0.1 Q2

$\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) = alog_2(\frac{a}{b}) + (1-a)log_2(\frac{1-a}{1-b})$

D'où $\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) - \mathcal{D}(\mathcal{B}(b)||\mathcal{B}(a)) = (a+b)\log_2\frac{a}{b} + (2-a-b)\log_2\frac{1-a}{1-b}$

Or pour $a=\frac{1}{4}$ et $b=\frac{1}{2}$, $\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) - \mathcal{D}(\mathcal{B}(b)||\mathcal{B}(a)) = \frac{3}{4}\log_2(2) + \frac{5}{4}\log_2(\frac{3}{2}) \neq 0$

Ainsi, dans le cas général, $\mathcal{D}(p||q)\mathcal{D}(q||p)$

0.2 Q3

0.2.1 a

La fonction $-\log_2$ est convexe. Alors, d'après l'inégalité de Jensen,

$\sum_{x\in E} p(x)(-\log_2(\frac{q(x)}{p(x)})) \geq -\log_2(\sum_{x\in E} p(x)\frac{q(x)}{p(x)}) = -log_2(\sum_{x\in E} q(x)) = 0$

Ainsi $D(p||q) \geq 0$

Si

b

D'après Q3a, $\mathcal{I}(X,Y) = \mathcal{D}(p_{(X,Y)}||p_X \otimes p_Y) \geq 0$

Avec égalité si et seulement si $p_{(X,Y)} = p_X \otimes p_Y \iff X$ et Y sont indépendants.

4a

$\mathcal{H}(X,Y) = -\sum_{x,y\in E} p_{X,Y}(x,y)\log_2(p_{X,Y}(x,y))$
$= -\sum_{x\in E}\sum_{y\in E} p_X(x)p_{Y|X=x}(y)\log_2 p_X(x) + \log_2 p_{Y|X=x}(y)$
$= \mathcal{H}(X) + \sum_{x\in E} p_X(x)(-\sum_{Y\in E} p_{Y|X=x}(y)\log_2 p_{Y|X=x}(y))$
$= \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X)$

4b

$\mathcal{I}(X,Y) = \sum_{(X,Y)\in E} p_{X,Y}(x,y)\log_2\frac{p_{X,Y}x,y}{p_X(x)p_Y(y)}$
$= \sum_{(X,Y)\in E} p_X(x)p_{Y|X=x}(y)\log_2(p_{Y|X=x}(y)) - \sum_{(X,Y)\in E} p_Y(y)p_{X|Y=y}(x)\log_2(p_Y(y))$
$= \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y|X)$
$= \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X|Y)$ (par symétrie des rôles de X et Y)

$= \mathcal{H}(Y) - (\mathcal{H}(X,Y) - \mathcal{H}(X))$ (Q4a)

$Y = x_i \iff \sum_{j=1}^{i-1} p_j < a \leq \sum_{j=1}^{i} p_{j+1}$