9,6 em 12,0

Universidade Federal de Viçosa
Curso de Ciência da Computação

Igor Lucas Dos Santos Braz - 3865
Otávio Santos Gomes - 3890
Pedro Cardoso De Carvalho Mundim - 3877

Exercício Prático 2 - Pesquisa Operacional (CCF 280)

Segundo Exercício Prático da disciplina Pesquisa Operacional - CCF 280, do curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

Professor: Marcus Henrique Soares Mendes

Florestal
2022

SUMÁRIO

Questão 1

Na questão 1, foi pedido a utilização do método gráfico para a solução de um problema de maximização. O problema é o seguinte:

Maximizar $Z = 12x_1 + 60x_2$

Sujeito a

$$0{,}25x_1 + 0{,}50x_2 \leq 36 \qquad (1)$$

$$0{,}10x_1 + 0{,}75x_2 \leq 22 \qquad (2)$$

$$0{,}10x_1 + 0{,}40x_2 \leq 15 \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (4)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (5)$$

A ferramenta escolhida para resolução do método gráfico para este problema e para o problema 2 foi o GRAPH.

Seguindo o método gráfico, primeiramente construímos as retas relacionadas às restrições do problema, as quais nos darão determinada região. Isso nos dá o que é mostrado na Figura 1.

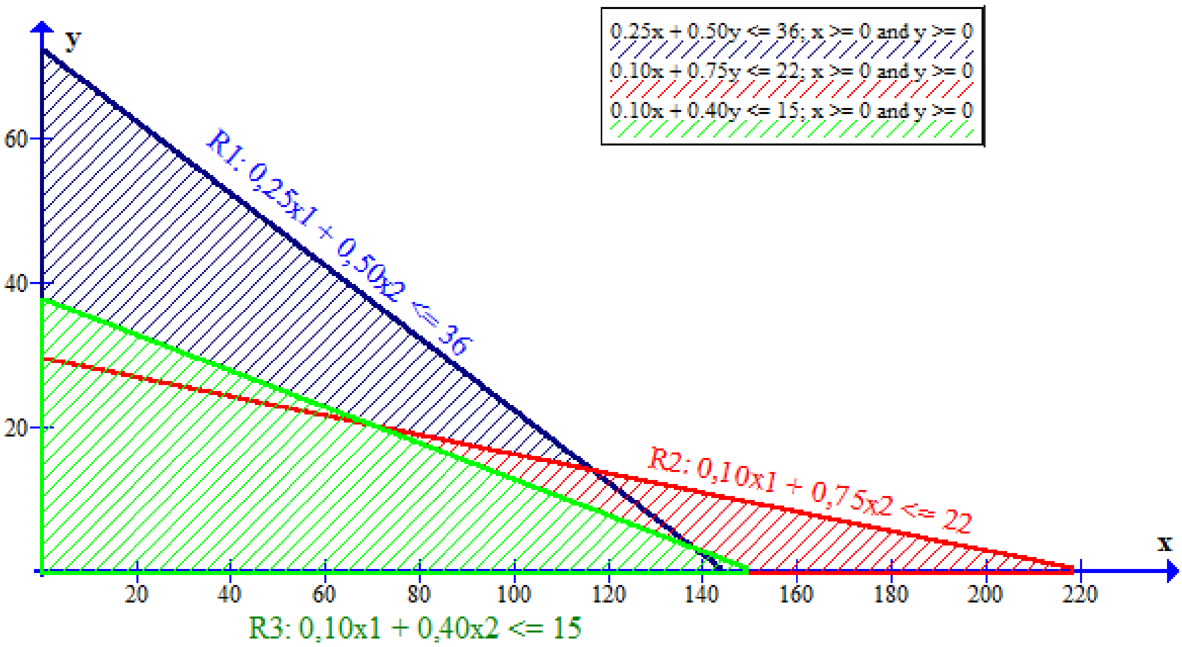

Figura 1: Regiões das restrições do problema 1.

