y el de otra perpendicular a esta, llamada primer vertical. Veremos que estos radios nos sirven para definir un radio medio en una zona.

Veremos que, partiendo de la definición del radio de curvatura, podemos relacionar a los radios principales del elipsoide con los módulos de los vectores asociados a nuestro sistema de coordenadas latitud y longitud.

Luego, analizando secciones meridianas, calcularemos los valores de los radios en función de los parámetros del elipsoide y las coordenadas geográficas. Por el camino hallaremos en las ecuaciones para transformar entre el sistema de coordenadas geográficas y el de cartesianas geocéntricas.

Finalmente, desarrollaremos el cálculo de un segmento de arco de meridiano, y haremos un comentario final.

Radios de curvatura

La base para cualquier cálculo sobre la superficie del elipsoide parte del estudio de la geometría de superficies (campo de la geometría diferencial).

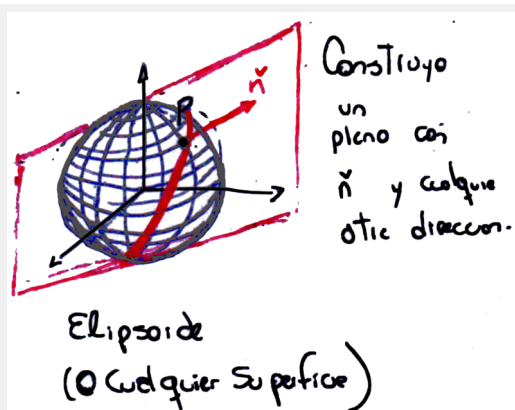


Figure 4: Son de interés los radios de curvatura normales, que se miden sobre planos que contengan a la normal que pasa por un punto.

Cuando trabajamos sobre la esfera aparecía continuamente el Radio de curvatura. Sin embargo, su uso era intuitivo, y no requería un análisis más detallado, por el hecho de ser constante para toda la superficie estudiada.

El mismo caso no se da en el elipsoide.

Para poder realizar el estudio entonces debemos empezar por definir lo que es el radio de curvatura.

Sea ω una curva contenida en un plano γ , y que admite una parametrización en función de un parámetro v . Sea α el ángulo de la recta tangente a ω en el punto p , con respecto a una dirección fija \underline{x} . Se define la curvatura de ω en p como:

$$\chi = \left| \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial v}}{\|v\|} \right|$$

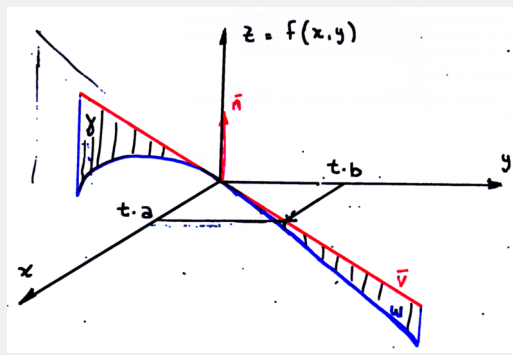


Figure 5: Curvatura sobre un plano normal en una direcci3n arbitraria.

Coloquialmente, podemos decir que la curvatura es la tasa de cambio del 1ngulo de la tangente a una curva con respecto al avance sobre dicha curva. Podemos verificar que para un c3rculo $\chi = 1/R$.

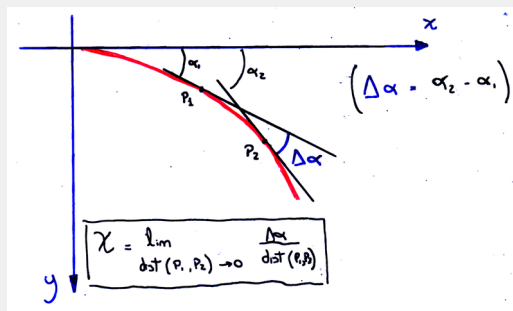


Figure 6: La definici3n de la curvatura es un caso limite de la idea intuitiva.

1. Radios de curvatura normales a una superficie.

Dada una superficie cualquiera en \mathbb{R}^3 , se llaman radios normales a aquellos radios de curvatura que corresponden a las curvas que surgen de intersectar a la superficie con planos que contienen a la normal a la superficie.

