

Proyección Gauss-Krüger

Introducción

Cuando se trata de realizar una representación de un área extensa de la tierra con una precisión alta que permita la correcta medición de magnitudes sobre la misma, como es el caso de la carta topográfica, se plantea un problema de características muy particulares.

Se necesitará una representación que tenga una deformación moderada y que para un área de trabajo acotada la misma sea homogénea.

Por esto, la primer condición que surge es la de utilizar una proyección conforme. Sin embargo, una representación de la tierra en una sola proyección conforme lleva a grandes deformaciones en los extremos de la representación.

Para salvar este problema, se puede aprovechar la simetría de rotación que presenta el elipsoide, y desarrollar un sistema que explote esa simetría de forma que, con solo variar un parámetro sea adaptable a cualquier zona de trabajo. El sistema adecuado para esto es el que parte de un meridiano arbitrario, y representándolo recto y en escala real, construye la proyección conforme a partir de él. Considerando que, iniciando desde cualquier meridiano la forma geométrica del elipsoide es idéntica, el único cambio en el calculo que se efectuará para elegir este « Meridiano Central » será aplicar una constante a las longitudes antes de ingresar a las fórmulas de cálculo.

Esta cualidad de partir de un meridiano recto y a escala real hace que la proyección sea al análogo rotado de la proyección de Mercator, de forma tal que la tangencia no es ahora el ecuador sino un meridiano. Se ve entonces que las deformaciones dependen solamente del apartamiento del meridiano central y son simétricas respecto del mismo.

La teoría de la proyección conforme del elipsoide terrestre es establecida por primera vez por el matemático Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855) entre los años 1816 y 1827.

En el año 1821, Gauss aplicó su proyección en trabajos geodésicos en el estado de Hannover.

Cuando se trata de representar territorios muy extendidos en el sentido de las longitudes, se presentarán deformaciones importantes en los puntos más alejados del meridiano central, que podrían exceder una tolerancia prefijada.

Para resolver este problema, se divide el territorio en husos o fajas meridianas de ancho tal que las mayores deformaciones no sobrepasen un valor establecido. Los husos son sistemas de coordenadas independientes; para lograr la vinculación de ellos se establecen zonas de superposición en los límites de los mismos, donde se calculan las coordenadas en ambos sistemas.

Dada la cualidad específica del elipsoide, de que las trayectorias geodésicas perpendiculares a un meridiano no son una construcción geométrica trivial, se recurre para el desarrollo de la proyección a un método aproximado, partiendo de las restricciones fijadas.

1. El meridiano central es recto y tiene magnitud real, es decir:

$$y(\lambda = 0, \varphi) = 0$$

$$x(\lambda = 0, \varphi) = \int_{-\pi/2}^{\varphi} d\varphi \sqrt{\underline{\varphi} \cdot \underline{\varphi}}$$

2. La proyección debe ser conforme.

Partiendo del supuesto — que es demostrable — de que la proyección es única, se puede diseñar este camino para encontrar sus ecuaciones sin tener que tratar con líneas geodésicas no triviales:

- Construir una transformación conforme de todo el espacio geográfico al plano que sí trabaje en direcciones perpendiculares que representen líneas geodésicas triviales. La llamaremos T_0
- Construir una familia de proyecciones a partir de una familia de transformaciones G_i conformes que se aplican a T_0 .
- Restringir la forma de G_i hasta obtener G_0 , la transformación que cumple con la condición 1.

La solución del primer paso puede hacerse trabajando en la dirección de paralelos y meridianos.

Para el paso que sigue puede utilizarse como G_i las funciones continuas e infinito-derivables de variable compleja, que son conformes en todos los casos.

Se puede hallar una aproximación a G_0 partiendo de un polinomio de Taylor de una G_i genérica sobre el meridiano central, poniendo condiciones a sus derivadas para que cumplan 1 y 2.

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
Cumple Cauchy-Riemann



f mantiene la conformidad

$g(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
Es derivable



Cumple
Cauchy-Riemann



es aproximable
por Taylor

Proyección conforme
del elipsoide al plano
con meridianos y
paralelos rectos, en
unidades de radianes

\mathbb{R}^3



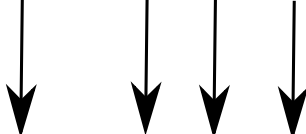
T_0

\mathbb{R}^2



$G_0 \ G_1 \ G_2 \ \cdots \ G_i$

Familia de las
funciones de
variable
compleja
aproximables por
taylor



Selección de
aquella que
cumpla las
condiciones de
Gauss Krugger.



Proyección de
Gauss Krugger



$T_0 \circ G_0$

Apartado: Las condiciones de Cauchy Riemman y conservar los ángulos.

Supongamos una $f(z)\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, si expresamos la matriz jacobiana en un punto z_0 como:

$$[df(z_0)] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , \quad ad - bc > 0 .$$

Veremos que, si $df(z_0)$ conserva los ángulos, las imágenes de $(1, 0)$ y $(0, 1)$ deben ser ortogonales, es decir que

$$ab + cd = 0.$$

Luego, las imágenes de $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ deben serlo también, implicando que

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Veremos entonces que la matriz $[df(z_0)]$ tiene la forma

$$[df(z_0)] = \begin{bmatrix} \rho \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \rho \sin \phi & \rho \cos \phi \end{bmatrix} , \quad \rho > 0$$

Para algún ángulo ϕ , siendo el múltiplo de una matriz ortogonal (de determinante $+1$).

Podremos ver que existen los números A y B de manera que

$$[df(z_0)] = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} , \quad A^2 + B^2 > 0 .$$

Interpretando esta situación como una operación en números complejos, vemos que:

$$f(z) - f(z_0) = (A + iB)(z - z_0) + o(z - z_0) \quad (z \rightarrow z_0) ,$$

que es equivalente a decir:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + iB .$$

que nos lleva a decir que las condiciones de Cauchy Riemman garantizan la conformidad de una función que va de \mathbb{R}^2 sobre si mismo, y que cualquier función de variable compleja que sea infinito-derivable respecto de z , donde se interpreta a \mathbb{R}^2 como el plano complejo \mathbb{C} , cumple con dichas condiciones.

