

Homogénéisation pour les mélanges de fluides compressibles

Travaux en collaboration avec Bresch, Burtea et Gonin-Joubert.

(+ discussions avec M. Hillairet)

Journée MMCS 18/08/2024

Venons-en [au constitutif de] mon exposé : Navier - Stokes.

les équations que l'on va considérer sont celles qui régissent le comportement d'un fluide compressible barotrope unidimensionnel.

conservation masse

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ \text{2^{de} loi de Newton} \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{array} \right. \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{T}.$$

(on suppose $\mu > 0$ constant)

Pour un fluide simple on connaît p : $p = p(\rho)$

(par exemple $p(\rho) = \rho^\gamma$, $\gamma > 1$, ou $p(\rho) = C\rho \dots$).

Question: que dire si le fluide que l'on a est un mélange de 2 fluides simples (dont on connaît les lois de pression)?

Precisément, pour ces deux fluides isolés,

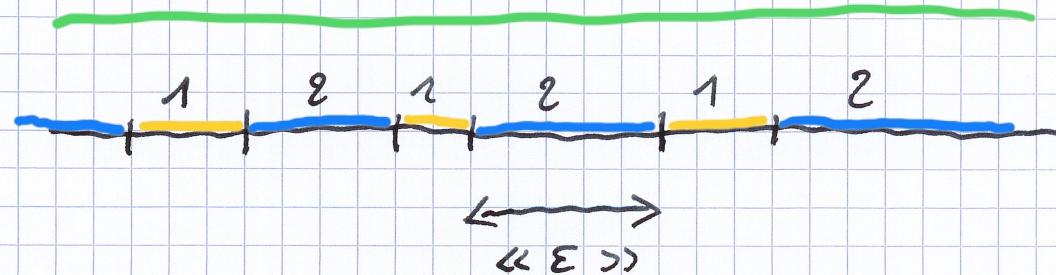
$$\begin{cases} \partial_t g_1 + \partial_x f_1 u = 0, \\ \partial_t f_1 u + \partial_x (g_1 u^2 + p_1(f_1)) = \mu_1 \partial_{xx} u, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t g_2 + \partial_x f_2 u = 0, \\ \partial_t f_2 u + \partial_x (g_2 u^2 + p_2(f_2)) = \mu_2 \partial_{xx} u. \end{cases}$$

On mélange ces fluides : quelle est la loi de pression

du mélange ? Et même : quel est le modèle régissant

son évolution ? Ressemble-t-il au système de Navier-Stokes ?

On va voir un mélange comme la limite d'une suite de situations où les deux fluides sont purs, séparés à une "échelle" petite (donc appelée ϵ !).



Notions

- α la fraction volumique de fluide 1 (dépendant de t et x). ($1-\alpha$ est la fraction volumique du fluide 2).
- c la fraction masse du fluide 1 ($1-c$ est celle du fluide 2).
- β la densité (volumique de masse) du mélange
- f_1, f_2 les densités ("vraies") des fluides 1 et 2 :

on a

$$\alpha f_1 = c \beta$$

$$c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\alpha = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$$

$$f_1 = \frac{m_1}{V_1}, f_2 = \frac{m_2}{V_2}, \beta = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$$

(\Leftarrow mélange de fluides non miscibles (!) \Rightarrow).

On cherche un modèle qui résiste à l'évolution des quantités $f_1, f_2, \beta, \alpha, c, u \dots$

L'outil (de modélisation) que nous allons utiliser est donc l'homogénéisation.

On se donne une suite de conditions initiales sur Π

$$\alpha_0^\varepsilon, f_{1,0}^\varepsilon, f_{2,0}^\varepsilon, u_0^\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

telle que $\alpha_0^\varepsilon(x)(1 - \alpha_0^\varepsilon(x)) = 0 \quad \forall x$
 (les fluides sont purs).

