



IPG

Politécnico
da Guarda

Escola Superior
de Tecnologia e Gestão

CADERNO DE EXERCÍCIOS

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

| | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| Curso(s): | Eng. Informática |
| Unidade(s) Curricular(es): | Probabilidades e Estatística |
| Ano Letivo: | 2019/20 |
| Docente: | Cecília Maria Fernandes Fonseca |
| Data: | Setembro de 2019 |

1. INTRODUÇÃO À TEORIA DAS PROBABILIDADES

1.1 ENUNCIADOS DOS EXERCÍCIOS

1- Considere a experiência aleatória “lançamento de duas moedas”. Indique:

- a) O espaço de resultados;
- b) Os acontecimentos elementares;
- c) A probabilidade de que as duas moedas caiam com a mesma face voltada para cima.

2- Numa turma há 16 rapazes e 24 raparigas, onde metade dos rapazes e metade das raparigas têm cabelo preto. Qual a probabilidade de que, escolhendo um ao acaso, seja rapaz ou tenha cabelo preto?

3- Entre 180 professores de uma Universidade, 135 são doutorados, 146 dedicam parte do seu tempo à investigação e 114 são doutorados e dedicam parte do seu tempo à investigação. Se um desses professores é escolhido ao acaso para um trabalho administrativo, determine a probabilidade de que:

- a) Esse professor seja doutorado ou dedique parte do seu tempo à investigação;
- b) Esse professor não seja doutorado nem faça investigação.

4- Do conjunto de empresas que actuam num dado sector industrial

- 25% possuem departamento de investigação;
- 50% realizam lucros;
- 20% possuem departamento de investigação e realizam lucros.

Determine a probabilidade de uma empresa escolhida ao acaso estar nas seguintes condições:

- a) Possuir departamento de investigação ou realizar lucros ou ambas as coisas;
- b) Não possuir departamento de investigação;
- c) Não possuir departamento de investigação nem realizar lucros;
- d) Não possuir departamento de investigação ou não realizar lucros ou ambas as coisas;
- e) Possuir departamento de investigação e não realizar lucros.

5- Num “stand” de automóveis, os registos indicam que 50% dos clientes pretendem ar condicionado no carro, 49% preferem carros com direcção assistida e 25% interessam-se pelas duas coisas simultaneamente. Um registo é seleccionado ao acaso.

- Qual a probabilidade de que o ar condicionado tenha sido pretendido mas a direcção assistida não?
- Qual a probabilidade de que nenhuma das referidas preferências tenha sido seleccionada?
- Qual a probabilidade de exactamente uma das preferências tenha sido seleccionada?

6- Dispomos de três lotes de lâmpadas que apresentam as mesmas características técnicas, mas sabe-se que:

- No 1º lote composto por 50% do número total de lâmpadas, há 2% que são defeituosas;
- No 2º lote composto por 30% do número total de lâmpadas, há 4% que são defeituosas;
- No 3º lote, com lâmpadas restantes, há 1% que são defeituosas.

Os três lotes são misturados e deste conjunto é retirada uma lâmpada ao acaso.

- Qual a probabilidade de ser defeituosa ?
- Se a lâmpada é defeituosa, qual a probabilidade de ter vindo dos lotes 1 ou 2 ?

7- Um comerciante recebe batatas de três regiões diferentes. Ao chegar, cada lote é classificado em duas classes A e B, de acordo com a qualidade do produto. Qual a proveniência mais favorável de um lote acabado de chegar, sabendo que foi classificado na categoria A e tendo em conta a distribuição dos lotes recebidos até à data é a seguinte:

| Regiões | Kg | Qualidade | |
|---------|-------|-----------|-------|
| | | A | B |
| I | 10000 | 2000 | 8000 |
| II | 20000 | 14000 | 6000 |
| III | 20000 | 10000 | 10000 |

8- Duas caixas (C1 e C2) têm, respectivamente 8 e 4 bolas brancas, 12 e 16 castanhas e C2 tem também 20 bolas vermelhas. Considere a experiência aleatória “escolha de uma bola das duas caixas”. Atendendo a que as bolas estão juntas mas identificam a caixa de proveniência, calcule:

- O espaço de resultados;
- A probabilidade de ser de C1;
- A probabilidade de ser branca;
- A probabilidade de ser branca de C1;
- A probabilidade de ser branca ou de C1;
- A probabilidade de ser branca ou de C1 mas não de ambas as coisas;
- Dado que é de C1, qual a probabilidade de ser branca.

