Metrica, Producto interno, Autovalores y Autovectores

En este apunte trabajaremos con la matriz métrica, y veremos cómo se puede obtener información a partir de ella descomponiendola.

Bases de R2

En lo siguiente trabajaremos siempre sobre el espacio de representación, siempre en R2. Utilizaremos el sistema de coordenadas cartesianas del plano, con su base canónica asociada, llamada

$$\underline{\hat{u}}\,,\,\underline{\hat{v}}$$

, y utilizaremos un sistema de coordenadas alternativo, correspondiente a la base vectorial

$$\underline{\hat{\varphi}}\,,\,\underline{\hat{\lambda}}$$

, que en nuestro caso corresponderá a las coordenadas latitud y longitud de un punto, aunque el desarrollo es válido para cualquier tipo de coordenadas.

Cambio de base

Consideramos un vector de la siguiente forma:

$$\underline{\hat{a}} = a\,\underline{\hat{\varphi}} + b\,\underline{\hat{\lambda}}$$
$$\underline{\hat{a}} = a'\,\underline{\hat{u}} + b'\,\underline{\hat{v}}$$

El vector puede ser la imagen de haber aplicado una transformación $T : R3 \to R2$ a otro un vector de la siguiente forma:

$$\underline{a} = a\,\underline{\varphi} + b\,\underline{\lambda}$$

Notemos que la transformación no modifica las componentes del vector sino la base y el espacio vectorial (por lo cual constituye una aplicación).

Si son conocidas las componentes a, b y desconocidas las componentes a', b', correspondientes al vector expresado en base canónica, se puede construir la matriz de cambio de base de la siguiente manera:

$$C_B = \begin{bmatrix} \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{u}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{v}} \\ \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{u}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{v}} \end{bmatrix}$$

y utilizarla para hallar las componentes deseadas como:

$$\begin{bmatrix} a' & b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{u}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{v}} \\ \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{u}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{v}} \end{bmatrix}$$

Para ver el por qué de la forma de la matriz cambio de base, basta ver que el producto entre los vectores de ambas bases resulta en la proyección ortogonal de unos sobre los otros.

Luego, sabiendo que el producto interno sobre la base cartesiana queda definido como

$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$$

podemos reescribir este producto en función de las componentes a y b como

$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} C_B C_B^T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Donde podemos observar que resulta

$$C_B C_B^T = \begin{bmatrix} \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{u}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{v}} \\ \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{u}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{u}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{v}} \\ \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{u}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{v}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{\lambda}} \\ \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} & \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{\lambda}} \end{bmatrix}$$

Esto es, la métrica, que como vimos anteriormente, nos sirve para definir el producto interno entre vectores expresados en una base no cartesiana.

Si utilizamos la notación de Einstein, y nombramos a las componentes del vector como a_i, a los vectores base $\hat{\theta}_i$ y a las componentes de la métrica como $\hat{g}_{ij}$, donde tanto i como j pueden tomar los valores φ, λ, podemos reescribir el producto como:

$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = a_i \, \hat{\theta}_i \cdot \hat{\theta}_j \, a_j$$
$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = a_i \, \hat{g}_{ij} \, a_j$$

Descomposición de la métrica.

Al considerar la matriz de cambio de base C_B anteriormente, trabajamos considerandola un cambio entre bases de R2. Sin embargo, dado que, como ya dijimos, las componentes del vector $\underline{a}$ en base $\theta_{\varphi\lambda}$ son iguales que las del vector $\underline{\hat{a}}$ en base $\hat{\theta}_{\varphi\lambda}$. De esta manera, podemos decir que la matriz C_B describe la transformación $T : \underline{a} \to \underline{\hat{a}}$ en un punto determinado.

Esta transformación de la base θ a la base canonica del plano $\hat{e}$ puede descomponerse en varios pasos de la manera que sigue.

1. Un cambio de escala para llevar, en R3 el vector a una base vectorial normal $\theta*$.
2. Una rotación para llevar el vecotor, aún en R3, a una vase vectorial normal, orientada con las direcciónes fundamentales de la transformación $\theta*'$.
3. Una escala en cada una de las direcciónes fundamentales, para llevar el vector a una base normal del plano, orientada con las direcciones fundamentales $\hat{e'}$
4. Una rotación para llevar el vector en R2 a la base canónica e.

Las sucesivas matrices que definen estos cambios de base las podemos expresar como

$$N = \begin{bmatrix} \|\underline{\varphi}\| & 0 \\ 0 & \|\underline{\lambda}\| \end{bmatrix}$$

$$R_{\varphi\lambda} = \begin{bmatrix} cos(A) & -sen(A) \\ sen(A) & cos(A) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} ml_1 & 0 \\ 0 & ml_2 \end{bmatrix}$$

$$R_{\hat{u}\hat{v}} = \begin{bmatrix} cos(\hat{A}) & -sen(\hat{A}) \\ sen(\hat{A}) & cos(\hat{A}) \end{bmatrix}$$

De este modo, la transformación aplicando la matriz a derecha o a izquierda queda expresada del siguiente modo,

$$\begin{bmatrix} a' & b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot N \cdot R_{\varphi\lambda} \cdot D \cdot R_{\hat{u}\hat{v}}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = R^T_{\hat{u}\hat{v}} \cdot D^T \cdot R^T_{\varphi\lambda} \cdot N^T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = R^T_{\hat{u}\hat{v}} \cdot D \cdot R^T_{\varphi\lambda} \cdot N \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Luego, Volviendo al cálculo de la norma, que recordamos:

$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$$

y que es equivalente, utilizando la métrica a,

$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = a_i \, \hat{g}_{ij} \, a_j$$

Puede escribirse ahora como

$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot N \cdot R_{\varphi\lambda} \cdot D \cdot R_{\hat{u}\hat{v}} \cdot R^T_{\hat{u}\hat{v}} \cdot D \cdot R^T_{\varphi\lambda} \cdot N \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Y, dado que la Rotación es una matriz ortogonal, es decir que su inversa y su transpuesta son idénticas,

$$\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot N \cdot R_{\varphi\lambda} \cdot D \cdot D \cdot R^T_{\varphi\lambda} \cdot N \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Desarrollando las matrices explicitamente, y notando que $D \cdot D$ equivale a elevar al cuadrado los elementos de D, por ser esta una matriz diagonal, podemos escribir la matriz metrica en funcion de las demás cómo:

$$\begin{bmatrix} \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{\lambda}} \\ \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} & \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\underline{\varphi}\| & 0 \\ 0 & \|\underline{\lambda}\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(A) & -sen(A) \\ sen(A) & cos(A) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ml_1^2 & 0 \\ 0 & ml_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(A) & -sen(A) \\ sen(A) & cos(A) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \|\underline{\varphi}\| & 0 \\ 0 & \|\underline{\lambda}\| \end{bmatrix}$$

Para mayor comodidad en adelante utilizamos la notación que sigue,

$$\begin{bmatrix} \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{\lambda}} \\ \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} & \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

Luego, podemos escribir,

$$\begin{bmatrix} \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} & \underline{\hat{\varphi}} \cdot \underline{\hat{\lambda}} \\ \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{\varphi}} & \underline{\hat{\lambda}} \cdot \underline{\hat{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\underline{\varphi}\| & 0 \\ 0 & \|\underline{\lambda}\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} & \frac{F}{\|\underline{\varphi}\|\|\underline{\lambda}\|} \\ \frac{F}{\|\underline{\varphi}\|\|\underline{\lambda}\|} & \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\underline{\varphi}\| & 0 \\ 0 & \|\underline{\lambda}\| \end{bmatrix}$$

Donde

$$M' = \begin{bmatrix} \frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} & \frac{F}{\|\underline{\varphi}\|\|\underline{\lambda}\|} \\ \frac{F}{\|\underline{\varphi}\|\|\underline{\lambda}\|} & \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \end{bmatrix} = R_{\varphi\lambda} \cdot D^2 \cdot R_{\varphi\lambda}^T$$

Es una matriz definida positiva, de modo que su factorización en RDR^T puede hallarse utilizando la descomposición en autovalores y autovectores.

El procedimiento detallado de esta descomposición es:

$$W = M' - \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$det(W) = 0$$

$$0 = \left(\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} - \beta \right) \cdot \left(\frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} - \beta \right) - \left(\frac{F^2}{\|\underline{\varphi}\|^2 \|\underline{\lambda}\|^2} \right)$$

$$0 = \beta^2 + \beta \cdot \left(-\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} - \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \right) + \left(\frac{EG - F}{\|\underline{\varphi}\|^2 \|\underline{\lambda}\|^2} \right)$$

Las soluciones de esta ecuación resultan

$$\beta = \frac{\left(\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} + \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} + \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \right)^2 - 4 \frac{EG-F}{\|\underline{\varphi}\|^2 \|\underline{\lambda}\|^2}}}{2}$$

, ambas soluciones corresponden a los factores que aparecen en la matriz diagonal

$$ml_1{}^2 = \frac{\left(\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} + \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} + \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \right)^2 - 4 \frac{EG-F}{\|\underline{\varphi}\|^2 \|\underline{\lambda}\|^2}}}{2}$$

$$ml_2{}^2 = \frac{\left(\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} + \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} + \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \right)^2 - 4 \frac{EG-F}{\|\underline{\varphi}\|^2 \|\underline{\lambda}\|^2}}}{2}$$

Estos factores, recapitulamos, son los cuadrados de las escalas lineales aplicadas para pasar de una base normal de R3 a una base normal de R2, ambas alineadas a las direcciónes fundamentales de la transformación.

Estas soluciones son iguales si sucede que:

$$0 = \left(\frac{E}{\|\underline{\varphi}\|^2} + \frac{G}{\|\underline{\lambda}\|^2} \right)^2 - 4 \frac{EG - F}{\|\underline{\varphi}\|^2 \|\underline{\lambda}\|^2}$$

lo cual se cumple a su vez si ambos términos dentro del cuadrado son iguaes, y $F = 0$ lo que indicaría que la proyección evaluada es conforme, coincidiendo con la expresión que hallamos anteriormente por otro método.

Finalmente, la matriz R, que puede obtenerse aplicando el teoréma de Cayley-Hamilton 1 2, contiene en sus columnas los autovectores de la matriz analizada, que corresponden a las orientaciones de máxima y mínima deformación, y a partir de ellos puede hallarse el azimut de las direcciones fundamentales.