Desarrollo

Partiendo de la parametrización conocida del elipsoide, φ, λ , se busca T_0 de forma que las nuevas coordenadas q, l resulten en una aplicación conforme del elipsoide sobre el plano. Una forma de garantizar esto es garantizar que $\hat{\underline{q}} \cdot \hat{\underline{l}} = 0$, $\underline{q} \cdot \underline{l} = 0$ y que $\underline{q} \cdot \underline{q} = \underline{l} \cdot \underline{l}$

Luego, se ve que $q = f(\varphi)$, $l = g(\lambda)$ garantizan lo primero, luego se puede fijar $l = \lambda$ y plantear:

$$\underline{q} \cdot \underline{q} = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \right| \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \underline{l} \cdot \underline{l} = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \lambda} \right|$$

De manera que, despejando, y sabiendo que $\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} \right| = M$ y $\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \lambda} \right| = N \cos(\varphi)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{N \cos(\varphi)}{M}$$

Y como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1 \rightarrow \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial q}^{-1}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{M}{N \cos(\varphi)}$$

$$\int d\varphi \frac{\partial q}{\partial \varphi} = \int d\varphi \frac{M}{N \cos(\varphi)}$$

$$q = \int d\varphi \frac{M}{N \cos(\varphi)} \quad (1)$$

Integrando 1 obtendremos, para un punto:

$$q = \ln \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \frac{e}{2} \cdot \ln \left(\frac{1 - e \cdot \operatorname{sen}(\varphi)}{1 + e \cdot \operatorname{sen}(\varphi)} \right)$$

En el caso de la esfera $M = N$, $e=1$, luego, el segundo término desaparece, siendo que $\ln(1) = 0$

Luego, la función de transformación que buscamos se define como $f : z \in \mathbb{C} \rightarrow u \in \mathbb{C}$

Donde z y u se relacionan con las parametrizaciones elegidas de los espacios de origen y destino siendo

$$z = q + il \quad u = X + iY, \quad \text{y} \quad X + iY = f(q + il) \quad (2)$$

Si se forma una hipotética variable compleja $\varphi + i\lambda$ podemos decir que el módulo de los vectores que surgen de avanzar en cada dirección del plano complejo, por ejemplo $\underline{\lambda} = \lambda + i0$ y $\underline{\varphi} = 0 + i\varphi$, son escalas lineales de una transformación entre \mathbb{R}^3 , y el plano complejo.

En el elipsoide podemos ver que esto corresponde a:

$$\|\underline{\varphi}\| = M \quad \|\underline{\lambda}\| = N \cdot \cos(\varphi) \quad , \text{y en la esfera:} \quad \|\underline{\varphi}\| = R \quad \|\underline{\lambda}\| = R \cdot \cos(\varphi) \cdot$$

Por lo tanto el arco de paralelo que recorremos a iguales intervalos de longitud varia de acuerdo con el coseno de la latitud. Como ejemplo, $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 1''$ en el ecuador y a 60 de latitud le corresponden los siguientes arcos de meridiano y paralelo:

$$\begin{aligned} S_p(\varphi) &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+1''} \|\underline{\lambda}\|(\varphi) d\lambda & S_m &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+1''} \|\underline{\varphi}\| d\varphi \\ S_m(0^\circ) &= 30m & S_p(0^\circ) &= 30m \\ S_m(60^\circ) &= 30m & S_p(50^\circ) &= 15m \end{aligned}$$

En el elipsoide, la relación entre estas escalas es:

$$\frac{\|\underline{\varphi}\|}{\|\underline{\lambda}\|} = \frac{M}{N \cdot \cos(\varphi)} \quad \text{y en la esfera} \quad \frac{\|\underline{\varphi}\|}{\|\underline{\lambda}\|} = \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

Si construyéramos una nueva variable $\lambda + q(\varphi)i$ de manera que las escalas lineales en el plano complejo sean homogéneas, podríamos por ejemplo pedir que para un $\Delta q = \Delta\lambda = 1''$

$$S_p(\varphi) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+1''} \|\underline{\lambda}\|(\varphi) d\lambda = S'_m(\varphi) = \int_{q_0}^{q_0+1''} \|\underline{q}\| dq$$

Si, para formar \underline{q} , aplicamos a $\underline{\varphi}$ la relación entre escalas hallada anteriormente, en la latitud de 60 se tiene que:

$$S_p \sim 1'' \cdot \|\underline{\lambda}\| = 1'' \cdot R \cdot \cos(\varphi) = 15m$$

$$S'_m \sim 1'' \cdot \|\underline{q}\| = \cos(\varphi) \cdot \|\underline{\varphi}\| = 1'' \cdot \cos(\varphi) \cdot R = 15m$$

Por este motivo a la variable q que da origen a este vector \underline{q} se la denomina latitud isométrica — *de igual medida* —. Aunque vale la pena aclarar que la denominación de **latitud** para esta variable es insidiosa, porque no tiene ninguna interpretación geométrica en la esfera sino que se construye trabajando sobre un plano, en este caso, el plano complejo.

Tal como se mencionara en la introducción, una de las principales cualidades

de esta proyección es la posibilidad de ajustar la línea de tangencia a la zona de trabajo. Es posible representar el elipsoide entero en esta forma en un espacio finito, gracias a que las líneas geodésicas perpendiculares a un meridiano no convergen a un punto sino a una línea. Sin embargo, al hacer esto se presentan grandes dilataciones lineales a en los puntos que más se apartan del meridiano central.

Para adaptar el origen de la proyección a la zona que se pretende representar se efectúa un simple cambio de variable sumando a λ una constante, de modo que las longitudes se cuentan a partir del meridiano central, positiva al este y negativa al oeste del mismo, de esta manera:

$$l = \lambda - \lambda_{M.C.}$$

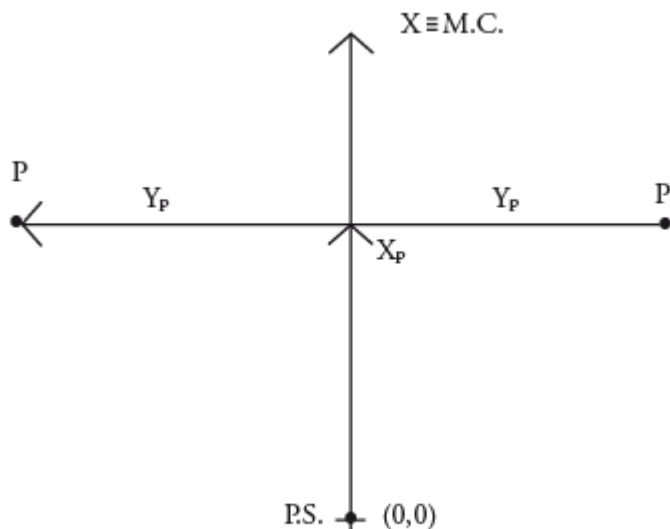
Quedan así definidos los parámetros q y l , que ubican a cualquier punto en el espacio de origen de la proyección (el elipsoide), y X e Y , que son las coordenadas planas de la representación de ese punto en el plano de la proyección.

Condición sobre el meridiano central

Para que esta proyección esté completamente determinada, se impone una condición que exige que los puntos del meridiano central sean representados sin deformación lineal.

Además la imagen rectificadora del meridiano central se hace coincidente al eje de las X de la representación y para el hemisferio sur el origen de coordenadas $(0,0)$ se encuentra en el polo sur.

La condición de que en el meridiano central no se deformen las magnitudes lineales es la condición de tangencia del cilindro a lo largo de tal meridiano.



- Fig. X.3 -

Se ve entonces que los puntos situados sobre el meridiano central tienen coordenadas:

$$l = 0$$

$$Y = 0$$

sobre el elipsoide y la carta, respectivamente.

La función 2 para dichos puntos se transforma en:

$$X = f(q)$$

Los puntos del meridiano central están representados por puntos en una recta, eje de las X, de tal forma que el mismo es una línea estándar.

Se sucede entonces que la función f en el meridiano central no es más que la expresión del arco de meridiano del polo sur al punto considerado.

La función que expresa tal magnitud es:

$$X = S = \int_{-\pi/2}^{\varphi} M \cdot d\varphi \quad (3)$$

y siendo que q es una función solo de φ ,

$$S = f(q)$$

La función f queda completamente determinada con estas condiciones, aunque aún es desconocida.

Hallar f a partir de la serie de Taylor

Siendo que el principal uso de la proyección es en una zona acotada tiene sentido hallar una aproximación a la misma con tanta precisión como necesitemos a partir del desarrollo en serie de Taylor.

Para ello, tenemos en cuenta que $\frac{d^n f}{dz^n} = \frac{d^n S}{dq^n}$ por la condición de conformidad, que restringe la derivada direccional de f a que sea independiente de la dirección elegida, y por ende la derivada compleja es igual a la derivada en la dirección de q .

$$f^* = \sum \frac{d^n f}{dz^n} \frac{(z - q)^n}{n!} = \sum \frac{d^n S}{dq^n} \frac{(il)^n}{n!} \quad (4)$$

Se obtiene por lo tanto:

$$X + iY = S + \frac{dS}{dq} \cdot (il) + \frac{d^2 S}{dq^2} \cdot \frac{(il)^2}{2!} + \frac{d^3 S}{dq^3} \cdot \frac{(il)^3}{3!} + \dots$$

Los términos del desarrollo en serie pares son reales porque:

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^6 &= i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$

De este modo, los términos de derivadas pares corresponden a las X mientras que los términos de derivadas impares son imaginarios puros porque:

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\ i^5 &= i^3 \cdot i^2 = (-i) \cdot (-1) = i \end{aligned}$$

y en consecuencia corresponden a las Y. Es posible entonces separar las variables reales e imaginarias:

$$X = S - \frac{d^2 S}{dq^2} \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{d^4 S}{dq^4} \cdot \frac{l^4}{24} - \frac{d^6 S}{dq^6} \cdot \frac{l^6}{720} + \dots \quad (5)$$

$$Y = \frac{dS}{dq} \cdot l - \frac{d^3 S}{dq^3} \cdot \frac{l^3}{6} + \frac{d^5 S}{dq^5} \cdot \frac{l^5}{120} - \frac{d^7 S}{dq^7} \cdot \frac{l^7}{5040} + \dots \quad (6)$$

Se calculará el primer término de la serie:

$$\frac{dS}{dq} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq}$$

$$dS = M \cdot d\varphi$$

Donde de 3 obtenemos $\frac{dS}{d\varphi} = M$, y de 1 $\frac{d\varphi}{dq} = \frac{N \cdot \cos[\varphi]}{M}$

$$\text{Por lo tanto: } \frac{dS}{dq} = M \cdot \frac{N \cdot \cos(\varphi)}{M}$$

$$F^I = \frac{dS}{dq} = N \cdot \cos(\varphi)$$

Para hallar las sucesivas derivadas de S respecto de q se deriva aplicando la regla de la cadena, teniendo en cuenta que $q(\varphi)$ es conocida, y que $S(q)$ también, y que $\frac{d\varphi}{dq} = \frac{dq}{d\varphi}^{-1}$

Llamando F^a a las sucesivas derivadas, donde a es un numeral romano:

$$F^{II} = \frac{d^2S}{dq^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dS}{dq} \right) \frac{d\varphi}{dq}, \quad (7)$$

donde

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dS}{dq} \right) = \frac{d}{d\varphi} [N \cos(\varphi)] = \frac{dN}{d\varphi} \cdot \cos(\varphi) - N \cdot \sin(\varphi), \quad (8)$$

y

$$N = a \cdot [1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)]^{-1/2}$$

Luego, teniendo en cuenta que:

$$\frac{dN}{d\varphi} = a \cdot [1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)]^{-3/2} \cdot e^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) = \frac{N \cdot e^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{1 - e^2 \cdot \sin^2(\varphi)}$$

Reemplazamos en 8, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dS}{dq} \right) &= \left[\frac{N \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)} \right] \cdot \cos(\varphi) - N \cdot \text{sen}(\varphi) \\
&= \frac{N \cdot e^2 \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) - N \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot [1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)]}{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)} \\
&= \frac{[-N \cdot \text{sen}(\varphi)] \cdot [-e^2 \cdot \cos^2(\varphi) + (1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi))]}{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)} \\
&= \frac{[-N \cdot \text{sen}(\varphi)] \cdot (1 - e^2)}{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)} \\
&= \frac{(-a) \cdot (1 - e^2) \cdot \text{sen}(\varphi)}{[1 - e^2 \cdot \text{sen}^2(\varphi)]^{-3/2}} \\
\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dS}{dq} \right) &= -M \cdot \text{sen}(\varphi)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en 7:

$$\begin{aligned}
F^{II} &= -M \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{N \cdot \cos(\varphi)}{M} \\
F^{II} &= (-N) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \cos(\varphi)
\end{aligned} \tag{9}$$

En las deducciones de las derivadas restantes se usan las siguientes abreviaturas auxiliares:

$$n^2 = e'^2 \cdot \cos^2(\varphi) \tag{10}$$

$$t = tg(\varphi) \tag{11}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

Por comodidad reemplazaremos estas abreviaturas en 9:

$$\begin{aligned}
F^{II} &= (-N) \cdot \cos(\varphi) \cdot \text{sen}(\varphi) \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\
&= (-N) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot tg(\varphi) \\
&= (-N) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot t
\end{aligned} \tag{14}$$

También $\frac{d\varphi}{dq}$ se expresa en función de n, t y e' como

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi}{dq} &= \frac{N}{M} \cdot \cos(\varphi) \\
 &= \frac{a \cdot [1 - e'^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)]^{3/2} \cdot \cos(\varphi)}{[1 - e'^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)]^{1/2} \cdot a \cdot (1 - e'^2)} \\
 &= \frac{[1 - e'^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)]}{(1 - e'^2)} \cdot \cos(\varphi)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Teniendo en cuenta que:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi}{dq} &= \left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2} - \frac{e^2 \cdot \cos^2(\varphi)}{1 - e^2} \right) \cdot \cos(\varphi) \\
 &= [1 + e^2 \cdot \cos^2(\varphi)] \cdot \cos(\varphi)
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{d\varphi}{dq} = [1 + n^2] \cdot \cos(\varphi)$$

Para hallar la tercera derivada se hace:

$$\begin{aligned}
 \frac{F^{II}}{F^I} &= \frac{(-N) \cdot \cos(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)}{N \cdot \cos(\varphi)} \\
 &= -\operatorname{sen}(\varphi)
 \end{aligned}$$

Y se derivan ambos miembros respecto de "q":

$$\begin{aligned}
 \frac{F^{III} \cdot F^I - F^{II} \cdot F^{II}}{F^{I^2}} &= \frac{\partial - \operatorname{sen}(\varphi)}{\partial q} \\
 \frac{F^{III}}{F^I} - \frac{F^{II^2}}{F^{I^2}} &= -\cos(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dq} \\
 \frac{F^{III}}{F^I} - \operatorname{sen}^2(\varphi) &= -\cos^2(\varphi) \cdot (1 + n^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{III} &= [-\cos^2(\varphi) \cdot (1 + n^2) + \operatorname{sen}^2(\varphi)] \cdot F^I \\
F^{III} &= [-\cos^2(\varphi) \cdot (1 + n^2) + \cos^2(\varphi)t^2] \cdot N \cdot \cos(\varphi) \\
F^{III} &= [-\cos^3(\varphi)] \cdot (1 - t^2 + n^2) \cdot N
\end{aligned} \tag{17}$$

De manera similar se encuentran las siguientes derivadas:

$$F^{IV} = \cos^4(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot n^2 + 4 \cdot n^4) \tag{18}$$

$$F^V = \cos^5(\varphi) \cdot N \cdot (5 - 18 \cdot t^2 + t^4 + 14 \cdot n^2 - 58 \cdot t^2 \cdot n^2 + 13 \cdot n^4 - 64 \cdot t^2 \cdot n^4 + 4 \cdot n^6 - 24 \cdot t^2 \cdot n^6) \tag{19}$$

$$F^{VI} = \cos^6(\varphi) \cdot N \cdot t \cdot (61 - 58 \cdot t^2 + t^4 + 270 \cdot n^2 - 330 \cdot t^2 \cdot n^2 + 445 \cdot n^4 - 680 \cdot t^2 \cdot n^4 + 44 \cdot n^6 - 600 \cdot t^2 \cdot n^6 + 88 \cdot n^8 - 192 \cdot t^2 \cdot n^8) \tag{20}$$

Reemplazando las expresiones de las derivadas 9 a 18 en los desarrollos en serie de 5 dará las coordenadas de los puntos de la carta con las abscisas contadas a partir del polo sur y las ordenadas a partir del meridiano central de la faja.

Las coordenadas X e Y en la proyección Gauss-Krüger resultan entonces:

$$\begin{aligned}
X = S + \frac{l^2 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot N \cdot t}{2} + \frac{l^4 \cdot \cos^4(\varphi) \cdot N \cdot t}{24} \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot n^2 + 4 \cdot n^4) + \\
+ \frac{l^6 \cdot \cos^6(\varphi) \cdot N \cdot t}{720} \cdot (61 - 58 \cdot t^2 + t^4 + 270 \cdot n^2 - 330 \cdot t^2 \cdot n^2 + \\
+ 445 \cdot n^4 - 680 \cdot t^2 \cdot n^4 + 44 \cdot n^6 - 600 \cdot t^2 \cdot n^6 + \\
88 \cdot n^8 - 192 \cdot t^2 \cdot n^8)
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
Y = l \cdot \cos(\varphi) \cdot N + \frac{l^3 \cdot \cos^3(\varphi) \cdot N}{6} \cdot (1 - t^2 + n^2) + \\
+ \frac{l^5 \cdot \cos^5(\varphi) \cdot N}{120} \cdot (5 - 18 \cdot t^2 + t^4 + 14 \cdot n^2 - 58 \cdot t^2 \cdot n^2 + \\
+ 13 \cdot n^4 - 64 \cdot t^2 \cdot n^4 + 4 \cdot n^6 - 24 \cdot t^2 \cdot n^6)
\end{aligned} \tag{22}$$

Estas últimas expresiones dan la representación conforme de una parte de la superficie terrestre sobre un plano, o bien para toda la extensión de la tierra. Se elige un meridiano central a partir del cual se cuentan las cantidades "l", positivas al Este y negativas al Oeste.