Temos que a restrição 1 está representada em azul; a restrição 2 está representada de vermelho; a restrição 3 está representada de verde. Como as restrições 4 e 5 são de não negatividade, então usaremos apenas o primeiro quadrante, conforme mostrado.

O próximo passo é encontrar a região de espaço de soluções viáveis, ou seja, a região de intersecção entre as três regiões dadas pelas restrições. Essa região é mostrada na Figura 2.

Figura 2: Intersecção das regiões das restrições.

Agora, utilizamos as retas paralelas para determinar o valor da solução ótima entre os pontos viáveis do polígono formado pelas restrições. Isolando a variável x_2 na equação da função objetivo obteremos: $\mathbf{x_2} = \frac{Z - 12x1}{60}$.

Como se trata de um problema de maximização, precisamos identificar a direção em que a função objetivo cresce. Para fazer isso, atribuímos valores arbitrários crescentes à função objetivo Z e representamos suas retas geradas. Suponhamos para esse problema Z = 1020, 1530 e 2040. Ao substituir estes valores em Z na equação acima, teremos o que é mostrado na Figura 3.

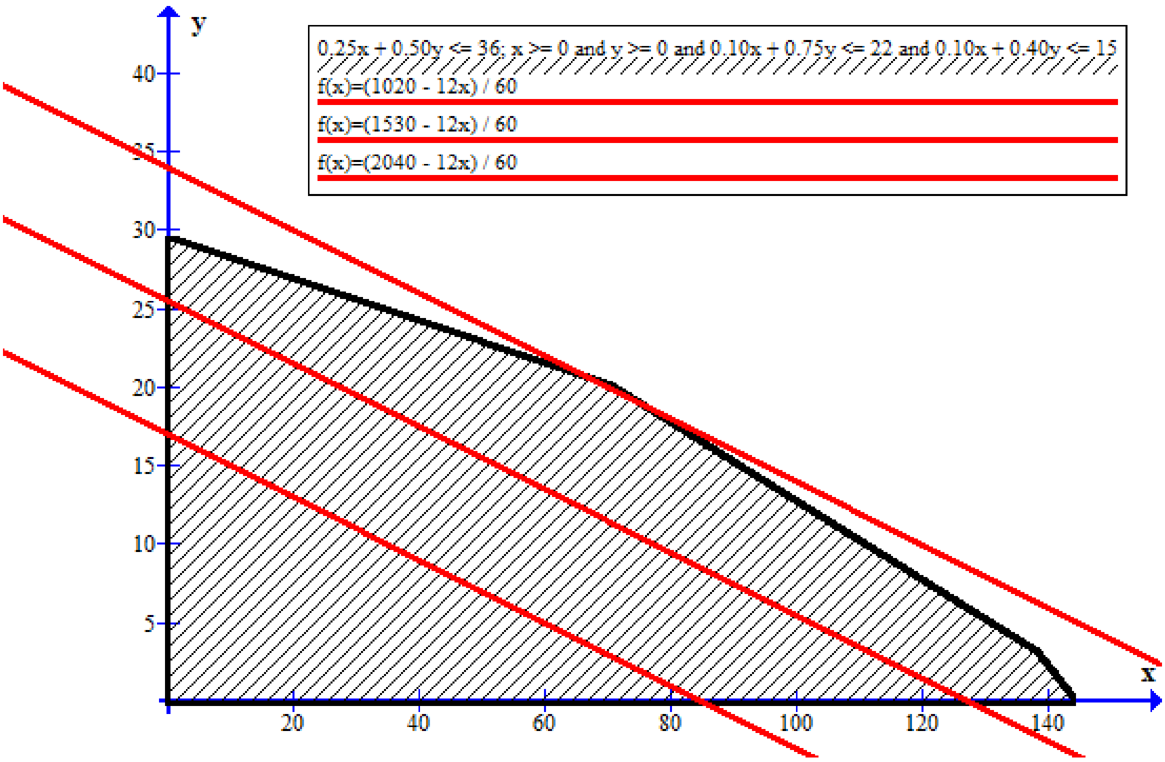

Figura 3: Aproximação de valores para Z.

Resolvendo o sistema dados por duas das restrições:

$$0{,}25x_1 + 0{,}50x_2 = 36$$

$$0{,}10x_1 + 0{,}75x_2 = 22$$

obteremos: $x_1 = \frac{1280}{11}$ e $x_2 = \frac{152}{11}$

Substituindo em Z: A solução ótima correta possui x1=70 e x2=20 resultando em z=2040

$Z = 12x_1 + 60x_2$ teremos

$Z = 12 * \frac{1280}{11} + 60 * \frac{152}{11} = \frac{24480}{11}$ que equivale a aproximadamente 2225.

É possível observar que o valor 2040 escolhido em Z anteriormente, quase alcançou o valor ótimo, dado por aproximadamente 2225, como calculado no sistema acima.

Questão 2

Na questão 2, assim como na questão 1, foi pedido a utilização do método gráfico para a solução de um problema, mas desta vez de minimização. O problema é o seguinte:

Minimizar $Z = 2x_1 - x_2$

Sujeito a

$x_1 - 2x_2 \geq 2$	**(1)**
$-x_1 + 3x_2 \geq 6$	**(2)**
$x_1 \geq 0$	**(3)**
$x_2 \geq 0$	**(4)**

A ferramenta escolhida, como comentado anteriormente, foi o GRAPH.

Seguindo o método gráfico, primeiramente construímos as retas relacionadas às restrições do problema, as quais nos darão determinada região. Isso nos dá o que é mostrado na Figura 4.

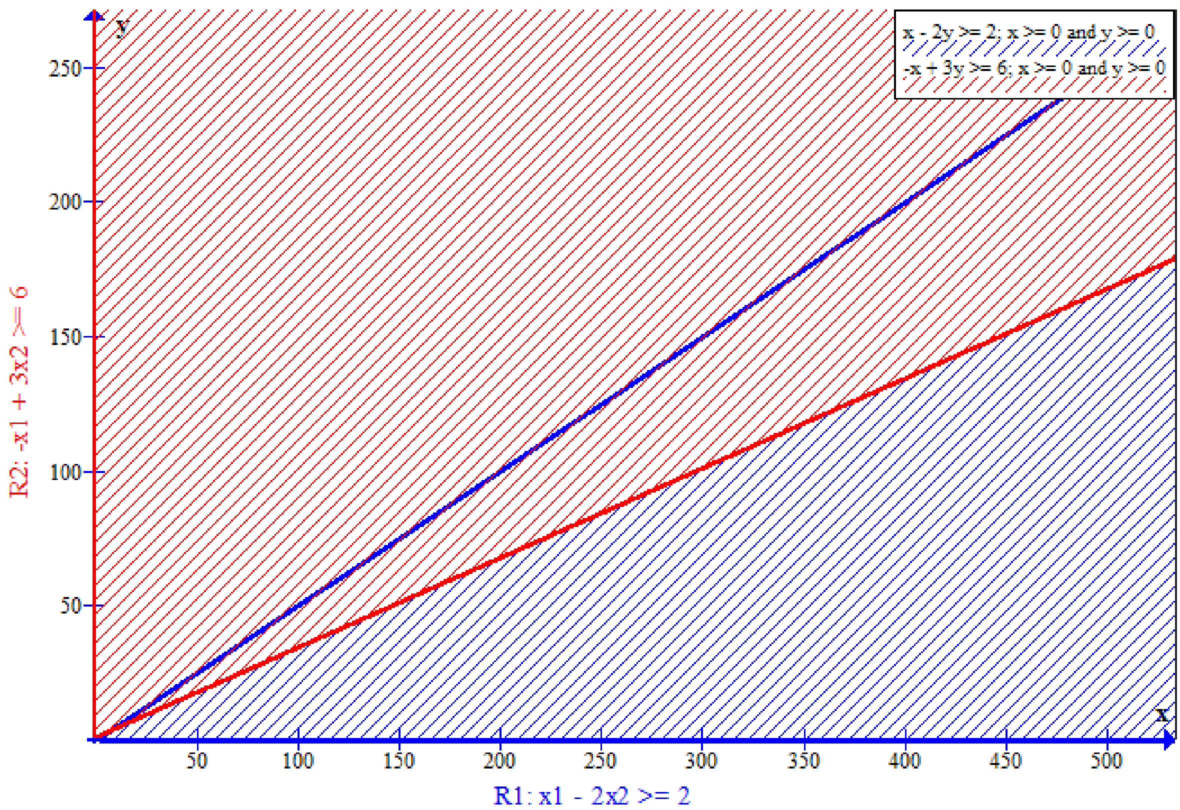

Figura 4: Regiões das restrições do problema 2.

Temos que a restrição 1 está representada em azul; a restrição 2 está representada de vermelho. Como as restrições 3 e 4 são de não negatividade, então usaremos apenas o primeiro quadrante, conforme mostrado.

O próximo passo é encontrar a região de espaço de soluções viáveis, ou seja, a região de intersecção entre as duas regiões dadas pelas restrições. Essa região é mostrada na Figura 5.

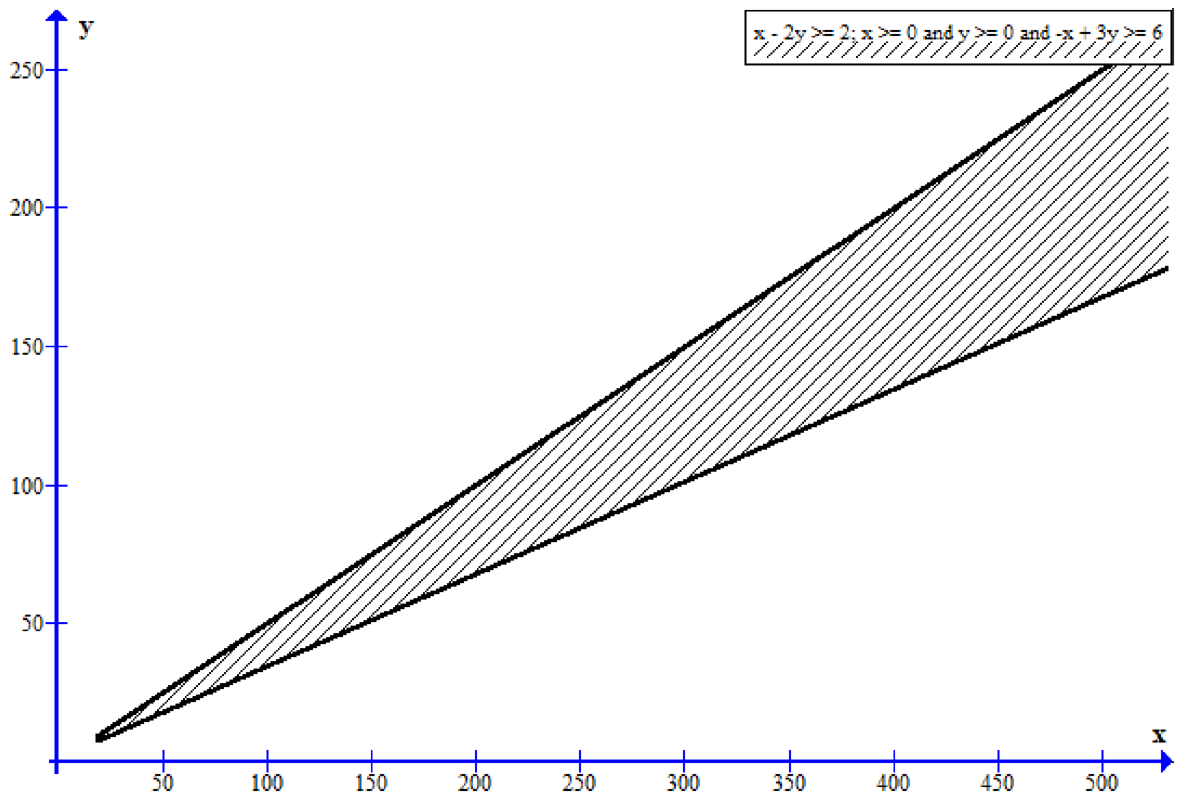

Figura 5: Intersecção das regiões das restrições.

Agora, utilizamos as retas paralelas para determinar o valor da solução ótima entre os pontos viáveis do polígono formado pelas restrições. Isolando a variável x_2 na equação da função objetivo obteremos: $\mathbf{x_2 = - Z + 2x_1}$**.**

Como se trata de um problema de minimização, precisamos identificar a direção em que a função objetivo decresce. Para fazer isso, atribuímos valores arbitrários decrescentes à função objetivo Z e representamos suas retas geradas. Suponhamos para esse problema Z = 560, 280 e 50. Ao substituir estes valores em Z na equação acima, teremos o que é mostrado na Figura 6.

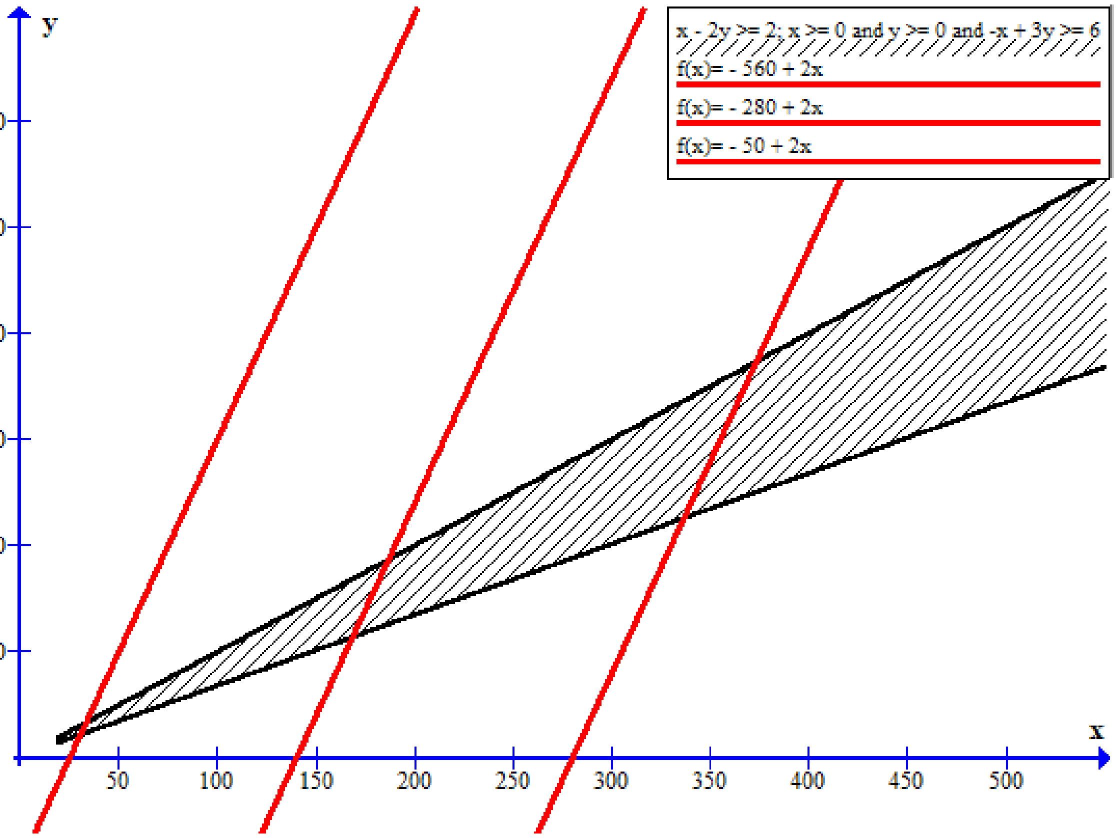

Figura 6: Aproximação de valores para Z.

