

## Capítulo 3

# Una introducción al control clásico

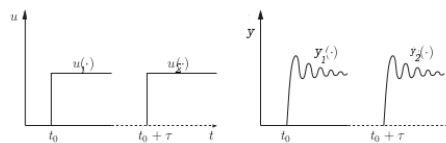
### 3.1. Identificación de sistemas

Como se dijo en el capítulo anterior se puede pensar en un sistema como un dispositivo que recibe entradas y produce salidas. Generalmente se puede modelizar la relación entre la salida y la entrada del sistema mediante una función matemática, así que supondremos  $y(t) = f(u(t))$ , donde  $u(t)$  representa la entrada e  $y(t)$  la salida siendo  $t$  la variable temporal.

Introducimos ahora terminología relativa a los sistemas.

- **Tiempo inicial:** Instante antes del cual no hay entradas:  $t_0$ .
- **Causalidad:** Si para cada  $t$ , la salida en el instante  $t$ ,  $y(t)$ , sólo depende de la entrada hasta dicho instante:  $u(s)$   $s \in [t_0, t]$ .
- **Invarianza en el tiempo:** La relación entre las entrada y salida es la misma  $\forall t \geq t_0$ :

$$y_1(t) = f(u_1(t)), y_2(t) = f(u_2(t)), u_2(t) = u_1(t + \tau) \Rightarrow y_2(t) = y_1(t + \tau).$$



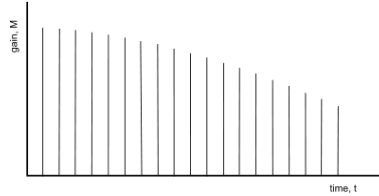
- **Linealidad o superposición:**  $y = f(u)$  lineal si  $\forall u_1, u_2, \forall a_1, a_2$  constantes,

$$f(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) = a_1 y_1 + a_2 y_2.$$

- **Sistemas LTI:** Sistemas lineales e invariantes en el tiempo.
- **Sistemas agrupados (*lumped*) vs. distribuidos:** según que el número de posibles estados sea finito o infinito.
- **Sistemas SISO vs. MIMO:** *Single Input-Single Output* o *Multiple Inputs-Multiple Outputs*.
- **Sistemas de tiempo continuo:** Acepta entradas y produce salidas definidas para  $t \in \mathbb{R}$ .



- **Sistemas de tiempo discreto:** Acepta entradas y produce salidas definidas para  $t \in \mathbb{Z}$ .



- **Función de Transferencia:** Para sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), es el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la de la entrada con condición inicial igual a 0.

### 3.2. La transformada de Laplace

Sea  $f(t)$  una función real que satisface  $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$  para algún  $\alpha, M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$ . La integral  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  está definida para todo  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\Re s > \alpha$ , donde  $\Re s$  representa la parte real del número complejo  $s$ . Se define la **transformada de Laplace** (por un lado) de  $f$ , y se denota por  $\hat{f}$  o por  $\mathcal{L}(f)$ , como

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

El comando de MATLAB (Symbolic Toolbox) para calcular la transformada de Laplace de una función es `laplace`.

Escribimos aquí algunas propiedades de la transformada de Laplace.

- (i)  $\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$
- (ii)  $\mathcal{L}(\dot{f}) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$
- (iii)  $\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$  si y sólo si  $h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
- (iv)  $\widehat{f}(s) \rightarrow 0$  para  $\Re s \rightarrow \infty$ .

A la función  $h(t)$  del apartado (iii) se le llama *convolución de  $f$  y  $g$* , y se suele denotar de la siguiente forma:

$$(g * f)(t) = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Ahora bien, mediante el cambio de variable  $t - \tau = s$ , es fácil ver que

$$\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

Por consiguiente

$$(g * f)(t) = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (f * g)(t). \quad (3.1)$$

En otras palabras, la convolución es conmutativa.

La transformada de Laplace convierte una ecuación diferencial en el dominio del tiempo ( $t \in \mathbb{R}_+$ ) en una ecuación algebraica en el dominio  $s \in \mathbb{C}$  ( $\Re s > \alpha$ ). Se puede resolver la ecuación algebraica en el dominio  $s$  y obtener la solución de la ecuación diferencial en el dominio  $t$  mediante la inversa de la transformada de Laplace.

La **transformada inversa de Laplace** de  $\widehat{f}(s)$  es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\widehat{f})(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{st} \widehat{f}(s) ds$$

donde  $\beta$  es una constante real tal que  $\beta > \alpha$ .

El comando de MATLAB (Symbolic Toolbox) para calcular la transformada inversa de Laplace es `ilaplace`.

### 3.3. Función de transferencia y convolución

Sea un sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo

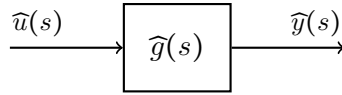
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

con  $n \geq m$ .

Su función de transferencia se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) supuesto que todas las condiciones iniciales son cero, es decir, supuesto el sistema en reposo en  $t_0 = 0$ . Así, la función de transferencia es:

$$\widehat{g}(s) = \frac{\mathfrak{L}(\text{salida})}{\mathfrak{L}(\text{entrada})} \Big|_{\text{condiciones iniciales cero}} = \frac{\widehat{y}(s)}{\widehat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}.$$

Por lo tanto,  $\widehat{y}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{u}(s)$ . Si se tiene en cuenta que una relación entre una salida y una entrada representa una ganancia, una función de transferencia se puede ver como una función de ganancia.



Puesto que  $\widehat{y}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{u}(s)$ , por la propiedad (iii), la función de salida  $y(t)$  es la convolución de  $u(t)$  y  $g(t)$ . Es decir (véase (3.1)):

$$y(t) = (g * u)(t) = \int_0^t u(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau,$$

donde tanto  $g(t)$  como  $u(t)$  son cero para  $t < 0$ . La función  $y(t)$  es la respuesta del sistema a la entrada  $u(t)$ .

**Ejemplo 3.1** Sea un sistema cuya función de transferencia es  $\widehat{g}(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$ . ¿Cuál es la respuesta del sistema a una entrada  $u(t)$ ?

El desarrollo de  $\frac{s+2}{s^2+4s+3}$  en fracciones simples es

$$\frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}.$$

Así,  $s+2 = A(s+3) + B(s+1)$ . Cuando  $s = -3$  obtenemos  $-1 = B(-2)$ , con lo que  $B = 1/2$  y cuando  $s = -1$  obtenemos  $1 = 2A$ , con lo que  $A = 1/2$ . Por lo tanto,  $\widehat{g}(s) = \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3}$ . Utilizando las tablas de las transformadas de Laplace,  $g(t) = 1/2(e^{-t} + e^{-3t})$  y, por la propiedad (iii),

$$y(t) = \int_0^t 1/2(e^{-\tau} + e^{-3\tau})u(t - \tau)d\tau.$$

■

### 3.4. Funciones de entrada básicas

La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático que relaciona la variable de salida con la variable de entrada. Conocida la función de transferencia se suele estudiar la salida o respuesta para varias formas de entrada, con la intención de conocer la naturaleza del sistema. Las funciones de entrada más habituales son: *salto unidad* (o *función de Heaviside*), *rampa unidad* y, sobre todo, *impulso unidad* (o *delta de Dirac*).

Las dos primeras se definen de la siguiente forma:

Función **salto unidad** en  $a \in \mathbb{R}_+$ :

$$\gamma_a(t) := \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

no estando definida en  $t = a$ .

Función **rampa unidad** en  $a \in \mathbb{R}_+$ :

$$r_{T,a}(t) := \begin{cases} 0, & t < a \\ (t-a)/T, & a \leq t \leq a+T \\ 1, & t > a+T \end{cases}.$$

El caso de la delta de Dirac es un poco más delicado. En una primera aproximación intuitiva se puede pensar en ella como una “función” que es cero en todos los puntos de la recta real excepto en uno de ellos, digamos  $a$ , en el que vale infinito:

$$\delta_a(t) := \begin{cases} 0, & t \neq a \\ +\infty, & t = a, \end{cases} \quad (3.2)$$

y que satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t) dt = 1. \quad (3.3)$$

Estamos poniendo “función” (entre comillas) porque, en realidad, no hay ninguna función definida en la recta real en el sentido tradicional que cumpla las dos propiedades (3.2) y (3.3) simultáneamente. A pesar de ello, abusando del lenguaje, se suele hablar de ella como la *función delta de Dirac* o la *función impulso unidad*. Ahora bien, la función delta de Dirac puede ser rigurosamente definida como una medida o una distribución. Un estudio detallado de los conceptos involucrados está fuera del alcance de este curso, pero haciendo uso elemental de la teoría de distribuciones podemos fijar algunas ideas que nos permiten manejar la delta de Dirac con el suficiente rigor.

En la Figura 3.1 se presentan las gráficas de las funciones rampa unidad, salto unidad, derivada de la función rampa y una idealización de la función impulso unidad que pretende dar una idea de lo que sería una “función” que cumple (3.2) y (3.3). Observamos que la

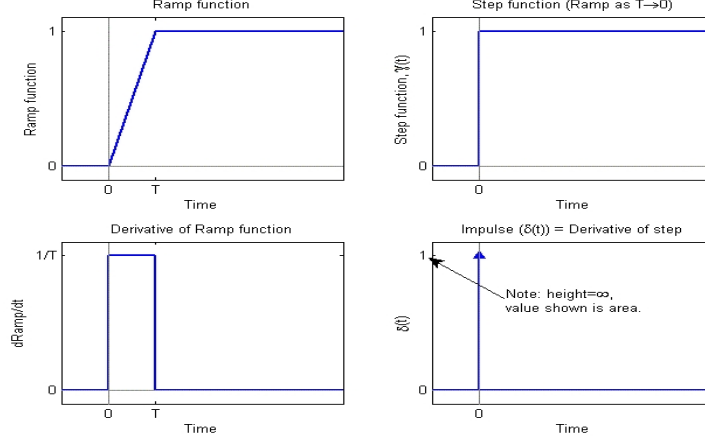


Figura 3.1: Arriba: gráficas de las funciones rampa y salto unidad. Abajo: gráfica de la derivada de la función rampa e idealización de la función impulso unidad. Todo ello con  $a = 0$

derivada de la función rampa es

$$d_{T,a}(t) := \dot{r}_{T,a}(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{1}{T}, & a < t < a + T \\ 0, & t > a + T \end{cases} \quad (3.4)$$

no estando propiamente definida en  $a$  y  $a + T$ . Se trata de una función acotada en forma de escalera con un número finito de discontinuidades y que es, por lo tanto, integrable en el sentido de Riemann. De hecho, podemos escribir

$$d_{T,a}(t) = \frac{1}{T} (\gamma_a(t) - \gamma_{a+T}(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

o, teniendo en cuenta que  $\gamma_a(t) = \gamma_0(t - a)$  y que habitualmente se suele escribir  $\gamma_0 = \gamma$ ,

$$d_{T,a}(t) = \frac{1}{T} (\gamma(t - a) - \gamma(t - a - T)) = d_{T,0}(t - a) =: d_T(t - a), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Es claro además que, siempre que  $T > 0$  y  $[a, a + T] \subseteq [-b, b]$  (incluyendo  $b = \infty$ ),

$$\int_{-b}^b d_{T,a}(t) dt = 1.$$

Tanto las representaciones gráficas de la Figura 3.1 como las ideas que acabamos de desarrollar pueden hacernos pensar que la función impulso unidad es el límite de la derivada de la función rampa cuando  $T \rightarrow 0$ . Es fácil comprobar, sin embargo, que para cada  $t \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ ,  $d_{T,a}(t) \rightarrow 0$  puntualmente y que  $d_{T,a}(a)$  diverge cuando  $T \rightarrow 0$ ; pero que la convergencia no es uniforme. A pesar de ello, la delta de Dirac se puede definir rigurosamente de forma que la idea intuitiva

$$\lim_{T \rightarrow 0} d_{T,a}(t) = \delta_a(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

tenga sentido (véase el Apéndice A). En lo que sigue pensaremos intuitivamente en la delta de Dirac como si fuera el límite de la derivada de la función rampa cuando  $T \rightarrow 0$  y haremos uso de las siguientes propiedades que se demuestran de forma rigurosa en el Apéndice A:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\delta(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\delta(u)du = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

y

$$\gamma'(t) = \delta(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Con estas propiedades en nuestras manos veamos ahora cuál es la respuesta de un sistema al impulso unidad  $\delta(t)$ . La transformada de Laplace de  $\delta(t)$  es 1. En efecto, usando (3.6) con  $t = 0$  y  $f(t) = e^{st}$  tenemos

$$\widehat{\delta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\delta(u)du = \int_0^{\infty} e^{s(0-u)}\delta(u)du = e^{s \cdot 0} = 1.$$

Por lo tanto, si la función de transferencia de un sistema es  $\widehat{g}(s)$ , la transformada de Laplace de la función de respuesta al impulso unidad es la misma  $\widehat{g}(s)$ :

$$\widehat{y}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{\delta}(s) = \widehat{g}(s). \quad (3.8)$$

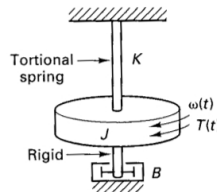
Así,  $y(t) = g(t)$ , de modo que  $g(t)$  se puede interpretar como la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo a una entrada impulso unidad cuando las condiciones iniciales son cero. La transformada de Laplace de esta función es la función de transferencia del sistema. Es posible obtener la información completa sobre las características dinámicas de un sistema si se excita con una entrada impulso y se mide la respuesta (en la práctica, una entrada pulso de duración muy corta respecto al tiempo significativo del sistema se considera un impulso).

Veamos ahora la respuesta de un sistema al salto unidad. La transformada de Laplace de  $\gamma(t)$  es  $1/s$  (ver tabla, calcular directamente o usar (3.7)). Por lo tanto, si la función de transferencia de un sistema es  $\widehat{g}(s)$ , la función de respuesta al salto unidad es  $\widehat{y}(s) = \widehat{g}(s)\frac{1}{s}$ . Por la propiedad (iii) de la transformada de Laplace, la respuesta al salto unidad es

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)\gamma(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)d\tau. \quad (3.9)$$

### 3.5. Función de transferencia para un sistema mecánico

Recordemos que para el siguiente sistema mecánico rotacional



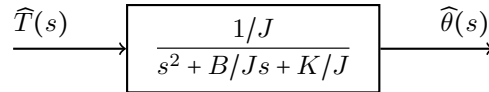
la ecuación diferencial que describe su dinámica es

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = T(t). \quad (3.10)$$

Supongamos que inicialmente este sistema está relajado o en reposo, es decir, que en  $t_0 = 0$  las condiciones iniciales son cero. Por definición, su función de transferencia es

$$\widehat{g}(s) = \frac{\widehat{\theta}(s)}{\widehat{T}(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K} = \frac{1/J}{s^2 + B/Js + K/J}.$$

Así,



Si la variable de entrada es un par salto unidad  $T(t) = 1,0\gamma(t)\text{N}\cdot\text{m}$  y los valores de  $J$ ,  $B$  y  $K$  son  $J = 0,5 \text{ Kgr}\cdot\text{m}^2$ ,  $B = 2,0 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad.}$ ,  $K = 1,5 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad.}$  entonces

$$\widehat{\theta}(s) = \frac{1/J}{s^2 + B/Js + K/J} \widehat{T}(s) = \frac{2}{(s^2 + 4s + 3)s} = \frac{2/3}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/3}{s+3}.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace (ver tabla)

$$\theta(t) = \left( \frac{2}{3} - e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \right) \gamma(t),$$

o lo que es lo mismo,

$$\theta(t) = \frac{2}{3} - e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t}, \quad t > 0.$$

También se podía haber obtenido  $\theta(t)$  calculando  $g(t)$  y aplicando (3.9):

$$\widehat{g}(s) = \frac{1/J}{s^2 + B/Js + K/J} = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace (ver tabla)

$$g(t) = (e^{-t} - e^{-3t})\gamma(t) \text{ o } g(t) = (e^{-t} - e^{-3t}), \quad t > 0$$

y aplicando (3.9)

$$\theta(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-3\tau}) d\tau = \frac{2}{3} - e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t}, \quad t > 0.$$

Esta función  $\theta(t)$  es la respuesta del sistema a una entrada  $T(t) = 1,0\gamma(t)\text{N}\cdot\text{m}$  para los valores de  $J$ ,  $B$  y  $K$  anteriormente mencionados. Esto quiere decir que  $\theta(t)$  es la solución de (3.10) para esos valores con condiciones iniciales cero (es decir,  $\theta(0) = 0$  y  $\dot{\theta}(0) = 0$ ).



Por otra parte, nótese que conocida la función de transferencia de un sistema, se puede recuperar la ecuación diferencial. Sabemos que

$$\widehat{g}(s) = \frac{\widehat{\theta}(s)}{\widehat{T}(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K}.$$

Multiplicando en cruz

$$\widehat{T}(s) = (Js^2 + Bs + K)\widehat{\theta}(s).$$

La función de transferencia describe un sistema inicialmente relajado, con lo que aplicando la transformada inversa de Laplace a ambos lados de la ecuación se obtiene la ecuación diferencial del sistema (3.10).

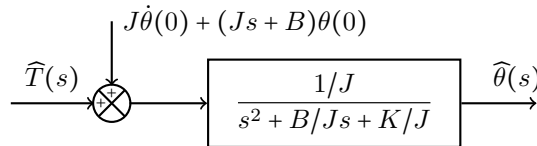
Supongamos ahora que las condiciones iniciales en  $t_0 = 0$  no son cero. Realizando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación (3.10) se obtiene

$$\widehat{T}(s) = (Js^2 + Bs + K)\widehat{\theta}(s) - J\dot{\theta}(0) - (Js + B)\theta(0)$$

$$\widehat{\theta}(s) = \frac{\widehat{T}(s)}{Js^2 + Bs + K} + \frac{J\dot{\theta}(0) + (Js + B)\theta(0)}{Js^2 + Bs + K} =$$

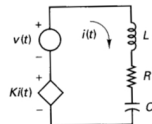
$$(\widehat{T}(s) + (J\dot{\theta}(0) + (Js + B)\theta(0))) \frac{1/J}{s^2 + B/Js + K/J}.$$

$J\dot{\theta}(0) + (Js + B)\theta(0)$  puede verse como una excitación adicional:



### 3.6. Función de transferencia para un circuito eléctrico

Considérese el circuito eléctrico de la figura en el que la entrada es  $v(t)$  y la salida  $i(t)$ . Supongamos que está inicialmente ( $t_0 = 0$ ) en reposo.



La ecuación diferencial correspondiente es

$$v(t) + Ki(t) = L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = Li(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

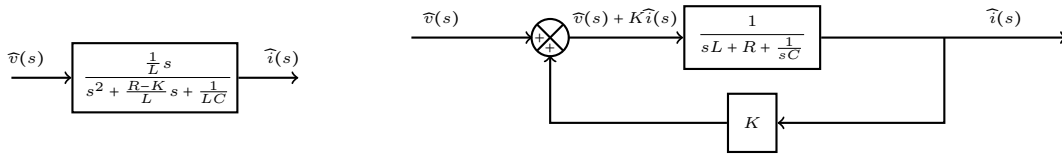
Aplicando la transformada de Laplace

$$\widehat{v}(s) + K\widehat{i}(s) = sL\widehat{i}(s) + R\widehat{i}(s) + \frac{1}{C}s\widehat{i}(s) = \left(sL + R + \frac{1}{Cs}\right)\widehat{i}(s).$$

Por lo tanto, la función de transferencia es

$$\widehat{g}(s) = \frac{\widehat{i}(s)}{\widehat{v}(s)} = \frac{1}{sL + (R - K) + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R-K}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

El primer diagrama corresponde a la primera expresión de la función de transferencia mientras que el segundo corresponde a la segunda expresión.



### 3.7. Diagramas de bloques

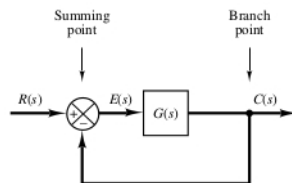
Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente del sistema y el flujo de señales. Un bloque es un símbolo para representar una operación matemática que se hace sobre la señal de entrada del bloque para producir la salida. Las flechas indican el flujo de las señales. La punta de flecha que llega al bloque indica la entrada y la punta de flecha que se aleja del bloque representa la salida.

Un punto de suma, representado por un círculo con una cruz con un signo más o menos en cada punta de flecha, indica si la señal debe sumarse o restarse.

Un punto de bifurcación o ramificación es aquél a partir del cual la señal va de modo concurrente a otros bloques o puntos de suma.

Cualquier sistema de control lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formado por bloques, puntos de suma y puntos de bifurcación.

La figura siguiente muestra un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.



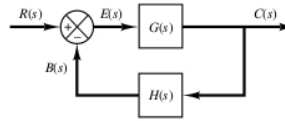
La salida  $C(s)$  se obtiene multiplicando la función de transferencia  $G(s)$  por la entrada  $E(s)$ . La salida  $C(s)$  realimenta el sistema en el punto de suma, donde la referencia  $R(s)$

se compara con la salida. Para obtener la función de transferencia del sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E(s), \quad E(s) = R(s) - C(s) \Rightarrow E(s) = R(s) - G(s)E(s) \Rightarrow \\ E(s)(1 + G(s)) &= R(s) \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} \xrightarrow{C(s)=G(s)E(s)} C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de transferencia del sistema en lazo cerrado es  $\frac{G(s)}{1 + G(s)}$ .

Cuando la salida realimenta en el punto de suma para compararse con la entrada puede ser necesario convertir la forma de la señal de salida en la forma de la señal de entrada. Por ejemplo, en un sistema de control de temperatura la señal de salida es la temperatura controlada. Puede ser necesario convertir esta salida en fuerza, posición o voltaje antes de que pueda compararse con la señal de entrada. Esta conversión se consigue mediante el elemento de realimentación cuya función de transferencia es  $H(s)$  (ver la siguiente figura). En la mayor parte de los casos el elemento de realimentación es un sensor que mide la salida. La salida del sensor se compara con la entrada y se genera una señal de error.



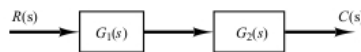
La salida  $C(s)$  y la entrada  $R(s)$  se relacionan del modo siguiente

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E(s), \quad B(s) = H(s)C(s), \quad E(s) = R(s) - B(s) \Rightarrow \\ E(s) &= R(s) - H(s)C(s) = R(s) - H(s)G(s)E(s) \Rightarrow \\ E(s) &= \frac{R(s)}{1 + H(s)G(s)} \xrightarrow{C(s)=G(s)E(s)} C(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} R(s). \end{aligned}$$

Así, la función de transferencia de este sistema en lazo cerrado es  $\frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$ .

Estudiemos ahora las funciones de transferencia para bloques conectados en serie o cascada, en paralelo, en lazo cerrado y con perturbaciones.

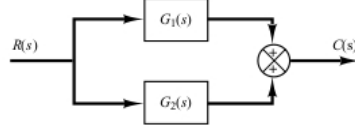
#### Sistemas en serie o cascada:



$$C(s) = G_2(s)G_1(s)R(s)$$

El comando de MATLAB (Symbolic Toolbox) es `series`.

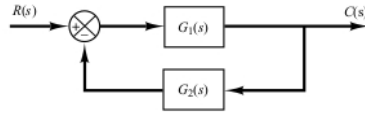
#### Sistemas en paralelo:



$$C(s) = (G_1(s) + G_2(s))R(s)$$

El comando de MATLAB (Symbolic Toolbox) es `parallel`.

**Sistema realimentado o en lazo cerrado:**

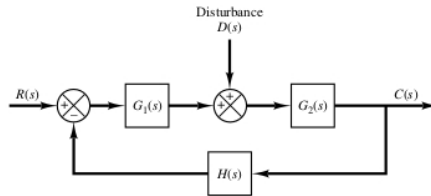


$$C(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)}R(s)$$

El comando de MATLAB (Symbolic Toolbox) es `feedback`.

**Sistema con perturbaciones:**

Cuando se presentan varias entradas en un sistema lineal (por ejemplo, la entrada de referencia y una perturbación), cada una de ellas puede tratarse de forma independiente. La salida total será la suma de las salidas correspondientes a cada entrada. Por ejemplo, el siguiente diagrama muestra un sistema en lazo cerrado con una perturbación.



Al examinar el efecto de la perturbación  $D(s)$ , podemos suponer que el sistema está inicialmente relajado, con una entrada cero. Así,

$$A(s) = 0 - H(s)C_D(s), B(s) = G_1(s)A(s), E(s) = B(s) + D(s), C_D(s) = G_2(s)E(s) \Rightarrow \\ C_D(s) = G_2(s)(B(s) + D(s)) = G_2(s)(G_1(s)A(s) + D(s)) = G_2(s)(G_1(s)(-H(s)C_D(s)) + D(s)) \Rightarrow$$

$$C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)H(s)}D(s).$$

Por otra parte, si se considera la respuesta a la entrada  $R(s)$ , se puede suponer que la perturbación es cero. Así,

$$A(s) = R(s) - H(s)C_R(s), B(s) = G_1(s)A(s), E(s) = B(s), C_R(s) = G_2(s)E(s) \Rightarrow \\ C_R(s) = G_2(s)B(s) = G_2(s)G_1(s)A(s) = G_2(s)G_1(s)(R(s) - H(s)C_R(s)) \Rightarrow$$

$$C_R(s) = \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)H(s)} R(s).$$

Por lo tanto,

$$C(s) = C_D(s) + C_R(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)H(s)} (D(s) + G_1(s)R(s)).$$

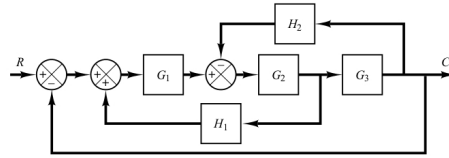
También se podía haber deducido la respuesta simultánea directamente

$$\begin{aligned} A(s) &= R(s) - H(s)C(s), B(s) = G_1(s)A(s), E(s) = B(s) + D(s), C(s) = G_2(s)E(s) \Rightarrow \\ C(s) &= G_2(s)(B(s) + D(s)) = G_2(s)(G_1(s)A(s) + D(s)) = \\ G_2(s)(G_1(s)(R(s) - H(s)C(s)) + D(s)) &\Rightarrow \end{aligned}$$

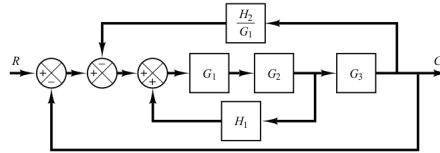
$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)H(s)} (D(s) + G_1(s)R(s)).$$

Los diagramas de bloques se pueden reducir mediante reordenamientos y sustituciones a costa de que las funciones de transferencia de los bloques nuevos se hagan más complicadas.

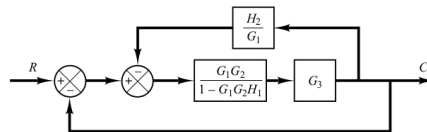
**Ejemplo 3.2** Considérese el sistema que aparece representado mediante un diagrama de bloques en la siguiente figura.



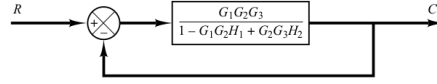
Queremos simplificarlo. Para ello, si se mueve el punto de suma del lazo de realimentación negativa que contiene  $H_2$  hacia afuera del lazo de realimentación positiva que contiene  $H_1$ , se obtiene la siguiente figura.



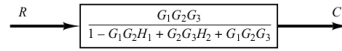
Ahora se puede eliminar el lazo de realimentación de  $H_1$  (el lazo de realimentación positiva da lugar a un término negativo en el denominador). El diagrama queda



Ahora se elimina el lazo de realimentación de  $H_2/G_1$ .



Por último, se elimina el lazo de realimentación.

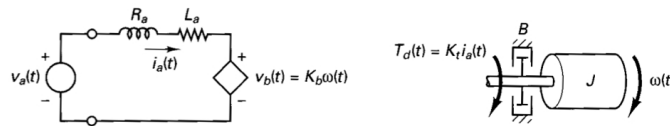


Obsérvese que el numerador de la función de transferencia  $C(s)/R(s)$  es el producto de las funciones de transferencia en el camino directo. El denominador es igual a

$$1 + \sum (\text{producto de las funciones de transferencia alrededor de cada lazo}) = 1 + (-G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3) = 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3.$$

### 3.8. Motores de corriente continua

Un dispositivo que se emplea normalmente como actuador en sistemas de control electromecánicos es el motor de corriente continua de imán permanente controlado por inducido. Para información sobre su diseño y funcionamiento se puede visitar [27]. El motor de corriente continua (denominado también motor de corriente directa, motor CC o motor DC) es una máquina que convierte la energía eléctrica en mecánica, provocando un movimiento rotatorio, gracias a la acción que se genera del campo magnético. Tal y como se muestra en la siguiente figura la tensión de control  $v_a$  se aplica al circuito del inducido que tiene una resistencia  $R_a$ , una inductancia  $L_a$  y una fuente de tensión dependiente.



Como por los conductores del inducido está circulando una corriente eléctrica en presencia de un campo magnético, se desarrolla un par  $T_d$  (en dirección perpendicular) que es proporcional a la corriente y a la intensidad del campo magnético. La intensidad del campo magnético es constante y así el par de entrada en el motor es

$$T_d(t) = K_t i_a(t).$$

Si el par produce movimiento se genera una tensión en el circuito  $v_b$  que es proporcional a la velocidad angular del motor  $\omega$  y a la intensidad del campo magnético (fuerza

contraelectromotriz) y en dirección opuesta a la corriente. La relación entre la fuerza contraelectromotriz y la velocidad angular es

$$v_b(t) = K_b \omega(t).$$

Así, la ecuación para el circuito es

$$v_a(t) - v_b(t) = L_a \dot{i}_a(t) + R_a i_a(t)$$

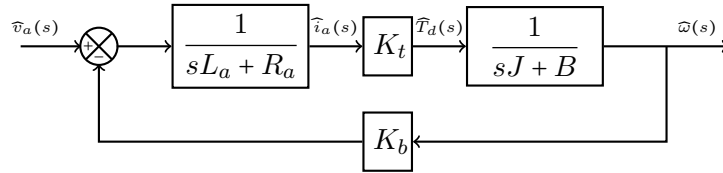
y la ecuación de la dinámica del motor es

$$J\dot{\omega}(t) + B\omega(t) = T_d(t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \widehat{T}_d(s) &= K_t \widehat{i}_a(s) \\ \widehat{v}_b(s) &= K_b \widehat{\omega}(s) \\ \frac{\widehat{i}_a(s)}{\widehat{v}_a(s) - \widehat{v}_b(s)} &= \frac{s/L_a}{s^2 + sR_a/L_a} = \frac{1}{sL_a + R_a} \\ \frac{\widehat{\omega}(s)}{\widehat{T}_d(s)} &= \frac{1}{sJ + B}. \end{aligned}$$

Podemos construir el siguiente diagrama de bloques



La función de transferencia entre la velocidad angular del motor y el voltaje de entrada es

$$\frac{\widehat{w}(s)}{\widehat{v}_a(s)} = \frac{K_t}{L_a J s^2 + (R_a J + L_a B)s + (R_a B + K_t K_b)}.$$

### 3.9. Función de transferencia con MATLAB

Recuérdese que si un sistema está descrito por la siguiente ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (n \geq m)$$

su función de transferencia se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) supuesto que todas las condiciones iniciales son cero, es decir, supuesto el sistema en reposo en  $t_0 = 0$ . Así, la función de transferencia es:

$$\widehat{g}(s) = \frac{\widehat{y}(s)}{\widehat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

La función de transferencia es un cociente de polinomios en que el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, es decir, es una función racional propia. Los polinomios  $\widehat{y}(s)$  y  $\widehat{u}(s)$  pueden tener factores comunes. Cancelando sus factores comunes se obtienen dos polinomios  $p(s)$  y  $q(s)$  que son primos entre sí y tales que  $\widehat{g}(s) = \frac{\widehat{y}(s)}{\widehat{u}(s)} = \frac{p(s)}{q(s)}$ .

La función racional  $\frac{p(s)}{q(s)}$  es ahora una función racional irreducible. Se definen los **ceros** de  $\widehat{g}(s)$  como las raíces en  $\mathbb{C}$  (el cuerpo de los números complejos) de  $p(s)$  y los **polos** de  $\widehat{g}(s)$  como las raíces en  $\mathbb{C}$  de  $q(s)$ . Supongamos que  $p(s) = b(s - z_1) \cdots (s - z_t)$  y  $q(s) = a(s - p_1) \cdots (s - p_v)$ . Por lo tanto, los ceros de  $\widehat{g}(s)$  son  $z_1, \dots, z_t$  y sus polos son  $p_1, \dots, p_v$ . Obsérvese que puede haber tanto ceros repetidos como polos repetidos pero, sin embargo, un número no puede ser cero y polo a la vez. Por otra parte, se llama **ganancia** de  $\widehat{g}(s)$  a  $\frac{b}{a}$ . Así, una función de transferencia se puede escribir como su ganancia por el cociente de dos polinomios mónicos irreducibles (un polinomio se dice mónico si el coeficiente de su monomio de mayor grado es 1).

Veamos ahora algunos comandos del *Control System Toolbox* de MATLAB relacionados con la función de transferencia. En particular, vamos a obtener los ceros y polos.

El comando `printsys(num,den)` devuelve la fracción con el polinomio `num` en el numerador y el polinomio `den` en el denominador. Por ejemplo,

```
>> num=[0 5 20]; den=[1 4 20];
>> printsys(num,den)
num/den =
      5 s + 20
-----
    s^2 + 4 s + 20
```

Para realizar el desarrollo en fracciones simples de un cociente de polinomios (en el plano complejo) se puede utilizar el comando `[r,p,k]=residue(num,den)` que devuelve en `r` los coeficientes de las fracciones simples, en `p` las raíces de los respectivos denominadores y en `k` la parte polinomial. Es decir,

$$\frac{num}{den} = k + \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{r_t}{s - p_t}.$$

Por ejemplo,

```
>> num=[16 16]; den=[1 6 8 0];
>> [r,p,k]=residue(num,den)
r =          p =          k=
   -6         -4          []
    4         -2
    2          0
```



Es decir,  $\frac{16s+16}{s^3+6s^2+8s} = 0 - \frac{6}{s+4} + \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s}$ .

El comando `[z,p,k]=tf2zp(num,den)` devuelve las raíces del polinomio del numerador (en `z`), las raíces del polinomio del denominador (en `p`) y la ganancia (en `k`). Por ejemplo,

```
>> num=[3 0 -3];
>> den=[5 0 -15 10];
>> [z,p,k]=tf2zp(num,den)
z =
    -1
     1
p =
 -2.0000
  1.0000
  1.0000
k =
  0.6000
```

Nótese que 1 es tanto raíz del numerador como del denominador. Esto implica que los polinomios del numerador y del denominador de  $\frac{3s^2-3}{5s^3-15s+10}$  tienen a  $s-1$  como factor común y, por lo tanto, no son coprimos. Recuérdese que los ceros y polos de una función de transferencia son las raíces del numerador y del denominador, respectivamente, cuando son coprimos. Así, para obtener los ceros y polos de la función de transferencia  $\frac{3s^2-3}{5s^3-15s+10}$  hay que prescindir de un 1 en `z` y de un 1 en `p`. En consecuencia, -1 es el único cero de la función de transferencia  $\frac{3s^2-3}{5s^3-15s+10}$  y sus polos son -2 y 1.

El comando `[n,d]=zp2tf(z,p,k)` hace lo opuesto, es decir, dados unos valores en `z`, otros valores en `p` y un valor en `k`, devuelve un polinomio en `n` cuyas raíces son los valores en `z` y cuyo coeficiente principal es `k` y otro polinomio en `d` que es mónico y cuyas raíces son los valores en `p`. Sin embargo, `H=zpk(z,p,k)` devuelve la función racional, cociente de esos dos polinomios. Para `z`, `p` y `k` del ejemplo anterior

```
>> [n,d]=zp2tf(z,p,k)
n =
     0     0.6000         0    -0.6000
d =
  1.0000     0.0000   -3.0000     2.0000

>> H=zpk(z,p,k)
H =
    0.6 (s+1) (s-1)
-----
    (s+2) (s-1)^2
Continuous-time zero/...
```

Los comandos `series`, `parallel` y `feedback` se usan para calcular las funciones de transferencia de dos sistemas conectados en serie, paralelo o mediante un feedback, respectivamente. Los tres tienen la misma sintaxis:

```
[num,den]=comando(num1,den1,num2,den2)
```

donde `comando= series` o `parallel` o `feedback`. Este último admite un parámetro adicional según se quiera una realimentación positiva `+1` o negativa `-1` (por defecto). Por ejemplo,

```
>> num1=[10];
>> den1=[1 2 10];
>> num2=[0 5];
>> den2=[1 5];
>> [num,den]=series(num1,den1,num2,den2);
>> printsys(num,den)
num/den =
          50
-----
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 50

>> [num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2);
>> printsys(num,den)
num/den =
      5 s^2 + 20 s + 100
-----
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 50
>> [num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2);
>> printsys(num,den)
num/den =
      10 s + 50
-----
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 100
```

El comando `tf` devuelve la función de transferencia. El comando `feedback` también se puede usar con funciones de transferencia propiamente.

```
>> G=tf(num1,den1)
G =
      10
-----
s^2 + 2 s + 10
Continuous-time transfer function.
>> H=tf(num2,den2)
H =
      5
-----
>> Cloop=feedback(G,H)
Cloop =
      10 s + 50
-----
```

|                                    |                             |
|------------------------------------|-----------------------------|
| $s + 5$                            | $s^3 + 7 s^2 + 20 s + 100$  |
| Continuous-time transfer function. | Continuous-time transfer... |

MATLAB también permite obtener la respuesta del sistema al salto unidad mediante el comando `step(num,den)`. La respuesta es la gráfica de la solución como función del tiempo. Para el ejemplo anterior de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado:

```
>> step(num,den)
```

produce:

