

Entropie et codage de source

Alice Andrès, Quentin SOubeyran

29 juin 2017

1 Entropie d'une distribution de probabilité

1.1 Cadre de travail et idée intuitive

Question 1

1.2 Entropie relative et information mutuelle

Question 2

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) = a \log_2\left(\frac{a}{b}\right) + (1-a) \log_2\left(\frac{1-a}{1-b}\right)$$

D'où

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) - \mathcal{D}(\mathcal{B}(b)||\mathcal{B}(a)) = (a+b) \log_2 \frac{a}{b} + (2-a-b) \log_2 \frac{1-a}{1-b}$$

Or pour $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$,

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}(a)||\mathcal{B}(b)) - \mathcal{D}(\mathcal{B}(b)||\mathcal{B}(a)) = \frac{3}{4} \log_2(2) + \frac{5}{4} \log_2\left(\frac{3}{2}\right) \neq 0$$

Ainsi, dans le cas général, $\mathcal{D}(p||q) \neq \mathcal{D}(q||p)$

Question 3a

La fonction $-\log_2$ est strictement convexe. Alors, d'après l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in E} p(x) \left(-\log_2 \frac{q(x)}{p(x)} \right) &\geq -\log_2 \sum_{x \in E} p(x) \frac{q(x)}{p(x)} \\ &\geq -\log_2 \sum_{x \in E} q(x) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Ainsi $D(p||q) \geq 0$. La stricte convexité de $-\log_2$ permet de conclure qu'il y a égalité si et seulement si $\forall x \in E, p(x) = q(x)$, soit $p = q$.

Question 3b

D'après Q3a, $\mathcal{I}(X, Y) = \mathcal{D}(p_{(X,Y)} || p_X \otimes p_Y) \geq 0$

Avec égalité si et seulement si $p_{(X,Y)} = p_X \otimes p_Y$ soit X et Y indépendantes.

Question 4a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(X, Y) &= - \sum_{x,y \in E^2} p_{X,Y}(x, y) \log_2 (p_{X,Y}(x, y)) \\ &= - \sum_{x \in E} \sum_{y \in E} p_X(x) p_{Y|X=x}(y) \log_2 p_X(x) + \log_2 p_{Y|X=x}(y) \\ &= \mathcal{H}(X) + \sum_{x \in E} p_X(x) \left(- \sum_{Y \in E} p_{Y|X=x}(y) \log_2 p_{Y|X=x}(y) \right) \\ &= \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y|X)\end{aligned}$$

Et l'on a montré l'égalité.

Question 4b

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(X, Y) &= \sum_{(X, Y) \in E} p_{X, Y}(x, y) \log_2 \frac{p_{X, Y}(x, y)}{p_X(x) p_Y(y)} \\
&= \sum_{(X, Y) \in E} p_X(x) p_{Y|X=x}(y) \log_2 (p_{Y|X=x}(y)) - \sum_{(X, Y) \in E} p_Y(y) p_{X|Y=y}(x) \log_2 (p_Y(y)) \\
&= \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(Y|X) \\
&= \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X|Y) \quad \text{par symétrie des rôles de X et Y} \\
&= \mathcal{H}(Y) - (\mathcal{H}(X, Y) - \mathcal{H}(X)) \quad \text{cf. (Q4a)} \\
&= \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X, Y)
\end{aligned}$$

Question 4c

D'après Q4b, $\mathcal{H}(X, Y) = \mathcal{H}(X) - \mathcal{I}(X; Y)$ Or $\mathcal{I}(X; Y) \geq 0$

Ainsi, $\mathcal{H}(X, Y) \leq \mathcal{H}(X)$

Question 5a

On utilise l'algorithme d'inversion de la fonction de répartition pour une loi discrète.

On utilise python pour déterminer un nombre a aléatoirement suivant la loi uniforme, entre 0 et 1, et on pose Y tel que :

$$Y = x_i \iff \sum_{j=1}^{i-1} p_j < a \leq \sum_{j=1}^i p_{j+1}$$

On peut appliquer ce principe pour $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(\frac{1}{3})$

Soit $a \sim \mathcal{U}([0; 1])$. Notons aussi $x_0 = 1$ et $x_1 = 0$

Alors $\mathbb{P}(X = x_0) = \frac{2}{3} = \mathbb{P}(a < \frac{2}{3})$ et $\mathbb{P}(X = x_1) = \frac{1}{3} = \mathbb{P}(a > \frac{2}{3})$.

