Entropie et codage de source

Q2

$\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) = alog_2(\frac{a}{b}) + (1-a)log_2(\frac{1-a}{1-b})$

D'où $\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) - \mathcal{D}(\mathcal{B}(b)||\mathcal{B}(a)) = (a+b)\log_2\frac{a}{b} + (2-a-b)\log_2\frac{1-a}{1-b}$

Or pour $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$,

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) - \mathcal{D}(\mathcal{B}(b)||\mathcal{B}(a)) = \frac{3}{4}\log_2(2) + \frac{5}{4}\log_2(\frac{3}{2}) \neq 0$$

Ainsi, dans le cas général, $\mathcal{D}(p||q) \neq \mathcal{D}(q||p)$

Q3a

La fonction $-\log_2$ est strictement convexe. Alors, d'après l'inégalité de Jensen,

$\sum_{x\in E} p(x)(-\log_2(\frac{q(x)}{p(x)})) \geq -\log_2(\sum_{x\in E} p(x)\frac{q(x)}{p(x)}) = -log_2(\sum_{x\in E} q(x)) = 0$

Ainsi $D(p||q) \geq 0$

La stricte convexité de $-\log_2$ permet de conclure qu'il y a égalité si et seulement si $\forall x \in E$, $p(x) = q(x)$, soit $p = q$.

Q3b

D'après Q3a, $\mathcal{I}(X,Y) = \mathcal{D}(p_{(X,Y)}||p_X \otimes p_Y) \geq 0$

Avec égalité si et seulement si $p_{(X,Y)} = p_X \otimes p_Y \iff X$ et Y sont indépendants.

Q4a

$\mathcal{H}(X,Y) = -\sum_{x,y\in E} p_{X,Y}(x,y)\log_2(p_{X,Y}(x,y))$
$= -\sum_{x\in E}\sum_{y\in E} p_X(x)p_{Y|X=x}(y)\log_2 p_X(x) + \log_2 p_{Y|X=x}(y)$
$= \mathcal{H}(X) + \sum_{x\in E} p_X(x)(-\sum_{Y\in E} p_{Y|X=x}(y)\log_2 p_{Y|X=x}(y))$
$= \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X)$

Q4b

$\mathcal{I}(X,Y) = \sum_{(X,Y)\in E} p_{X,Y}(x,y)\log_2\frac{p_{X,Y}x,y}{p_X(x)p_Y(y)}$
$= \sum_{(X,Y)\in E} p_X(x)p_{Y|X=x}(y)\log_2(p_{Y|X=x}(y)) - \sum_{(X,Y)\in E} p_Y(y)p_{X|Y=y}(x)\log_2(p_Y(y))$
$= \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y|X)$
$= \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X|Y)$ (par symétrie des rôles de X et Y)

$= \mathcal{H}(Y) - (\mathcal{H}(X,Y) - \mathcal{H}(X))$ (Q4a)

$= \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X,Y)$

Q4c

D'après 4b, $\mathcal{H}(X,Y) = \mathcal{H}(X) - \mathcal{I}(X;Y)$ Or $\mathcal{I}(X;Y) \geq 0$

Ainsi, $\mathcal{H}(X,Y) \leq \mathcal{H}(X)$

Q5a

On utilise l'algorithme d'inversion de la fonction de répartition pour une loi discrète.

On utilise python pour déterminer un nombre a aléatoirement suivant la loi uniforme, entre 0 et 1, et on pose Y tel que :

$Y = x_i \iff \sum_{j=1}^{i-1} p_j < a \leq \sum_{j=1}^{i} p_{j+1}$

On peut appliquer ce principe pour $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(\frac{1}{3})$

Soit $a \rightsquigarrow \mathcal{U}([0;1])$ Notons aussi $x_0 = 1$ et $x_1 = 0$

Alors $\mathbb{P}(X = x_0) = \frac{2}{3} = \mathbb{P}(a < \frac{2}{3})$ et $\mathbb{P}(X = x_1) = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(a > \frac{2}{3})$.

Q7a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(p_X||q) &= \sum_{x\in E} p_X(x) log_2(\frac{p_X(x)}{\frac{1}{c}d^{-l(x)}}) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{x\in E} p_X(x) log_2(p_X(x)) \geq -\sum_{x\in E} p_X(x) l(x) log_2(d) + \sum_{x\in E} p_X(x) log_2(\frac{1}{c})$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}-\mathcal{H}(X) &\geq -log_2(d)\mathbb{E}(X) + log_2(\frac{1}{c}) \\ &\geq -log_2(d)\mathbb{E}(X) \quad \texttt{(car} \leq 1)\end{aligned}$$

D'où $\frac{\mathcal{H}(x)}{log_2(d)} \leq \mathbb{E}[l(X)]$

Le cas d'égalité se déduit de celui de $\mathcal{D}$, et a lieu pour $p_X = q$, soit les $p_X(x)$ sont des puissances négatives de d.

Q7b

Soit p une loi de probabilité telle que qui s'écrit $p_X(x) = \frac{1}{c}d^{-n_x}$ avec $c = \sum_{x\in E} d^{-n_x}$.

Cas 1 : $c \leq 1$ Prenons $\forall x \in E, l_0(x) = n_x$

Cas 2 : $c > 1$ Alors soit k tel que $\frac{c}{d^k} \leq 1$

$p_X(x) = \frac{d^k}{c} d^{-n_x-k}$, avec $\sum_{x\in E} d^{-n_x-k} \leq \frac{c}{d^k} \leq 1$

Posons alors $\forall x \in E, l_0(x) = n_x + k$

Cette application vérifie l'inégalité de Kraft-McMillan, et vérifie le cas d'égalité de la question Q7a d'après les calculs précédents pour q définie à partir de la fonction l_0.

Q7c

La fonction puissance étant bijective sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\forall x \in E, \exists \alpha_x, \quad p_X(x) = d^{\alpha_x}$$

Posons c et β tels que :

$$c = \sum_{x\in E} d^{\alpha_x} = d^{\beta}$$

Alors

$$\forall x \in E, \quad p_X(x) = \frac{1}{c} d^{-(\beta - \alpha_x)}$$

On pose donc

$$l_0(x) = \beta - \alpha_x$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\overline{l_0}(X)] &= \sum_{x\in E} \overline{l_0}(X)\mathbb{P}(X = x) \\ &< \sum_{x\in E} l_0(X)\mathbb{P}(X = x) + \sum_{x\in E} \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

Or d'après la question Q7a, la forme de $p_X(x) = \frac{1}{c} d^{-(\beta-\alpha_x)}$ assure :

$$\frac{\mathcal{H}(x)}{log_2(d)} = \mathbb{E}[l(X)] \quad \text{puisque } \mathcal{D}(p_X||p_X) = 0$$

Q9a

Voici le tableau des occurrences.

a	b	c	d	e	f
2	3	1	2	2	1

On choisit c et f

a	b	d	e	cf
2	3	2	2	2

On choisit e et cf

a	b	d	ecf
2	3	2	4

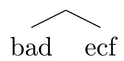
On choisit a et d

b	ad	ecf
3	4	4

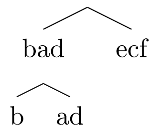
On choisit b et ad

bad	ecf
7	4

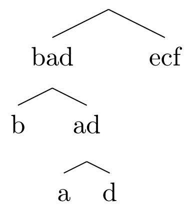
On n'a plus que deux éléments, et construisons donc l'arbre en remontant les étapes précédentes.



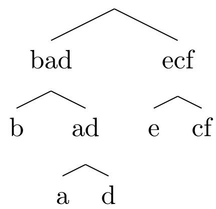
On décompose bad en b et ad



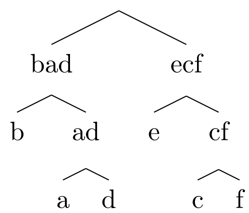
On décompose ad en a et d



On décompose ecf en e et cf



On décompose cf en c et f



On en déduit le codage de Huffman :

a	b	c	d	e	f
010	00	110	011	10	111