Sobre estos radios hay dos propiedades que son 1tiles de demostrar para el trabajo que necesitamos desarrollar:

- Las direcciones sobre las cuales se dan la mayor y la menor curvatura son ortogonales entre s3.
- Dado β , el plano tangente a la superficie en p , γ , un plano normal sobre el que se calcula una curvatura N , y γ' , un plano que no contiene a la normal, pero contiene a la recta intersecci3n $\gamma \cap \beta$. El radio de curvatura sobre γ' se puede calcular conociendo N y el 1ngulo entre γ y β

2. Prueba 1:

Dada una superficie ω , y β su plano tangente en el punto p . Si la superficie es continua y diferenciable en p , se puede construir un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z con origen en p , y con z en la dirección de la normal a ω . Luego, al menos localmente, se puede parametrizar a la superficie a partir de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que

$$o : \{x; y; z\} \in \omega \iff z = f(x, y)$$

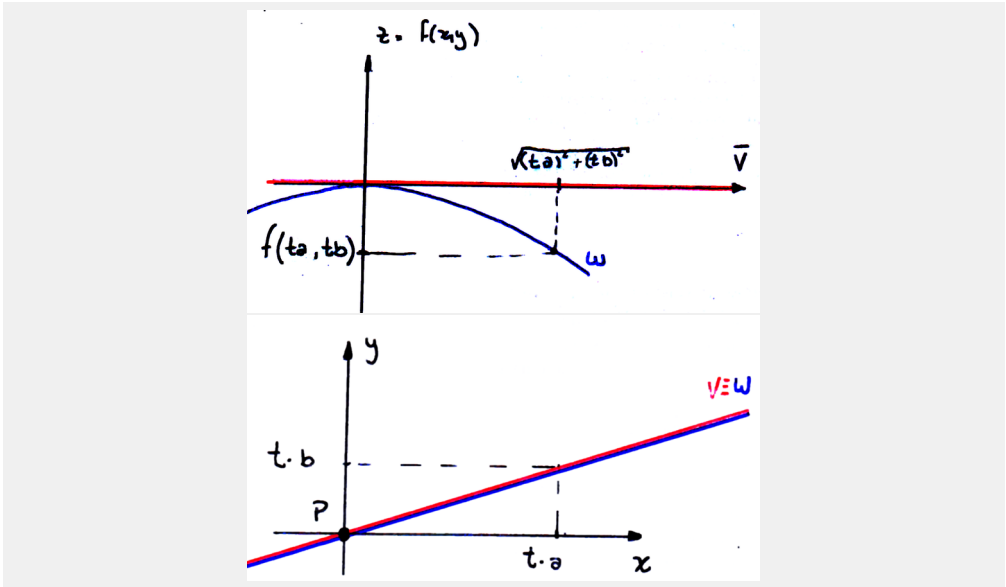
La recta $v : \{at; bt; 0\}$ es tangente a ω , y está contenida en un único plano normal a la superficie γ .

El radio de curvatura de ω en γ queda definido con respecto al parámetro t como:

$$\chi = \left| \frac{\frac{\partial \arctan(\nabla f(x, y) \cdot \underline{t})}{\partial t}}{\|\underline{t}\|} \right|$$

siendo $\underline{t} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial t}$ y \underline{r} el vector posición.

y siendo $\nabla f(x, y) \cdot \underline{t}$ la derivada direccional de f en la dirección de v



Es trivial definir la parametrización de v de forma tal que $\|\underline{t}\| = 1$. Luego:

$$\chi = \left| \frac{\frac{1}{1 + (\nabla f(x, y) \cdot \underline{t})^2} \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right)}{\partial t}}{1} \right|$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \dots} = 0$ por tratarse de funciones lineales y $(\nabla f(x, y) \cdot \underline{t})^2 = 0$ en el punto analizado, al desarrollar queda:

$$\chi = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} \right|$$

Llamaremos $L = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $N = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y $M = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Y observamos que la parametrización de v utilizada puede ser

$$a = \cos(\alpha) ; b = \sin(\alpha)$$

.

Entonces obtenemos:

$$\chi = \left| L \cos^2(\alpha) + 2N \cos(\alpha) \sin(\alpha) + M \sin^2(\alpha) \right|$$

Finalmente, aplicando identidades trigonométricas obtenemos:

$$\chi = \left| \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cos(2\alpha) + N \sin(2\alpha) + \frac{M}{2} - \frac{M}{2} \cos(2\alpha) \right|$$

$$\chi = \left| \frac{L + M}{2} + \frac{L - M}{2} \cos(2\alpha) + N \sin(2\alpha) \right|$$

Se puede demostrar, aplicando la formula de Euler, que esta ecuación responde a la forma general:

$$\chi = |A + B \cos(2\alpha + C)|$$

Donde, independientemente de cuales sean A,B y C, los máximos y mínimos se darán a intervalos de $\pi/2$ en α . Que es lo que queríamos demostrar.

Como corolario, podemos ver que, si se define el origen del ángulo α de forma tal que coincida con la dirección de menor curvatura, y suponiendo que las curvaturas máxima y mínima tienen signo positivo, que es el caso del elipsoide, podemos escribir:

$$\chi = |A| + |B| \cos(2\alpha)$$

Luego, la curvatura mayor es $|A| + |B|$ y la menor es $|A| - |B|$. Luego, si son conocidos los valores de las curvaturas máxima y mínima, se puede encontrar los valores de $|A|$ y $|B|$, y conocer el valor de la curvatura para cualquier dirección en un ángulo arbitrario con respecto a la de menor curvatura.

$$\begin{aligned}\chi_{Max} &= |A| + |B| \\ \chi_{min} &= |A| - |B| \\ |A| &= \frac{\chi_{Max} + \chi_{min}}{2} \\ |B| &= \frac{\chi_{Max} - \chi_{min}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{\chi_{Max} + \chi_{min}}{2} + \frac{\chi_{Max} - \chi_{min}}{2} \cos(2\alpha) \\ \chi &= \chi_{Max} \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} + \chi_{min} \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \\ \chi &= \frac{\cos^2(\alpha)}{R_{Max}} + \frac{\sin^2(\alpha)}{R_{min}}\end{aligned}$$

Partiendo de esta última ecuación, se puede hallar que el Radio medio de curvatura de una superficie como la que describimos es $R = \sqrt{MN}$.

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\chi(\alpha)} d\alpha \\ R &= \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{\cos^2(\alpha)}{R_{Max}} + \frac{\sin^2(\alpha)}{R_{min}}} d\alpha \\ R &= \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{\cos^2(\alpha)}{R_{Max}} \left(1 + \frac{\tan^2(\alpha) R_{Max}}{R_{min}} \right)} d\alpha\end{aligned}$$

Aplicando sustitución, donde

$$u = \sqrt{\frac{R_{max}}{R_{min}}} \tan(\alpha)$$

y

$$\sqrt{\frac{R_{min}}{R_{Max}}} du = 1/\cos^2(\alpha) d\alpha$$

, teniendo en cuenta que u es monótona, se pueden reemplazar directamente los límites en la integral por $(0; \infty)$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{R_{min}}{R_{Max}}} \frac{R_{Max}}{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} du \\ R &= \frac{\sqrt{R_{min} R_{Max}}}{\frac{\pi}{2}} \arctan(u) \Big|_0^\infty \\ R &= \sqrt{R_{min} R_{Max}} \end{aligned}$$

3. Prueba 2: Teorema de Meusnier

El teorema de Meusnier demuestra la relación entre el radio de una sección normal α a una superficie y el de otra sección β que no es normal pero que comparte la recta tangente en un punto con α .

La demostración es a partir de una construcción geométrica. Los referimos al apunte sobre la prueba de este teorema, de Cristóbal de Lozada y Puga. Que les proveemos aparte.

Para una visualización gráfica puede verse la construcción geométrica en geogebra en el link que también se adjunta.

Significado de la Latitud elipsoidal.

Partiendo de las coordenadas cartesianas $x; y; z$ de un punto sobre el elipsoide, puede considerarse la latitud en relación a la recta tangente a la elipse meridiana. Esta recta tangente, se puede obtener a partir de interpretar la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva. Como sabemos que en cualquier curva, la tangente es ortogonal a la normal, podemos trasladar la definición y usarla para definir la latitud, que es el ángulo entre la normal al elipsoide y el plano del ecuador.

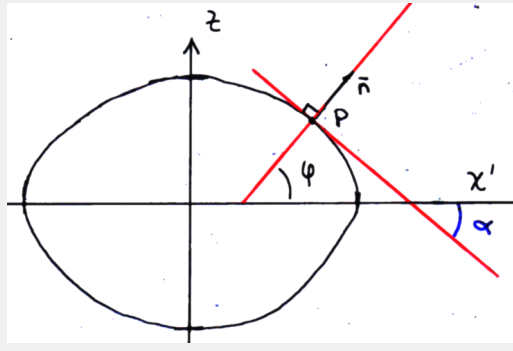


Figure 7: Relación entre la recta tangente y la latitud, sobre la elipse meridiana.

Considerando β el plano meridiano de un punto, y γ el plano del ecuador, construimos las coordenadas $z; x'$ de un punto dentro de este plano, siendo x' el eje en la dirección de la intersección $\beta \cap \gamma$.

En este sistema de coordenadas, la ecuación de la elipse meridiana es:

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{x'^2}{a^2} = 1,$$

de manera que, considerando solo el caso $z > 0$, obtenemos la ecuación

$$z = \sqrt{b^2 - \frac{x'^2 b^2}{a^2}}$$

se puede derivar esta expresión con respecto a x' para obtener la pendiente de una recta tangente a la elipse meridiana.

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z} \frac{b^2}{a^2} 2x' \quad (1)$$

Notamos que esta recta tangente es ortogonal a la normal, (ver figura), y por lo tanto se cumple que:

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

De donde, desarrollando la tangente, igualando con 1 y elevando al cuadrado:

$$\frac{\cos^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = \frac{1}{z^2} \frac{b^4}{a^4} x'^2$$

$$z^2 = \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \frac{b^4}{a^4} x'^2 \quad (2)$$

Tomando la definición de radio de curvatura:

$$\frac{1}{R} = \chi = \left| \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial t}}{\| \underline{t} \|} \right|$$

Si tomamos a la latitud como parametrización de la curva, y observamos que $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -1$, luego, se concluye que

$$\| \underline{\varphi} \| = R_{meridiano}$$

.

Para calcular el radio de curvatura, sin embargo, es conveniente utilizar a x' como parametrización del meridiano. Si llamamos η a un meridiano, y p a un punto cualquiera:

$$p \in \eta \iff p = \{x'; \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} x'^2}\}$$

Luego, para construir la curvatura utilizaremos:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = - \frac{\partial \arctan(\frac{\partial z}{\partial x'})}{\partial x'}$$

$$\| \underline{x'} \| = \sqrt{1 + \frac{\partial z^2}{\partial x'^2}}$$

$$\chi = \frac{1}{1 + \frac{\partial z^2}{\partial x'^2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial z^2}{\partial x'^2}}}$$

para calcular la segunda derivada debemos partir de la ecuación de la primera derivada y derivar nuevamente.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x'} &= -\frac{x'}{z} \frac{b^2}{a^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} &= -\frac{b^2 a^2 z - b^2 x' a^2 \frac{\partial z}{\partial x'}}{z^2 a^4} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} &= -\frac{b^2 a^2 z + b^2 a^2 z \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial z}{\partial x'}}{z^2 a^4} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} &= -\frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial z}{\partial x'}}{z} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} &= -\frac{1}{z} \frac{b^2}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial z^2}{\partial x'} \right)
\end{aligned}
\tag{3}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2; \text{ y } \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1 - e^2},$$

Poremos construir la ecuación para χ

$$\chi = \frac{1}{1 + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right)} \left| -\frac{1}{z} (1 - e^2) \left(1 + \frac{1}{(1 - e^2)} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \right| \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right)}}$$

$$\chi = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \right]^{3/2}} \left| \frac{1}{z} (1 - e^2) \left(1 + \frac{1}{(1 - e^2)} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \right|$$

Esta expresión tiene solución en la medida que podamos resolver $z = f(\varphi)$, de manera que, antes de seguir resolveremos las ecuaciones de **Conversión** $\varphi, \lambda \rightarrow X, Y, Z$

Conversión $\varphi, \lambda \rightarrow X, Y, Z$

Reemplazando 2 en la ecuación de la elipse obtenemos:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \frac{b^4}{a^4} x'^2 = 1$$

$$x'^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \frac{b^4}{a^4}}$$

$$x'^2 = \frac{\cos^2(\varphi) a^4}{\frac{\cos^2(\varphi) a^4}{a^2} + \sin^2(\varphi) b^2}$$

$$x' = \frac{\cos(\varphi) a^2}{\sqrt{\cos^2(\varphi) a^2 + \sin^2(\varphi) b^2}}$$

$$x' = \frac{\cos(\varphi) a}{\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \frac{b^2}{a^2}}}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}}$ y que $\sin^2 = 1 - \cos^2$

$$x' = \frac{\cos(\varphi) a}{\sqrt{\cos^2(\varphi) + (1 - \cos^2(\varphi)) \frac{1}{1 + e'^2}}}$$

$$x' = \frac{\cos(\varphi) a}{\sqrt{\cos^2(\varphi) + e'^2 \cos^2(\varphi) + (1 - \cos^2(\varphi))}}$$

$$x' = \frac{\cos(\varphi) a \sqrt{1 + e'^2}}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2(\varphi)}}$$

Utilizando una operatoria similar, obtendremos que:

$$z = \frac{\sin(\varphi) b}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2(\varphi)}}$$

Y si en lugar de e'^2 utilizáramos e^2 , considerando que $\frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} = \sqrt{1-e^2}$ hubiéramos obtenido

$$x' = \frac{\cos(\varphi) a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}}$$

$$z = \frac{\sin(\varphi)b\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2(\varphi)}}$$

Finalmente, para hallar x e y , simplemente utilizamos:

$$x = x' \sin(\lambda) \text{ y } y = x' \cos(\lambda)$$

Radio de curvatura meridiano (Revisita)

Habiendo ya resuelto la conversión, podemos utilizar la formula anterior para terminar de construir la ecuación de $\chi_{meridiano}$

$$\chi = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right)\right]^{3/2}} \left| \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2(\varphi)}}{\sin(\varphi)b\sqrt{1-e^2}} (1-e^2) \left(1 + \frac{1}{(1-e^2)} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) \right|$$

$$\chi = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right)\right]^{3/2}} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2(\varphi)}}{\sin(\varphi)b\sqrt{1-e^2}} (1-e^2) \left(\frac{(1-e^2)\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{(1-e^2)\sin^2 \varphi}\right)$$

$$\chi = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right)\right]^{3/2}} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2(\varphi)}}{\sin(\varphi)b\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{(1-e^2)\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right)$$

$$\chi = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right)\right]^{3/2}} \frac{[1-e^2\sin^2(\varphi)]^{3/2}}{\sin^3(\varphi)b\sqrt{1-e^2}}$$

$$\chi = \frac{\left[\frac{1-e^2\sin^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}\right]^{3/2}}{\left[\frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right]^{3/2}} \frac{1}{b\sqrt{1-e^2}}$$

$$\chi = \left[1 - e^2 \sin^2(\varphi)\right]^{3/2} \frac{a}{b^2}$$

Utilizamos normalmente el radio en lugar de la curvatura, y lo anotamos como $M = 1/\chi$, reemplazando además $\frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\left[1 - e^2 \sin^2(\varphi)\right]^{3/2}}$$

Radio de curvatura del primer vertical.

Siguiendo el teorema de Meusnier, y notando que el radio de un paralelo es lo que mas arriba llamamos x' . Podemos decir que N, el radio de la sección sobre el primer vertical, cumple que:

$$x' = N \cos(\varphi)$$

$$N = \frac{x'}{\cos(\varphi)}$$

$$N = \frac{x'}{\cos(\varphi)}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}}$$

Arco de meridiano Elipsóidico.

Como vimos anteriormente, podemos decir que

$$\|\underline{\varphi}\| = M$$

, por lo tanto, podemos escribir la longitud recorrida sobre un arco de meridiano sobre el elipsoide como:

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left\| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \right\| d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M d\varphi$$

$$S = a(1 - e^2) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{1}{\left[1 - e^2 \sin^2(\varphi)\right]^{3/2}}$$

Para resolver esta integral se realiza el desarrollo en serie binomial del término dentro de la integral, quedando una serie de potencias pares del seno.

El desarrollo en serie binomial se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots,\end{aligned}\tag{4}$$

Aplicado a nuestro caso, tenemos:

$$\begin{aligned}\left[1 - e^2 \sin^2(\varphi)\right]^{-3/2} &= 1 - \\ &- \left(-\frac{3}{2}\right) e^2 \sin^2(\varphi) + \\ &+ \left(\frac{3 \cdot 5}{2^2 2!}\right) e^4 \sin^4(\varphi) - \\ &- \left(-\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3 3!}\right) e^6 \sin^6(\varphi) + \\ &+ \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^4 4!}\right) e^8 \sin^8(\varphi)\end{aligned}\tag{5}$$

Notamos que los signos se cancelan, dado que el coeficiente binomial tiene signo par cuando la potencia (k) es impar. Podemos reescribir la formula como:

$$\begin{aligned}\left[1 - e^2 \sin^2(\varphi)\right]^{-3/2} &= 1 + \\ &+ \left(\frac{3}{2}\right) e^2 \sin^2(\varphi) + \\ &+ \left(\frac{5!}{(2^2 2!)^2}\right) e^4 \sin^4(\varphi) + \\ &+ \left(\frac{7!}{(2^3 3!)^2}\right) e^6 \sin^6(\varphi) + \\ &+ \left(\frac{9!}{(2^4 4!)^2}\right) e^8 \sin^8(\varphi)\end{aligned}\tag{6}$$

Para facilitar la integración, se reemplazan los valores de potencias del seno por cosenos de múltiplos del ángulo, aplicando las identidades trigonométricas para intercambiar productos por sumas, según el esquema que sigue:

$$\begin{aligned}
\sin^2 &= \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} \\
\sin^4 &= \frac{3 - 4 \cos(2\varphi) + 1 \cos(4\varphi)}{8} \\
\sin^6 &= \frac{10 - 15 \cos(2\varphi) + 6 \cos(4\varphi) + 1 \cos(6\varphi)}{32} \\
\sin^8 &= \frac{35 - 56 \cos(2\varphi) + 28 \cos(4\varphi) - 8 \cos(6\varphi) + 1 \cos(8\varphi)}{128}
\end{aligned}$$

Luego, reemplazando y agrupando para escribir la ecuación como:

$$[1 - e^2 \sin^2(\varphi)]^{-3/2} = A + B \cos(2\varphi) + C \cos(4\varphi) + D \cos(6\varphi) + E \cos(8\varphi) + \dots$$

nos queda:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{1}{2} \frac{(2 \cdot 1 + 1)!}{(2^1 1!)^2} e^2 + \frac{3}{8} \frac{(2 \cdot 2 + 1)!}{(2^2 2!)^2} e^4 + \\
&\quad + \frac{10}{32} \frac{(2 \cdot 3 + 1)!}{(2^3 3!)^2} e^6 + \frac{35}{128} \frac{(2 \cdot 4 + 1)!}{(2^4 4!)^2} e^8 + \dots \\
B &= -\frac{1}{2} \frac{(2 \cdot 1 + 1)!}{(2^1 1!)^2} e^2 - \frac{4}{8} \frac{(2 \cdot 2 + 1)!}{(2^2 2!)^2} e^4 - \\
&\quad - \frac{15}{32} \frac{(2 \cdot 3 + 1)!}{(2^3 3!)^2} e^6 - \frac{56}{128} \frac{(2 \cdot 4 + 1)!}{(2^4 4!)^2} e^8 - \dots \\
C &= \frac{0}{2} \frac{(2 \cdot 1 + 1)!}{(2^1 1!)^2} e^2 + \frac{1}{8} \frac{(2 \cdot 2 + 1)!}{(2^2 2!)^2} e^4 + \\
&\quad + \frac{6}{32} \frac{(2 \cdot 3 + 1)!}{(2^3 3!)^2} e^6 + \frac{28}{128} \frac{(2 \cdot 4 + 1)!}{(2^4 4!)^2} e^8 + \dots \\
D &= -\frac{0}{2} \frac{(2 \cdot 1 + 1)!}{(2^1 1!)^2} e^2 - \frac{0}{8} \frac{(2 \cdot 2 + 1)!}{(2^2 2!)^2} e^4 - \\
&\quad - \frac{1}{32} \frac{(2 \cdot 3 + 1)!}{(2^3 3!)^2} e^6 - \frac{8}{128} \frac{(2 \cdot 4 + 1)!}{(2^4 4!)^2} e^8 - \dots \\
E &= \frac{0}{2} \frac{(2 \cdot 1 + 1)!}{(2^1 1!)^2} e^2 + \frac{0}{8} \frac{(2 \cdot 2 + 1)!}{(2^2 2!)^2} e^4 + \\
&\quad + \frac{0}{32} \frac{(2 \cdot 3 + 1)!}{(2^3 3!)^2} e^6 + \frac{1}{128} \frac{(2 \cdot 4 + 1)!}{(2^4 4!)^2} e^8 + \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

Preferimos generalizar los términos procedentes de la binomial para minimizar los errores a la hora de programar las formulas en una planilla, ya que incluyen

operaciones repetitivas con números pequeños y consecutivos. Se puede incluso generalizar más, y cada término puede tomar la forma:

$$\sum \frac{x_n}{2^{2n-1}} \frac{(2n+1)!}{(2^n n!)^2} e^{2n}$$

donde x_n pueden ser tabulados para cada término (teniendo en cuenta que $0!=1$ por definición.):

Término	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
A	1/2	1	3	10	35
B	0	-1	-4	-15	-56
C	0	0	1	6	28
D	0	0	0	-1	-8
E	0	0	0	0	1

■

Nótese que:

1. que estos coeficientes dependen únicamente de la excentricidad del elipsoide, es decir que deben ser calculados una única vez para cada elipsoide elegido como referencia.
2. que no sólo cada término tiene mas términos que valen 0, sino también que el valor que acompaña al x_n decrece rápidamente con n.

Ejercicio: Grafique el decrecimiento de x_n con n, y estime en qué magnitud (en metros) afectará cada término (en función de n) en el cálculo del radio que se está integrando. (puede compararlo con la expresión exacta del radio).

Una vez que se ha expresado el radio en esta forma, podemos calcular la integral:

$$S = a(1 - e^2) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} A + B \cos(2\varphi) + C \cos(4\varphi) + D \cos(6\varphi) + E \cos(8\varphi) + \dots$$

$$S = a(1 - e^2)(A + 2^{-1}B \sin(2\varphi) + 4^{-1}C \sin(4\varphi) + 6^{-1}D \sin(6\varphi) + 8^{-1}E \sin(8\varphi) + \dots) \Big|_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

Conclusión, y puntapié inicial.

Los cálculos realizados en este apunte nos permiten avanzar en el desarrollo de proyecciones sobre el elipsoide.

Ya conocemos:

- Las ecuaciones de transformación entre coordenadas cartesianas y elipsoidales.
- Los módulos de los vectores base elipsoidales $\|\underline{\varphi}\|$ y $\|\underline{\lambda}\|$
- La longitud de un arco de meridiano y un arco de paralelo.

Utilizando estos resultados. ¿Cómo plantearían las condiciones para desarrollar una proyección sobre el elipsoide?.

Proponemos que se lo planteen bosquejando el desarrollo de:

1. La proyección de Mercator.
2. Una proyección cilíndrica equivalente.
3. Una proyección cilíndrica equidistante.
4. Una transformación que lleve el elipsoide hacia una esfera sin modificar las áreas.
5. Las condiciones para la proyección transversa de Mercator.