Las fórmulas 21 y 22 dan valores negativos de Y a los puntos situados al Oeste del meridiano central, esto fuerza la necesidad de adoptar alguna convención para trabajar con los signos de las ordenadas en la carta.

El sistema de fajas meridianas utilizado en Argentina están limitadas en 3° de longitud, 1°30' a cada lado del meridiano central. Se utilizan fajas para las siguientes longitudes de origen respecto de Greenwich: -72°, -69°, -66°, -63°, -60°, -57°, -54°.

Con el fin de evitar coordenadas Y negativas, se tomó la convención de aumentar en 500.000 a todas las Y, de modo que resultan menores que 500.000 al Oeste del meridiano central, pero positivas y superiores a 500.000 al Este. Este valor no es superado dentro de una misma faja.

Como a un determinado par de coordenadas le debe corresponder un solo punto dentro del sistema, y para evitar el equívoco entre coordenadas en las distintas fajas, se aumentan las ordenadas Y en números enteros de millones según la faja de que se trata.

Así, se asignan a los siete meridianos centrales los siguientes números de faja, que corresponden al número entero de millones que se antepone a las Y, resultando las siguientes coordenadas para dichos meridianos:

Meridiano	N de faja	Y sobre MC
-72	1	1.500.000
-69	2	2.500.000
-66	3	3.500.000
-63	4	4.500.000
-60	5	5.500.000
-57	6	6.500.000
-54	7	7.500.000

Llamando Y' al valor obtenido de la expresión y 22, con las modificaciones descriptas, el valor de la coordenada Y en el sistema Gauss-Krüger aplicado a la Argentina se transforma en:

$$Y = N \cdot 10^6 + 500.000 + Y'$$

donde "N" es el número de faja.

Las expresiones 21 y 22 corresponden al orden de precisión de los trabajos fundamentales; en trabajos de menor precisión se podrá prescindir de los términos "n" con potencias superiores a 2, considerando que $n < 0.08$, y aún aquellos con t^4 o $t^2 \cdot n^2$, considerando que $t < 0.6$.

La grilla en la carta Conocidas las coordenadas geográficas de los puntos, se calculan las coordenadas Gauss-Krüger de los mismos dentro de la faja que corresponda.

Por razones prácticas, se extienden las coordenadas hasta 2° a cada lado del meridiano central. De esa manera los puntos situados cerca de los bordes de faja tienen coordenadas en los dos sistemas vecinos.

De esta manera cuando se realiza algún levantamiento que se extiende en una faja vecina no necesita hacer uso de coordenadas en dos sistemas distintos.

En las cartas topográficas se ha trazado una cuadrícula de coordenadas Gauss-Krüger en el borde de cada hoja. Frente a las líneas del cuadrículado se han impreso las coordenadas en kilómetros permitiendo determinar las coordenadas de cualquier punto que interese.

Se deberá medir la distancia en X e Y que separa al punto considerado de un cruce de cuadrícula próximo, tendiendo en cuenta la escala de la carta, y se agregan esos valores a las coordenadas de cruce elegido. Para la determinación de dichas distancias figuran en la información marginal de la carta una escala de coordenadas.

La operación recíproca, es decir dado un par de coordenadas ubicar dicho

Transformación inversa.

Se debe resolver el problema inverso del que se vio en el punto anterior, planteando en forma general:

$$q + il = F(x + iy)$$

La relación anteriormente utilizada

$$X = f(q)$$

puede aprovecharse nuevamente, para desarrollar en serie de Taylor alrededor de $Y = 0$.

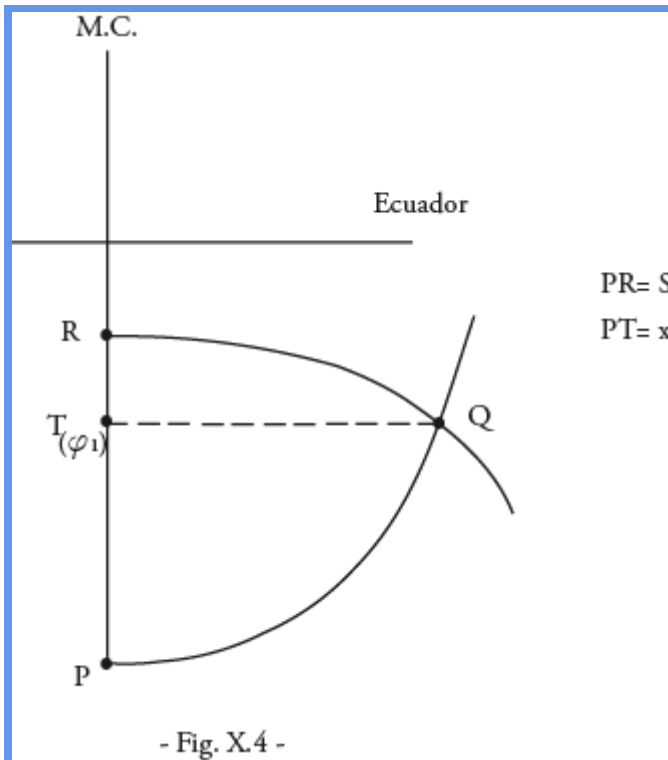
Partiendo de la expresión

$$q + il = F(x) + F^I(x)(iy) - F^{II}(x)\frac{y^2}{2} + F^{III}(x)\frac{(iy)^3}{3!} + F^{IV}(x)\frac{y^4}{4!},$$

Que representa la serie completa, pueden separarse los términos reales e imaginarios.

$$\begin{aligned}
 q &= F(x) & -F^{II}(x) \frac{y^2}{2} + F^{IV}(x) \frac{y^2}{24} - \dots \\
 l &= F^I(x) y & -F^{III}(x) \frac{y^3}{6} + F^V(x) \frac{y^5}{120} - \dots
 \end{aligned} \tag{23}$$

De la misma forma que se realizó en la proyección, para que esta serie aproxime la función buscada se utilizan las condiciones impuestas a la transformación.