On définit

se rappeler que

$$\alpha_0^\varepsilon(1 - \alpha_0^\varepsilon) = 0$$

- f_0^ε par $f_0^\varepsilon = \alpha_0^\varepsilon f_{1,0}^\varepsilon + (1 - \alpha_0^\varepsilon) f_{2,0}^\varepsilon$,

- la loi de pression p par

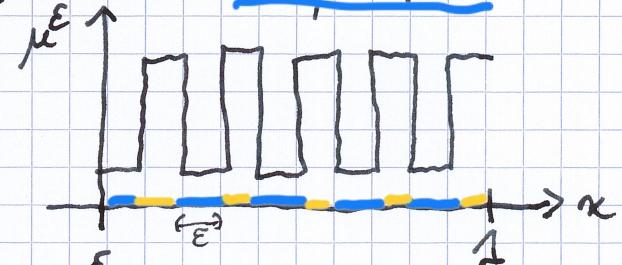
$$p(\alpha, \varphi) = \alpha p_1(\varphi) + (1 - \alpha) p_2(\varphi),$$

- la loi de viscosité μ par

$$\mu(\alpha) = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2.$$

« Rappel » : homogénéisation pour une équation elliptique.

$$\begin{cases} -(\mu^\varepsilon u^\varepsilon')' = f, \quad \text{J0,1L} \\ u^\varepsilon(0) = 0 = u^\varepsilon(1) \end{cases}$$



avec $\mu^\varepsilon(x) = \alpha_1^\varepsilon(x)\mu_1 + \alpha_2^\varepsilon(x)\mu_2$, $\mu_1, \mu_2 > 0$

$$\alpha_1^\varepsilon + \alpha_2^\varepsilon = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_1^\varepsilon \alpha_2^\varepsilon = 0.$$

Si $\alpha_1^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{L}^2 \text{faible}} \alpha_1$ (donc $\alpha_2^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{L}^2} \alpha_2 = 1 - \alpha_1$),

on peut montrer que $u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{L}^2} u$ où u est

solution de $\begin{cases} (-\mu u')' = f, \quad \text{J0,1L} \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases}$

où μ est la moyenne harmonique de μ_1 et μ_2 :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}$$

$$\left(\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1} \right).$$

Retour à Navier-Stokes

L'évolution du fluide est gouvernée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p + \partial_x p u = 0 \\ \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = 0 \quad (\text{ou } \partial_t c + u \partial_x c = 0 \dots) \\ \partial_t g u + \partial_x (g u^2 + p(\alpha, g)) = \partial_x (\mu(\alpha) \partial_x u). \end{array} \right.$$

$t > 0$
 $x \in \mathbb{T}$

L'égalité $\alpha(1-\alpha) = 0$ est préservée par ce système.

On peut le remplacer par (*« équivalent »*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = 0 \\ \partial_t g_1 + \partial_x g_1 u = 0 \\ \partial_t g_1 u + \partial_x (g_1 u^2 + p_1(g_1)) = \mu_1 \partial_{xx} u \\ \partial_t g_2 + \partial_x g_2 u = 0 \\ \partial_t g_2 u + \partial_x (g_2 u^2 + p_2(g_2)) = \mu_2 \partial_{xx} u \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans le} \\ \text{domaine où } \alpha = 1 \\ \text{dans le} \\ \text{domaine où } \alpha = 0 \end{array}$$

u continue et $\sigma = \mu \partial_x u - p$ continue aux interfaces

On a supposé qu'il n'y avait pas de tension de surface.

quelques hypothèses techniques :

- $0 < r \leq \beta_{1,0}^{\varepsilon}, \beta_{2,0}^{\varepsilon} \leq R < +\infty \quad \forall \varepsilon, p.p.(x)$
- $\int_{\Pi} G(\alpha_0^{\varepsilon}, \beta_0^{\varepsilon}) \leq M$
où $G(\alpha, \beta) = g \int_0^{\beta} \frac{p(\alpha, s)}{\beta^2} ds$

(solution d'énergies finies, à la Hoff-Desjardins).

Théorème 1 Le problème de Cauchy associé au système
mésoscopique admet une unique solution globale en temps
positif.

$$\alpha^{\varepsilon}, \beta^{\varepsilon} \in C^0(\mathbb{R}_+, L^p(\Pi)) \quad \text{et } p < +\infty,$$

$$u^{\varepsilon} \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+, H^1(\Pi)),$$

$$\alpha^{\varepsilon}(t, \cdot)(1 - \alpha^{\varepsilon}(t, \cdot)) = 0 \quad \text{p.p.}(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

La démonstration utilise très fortement des outils développés
par Hoff, Desjardins, et Hillairet et Bresch pour des données
oscillantes. 

