

Capítulo 4

El Modelo de Espacio-Estado

4.1. Introducción

Tal y como hemos visto en la lección anterior el punto de vista clásico en la Teoría de Control consiste en estudiar las propiedades de los sistemas a partir de su comportamiento entrada-salida. La teoría moderna de control pone el énfasis en el concepto de *estado* del sistema. En una primera aproximación el estado de un sistema en un instante dado es el valor de unas variables internas del sistema (en ocasiones ficticias y no accesibles) que describen la evolución del mismo a lo largo del tiempo,.

Antes de proceder a una definición formal del concepto de estado, de un sistema un ejemplo puede servir de ilustración.

Ejemplo 4.1 Supongamos que la función de transferencia de un sistema es

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \hat{g}(s) = \frac{1+s}{1+2s+5s^2} \quad (4.1)$$

de modo que

$$(1+2s+5s^2)\hat{y}(s) = (1+s)\hat{u}(s).$$

Usando la transformada de Laplace inversa podemos escribir las ecuaciones del sistema en el dominio del tiempo suponiendo el sistema en reposo en $t = 0$:

$$5\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + u(t) \quad (4.2)$$

Definiendo: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t) - \frac{1}{5}u(t)$, la ecuación (4.2) es equivalente al siguiente conjunto de sistemas; uno de ecuaciones diferenciales y otro de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \frac{1}{5}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{5}x_1(t) - \frac{2}{5}x_2(t) + \frac{3}{25}u(t) \end{cases}, \quad (4.3)$$

$$y(t) = x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

En efecto,

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) + \frac{1}{5}u(t),$$

y

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) - \frac{1}{5}\dot{u}(t) = -\frac{2}{5}\dot{y}(t) - \frac{1}{5}y(t) + \frac{1}{5}u(t) = \\ &= \frac{1}{5}x_1(t) - \frac{2}{5}x_2(t) - \frac{2}{25}u(t) + \frac{1}{5}u(t) = \\ &= -\frac{1}{5}x_1(t) - \frac{2}{5}x_2(t) + \frac{3}{25}u(t) \end{aligned}$$

Este sistema algebraico-diferencial tiene una única solución una vez fijadas unas condiciones iniciales para $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Al vector (función vectorial)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

se le llama *vector de estados del sistema*, mientras que las funciones vectoriales (en este caso escalares) $y(t)$ y $u(t)$ son, como siempre, las salidas y entradas del sistema. Si tomamos transformadas de Laplace de los sistemas (4.3) y (4.4) con la condición inicial $x_1(0) = x_2(0) = 0$, la relación entre las transformadas de Laplace de $y(t)$ y $u(t)$ es la función de transferencia $\hat{g}(s)$ de (4.1). Por lo tanto, el sistema formado por las ecuaciones (4.3) y (4.4) es un modelo cuyas soluciones tienen el mismo comportamiento entrada-salida que el sistema original. Este modelo es, en general, no único y se llama *modelo de espacio-estado* del sistema (4.1). ■

Unas palabras sobre la notación. En el Capítulo 2 hicimos una distinción entre vectores y escalares denotando los primeros en “negrita”. Dado que las variables y funciones que aparecerán en lo sucesivo son por lo general, vectores, no haremos distinción alguna en cuanto a la notación. Del contexto debería estar claro si se trata de vectores o de escalares.

4.2. El modelo de Espacio-Estado. Formalismo

Según Rosenbrock “es más fácil distinguir un sistema dinámico que definirlo” ([17]). Se han propuesto varias definiciones formales de “sistema”, todas ellas buscando un modelo para el mismo concepto. Algunas referencias son: [5], [7], [12] or [18]; sin olvidar, por

supuesto que formalismos similares se han usado desde hace mucho tiempo en la teoría de sistemas dinámicos (sin controles ni salidas). Seguiremos aquí algunas ideas de [11] y [19].

En vez de presentar una definición formal vamos a introducir la terminología y las relaciones que se necesitan entre distintos elementos constitutivos de los sistemas de control cuando se utiliza el modelo de espacio-estado. Algunas de ellas ya fueron presentadas en el Capítulo 1. Ahora las introducimos con más detalle. En este tipo de sistemas están presentes los siguientes elementos:

Un conjunto tiempo. Un sistema dinámico evoluciona con el tiempo y, por lo tanto, las variables que describen el comportamiento del sistema son funciones del tiempo. Con cada sistema dinámico hay un *conjunto tiempo* asociado a él $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ que contiene todos los valores de t en los que pueden ser evaluadas las variables. Este conjunto \mathcal{T} puede ser continuo como en los ejemplos 2.3, 2.7 o el de la Sección 2.5.3 en los que $\mathcal{T} = [0, \infty)$, o discreto; i.e. \mathcal{T} consiste de puntos aislados de \mathbb{R} ; e.g. $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ o $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ como en el ejemplo de la Sección 2.5.2. Por conveniencia notacional escribiremos $[t_0, t_1)$ en vez de $\mathcal{T} \cap [t_0, t_1)$ para referirnos al intervalo (en \mathcal{T}) $\{t \in \mathcal{T} | t_0 \leq t < t_1\}$ siempre que el conjunto tiempo \mathcal{T} subyacente sea claro.

Unas variables externas. Son las que describen las interacciones del sistema con el mundo exterior. Es el diseñador del modelo quien debe determinar cuáles son las variables significativas que intervienen en el problema. Es habitual (aunque no siempre evidente) dividir las variables en una familia $u = (u_i)$ de *entradas* y otra de *salidas* $y = (y_i)$. Las entradas son las variables que representan la influencia del mundo exterior en el sistema físico. Pueden ser de diferentes tipos; por ejemplo, entradas que se pueden utilizar para tener algún control sobre el sistema (*controles*) o sobre las que no se puede influir, como perturbaciones. En el Ejemplo 2.7 carro-péndulo la entrada con la que se pretende controlar el péndulo invertido es la fuerza horizontal ejercida sobre el carro ($\beta u(t)$ en la notación usada allí).

Las salidas son las variables con las que el sistema actúa sobre el mundo exterior. También las hay de distintos tipos; algunas de ellas sirven para medir lo que sucede en el sistema, sobre otras se quiere tener control. Así las salidas medibles en el Ejemplo 2.3 de la suspensión del coche son el desplazamiento del chasis y su velocidad, y las salidas en el Ejemplo 2.7 del carro-péndulo son el desplazamiento del carro $r(t)$ desde una posición de referencia dada y el ángulo del péndulo $\theta(t)$ teniendo como objetivo que este ángulo sea 0. Para el sistema en tiempo discreto del Ejemplo 2.5.2 la entrada es el gasto público $G(t)$ mientras que la salida es el PIB $P(t)$.

En un sistema dinámico debe estar claro el conjunto U donde las entradas toman sus valores y el conjunto Y donde lo hacen las salidas. Así en el Ejemplo 2.7 podríamos tomar $U = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$ pero también, quizá, ciertos subconjuntos de \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 , respectivamente. Supondremos que los valores admisibles de las entradas están en un conjunto determinado de una vez por todas y que, por consiguiente, no cambia con el tiempo.

El símbolo \mathcal{U} lo usaremos para el conjunto de las funciones de entrada o de control: $u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U$. Por lo general serán funciones continuas, o continuas a trozos; suficientemen-

te generales como para que podamos usar la teoría matemática básica de existencia de soluciones sin tener que prestar demasiada atención a los detalles.

De forma similar \mathcal{Y} se usará para denotar el conjunto de las funciones de salida admisibles: $y(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow Y$.

El estado interno. Las variables de *estado* describen los procesos que tienen lugar en el interior del sistema y sirven para modelizarlos. Al igual que las entradas y salidas, evolucionan con el tiempo y para cada valor de $t \in \mathcal{T}$, $x(t)$ representará el valor de la variable de estado en el instante t . Sencillamente diremos que $x(t)$ es el estado del sistema en el instante t . El conjunto de estados; es decir, el conjunto donde toman valores los estados, lo denotamos con X de modo que la variable de estados es una función $x(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow X$. Requeriremos que $x(\cdot)$ cumpla las siguientes propiedades básicas:

- (I) El estado actual del sistema y la función de control elegida determinan los futuros estados del sistema. Con más precisión: dado el estado $x(t_0) = x^0$ del sistema en el instante $t_0 \in \mathcal{T}$ y una función de control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, la evolución del estado del sistema $x(t) \in X$ queda completamente determinada para todo t en algún intervalo de tiempo de \mathcal{T} que comienza en t_0 . Este intervalo de tiempo puede verse como el “intervalo de existencia” de la función (también llamada trayectoria) $x(\cdot)$ que comienza en x^0 en el instante t_0 bajo la acción de la función de control $u(\cdot)$. Lo representaremos como $T_{t_0, x^0, u(\cdot)}$.
- (II) Dado $x(t_0) = x^0$ en el instante $t_0 \in \mathcal{T}$, el estado $x(t)$ en cualquier instante posterior $t \in \mathcal{T}$ ($t \geq t_0$) sólo depende de los valores $u(s)$ para $s \in [t_0, t]$. Así, en el instante t , el estado $x(t)$ no está influenciado por los valores presente y futuros de la función de control $u(s)$, $s \geq t$, ni por los controles pasados anteriores a t_0 ; es decir, por $u(s)$ para $s < t_0$.
- (III) Los valores de las salidas en el instante t están determinados completamente por los valores de las entradas, $u(t)$, y estados, $x(t)$, en t . En otras palabras, las entradas antiguas sólo actúan sobre las salidas presentes a través de los efectos acumulados en el estado presente.

Estos requerimientos aseguran el principio de *causalidad* de los sistemas de control. Si miramos las salidas $y(t)$ como el “efecto” de las “causas” (=entradas) pasadas, entonces $u(t)$ representa la causa en el instante t y el estado $x(t)$ acumula la totalidad de las “causas” pasadas.

Las condiciones (I), (II) y (III) permiten introducir dos funciones fundamentales:

La función de transición de estados. De acuerdo con (I) y (II) el estado del sistema a lo largo del tiempo (también llamado *trayectoria*) puede describirse por una aplicación ψ llamada *función de transición de estados* definida como sigue:

$$x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)), \quad t \in T_{t_0, x^0, u(\cdot)}.$$

Realmente, por (II), $\psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ sólo depende de la restricción de $u(\cdot)$ a $[t_0, t]$. En la mayoría de los casos, esta aplicación viene definida implícitamente por las ecuaciones que definen el sistema. Si éstas son ecuaciones diferenciales o en diferencias como en todos los ejemplos del Capítulo 2, entonces se debe resolver un problema de condiciones iniciales con $x(t_0) = x^0$ y un control $u(\cdot)$ dado para conseguir la función $\psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$, $t \in T_{t_0, x^0, u(\cdot)}$, que es la solución del sistema $x(t)$.

La función de salida. Debido a (III) la salida del sistema está determinada en cada instante de tiempo t por el control y el estado en este instante:

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)).$$

Esta función η recibe el nombre de *función de salida*.

En el Ejemplo 4.1, la función de transición de estados es la única solución del sistema (4.2) que cumple la condición inicial que se establezca. En concreto, si $x(t_0) = x^0$, $u(\cdot)$ es una función continua en el intervalo $[t_0, t_1]$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 3/25 \end{bmatrix}$$

entonces la función de transición de estados sería

$$\psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = e^{A(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}bu(s)ds, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Y la de salidas:

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t),$$

que, en este caso, no tiene una dependencia explícita de t y de u .

En este ejemplo, $T_{t_0, x^0, u(\cdot)} = [t_0, t_1]$, y no se ve la dependencia del periodo de existencia de la trayectoria respecto de las condiciones iniciales y la función de control. Este otro ejemplo lo ilustra mejor.

Ejemplo 4.2 Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 + u(t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (4.5)$$

donde $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ y $x^0 \in X = \mathbb{R}$. Supongamos que el control es constante pero arbitrario $u(t) = a$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Separando las variables e integrando obtenemos:

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) - \arctan\left(\frac{x^0}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}(t - t_0).$$

Poniendo $c(x^0, a) = \arctan\left(\frac{x^0}{\sqrt{a}}\right)$ tenemos que la solución de (4.5) es

$$x(t) = \sqrt{a} \tan(\sqrt{a}(t - t_0) + c(x^0, a)), \quad t \geq 0.$$

Ahora bien, como $\tan(\pm\pi/2) = \pm\infty$, resulta que x “explota” para $t-t_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\pm\frac{\pi}{2} - c(x^0, a)\right)$. En consecuencia

$$T_{t_0, x_0, u(\cdot)} = \left(t_0 - \frac{\pi/2 + c(x^0, a)}{\sqrt{a}}, t_0 + \frac{\pi/2 - c(x^0, a)}{\sqrt{a}}\right),$$

en el que se ve la dependencia del periodo de existencia de la solución respecto de las condiciones iniciales y los controles. ■

4.2.1. Algunos tipos de sistemas de control

Hay sistemas de control de lo más variados, presentamos algunos de ellos:

1. **Sistemas diferenciales:** Son los sistemas en los que la función de transición de estados es la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales para el que se han especificado unas condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \geq t_0, t \in \mathcal{T} \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Se suele hablar abreviadamente de un *Problema de Condiciones Iniciales* (P.C.I.) para referirse a (4.6). Los elementos definitorios son:

- (i) $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.
- (ii) $U \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^p$ y $X \subset \mathbb{R}^n$ abiertos.
- (iii) $x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ es la única solución del P.C.I. Enseguida daremos condiciones suficientes sobre f y u para asegurar que el sistema (4.6) tiene una única solución en algún subintervalo $[t_0, t_1]$ de \mathcal{T} .
- (iv) $\eta: \mathcal{T} \times X \times U \rightarrow Y$ es continua.

Existen varios teorema que dan condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones para estos problemas. Uno suficientemente general es el Teorema de Carathéodory ([11, