De la tierra a la carta

Javier Clavijo

18 de agosto de 2017

La tierra es un volumen que habita en el espacio de las tres dimensiones, conocemos la superficie de este volumen como superficie topográfica de la tierra. Si consideramos a este cuerpo como una esfera imperfecta, podemos decir que su superficie tiene una rugosidad del 0,5 %. En adelante consideraremos esta cáscara como la superficie de una esfera en R3 y veremos cuan lejos podemos llegar avanzando hacia una representación plana en R2.

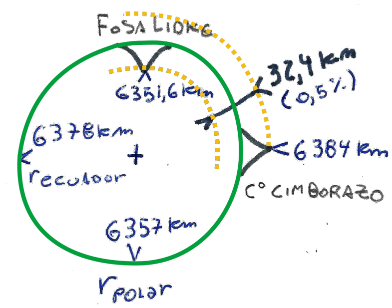

Figura 1: Las variaciones en la superficie topográfica de la tierra se desvían en solo un 0,5 % de la de una esfera

La superficie de una esfera de R3 es una superficie no desarrollable sobre el plano. Una superficie es desarrollable sobre otra si la relación entre los puntos de contacto que se produce al rodar una sobre la otra es una biyección, es decir una relación uno-uno [1], produciendo una isometría. Una isometría es una relación entre dos espacios medibles que conserva las distancias. Partiendo de un plano en R3, existe isometría por ejemplo realizando un doblez, curvando la superficie en un sentido, enrollándolo, o hasta cortando y pegando.

[1] Esto no se cumple para la esfera

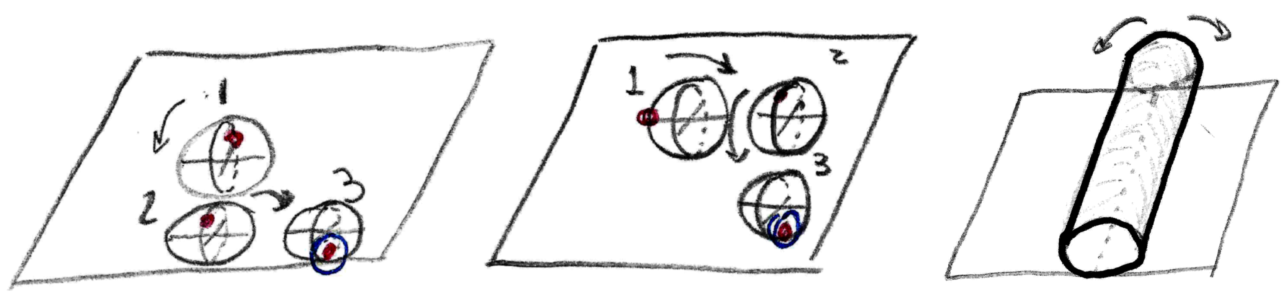

Figura 2: Ejemplo: una esfera no es desarrollable sobre el plano, depende el sentido en que la hagamos rodar puntos distintos coincidirán al mismo punto del plano. En cambio al cilindro solo hay una forma de hacerlo rodar

Teorema egregium: por tanto de la fórmula precedente se sigue por sí mismo el destacable teorema siguiente: si una superficie curva se desarrolla sobre cualquier otra superficie, la medida de la curvatura en cada punto permanece inalterada [2].

[2] Se refiere a la medida de la curvatura conocida como curvatura gaussiana. En el caso particular de R3 corresponde al producto de las curvaturas principales de una superficie, siendo por ejemplo $1/r^2$ para la esfera o 0 para el cono o el cilindro.

El plano tiene curvatura gaussiana 0, mientras que la esfera la tiene $1/r^2$, por tanto, atendiendo al teorema enunciado, no es posible encontrar un desarrollo entre ellas. Volviendo hacia atrás en los conceptos, esto implica que es imposible realizar una transformación isométrica biyectiva entre la esfera y el plano. Para representar la tierra como una imagen en R2 debemos hallar otro recurso, sabiendo que es imposible que realizarlo sin deformar la representación.

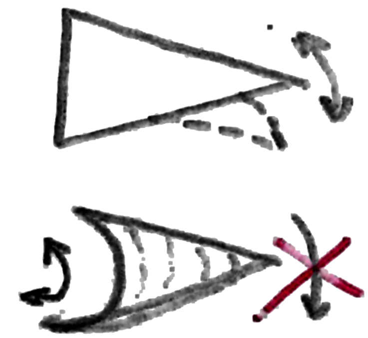

Figura 3: Al sostener una porción de pizza solemos curvarla en un sentido para evitar que tome curvatura en el otro, esto es posible dado que la superficie inicialmente plana de la pizza no puede tomar una curvatura gaussiana distinta de 0.