9- Suponha-se que há três caixas contendo bolas amarelas, brancas e pretas. O número de bolas de cada cor em cada uma das caixas é dado por:

- Caixa1: 1 amarela, 3 brancas e 1 preta;
- Caixa2: 2 amarelas, 2 brancas e 2 pretas;
- Caixa3: 3 amarelas, 1 branca e 3 pretas.

Escolhe-se uma caixa ao acaso e tira-se uma bola também ao acaso. Pretende-se saber qual a caixa que dá maior probabilidade ao acontecimento B (saída de uma bola branca).

10- A probabilidade de um homem estar vivo daqui a 25 anos é de $\frac{3}{5}$ e a de sua mulher também o estar, na mesma ocasião, é de $\frac{2}{3}$. Determine a probabilidade de, daqui a 25 anos:

- a) Ambos estarem vivos;
- b) Somente o homem estar vivo;
- c) Somente a mulher estar viva;
- d) Um pelo menos estar vivo.

11- Uma pessoa A entrega a uma pessoa B uma carta para colocar no correio. A probabilidade de que B se esqueça de a colocar é 0,1. A probabilidade de que o correio se esqueça de a enviar, uma vez que foi colocada, é 0,09 e a probabilidade de que o destinatário não a receba, dado que foi enviada, é 0,11. Qual a probabilidade de que a pessoa B se tenha esquecido de colocar a carta no correio, dado que o destinatário não a recebeu?

12- Se a probabilidade de que uma pessoa acredite num determinado boato é de 0,25, determine a probabilidade de que a 7ª pessoa a ouvir o boato seja a 1ª a acreditar nele.

13- Sendo $P(A) = 0,5$ e $P(A \cup B) = 0,5$, determine:

- a) $P(B)$, sendo A e B independentes;
- b) $P(B)$, sendo A e B mutuamente exclusivos;

14- Uma loja de brinquedos emprega 3 mulheres para fazerem embrulhos durante a época de Natal. Raquel embrulha 30% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 3% das vezes; Helena embrulha 20% dos presentes e esquece-se de tirar o preço em 8% das vezes; Joana, que embrulha os restantes presentes, esquece-se de tirar o preço 5% das vezes.

- a) Qual a probabilidade de um presente comprado nessa loja ainda ter o preço?
- b) Suponha que tinha ido a essa loja, verificando em casa que o seu presente ainda tinha preço. Calcule a probabilidade de ter sido embrulhado pela Joana.

15- Rui entrou agora na Universidade e foi informado de que há 30% de possibilidade de vir a receber uma bolsa de estudo. No caso de a receber, a probabilidade de se licenciar é de 0,85 enquanto que no caso de não a obter, a probabilidade de se licenciar é de apenas 0,45.

- a) Qual a probabilidade de que ele se licencie?
 b) Se, daqui a uns anos, encontrar o Rui já licenciado, qual a probabilidade de que tenha recebido a bolsa de estudo?

16- Dois peritos de fiscalização económica entraram num supermercado. Todos os tipos de produtos são examinados por um e um só dos fiscais. Suponha que o azeite em venda nesse supermercado é todo falsificado. A probabilidade de ser o 1º perito a examinar a qualidade do azeite é de 0,4. A probabilidade do azeite ser mal classificado, se examinado pelo 1º perito é de 0,08, e se for examinado pelo 2º perito, de 0,02. Durante a verificação o azeite foi classificado como falsificado. Nestas condições, calcule a probabilidade de o azeite ter sido examinado pelo 1º perito.

