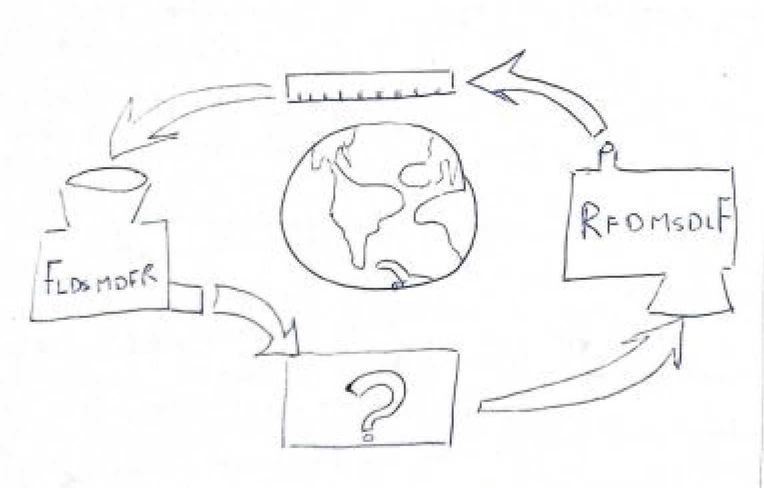
# CLASE 1: Una parametrizacion para medir.

## Problema:

Necesitamos medir la tierra y trasladar esas medidas en una representacion que sea - valga la redundancia - representativa, es decir, tiene que permitir reconstruir las medidas que la generaron. Como efecto deseable buscamos que sea intuitiva.




Recapitulando
Estamos pidiendo una transformacion:

- Continua.
- Biunivoca.
- Analítica (Al menos por tramos)

## ¿Que es medir?

Elipses y coordenadas cartesianas: Las medidas que nos importa son aquellas medibles, distancia euclidea y angulos entre planos, que estan perfectamente definidas en un sistema cartesiano.

Recapitulando
Necesito definir:

- Magnitud
- Ortogonalidad

# ¿Qué, Cuándo, Dónde, Porqué?

## ¿Donde medimos?

Las magnitudes que buscamos estan bien definidas sobre coordenadas cartesianas de los espacio $\mathbb{R}^n$.

$d = \parallel \underline{v} \parallel = \underline{v} \cdot \underline{v}$

$\underline{v_1} \perp \underline{v_2} \Leftrightarrow \underline{v_1} \cdot \underline{v_2} = 0$

$cos(\alpha) = \frac{\underline{v_1} \cdot \underline{v_2}}{\underline{v_1} \cdot \underline{v_2} \underline{v_1} \cdot \underline{v_2}}$

> Recapitulando
> La clave esta en el producto interno, es él quien nos define las magnitudes.

## ¿Pero que son las coordenadas?

Son parametros que nos permiten ubicarnos en el espacio.

En el espacio euclideo $\$\ ^{n}4$ el producto interno es facilmente calculable usando coordenadas cartesianas ¿y qué tipo de parámetro son las coordenadas cartesianas?

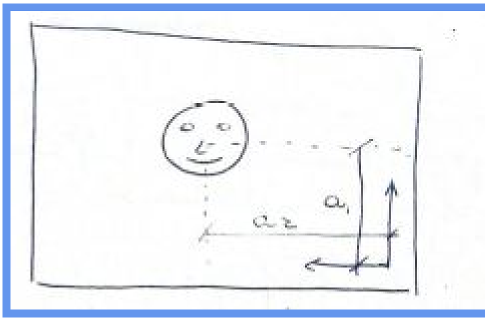
Dadas n dimensiones ortogonales las coordenadas cartesianas son parametros que nos permiten definir la posicion de un punto como:

$\underline{r} = \sum a_i \underline{e}^i$

$\underline{r}$ : Vector posicion.

$a_i$ : Parametros.

$\underline{e}^i$ : Vectores base ortonormales.



La consecuencia de estas coordenadas y este producto interno - si, este, hay otros - es que la norma es identica a la distancia euclidea que podriamos medir con una regla en el espacio fisico (y aplicando el teoréma de Pitágoras).