En la figura (X.4), S es el arco de meridiano del polo sur hasta la latitud del punto Q; X es la coordenada Gauss, distancia del polo sur al pie de la perpendicular desde Q al meridiano central, que se denomina T; a la latitud del punto T se la denomina φ_1 . Por lo tanto q_1 se calcula en función de φ_1 .

Sabiendo que si $Y = 0$, $l = 0$, y que por consecuencia

$$q_a = F(x), \forall a : x, 0$$

Luego, como punto de partida de la serie puede utilizarse el punto $X, 0$, para luego hallar la coordenada de X, Y

El valor de q_0 , colatitud de el punto auxiliar, puede ser obtenido en función de la coordenada X, en efecto del desarrollo en serie utilizado para resolver la

integral de 3, arco de meridiano del polo sur a una latitud cualquiera,

$$X = S = \alpha \cdot \varphi_1 + \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + \beta \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_1) + \gamma \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_1) + \delta \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_1) + \varepsilon \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_1) + \dots \quad (24)$$

Puede obtenerse φ_1 por aproximaciones sucesivas, partiendo del primer término,

$$X = \alpha \cdot \left(\varphi_{1,1} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\varphi_{1,1} = \frac{X}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$$

Y utilizando este primer valor de la latitud en 24 para obtener una segunda aproximación del valor de la latitud.

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \frac{1}{\alpha} \left(x - \alpha \cdot \frac{\pi}{2} - \beta \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_{1,1}) - \gamma \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_{1,1}) - \right. \\ &\quad \left. - \delta \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_{1,1}) - \varepsilon \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_{1,1}) \right) \\ &= \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_{1,1}) - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_{1,1}) - \\ &\quad - \frac{\delta}{\alpha} \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_{1,1}) - \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_{1,1}) \\ &= \varphi_{1,1} - \frac{1}{\alpha} \left[\beta \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_{1,1}) + \gamma \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_{1,1}) + \right. \\ &\quad \left. + \delta \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_{1,1}) + \varepsilon \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_{1,1}) \right] \\ \varphi_{1,3} &= \varphi_{1,1} - \left[\beta \cdot \text{sen}(2 \cdot \varphi_{1,2}) + \gamma \cdot \text{sen}(4 \cdot \varphi_{1,2}) + \delta \cdot \text{sen}(6 \cdot \varphi_{1,2}) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \cdot \text{sen}(8 \cdot \varphi_{1,2}) \right] \end{aligned}$$

Se sigue iterando hasta hallar la convergencia deseada.

Volviendo al desarrollo en serie, y considerando que

$$q = \int \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos(\varphi)},$$

y por lo tanto:

$$\varphi = f(q)$$

Desarrollando φ en serie a partir de q_1 obtenemos

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{d\varphi}{dq} (q - q_1) + \frac{d^2\varphi}{dq^2} (q - q_1)^2 + \dots$$

que reemplazando q por su desarrollo en serie a partir de x da

$$\varphi = \varphi_1 - \left[F^{II} (x) \frac{y^2}{2} - F^{IV} (x) \frac{y^4}{24} \right] \cdot \frac{d\varphi}{dq} \dots$$

Para encontrar las expresiones se hallan las derivadas:

$$F^I (x) = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{M}{N \cdot \cos (\varphi)}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{M}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{N \cdot \cos (\varphi)}$$

Como la expresión hallada para la derivada solo depende de φ , las siguientes derivadas pueden hallarse aplicando la regla de la cadena, por ejemplo

$$\frac{d^2q}{dx^2} = \frac{d \left(\frac{dq}{dx} \right)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}.$$

No nos explayaremos aquí sobre el cálculo de cada derivada, sin embargo presentamos las ecuaciones resultantes,

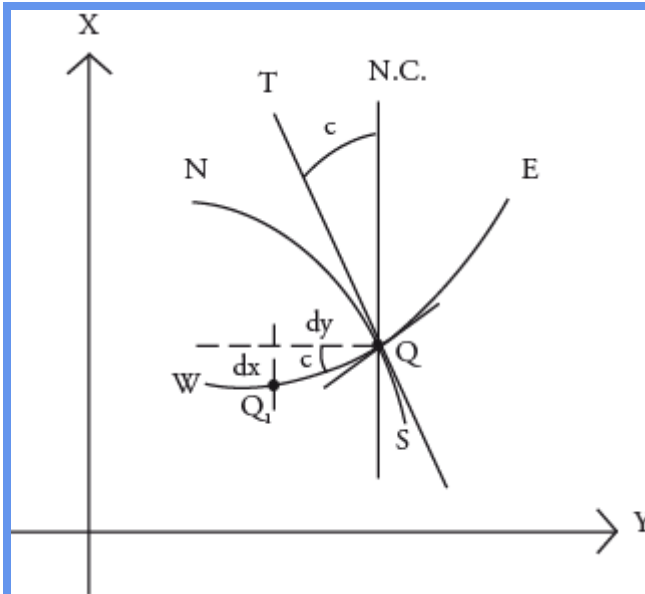
$$l = \frac{y}{N_1 \cdot \cos (\varphi_1)} \cdot \left[1 - \frac{y^2}{6 \cdot N_1^2} \cdot (1 + 2 \cdot t_1^2 + n_1^2) + \right. \\ \left. + \frac{y^4}{120 \cdot N_1^4} \cdot (5 + 28 \cdot t_1^2 + 24 \cdot t_1^4 + 6 \cdot n_1^2 + 8 \cdot n_1^2 \cdot t_1^2) \right] \quad (25)$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y^2}{2 \cdot N_1 \cdot M_1} \cdot t_1 \cdot \left[1 - \frac{y^2}{12 \cdot N_1^2} \cdot (5 + 3 \cdot t_1^2 + n_1^2 - 9 \cdot t_1^2 \cdot n_1^2) + \right. \\ \left. + \frac{y^4}{360 \cdot N_1^4} \cdot (61 + 90 \cdot t_1^2 + 45 \cdot t_1^4) \right] \quad (26)$$

Expresiones en las que el resultado se obtiene en radianes.

Convergencia de meridianos.

Pasamos ahora a considerar algunas magnitudes que son útiles de calcular sobre esta proyección para el uso de la cartografía oficial como base del trabajo topográfico.



Considerando la figura, NS representa la imagen del meridiano que pasa por Q, WE el paralelo que pasa por el mismo punto, NC la dirección

El ángulo "c" formado por $\hat{\varphi}$ y \hat{x} se denomina convergencia de meridianos plana.

Es simple de ver que, al ser la proyección conforme este ángulo puede también calcularse a partir de $\hat{\lambda}$ y \hat{y}

En un punto cualquiera, este ángulo c puede calcularse como

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(c) &= \frac{\hat{\lambda} \cdot \hat{x}}{\hat{\lambda} \cdot \hat{y}} \\ &= \frac{\partial x / \partial \lambda}{\partial y / \partial \lambda} \end{aligned} \quad (27)$$

Las derivadas se obtienen de diferenciar las expresiones de las coordenadas 21 y 22, obteniéndose como primera aproximación:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = l \cdot \cos^2(\varphi) \cdot N \cdot t$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} = N \cdot \cos(\varphi)$$

utilizando la longitud referida al meridiano central l en lugar de λ

La convergencia de meridianos, también como primera aproximación, será:

$$tg(c) = \frac{\partial x / \partial l}{\partial y / \partial l} = \frac{l \cdot \cos^2(\varphi) \cdot N \cdot t}{N \cdot \cos(\varphi)} = l \cdot \tan(\varphi)$$

$$tg(c) = l \cdot \tan(\varphi)$$

Si se consideran todos los términos de la serie se obtiene

$$tg(c) = l \cdot \tan(\varphi) - \frac{l^3}{3} \cdot \tan(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot (1 + t^2 + 3 \cdot n^2 +$$

$$+ 2n^4) + \frac{l^5}{15} \cdot \tan(\varphi) \cdot \cos^4(\varphi) \cdot (2 + 4 \cdot t + 2 \cdot t^4), \quad (28)$$

y, si consideramos los primeros términos del desarrollo en serie de c como función de $tg(c)$ alrededor de $tg(c)$, que es una muy buena aproximación para un c suficientemente chico,

$$c = tg(c) - \frac{l^3}{3} \cdot tg^3(c) - \frac{l^5}{5} \cdot tg^5(c),$$

que reemplazando en la expresión anterior da

$$c = l \cdot \tan(\varphi) + \frac{l^3}{3} \cdot \tan(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot (1 + 3 \cdot n^2 + 2n^4) + \frac{l^5}{15} \cdot \tan(\varphi) \cdot \cos^4(\varphi) \cdot (2 - t^2)$$

$$(29)$$

Si se desea la convergencia en función de las coordenadas planas, se reemplazan los valores de l por los términos primero o primero y segundo de 25, en el primero y los restantes términos de 29 respectivamente, y aproximando $\varphi = \varphi_1$, que en el peor de los casos nos trae un error de 1" en la convergencia.

Se obtiene:

$$c = \frac{y}{N_1} \cdot t_1 \cdot \left[1 - \frac{y^2}{3 \cdot N_1^2} \cdot (1 + t_1^2 - n_1^2 - 2 \cdot n_1^4) + \frac{y^4}{N_1^4} \cdot \frac{(2 + 5 \cdot t_1^2 + 3 \cdot t_1^4)}{15} \right]$$

Módulo de deformación.

Por tratarse de una proyección conforme, el módulo de deformación lineal o factor de escala varía de acuerdo a las coordenadas pero para un punto el módulo es el mismo en cualquier dirección.

Luego, partiendo de $\hat{\underline{\lambda}}$, podemos desarrollar

$$m^2 = \frac{\|\hat{\underline{\lambda}}\|^2}{\|\underline{\lambda}\|^2} \quad (30)$$

$$= \frac{(\partial y / \partial \lambda)^2 + (\partial x / \partial \lambda)^2}{(N \cdot \cos(\varphi))^2} \quad (31)$$

$$= \frac{(\partial x / \partial \lambda)^2 \left(1 + \frac{\partial x / \partial \lambda}{\partial y / \partial \lambda}\right)}{(N \cdot \cos(\varphi))^2} \quad (32)$$

y considerar que

$$1 + \frac{\partial x / \partial \lambda}{\partial y / \partial \lambda} = 1 + \tan^2(c) = \sec(c)$$

$$m = \frac{\partial y}{\partial l} \cdot \frac{1}{N \cdot \cos(\varphi)} \cdot \sec(c)$$

Calculando la derivada desde 22, y sustituyendo el valor de "c", se obtiene:

$$m = 1 + \frac{l^2 \cdot \cos^2(\varphi)}{2} \cdot (1 + n^2) + \frac{l^4 \cdot \cos^4(\varphi)}{24} \cdot (5 - t^2 + 14 \cdot n^2 - 28 \cdot t^2 \cdot n^2) \quad (33)$$

Expresión en la cual "l" se introduce en radianes.

Si se desea obtener la deformación en función de las coordenadas planas, se reemplazan los valores de l por los términos primero o primero y segundo de 25, en el segundo y los restantes términos de 33 respectivamente, y aproximando $\varphi = \varphi_1$, que trae aún menos error que en el caso de la convergencia, dado que el resultado depende más débilmente de φ en este caso.

El resultado, tomando sólo los primeros 3 términos y considerando en el último de éstos que $N/M = M/N = 1$, lo cual es aceptable dado el poco peso de este término, es:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2} + \frac{y^4}{24 \cdot R^4}$$

Donde:

$$R = \sqrt{M_1 \cdot N_1}$$

, y este es el valor que utilizaremos en las deducciones que siguen.