Una carta de dimensión m sobre un espacio topológico M es el par (U, Φ) que cumple que:

- Es U un subconjunto de M que constituye un abierto coordenado, es decir una superficie continua en algún sistema de coordenadas.
- $\Phi(U)$ es un abierto de Rm, y Φ es biyectiva, continua y tiene inversa continua.

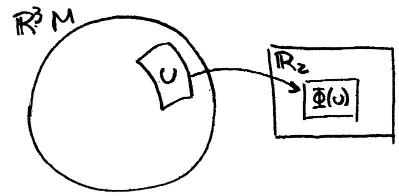

Figura 4: Tomando una esfera M y un sector continuo de la misma U, a partir de una función Φ podemos construir una carta (U, Φ) si la misma es biyectiva, continua e inversible.

En suma, para construir matemáticamente una carta de la tierra necesitamos: encontrar una forma de ubicarnos coordenadamente sobre la tierra, y encontrar una transformación biyectiva, continua que nos permita representar un dominio de la tierra que vive en R3 sobre la imagen en un plano - Que puede vivir en R2 o R3.

El sistema de coordenadas intuitivo para R3 es el cartesiano XYZ, sin embargo, nos facilita la tarea de trabajar sobre una superficie utilizar una parametrízacion de la misma, logrando reducir la cantidad de coordenadas utilizadas. Sobre la esfera la parametrización típica es la de Latitud / Longitud. Definimos como latitud del punto p al ángulo entre (a) el vector normal a la esfera en p y (b) el plano XY, y la longitud como el ángulo entre (a) la proyección de este vector normal sobre el plano XY y (b) el plano XZ.

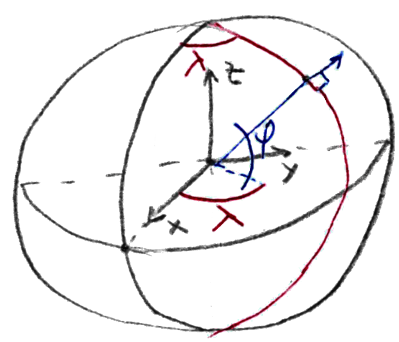

Figura 5: Parametrización de la esfera en latitud (φ) y longitud (λ)

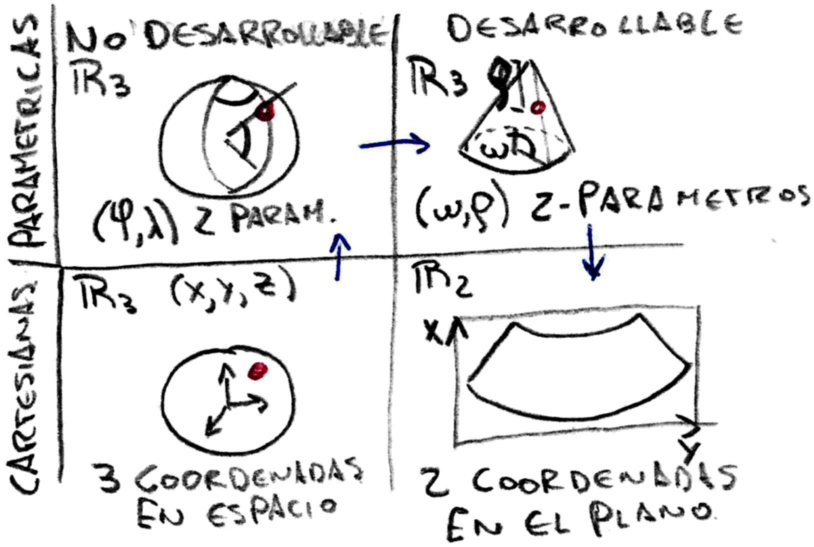

Figura 6: Proceso generalizado para la construcción de una carta de la superficie topográfica

Cualquier transformación que distribuya estas coordenadas sobre un plano en forma biyectiva y continua ya es una carta, solo nos resta ver si es útil y nos presenta una imagen de interpretación intuitiva.