La representación que necesitamos lograr es parte de $\mathbb{R}^2$, y usaremos las mismas herramientas pero medir: el producto interno sobre las coordenadas cartesianas.

## En resumen

$\mathbb{R}^3$ es el espacio con producto interno que define la norma euclidea y se recorre con 3 parametros

Aplico una transformacion y obtengo ...

$\mathbb{R}^2$ similar a $\mathbb{R}^3$, con una norma euclidea, pero sobre 2 parametros.

- Observacion:

La tierra es solo una superficie en $\mathbb{R}^3$, si es continua se puede recorrer con solo 2 parametros.

- Pregunta:

¿Se puede definir un "producto interno" sobre 2 parametros que recorren la tierra de forma que las norma sea la distancia mas corta sobre la superficie y el angulo quede bien definido?

- Respuesta: No. ¿Entonces?

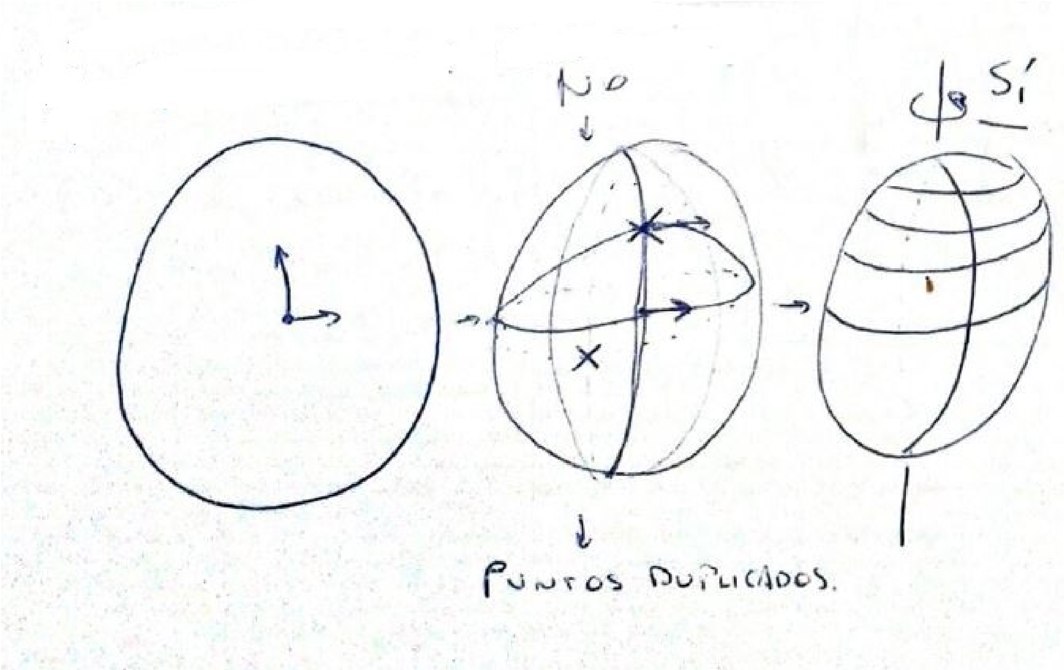
- Idea:

Podremos usar los 2 parametros para recorrer la superficie y usar el producto interno de $\mathbb{R}^3$ para medir

- Observacion 2:

$^2$ se recorre con 2 parametros de modo que una transformación adecuada puede aplicar los 2 parametros que recorren la superficie hacia $\mathbb{R}^2$ sin perder información.

¿Que parametrización construiremos?

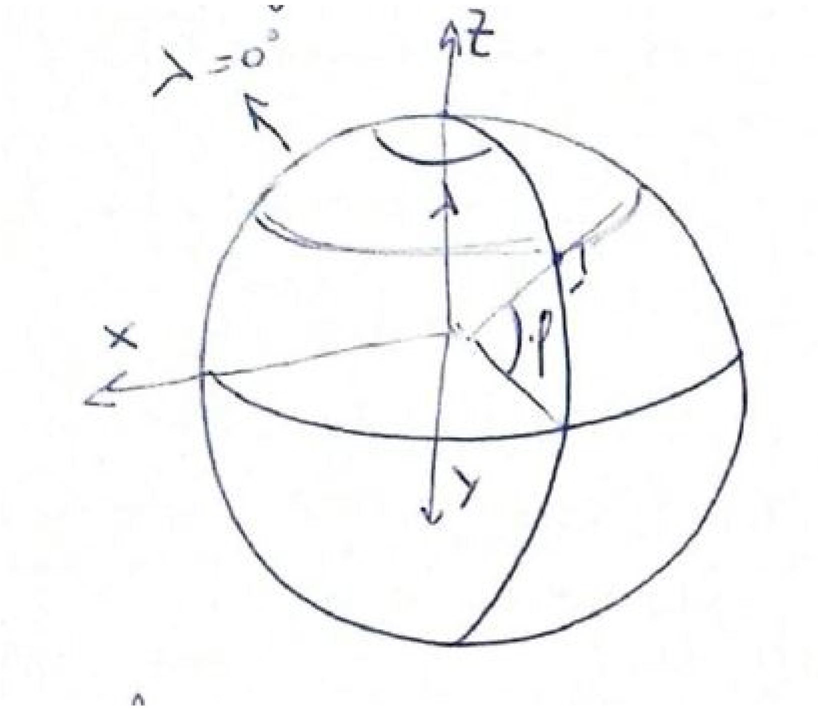



Resumen:
Una esfera (y cualquier superficie suave y continua) contenidas en $\mathbb{R}^3$, se parametrizan con 2 valores, un transformacián de esos 2 valores puede aplicarse a 2 parametros de $\mathbb{R}^2$ sin perder información.

Una parametrizacion que siguiera siempre circulos maximos generaria problemas (coincidirian lineas coordenadas de ambos parámetros por ej.)

La coordenadas esféricas son una parametrización adecuada, porque no tienen ese tipo de problemas y ademas tiene simetria axial que puede hacerce coincidir con el hecho fisico de la rotacion terrestre.

Ademas, esta la parametrización es un caso especifico de la parametrización por Azimut y distancia a un punto, que es una forma trivial de medir sobre la tierra (como se hacia por ejemplo en los mapas ”portulanos”)




$z = R\, sen(\varphi)$
$y = R\, cos(\varphi) sen(\lambda)$
$x = R\, cos(\varphi) cos(\lambda)$

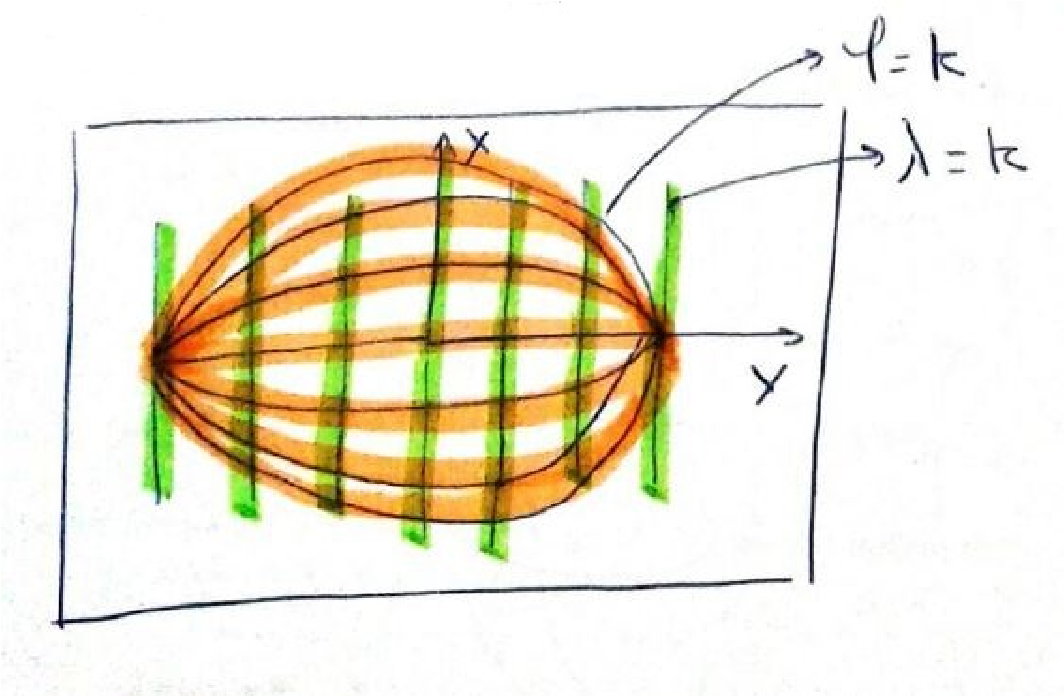
Ahora bien , si defino una transformacion:

$T_x : (\varphi, \lambda) \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$

puedo interpretar que $\varphi$ y $\lambda$ son parametros de $\mathbb{R}^2$.

$y = \lambda$

$x = \varphi cos(\lambda)$




## ¿Cómo uso el producto interno de $\mathbb{R}^n$ si quiero trabajar con los parametros?

En principio

$\frac{dx}{d\varphi}; \frac{dy}{d\varphi}; \frac{dz}{d\varphi}$

Nos describen como avanzo por el espacio euclideo, sobre el que sé medir, cuando me muevo en el espacio de los parametros.

Recordemos:

$\frac{dx}{d\varphi} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x(\varphi+\epsilon)-x(\varphi)}{\epsilon}$

$x(\varphi + \epsilon) - x(\varphi)$ :Distancia proyectada al vector x, es decir en la direccion del primer eje cordenado.

Luego la ecuación:

$\left[\frac{dx}{d\varphi}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\varphi}\right]^2 + \left[\frac{dz}{d\varphi}\right]^2 = \left\|\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right\|^2$

$r$: posición.

es la respuesta a la pregunta ¿Cuán rapido me muevo en posicion si me muevo por $\varphi$?

Entonces:

$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \underline{\varphi}$

Anotaremos al vector base de la coordenada $\varphi$. El vector indica como me muevo en el espacio "medible" al moverme por el parametro $\varphi$.

Observacion:

El producto interno lo conocermos en relación a la base vectorial de las coordenadas cartesianas, las otras bases debemos expresarlas en funcion de ésta.

Llamamos a las coordenadas cartesianas como: $\underline{e_x}, \underline{e_y}, \underline{e_z}$

y a los correspondientes vectores base como: $\underline{e_x}, \underline{e_y}, \underline{e_z}$

Si aplicamos la regla de la cadena vectorial obtendremos

$\frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial \underline{r}}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial \varphi}$

Expresamos utilizando el criterio de suma de einstein.

$\underline{\varphi} = \frac{\partial \underline{e_i}}{\partial \varphi} \underline{e_i}$

## Conclusión

- Pudimos relacionar una parametrizacion de la esfera $(\varphi, \lambda)$ con la base vectorial canonica $(\underline{e_x}, \underline{e_y}, \underline{e_z})$ definida por las coordenadas cartesianas.
- Conocemos unos nuevos vectores base $(\underline{\varphi}, \underline{\lambda})$, y los podemos usar para calcular productos internos en esa parametrizacion.

## ¿Como mediríamos una trayectoria parametrizada en $varphi, \lambda$?

Por ejemplo, una seccion de meridiano se mediria

$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \parallel \underline{\varphi} \parallel d\varphi$

# Ejercicios

- Dibuje la figura que representa paralelos y meridiano e indique los vectores $\underline{\varphi}$ y $\underline{\lambda}$ en un punto.
- Calcule
$$\parallel \underline{\varphi} \parallel = \underline{\varphi} \cdot \underline{\varphi} y \parallel \underline{\lambda} \parallel$$
- Calcule
$$\underline{\varphi} \cdot \underline{\lambda}$$

Tenga en cuenta que:

$$\underline{\varphi} = \frac{\partial e_x}{\partial \varphi} \cdot \underline{e_x} + \frac{\partial e_y}{\partial \varphi} \cdot \underline{e_y} + \frac{\partial e_z}{\partial \varphi} \cdot \underline{e_z}$$

Y que:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} a_i \underline{e_i} \cdot b_j \underline{e_j} = \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} a_i b_j (\underline{e_i} \cdot \underline{e_j})$$

y que:

$$\underline{e_i} \cdot \underline{e_j} = 1 \forall i = j y \underline{e_i} \cdot \underline{e_j} = 0 \forall i \neq j$$