Maintenant on fait tendre ε vers 0 et on suppose que

$$\begin{aligned} \alpha_0^\varepsilon &\xrightarrow{\text{L}^0 f_*} \alpha_0 \\ \varepsilon & \\ f_{1,0}^\varepsilon &\xrightarrow{\text{L}^1} f_{1,0} \\ f_{2,0}^\varepsilon &\xrightarrow{\text{L}^1} f_{2,0} \\ u_0^\varepsilon &\xrightarrow{H^1} u_0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{avec des formes uniformes} \\ \text{dans } \mathcal{C}^\alpha. \end{array} \right\}$$

Les questions que l'on se pose sont :

- les quantités α^ε , f^ε , u^ε convergent-elles ?
- pour quelle topologie ?
- est-il possible de trouver un système d'EDP caractérisant ces limites ?

(...)

Système macroscopique

Théorème 2

$$\begin{aligned} \alpha^\varepsilon, g^\varepsilon &\xrightarrow{\text{L}^\infty f^*} \alpha, g \\ g_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon &\xrightarrow{C([0, T], L^1(\mathbb{R}_+))} g_1, g_2 \\ u^\varepsilon &\longrightarrow u \end{aligned}$$

et ces limites sont les uniques solutions du problème de Cauchy associé à

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \varphi + \partial_x \varphi u = 0 \\ \partial_t c \varphi + \partial_x c \varphi u = 0 \\ \partial_t \varphi u + \partial_x (\varphi u^2 + p_{\text{eff}}) = \partial_x (\mu_{\text{eff}} \partial_x u) \\ \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \mu_{\text{eff}} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1} \quad (\sigma_i = \mu_i \partial_x u - p_i(g_i)) \\ p_{\text{eff}} = \frac{(1-\alpha) \mu_1 p(0, g_2) + \alpha \mu_2 p(1, g_1)}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1} \\ c \varphi = \alpha g_1 \quad \text{et} \quad (1-c) \varphi = (1-\alpha) g_2 \end{array} \right.$$

Pour simplifier choisissons $\mu_1 = \mu_2 > 0$.
 $= \mu$

On a • $\mu_{\text{eff}} = \mu$

- $P_{\text{eff}} = \alpha P_1(f_1) + (1-\alpha) P_2(f_2)$ (loi de Dalton)

- $\partial_t \alpha + u \partial_u \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\mu} (P_1(f_1) - P_2(f_2))$

↑
terme étrange venu d'ailleurs.

Cioranescu - Murat 1982

C'est un système de type Baez - Nunziato barotrope.

L'équation $\partial_t \alpha + u \partial_u \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\mu} (P_1 - P_2)$

peut être remplacée par

$$\partial_t f_1 + \partial_x f_1 u = - \frac{(1-\alpha)}{\mu} f_1 (P_1 - P_2)$$

qui est moins classique mais plus robuste

car supporte les cas où $\alpha(1-\alpha) = 0$.

Ceci permet par ailleurs d'obtenir une équation d'évolution de $P_1 - P_2$:

$$\partial_t (P_1 - P_2) + u \partial_x (P_1 - P_2) + (f_1 p_1'(f_1) - f_2 p_2'(f_2)) \partial_x u \\ = - \frac{(1-\alpha) f_1 p_1'(f_1) + \alpha f_2 p_2'(f_2)}{\mu} (P_1 - P_2).$$

Le terme de droite est un terme de relaxation.

χ permet d'espérer qu'à la limite non visqueuse

on ait $p_1(f_1) = p_2(f_2)$ (fermeture algébrique):

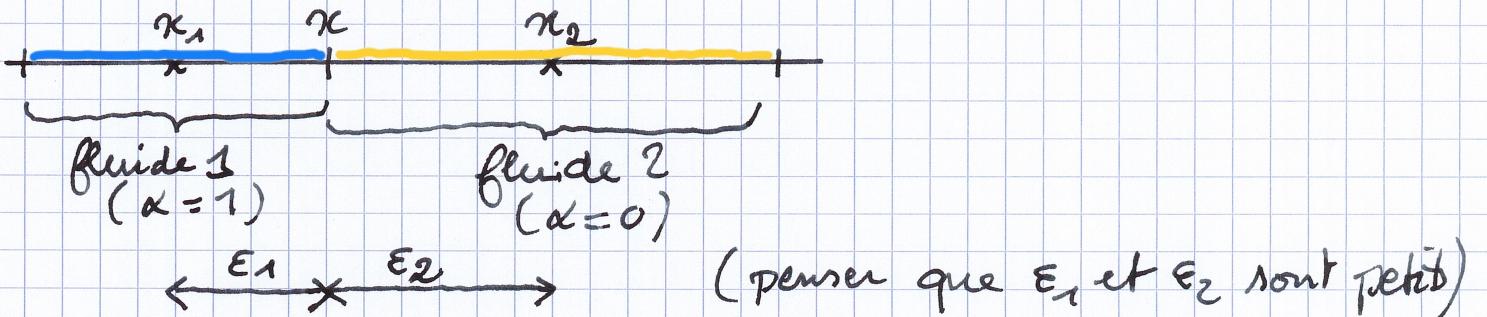
le modèle non visqueux pourrait donc s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t g + \partial_x g u = 0 \\ \partial_t c g + \partial_x c g u = 0 \\ \partial_t g u + \partial_x (g u^2 + p) = 0 \\ p = p_1(f_1) = p_2(f_2) \\ \frac{c_1}{p_1} + \frac{(1-c) \varrho}{p_2} = 1 \quad (\text{i.e. } \alpha + (1-\alpha) = 1) \end{array} \right.$$

Système en équation viscoélastique

cf. Buntea, Crăciun-Barat, Tan, M3AS

Moyen heuristique de comprendre l'équation $\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\mu} (p_1 - p_2)$:



En x on écrit que $\alpha \approx \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$. Ceci va permettre d'évaluer $D_f \alpha = \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha$. En effet

$$D_f (\epsilon_1 + \epsilon_2) \approx u(x_2) - u(x_1) \quad u \text{ est continu !}$$

et $D_f \epsilon_1 \approx u(x) - u(x_1)$, d'où

$$D_f \alpha \approx \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) D_f \epsilon_1 - \epsilon_1 D_f (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}$$

$$\approx \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)(u(x) - u(x_1)) - \epsilon_1(u(x_2) - u(x_1))}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}$$

Hypothèse pour continuer: u est continu

(3^{ème} PFD, mais c'est aussi une des propriétés fondamentales que nous démontrons) (113)

$$\text{Alors } p_1 - \mu \frac{u(x) - u(x_1)}{\varepsilon_1} \sim p_2 - \mu \frac{u(x_2) - u(x)}{\varepsilon_2},$$

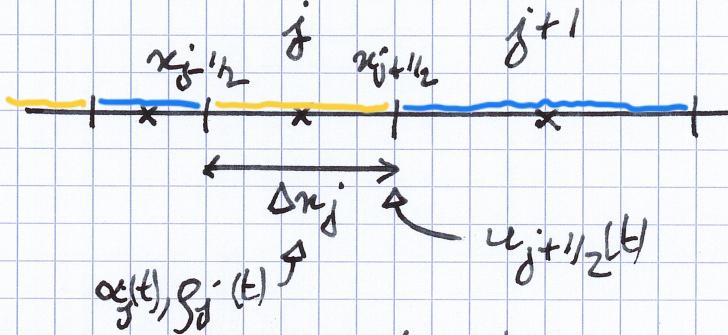
ce qui donne

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &\sim \mu \frac{\varepsilon_2(u(x_2) - u(x_1)) - \varepsilon_1(u(x_2) - u(x))}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \\ &\sim \mu \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} D_t \alpha \\ &\sim \frac{\mu}{\alpha(1-\alpha)} D_t \alpha, \quad \Leftarrow \text{CQFD} \Rightarrow. \end{aligned}$$

La preuve rigoureuse est basée sur l'obtention
d'estimations uniformes pour les énergies de Hoff,
de la compacité sur σ^E, \dots Et comme outil
les mesures d'Young.

Une autre analyse de convergence : l'analyse d'un schéma semi-discret (discret en espace) pour le système mésoscopique.

Il s'agit d'un schéma pseudo-lagrangien : le maillage se déplace à la vitesse « du fluide ».



Le schéma, continu en temps, s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}_{j+1/2} = u_{j+1/2} \\
 \dot{\alpha}_j = 0 \quad (\text{avec } \alpha_j(0)(1-\alpha_j(0))=0) \\
 \dot{f}_j \cdot \Delta x_j = 0 \\
 f_{j+1/2} \Delta x_{j+1/2} \dot{u}_{j+1/2} + p_{j+1} - p_j = \mu_{j+1} \frac{u_{j+3/2} - u_{j+1/2}}{\Delta x_{j+1}} - \mu_j \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\Delta x_j}
 \end{array} \right.$$

pour tout $j = 1, \dots, J$.

avec $p_j = p(\alpha_j, f_j)$, $\mu_j = \mu(\alpha_j)$, $\Delta x_{j+1/2} = \frac{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{2}$, $f_{j+1/2} = \frac{f_j \cdot \Delta x_j + f_{j+1} \cdot \Delta x_{j+1}}{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}$

Pourquoi un schéma (pseudo-)lagrangien ?

Parce qu'il permet d'éviter la diffusion numérique qui avait pour effet de mélanger les 2 fluides alors que nous voulons simuler le modèle mésoscopique.

Une alternative serait un schéma entierien classique mais avec une longueur caractéristique de mailles tendant vers 0 beaucoup plus vite que ϵ (taille caractéristique des zones pures) : ici on a $\Delta x = \epsilon$, ce qui est moins coûteux.

Théorème 3 Tout problème de Cauchy associé au schéma semi-discret mésoscopique admet une unique solution globale en temps positif.

C'est une conséquence, assez facile à montrer, du théorème de Cauchy-Lipschitz.

(Le numérique c'est facile)

On se donne une suite de données initiales

$$\alpha^J(0), f^J(0), f_1^J(0), f_2^J(0), u^J(0).$$

Sous les mêmes hypothèses que pour le système continu mésscopique, la suite de solutions semi-discretes $\alpha^J(t), f^J(t), f_1^J(t), f_2^J(t), u^J(t)$ converge vers une solution du système mésscopique...

On peut aussi s'amuser à discréteriser en temps le système semi-discret
(en fait c'était le but premier).

La version totalement implicite est très proche de schémas de Karpov ou Herbin-Keriji-Latché qui sont convergents (16) pour des données non oscillantes (cf. Gonik-Jaubert pour le cas oscillant)

Nous préférons une version où seul l'opérateur de diffusion (linéaire) est implicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{j+1/2}^n \Delta x_{j+1/2}^n u_{j+1/2}^{n+1} = f_{j+1/2}^n \Delta x_{j+1/2}^n u_{j+1/2}^n - \Delta t (p_{j+1}^n - p_j^n) \\ \quad + \Delta t \left(\mu_{j+1} \frac{u_{j+3/2}^{n+1} - u_{j+1/2}^{n+1}}{\Delta x_{j+1}^n} - \mu_j \frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta x_j^n} \right) \\ u_{j+1/2}^{n+1} = x_{j+1/2}^n + \Delta t u_{j+1/2}^{n+1} \\ f_j^{n+1} = f_j^n \frac{\Delta x_j^n}{\Delta x_j^{n+1}} \end{array} \right. \text{ pour } j=1, \dots, J$$

Ce schéma a l'air d'avoir de bonnes propriétés.

Il est facile de modifier ce schéma pour approcher (?) la solution macroscopique. La seule nouveauté est la discrétisation de $\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\Delta t} (p_1 - p_2)$

(écrite ici pour simplifier uniquement)

Nous proposons

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n + \Delta t \frac{\alpha_j^n(1-\alpha_j^n)}{\mu} (p_1(g_{1,j}^n) - p_2(g_{2,j}^n)).$$

Comparons ...

Quelques animations, quelques comparaisons précises,
ordre de convergence (expérimental).

Perspectives (pour les fluides barotropes)

- analyse numérique du schéma totalement discréte
- analyse asymptotique $\mu_i \rightarrow 0$ $\forall i$
- capillarité ?
- ...
- dimension supérieure ?