Las principales familias de proyecciones utilizan un sistema de desarrollo como se describe a continuación. Se parte de una parametrización de la esfera, típicamente φ, λ, luego de confecciona una transformación del tipo $f(\varphi, \lambda) \rightarrow (u, v)$, donde u, v son parámetros que describen una superficie que es desarrollable al plano. Se elige f de manera que conserve alguna propiedad deseada del espacio original (áreas, formas, o distancias específicas por ejemplo). Finalmente, se realiza el desarrollo de la figura auxiliar (parametrizada por u, v) al plano. Vale aclarar que es muy común que f parta de una transformación del tipo proyectiva propiamente dicha, con un punto central o bien desde el infinito en una dirección.

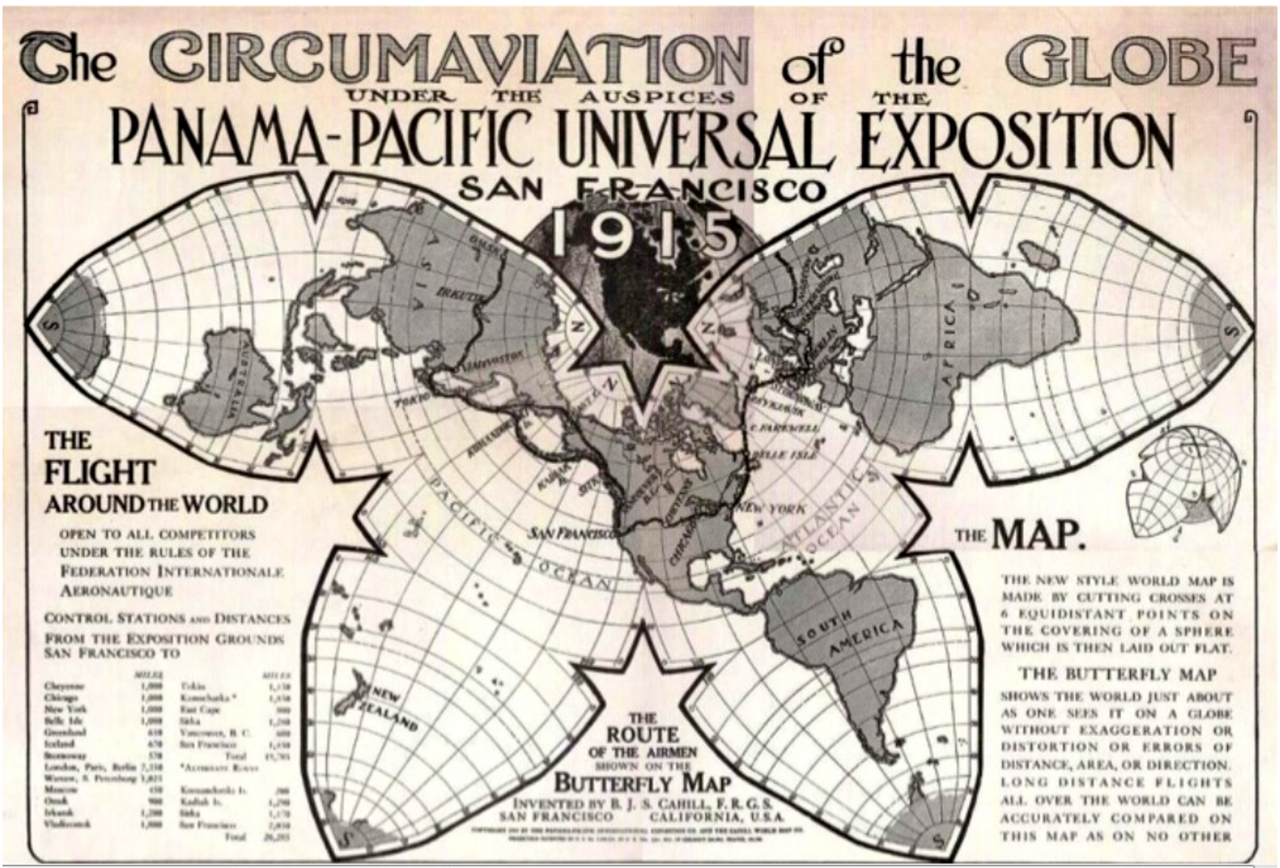

Figura 7: Este mapa ideado por Cahill en 1909, construye ocho cartas individuales de diferentes sectores de la tierra, utilizando una transformación del tipo proyectiva propiamente en cada una. El mapa total o "atlas" se construye a partir de unir las cartas por sus bordes comunes.