Resolvendo o sistema dados por duas das restrições:

$x_1 - 2x_2 = 2$

$- x_1 + 3x_2 = 6$

obteremos: $x_1 = 18$ e $x_2 = 8$

Substituindo em Z:

$Z = 2x_1 - x_2$ teremos

$Z = 2 * 18 - 8 = 28.$

É possível observar que o valor 50 escolhido em Z anteriormente, quase alcançou o valor ótimo, dado por aproximadamente 28, como calculado no sistema acima.

Questão 3

Na questão 3, foi pedido a utilização do LINDO para a solução de um problema de maximização. O problema é o seguinte:

Maximizar $Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

Sujeito a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \qquad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 16 \qquad (2)$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 18 \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (4)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (5)$$

$$x_3 \geq 0 \qquad (6)$$

Utilizando-se da sintaxe do LINDO, temos o problema reescrito conforme a Figura 7.

```
MAX 2x1 + 4x2 + 3x3

ST
x1 + x2 + 2x3 < 6
2x1 + 2x2 + 3x3 < 16
x1 + 4x2 + x3 < 18

END
```

Figura 7: Problema 3 reescrito no LINDO.

Nela temos a palavra “MAX” indicando que o problema é de maximização; “ST” que indica a quais restrições ele está sujeito; “END” que indica o término. Notemos que nas restrições, o símbolo de ≤ é reescrito apenas como <, conforme estudado na disciplina. Outra observação é que não é necessário escrever as restrições de não negatividade.

Após escrever a sintaxe conforme mostrado, o LINDO retorna o resultado conforme a Figura 8.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      20.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         2.000000          0.000000
       X2         4.000000          0.000000
       X3         0.000000          0.333333


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          1.333333
       3)         4.000000          0.000000
       4)         0.000000          0.666667

NO. ITERATIONS=       2
```

Figura 8: Resultado do problema 3 no LINDO (relatório 1).

Aqui temos algumas informações importantes. A primeira diz respeito ao "LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2", que nos fala que a solução ótima foi encontrada com duas iterações. Em seguida temos "OBJECTIVE FUNCTION VALUE" que tem resultado 20, ou seja, a função objetivo possui resultado 20. Seguindo temos "VARIABLE" que mostra as variáveis e seus respectivos valores no ponto ótimo. "REDUCED COST" mostra os valores de custo reduzido. "SLACK OR SURPLUS" mostra folgas ou excessos. "DUAL PRICES" mostra os preços duais.

Em seguida, um outro relatório gerado no LINDO para este problema é dado, conforme a Figura 9.

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    COEF          INCREASE         DECREASE
      X1          2.000000        2.000000         0.142857
      X2          4.000000        1.000000         2.000000
      X3          3.000000        0.333333         INFINITY

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW          CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS           INCREASE         DECREASE
       2          6.000000        2.000000         1.500000
       3         16.000000        INFINITY         4.000000
       4         18.000000        6.000000        12.000000
```

Figura 9: Resultado do problema 3 no LINDO (relatório 2).

Este relatório é chamado de relatório de análise de sensibilidade. No momento em que estamos na disciplina ainda não foi estudado a fundo sobre este relatório.

Questão 4

Na questão 4, também foi pedido a utilização do LINDO para a solução de um problema, mas desta vez, de minimização. O problema é o seguinte:

Minimizar $Z = 2x_1 - x_2 - x_3$

Sujeito a

$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 120$	**(1)**
$-x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 90$	**(2)**
$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 60$	**(3)**
$x_1 \geq 0$	**(4)**
$x_2 \geq 0$	**(5)**
$x_3 \geq 0$	**(6)**

Utilizando-se da sintaxe do LINDO, temos o problema reescrito conforme a Figura 10.

```
MIN 2x1 - x2 - x3

ST
3x1 + 5x2 + 4x3 < 120
-x1 + 2x2 + 4x3 < 90
2x1 - x2 + 2x3 < 60

END
```

Figura 10: Problema 4 reescrito no LINDO.

Aqui, a diferença entre o problema 3 é que nela temos a palavra "MIN" indicando que o problema é de minimização. Todas as outras observações feitas para o problema 3 a respeito da sintaxe valem para este problema.

Após escrever a sintaxe conforme mostrado, o LINDO retorna o resultado conforme a Figura 11.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)     -27.50000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         0.000000          2.416667
       X2        10.000000          0.000000
       X3        17.500000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.166667
       3)         0.000000          0.083333
       4)        35.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

Figura 11: Resultado do problema 4 no LINDO (relatório 1).

Aqui temos algumas informações importantes. A primeira diz respeito ao "LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2", que nos fala que a solução ótima foi encontrada com duas iterações. Em seguida temos "OBJECTIVE FUNCTION VALUE" que tem resultado -27.5, ou seja, a função objetivo possui resultado -27.5. Seguindo temos "VARIABLE" que mostra as variáveis e seus respectivos valores no ponto ótimo. "REDUCED COST" mostra os valores de custo reduzido. "SLACK OR SURPLUS" mostra folgas ou excessos. "DUAL PRICES" mostra os preços duais.

Em seguida, um outro relatório gerado no LINDO para este problema é dado, conforme a Figura 12.

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      X1        2.000000         INFINITY         2.416667
      X2       -1.000000         0.500000         0.250000
      X3       -1.000000         0.200000         1.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE         DECREASE
       2      120.000000       105.000000        30.000000
       3       90.000000        30.000000        42.000000
       4       60.000000         INFINITY        35.000000
```

Figura 12: Resultado do problema 4 no LINDO (relatório 2).

Este relatório é chamado de relatório de análise de sensibilidade. No momento em que estamos na disciplina ainda não foi estudado a fundo sobre este relatório.

Questão 5

Nesta questão foi pedido para escolher um dos problemas anteriores para ser resolvido no solver do excel ou do libreoffice. O problema escolhido foi o 3 e será utilizado o solver do excel.

Maximizar $Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

Sujeito a

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$ **(1)**

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 16$ **(2)**

$x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 18$ **(3)**

$x_1 \geq 0$ **(4)**

$x_2 \geq 0$ **(5)**

$x_3 \geq 0$ **(6)**

Primeiramente, colocam-se os dados do problema na planilha, conforme visto em aula. A planilha com os dados do problema é apresentada na Figura 13.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	**Variáveis de Decisão**						
4	x1	x2	x3				
5							
6							
7							
8	**Coeficientes da Função Objetivo**						
9	x1	x2	x3			Função Objetivo	
10	2	4	3			0	
11							
12							
13	**Coeficientes das Restrições**				**Restrições**		
14		x1	x2	x3	Lado Esquerdo	Lado Direito	
15	R1	1	1	2	0	6	
16	R2	2	2	3	0	16	
17	R3	1	4	1	0	18	

Figura 13: Dados do problema 3 na planilha do Excel.

Em seguida, os dados devem ser colocados no solver, tendo-se as fórmulas estruturadas para as células F10, E15, E16 e E17.

As fórmulas são:

- F10 = A10 * A5 + B10 * B5 + C10 *C5
- E15 = B15* \$A\$5 + C15 * \$B\$5 + D15 * \$C\$5
- E16 = B16* \$A\$5 + C16 * \$B\$5 + D16 * \$C\$5
- E17 = B17* \$A\$5 + C17 * \$B\$5 + D17 * \$C\$5

Ao inserir os parâmetros no Solver, tem-se o que está mostrado na Figura 14.

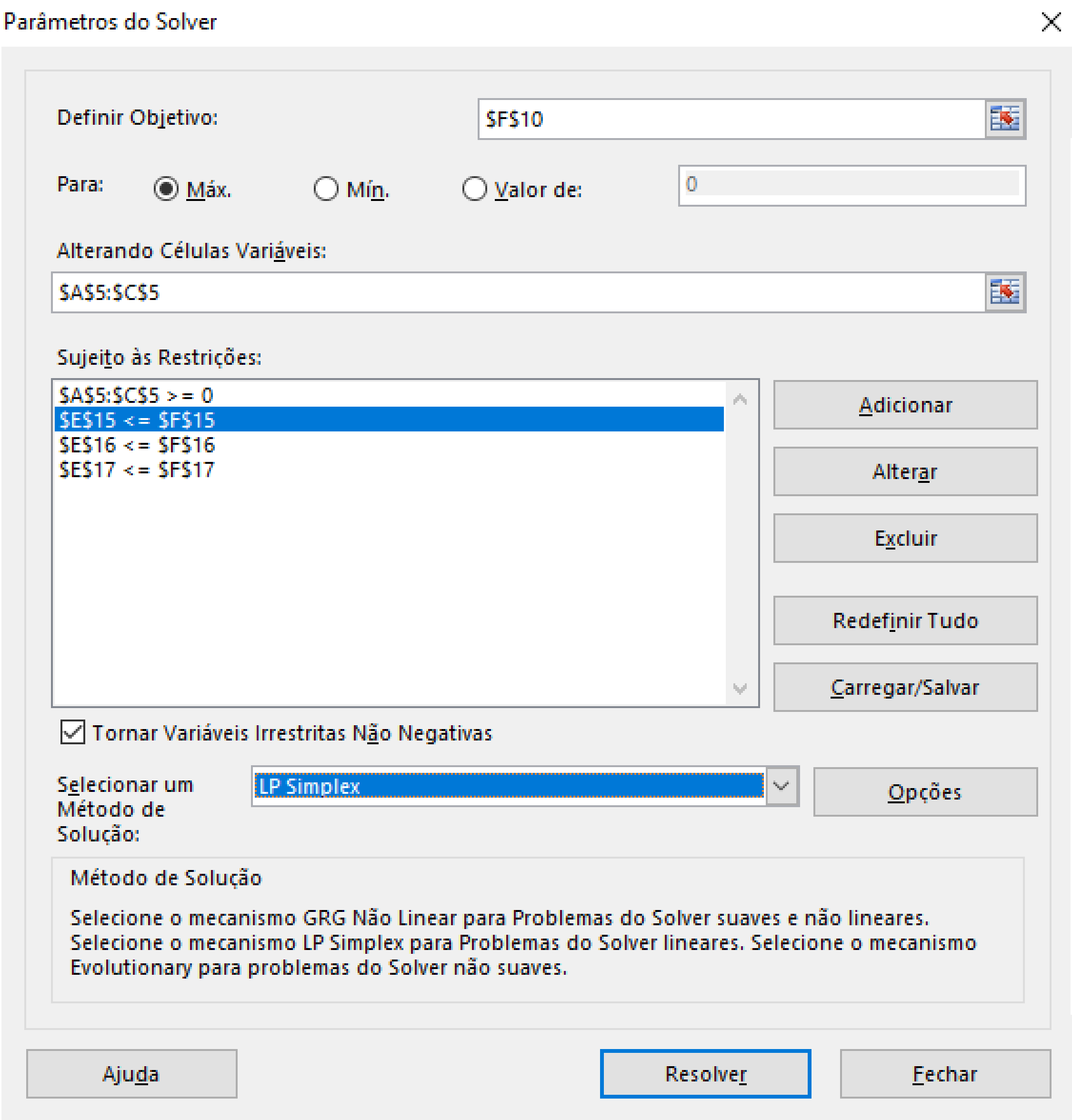

Figura 14: Dados do problema 3 no solver, de acordo com as fórmulas estruturadas.

Por fim, o solver retorna o resultado do problema conforme a Figura 15.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	**Variáveis de Decisão**						
4	x1	x2	x3				
5	2	4	0				
6							
7							
8	**Coeficientes da Função Objetivo**						
9	x1	x2	x3			Função Objetivo	
10	2	4	3			20	
11							
12							
13	**Coeficientes das Restrições**				**Restrições**		
14		x1	x2	x3	Lado Esquerdo	Lado Direito	
15	R1	1	1	2	6	6	
16	R2	2	2	3	12	16	
17	R3	1	4	1	18	18	

Figura 15: Resultado do problema 3 no solver.

É possível observar que o resultado foi o mesmo encontrado ao resolver o problema no LINDO.