Question 5b

Question 6a

Question 6b

Question 6c

2 Application au codage de source

2.1 Théorème du codage de source

Question 7a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(p_X||q) &= \sum_{x \in E} p_X(x) \log_2 \left(\frac{p_X(x)}{\frac{1}{c} d^{-l(x)}} \right) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{x \in E} p_X(x) \log_2(p_X(x)) &\geq - \sum_{x \in E} p_X(x) l(x) \log_2(d) + \sum_{x \in E} p_X(x) \log_2\left(\frac{1}{c}\right) \\ &\iff \\ -\mathcal{H}(X) &\geq -\log_2(d) \mathbb{E}(X) + \log_2\left(\frac{1}{c}\right) \\ &\geq -\log_2(d) \mathbb{E}(X) \quad (\text{car } \leq 1)\end{aligned}$$

D'où $\frac{\mathcal{H}(X)}{\log_2(d)} \leq \mathbb{E}[l(X)]$

Le cas d'égalité se déduit de celui de \mathcal{D} , et a lieu pour $p_X = q$, soit les $p_X(x)$ sont des puissances négatives de d .

Question 7b

Soit p une loi de probabilité telle que qui s'écrit $p_X(x) = \frac{1}{c} d^{-n_x}$ avec $c = \sum_{x \in E} d^{-n_x}$.

Cas 1 : $c \leq 1$ Prenons $\forall x \in E, l_0(x) = n_x$

Cas 2 : $c > 1$ Alors soit k tel que $\frac{c}{d^k} \leq 1$

$p_X(x) = \frac{d^k}{c} d^{-n_x-k}$, avec $\sum_{x \in E} d^{-n_x-k} \leq \frac{c}{d^k} \leq 1$

Posons alors $\forall x \in E, l_0(x) = n_x + k$

Cette application vérifie l'inégalité de Kraft-McMillan, et vérifie le cas d'égalité de la question Q7a d'après les calculs précédents pour q définie à partir de la fonction l_0 .

Question 7c

La fonction puissance étant bijective sur \mathbb{R}^+ , on a :

$$\forall x \in E, \exists \alpha_x, \quad p_X(x) = d^{\alpha_x}$$

Posons c et β tels que :

$$c = \sum_{x \in E} d^{\alpha_x} = d^\beta$$

Alors

$$\forall x \in E, \quad p_X(x) = \frac{1}{c} d^{-(\beta - \alpha_x)}$$

On pose donc

$$l_0(x) = \beta - \alpha_x$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\overline{l_0}(X)] &= \sum_{x \in E} \overline{l_0}(X) \mathbb{P}(X = x) \\ &< \sum_{x \in E} l_0(X) \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

Or d'après la question Q7a, la forme de $p_X(x) = \frac{1}{c} d^{-(\beta - \alpha_x)}$ assure :

$$\frac{\mathcal{H}(X)}{\log_2(d)} = \mathbb{E}[l(X)] \quad \text{puisque } \mathcal{D}(p_X || p_X) = 0$$

On en conclut :

$$\mathbb{E}[\overline{l_0}(X)] < \frac{\mathcal{H}(X)}{\log_2(d)} + 1$$

2.2 Mise en oeuvre de l'algorithme - L'algorithme de Huffman

Question 9a

Voici le tableau des occurrences.

a	b	c	d	e	f
2	3	1	2	2	1

On choisit c et f

a	b	d	e	cf
2	3	2	2	2

On choisit e et cf

a	b	d	ecf
2	3	2	4

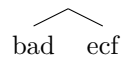
On choisit a et d

b	ad	ecf
3	4	4

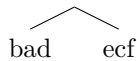
On choisit b et ad

bad	ecf
7	4

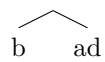
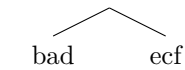
On n'a plus que deux éléments, et construisons donc l'arbre en remontant les étapes précédentes.



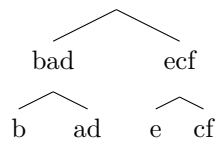
On décompose bad en b et ad



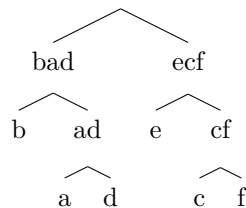
On décompose ad en a et d



On décompose ecf en e et cf



On décompose cf en c et f



On en déduit le codage de Huffman :

a	b	c	d	e	f
010	00	110	011	10	111

Question 9b

Question 9c

Question 9d

Question 9e