17- Uma fábrica produz copos de plástico em três cores: branco, verde e azul. Das análises de controle de qualidade anteriormente efectuadas verificou-se que 2% dos copos brancos são defeituosos enquanto somente 1% dos azuis o são, e ainda que 4% dos copos defeituosos são verdes. Da produção diária, metade corresponde à cor verde e $1/4$ à cor azul.

- a) Escolhido um copo ao acaso, qual a probabilidade de ser defeituoso?
 b) Se um copo não é defeituoso, qual a probabilidade de ser branco?
 c) Qual a probabilidade de um copo verde não ser defeituoso?

18- De 20 declarações de contribuição industrial, sabe-se que 8 apresentam erros.

- a) Se um fiscal seleccionar ao acaso 2 para verificação, qual a probabilidade de essas duas conterem erros?
 b) Se seleccionar 3, qual a probabilidade de pelo menos 2 conterem erros?

19- A empresa X tem prontos para venda 400 fogos assim distribuídos:

T2 - 160 T3 - 160 T4 - 80

Estimaram-se as probabilidades para o tempo que a referida empresa demoraria a vender os fogos, tendo-se chegado aos seguintes valores:

| | Menos de 6 meses | Entre 6 meses e um ano | Mais de um ano |
|-------------|------------------|------------------------|----------------|
| Para fog.T2 | 0,4 | 0,5 | 0,1 |
| Para fog.T3 | 0,2 | 0,3 | 0,5 |
| Para fog.T4 | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

- a) Tendo determinado fogo sido vendido em menos de 6 meses, qual a probabilidade de se tratar de um fogo T2?
 b) Compare a probabilidade de um fogo ser vendido em menos de 6 meses com a probabilidade de ser vendido entre 6 meses e um ano.

1.2 SOLUÇÕES

- 1- c) $1/2$
- 2- 0,7
- 3- a) 0,923
b) 0,072
- 4- a) 0,55
b) 0,75
c) 0,45
d) 0,8
e) 0,05
- 5- a) 0,25
b) 0,26
c) 0,49
- 6- a) 0,024
b) 0,917
- 7- A proveniência mais favorável, de um lote acabado de chegar sabendo que foi classificado na classe A, é a Região II.
- 8- a) 60
b) 0,3
c) 0,2
d) 0,1(3)
e) 0,4
f) 0,27
g) 0,4
- 10- a) $2/5$
b) $1/5$
c) $4/15$
d) $13/15$
- 11- 0,36888
- 12- 0,04449
- 13- a) 0
b) 0
- 14- a) 0,05
b) 0,5
- 15- a) 0,57
b) 0,44736

16- 0,3849

17- a) 0,0078

b) 0,2469

c) 0,9994

18- a) 0,147

b) 0,3439

19- a) 0,471

b) A probabilidade de um fogo ser vendido entre 6 meses e um ano é superior à de ser vendido entre em menos de 6 meses.

Independência de Acontecimentos

Exemplo baralho de cartas

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Com reposição o tiragem não independente

$$P(D \cap V) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = P(D^{1a}) \times P(V^{2a} | D^{1a})$$

exercícios

5) Num stand de automóveis os registos indicam que 50% dos clientes pretendem ar condicionado no carro, 45% preferem com direção assistida e 25% interessam-se pelas duas coisas. Um registo é selecionado ao acaso

a) Qual a probabilidade de que o ar condicionado tenha sido pretendido mas a direção assistida não

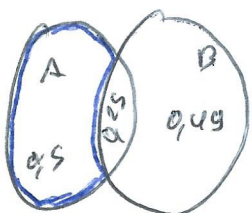
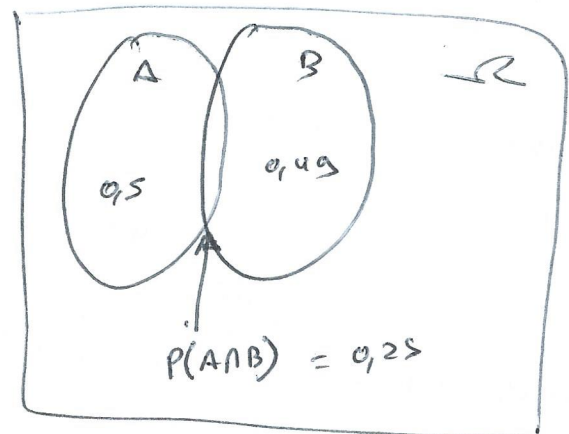
$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ P(C) = \end{cases}$$

Diagrama:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- A - "Ter ar condicionado" $P(A) = 0,5$
 B - "Ter direção assistida" $P(B) = 0,45$
 $P(A \cap B) = 0,25$

Se eu quero o ar condicionado tenho que tirar o que não quero



$$0,5 - 0,25 = 0,25$$

$$\begin{aligned} P(A - B) &= \\ P(A) - P(A \cap B) &= 0,25 \end{aligned}$$

B) Qual a probabilidade de nenhuma das referidas preferências terem sido selecionada?

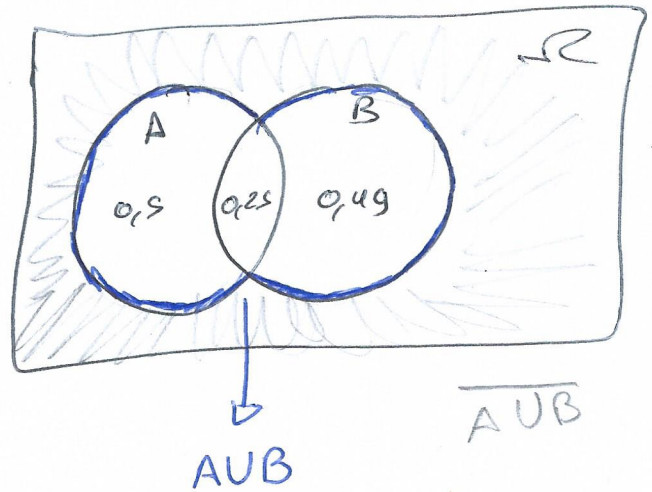
$$P(\overline{A \cap B}) = \overline{A \cap B}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - (0,5 + 0,49 - 0,25)$$

$$= 0,26$$



C) Qual a probabilidade de exactamente uma das preferências tenha sido selecionada

Pelo abreviatura: $P(A - B) = 0,25$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,49 - 0,25 = 0,24$$

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A)$$

$$= 0,25 + 0,24 = 0,49$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \text{ } \\ P(A) - P(A \cap B) & P(B) - P(A \cap B) & \end{matrix}$$

ou seja a probabilidade de escolher A

ou seja a probabilidade de escolher B

exercício 6

Disponemos de 3 lotes de lâmpadas que apresentam as mesmas características técnicas mas sabe-se que

i) No 1º lote composto por 50% do número total de lâmpadas há 2% que são defeituosas

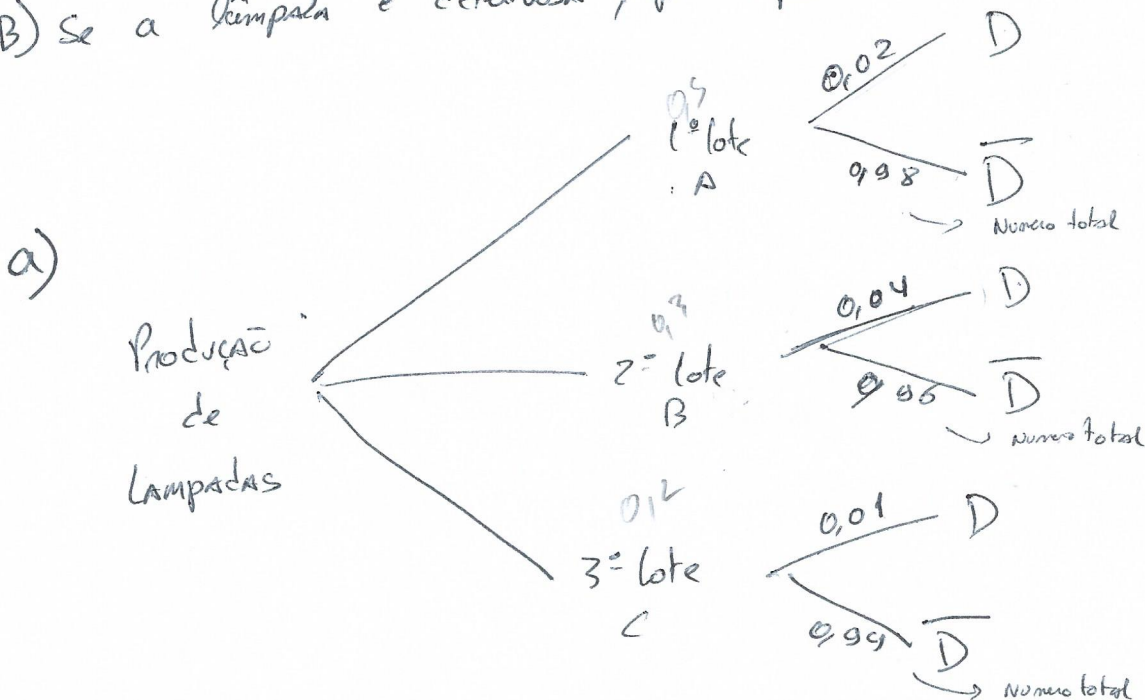
ii) No 2º lote composto por 30% do número total de lâmpadas, há 4% que são defeituosas

iii) No 3º lote com lâmpadas restantes há 1% que são defeituosas

Os três lotes são misturados e deste conjunto é retirado uma lâmpada ao acaso

a) Qual a probabilidade de ser defeituosa

b) Se a lâmpada é defeituosa, qual a probabilidade de ter vindo dos lotes 1 ou 2?



$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C) =$$

$$0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,01 = 0,024$$

(6)

b)

$$P(A \cup B | D) = P(A | D) + P(L_2 | D)$$

$$\frac{0,5 \times 0,02}{0,024} + \frac{0,3 \times 0,04}{0,024} = 0,51666$$

Acontecimento independente
Exercício 12

Se a probabilidade de que uma pessoa acredite num determinado boato é de 0,25, determine a probabilidade de que a 7ª pessoa a ouvir o boato seja a 1ª a acreditar nele.

A_i — i — ^{ésima} pessoa acreditar no boato

$$P(A_i) = 0,25$$

$$P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 0,75$$

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_6} \cap A_7)$$

(A primeira não acreditar a segunda não acreditar e a terceira não acreditar e ... e a sétima acreditar)

$$P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times \dots \times P(A_7) = 0,75^6 \times 0,25$$

2º Capítulo

VARIÁVEIS Aleatórias e as suas distribuições

Varíavel aleatória

exemplo do universo das 3 famílias

$$\# \Omega = 8$$

(1 1)



M

F

$$= 2^3 = 8$$

filhos

seus

Varíavel discreta
(nº finito de valores)

$$f(x) = P(X=x) \text{ - Função de Probabilidade}$$

valor da variável aleatória

X representa nº de rapazes, que podem ser 0, 1, 2, 3

variável aleatória

nº de rapazes = 0

só feminino

$$X=0 \longrightarrow A_1 \left\{ FFF \right\} \quad \#A_1 = 1$$

$$X=1 \longrightarrow A_2 \left\{ MFF, FMF, FFM \right\} \quad \#A_2 = 3$$

$$P(X=0) = P(A_1) = \frac{\#A_1}{\# \Omega} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(A_2) = \frac{\#A_2}{\# \Omega} = \frac{3}{8}$$