Para una referencia completa de todos los términos ver ¹.

Deformaciones lineales.

Cuando se desea conocer la deformación de una distancia finita, teniendo en cuenta que:

$$m = \frac{dl}{dL}$$

$$L = \int_o^l \frac{dl}{m}$$

O bien:

$$l = \int_o^L m \cdot dL$$

Donde "L" es la distancia sobre el elipsoide, "l" es la correspondiente en el plano y "m" es el módulo de deformación lineal, por lo tanto:

$$L = \int_o^l \left(1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2} + \frac{y^4}{24 \cdot R^2} \right)^{-1} dl$$

El término de cuarto orden puede despreciarse para casi cualquier caso si se trabaja hasta 3 grados apartado del meridiano central, donde representa una deformación de solo 1 cm cada 400 km.

¹REDFEARN, J. C. B. Transverse mercator formulae. Empire Survey Review, 1948, vol. 9, no 69, p. 318-322.

$$L = \int_o^l \left(1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2}\right)^{-1} dl$$

Luego, si se multiplica y divide por el conjugado:

$$L = \int_o^l \frac{\left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot R^2}\right)}{\left(1 + \frac{y^2}{2 \cdot R^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot R^2}\right)} dl$$

$$L = \int_o^l \frac{\left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot R^2}\right)}{\left(1 - \frac{y^4}{4 \cdot R^4}\right)} dl \quad (34)$$

Si se considera que el denominado influye en una deformación de aproximadamente un centímetro en 25km a dos grados del MC, podemos decir que es aceptable asumir

$$L = \int_o^l \left(1 - \frac{y^2}{2 \cdot R^2}\right) dl \quad (35)$$

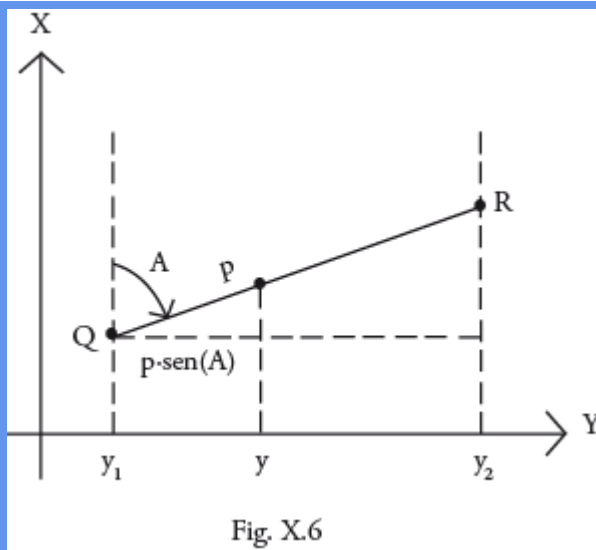


Fig. X.6

Sea p en la figura (X.6) la distancia proporcional a dl a partir de Q , designando y_1 ordenada del punto Q y por A ángulo de dirección o acimut de cuadrícula, se tiene que:

$$y = y_1 + p \cdot \text{sen}(A),$$

Nótese que durante este desarrollo estamos considerando que para la trayectoria evaluada $\text{sen}(A)$ no depende de la posición sobre la trayectoria, que es lo mismo que decir que la trayectoria recta sobre la

Considerando la trayectoria plana sobre la carta, podemos expresar 35 como:

$$L = \int_{p=0}^{p=l} \left(1 - \frac{(y_1 + p \cdot \text{sen}(A))^2}{2 \cdot R^2} \right) dp$$

$$L = \int_{p=0}^{p=l} \left(1 - \frac{y_1^2 + 2 \cdot y_1 p \cdot \text{sen}(A) + p^2 \cdot \text{sen}^2(A)}{2 \cdot R^2} \right) dp$$

$$L = p - \frac{y_1^2 \cdot p}{2 \cdot R^2} - \frac{2 \cdot y_1 \cdot p^2 \cdot \text{sen}(A)}{2 \cdot 2 \cdot R^2} - \frac{p^3 \cdot \text{sen}^2(A)}{6 \cdot R^2} \Big|_0^l$$

$$L = p \cdot \left[1 - \frac{y_1^2}{2 \cdot R^2} - \frac{y_1 \cdot p \cdot \text{sen}(A)}{2 \cdot R^2} - \frac{p^2 \cdot \text{sen}^2(A)}{6 \cdot R^2} \right] \Big|_0^l$$

$$L = l \cdot \left[1 - \frac{y_1^2}{2 \cdot R^2} - \frac{y_1 \cdot l \cdot \text{sen}(A)}{2 \cdot R^2} - \frac{l^2 \cdot \text{sen}^2(A)}{6 \cdot R^2} \right]$$

Teniendo en cuenta que

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta y = l \cdot \text{sen}(A)$$

$$L = l \cdot \left[1 - \frac{y_1^2}{2 \cdot R^2} - \frac{y_1 \cdot (y_2 - y_1)}{2 \cdot R^2} - \frac{(y_2 - y_1)^2}{6 \cdot R^2} \right]$$

Multiplicando y elevando al cuadrado el paréntesis y operando se llega:

$$L = l \cdot \left[1 - \frac{(y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2)}{6 \cdot R^2} \right]$$

El módulo de deformación de una distancia finita será:

$$\frac{l}{L} = \left[1 - \frac{(y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2)}{6 \cdot R^2} \right]^{-1}$$

Que puede aproximarse como

$$\frac{l}{L} = 1 + \frac{(y_1^2 + y_1 \cdot y_2 + y_2^2)}{6 \cdot R^2}, \quad (36)$$

si se hace una consideración similar a la realizada para obtener 35

En esta ecuación $R = \sqrt{M_1 \cdot N_1}$ y $\varphi = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$

En algunos casos es suficiente con tomar un valor promedio de la coordenada y , obteniendo $y_m = \frac{y_2 + y_1}{2}$, que reemplazando en 36 da

$$\frac{l}{L} = 1 + \frac{y_m^2}{2 \cdot R^2} \quad (37)$$