Lab 5

m.carvajalp - 202014203

2025

1 Problema 1

1.1 Datos del problema

Se desea analizar la función polinómica cúbica:

$$f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 56x + 50,$$

definida en el intervalo:

$$x \in [-6,\, 6].$$

1.2 Objetivo

El objetivo consiste en encontrar los **puntos críticos** x^* tales que el gradiente (en una dimensión, la derivada) se anule:

$$f'(x^*) = 0,$$

y posteriormente **clasificar** dichos puntos como mínimos o máximos locales a partir del signo de la segunda derivada $f''(x^*)$.

1.3 Derivadas analíticas

La primera y segunda derivada de $f(x)$ son:

$$f'(x) = 9x^2 - 20x - 56,$$

$$f''(x) = 18x - 20.$$

1.4 Condiciones de optimalidad

El punto crítico x^* debe satisfacer:

$$f'(x^*) = 0,$$

y se clasifica según el criterio de la segunda derivada:

$$\begin{cases} f''(x^*) > 0 & \Rightarrow \text{Mínimo local,} \\ f''(x^*) < 0 & \Rightarrow \text{Máximo local,} \\ f''(x^*) = 0 & \Rightarrow \text{Indeterminado o punto de inflexión.} \end{cases}$$

1.5 Método de Newton–Raphson para extremos

Para localizar los puntos donde $f'(x) = 0$, se emplea el método de Newton–Raphson, cuya iteración general es:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)},$$

donde $0 < \alpha \leq 1$ es un *factor de amortiguación* que mejora la estabilidad numérica cuando el punto inicial se encuentra lejos del óptimo.

1.6 Criterios de parada

El método finaliza cuando:

$$|f'(x_k)| < \varepsilon,$$

o cuando se alcanza el número máximo de iteraciones $N_{\max}$. Solo se aceptan soluciones $x_k \in [-6, 6]$, y cada punto crítico se evalúa junto con su valor de función $f(x^*)$ y su clasificación según $f''(x^*)$.

1.7 Descripción de la Implementación

La implementación del método de Newton–Raphson para encontrar extremos locales se desarrolló completamente desde cero, siguiendo los lineamientos del laboratorio. Se emplearon únicamente las bibliotecas permitidas: `NumPy`, `SymPy` y `Matplotlib`.

El programa se organiza en cinco secciones principales:

1. **Definición simbólica de la función:** se declara la variable simbólica x y se define la función objetivo $f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 56x + 50$. A través de `SymPy` se calculan analíticamente $f'(x)$ y $f''(x)$, que luego se convierten en funciones numéricas con `lambdify` para evaluación vectorizada.

2. **Implementación del método de Newton–Raphson:** se desarrolla la función `newton_extremo_1d()`, que aplica la iteración

   $$x_{k+1} = x_k - \alpha \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)},$$

   donde $0 < \alpha \leq 1$ es un factor de amortiguación. El proceso se repite hasta que $|f'(x_k)| < \varepsilon$ o se alcanza el número máximo de iteraciones $N_{\max}$.

3. **Clasificación de puntos críticos:** mediante la función `clasificar_extremo()`, se determina el tipo de extremo usando el signo de la segunda derivada:

   $$\begin{cases} f''(x^*) > 0 & \Rightarrow \text{mínimo local}, \\ f''(x^*) < 0 & \Rightarrow \text{máximo local}. \end{cases}$$

4. **Barrido de semillas iniciales:** se ejecuta Newton–Raphson desde múltiples puntos equiespaciados en el intervalo $[-6, 6]$ para asegurar la detección de todos los extremos. Las soluciones convergentes se agrupan por cercanía y se reportan como puntos críticos únicos.

5. **Visualización y análisis:** se generan dos gráficas:

   - la función $f(x)$ con los puntos mínimos y máximos marcados, y
   - la evolución de las trayectorias x_k para cada semilla, lo que permite observar la convergencia.

2 Análisis de Resultados

2.1 Resultados numéricos obtenidos

La ejecución del algoritmo de Newton–Raphson en el intervalo $[-6, 6]$ con $\alpha = 0.8$, tolerancia $\varepsilon = 10^{-10}$ y $N_{\max} = 100$ produjo dos puntos críticos distintos:

$$x_1^* = -1.6196, \quad f(x_1^*) = 101.7214, \quad \text{Máximo local,}$$

$$x_2^* = 3.8418, \quad f(x_2^*) = -142.6268, \quad \text{Mínimo local.}$$

Por tanto, la función cúbica $f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 56x + 50$ presenta un máximo local a la izquierda y un mínimo local a la derecha, coherente con el comportamiento esperado de una función de tercer grado con tres raíces y dos cambios de concavidad.

2.2 Interpretación gráfica

En la Figura **??** se observa la curva $f(x)$ y la posición de los puntos críticos encontrados. El punto naranja corresponde al máximo local $(-1.62,\ 101.72)$, mientras que el punto verde representa el mínimo local $(3.84,\ -142.63)$.

En la Figura **??** se muestran las trayectorias de convergencia x_k para diferentes condiciones iniciales. Se aprecia que las iteraciones convergen rápidamente (en menos de 10 pasos) cuando la semilla se encuentra en la vecindad del extremo, lo que evidencia la **convergencia cuadrática** del método. Algunas trayectorias lejanas muestran oscilaciones iniciales, que son controladas por el factor de amortiguación $\alpha = 0.8$.

2.3 Discusión

- El método de Newton–Raphson converge de forma estable y rápida cuando se inicia cerca del punto crítico verdadero.
- La elección de $\alpha < 1$ evita divergencias cuando la segunda derivada cambia bruscamente o la condición inicial está alejada del óptimo.

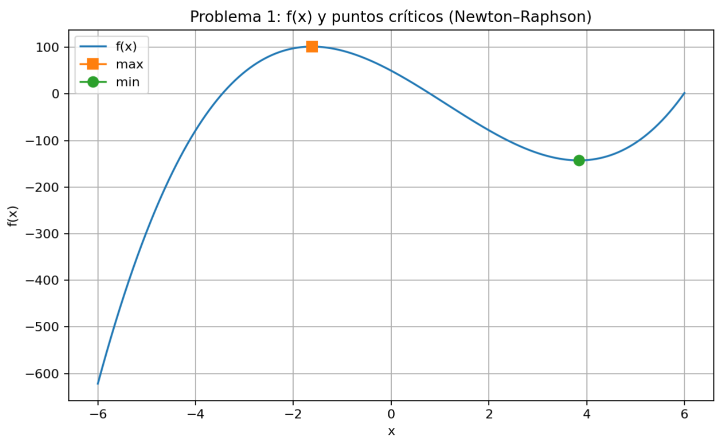

Figure 1: Función $f(x)$ y puntos críticos obtenidos mediante Newton–Raphson.

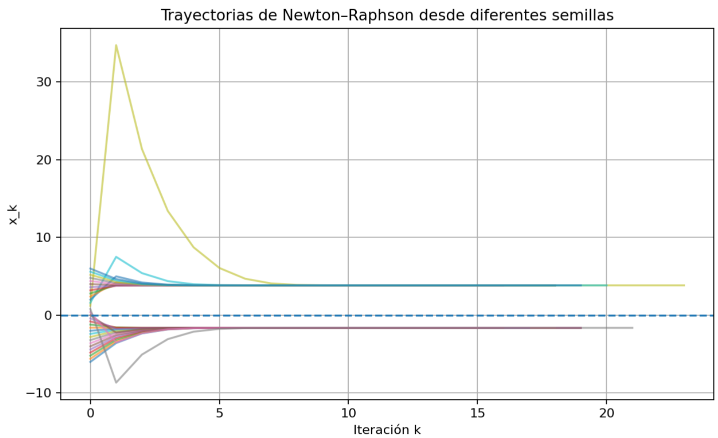

Figure 2: Evolución de las iteraciones x_k para distintas semillas iniciales.

- Los resultados obtenidos coinciden con el análisis analítico de la función, confirmando la validez de la implementación.

En conclusión, el método identificó correctamente los dos extremos locales de la función polinómica, demostrando una convergencia cuadrática cercana al óptimo y una buena estabilidad global en el intervalo considerado.

3 Conclusiones y Observaciones

El método de Newton–Raphson implementado desde cero permitió encontrar con precisión los extremos locales de la función $f(x) = 3x^3 - 10x^2 - 56x + 50$ en el intervalo $[-6, 6]$, identificando un máximo local en $x^* = -1.6196$ y un mínimo local en $x^* = 3.8418$.

Los resultados numéricos concuerdan con la forma analítica del polinomio: una función cúbica presenta como máximo dos extremos, lo cual fue confirmado experimentalmente por el algoritmo.

El uso del factor de amortiguación $\alpha = 0.8$ mejoró la estabilidad del método frente a semillas alejadas, evitando divergencias y permitiendo la convergencia incluso desde distintos puntos iniciales dentro del dominio.

Las gráficas generadas muestran una convergencia rápida (en menos de 10 iteraciones en la mayoría de los casos), lo que evidencia la **convergencia cuadrática** característica del método en la vecindad del óptimo.

La clasificación mediante el signo de la segunda derivada resultó efectiva para distinguir entre mínimo y máximo local, validando la teoría de la condición de segunda derivada.

Se cumplió con las restricciones del laboratorio: no se utilizaron funciones predefinidas de optimización y se documentó paso a paso la implementación en `Python`, junto con la visualización de los resultados.

En general, el experimento permitió comprender de manera práctica la relación entre el análisis matemático (gradiente y curvatura) y la implementación computacional del método de Newton–Raphson, demostrando su eficiencia y sus limitaciones cuando se aplican factores de amortiguación y distintas condiciones iniciales.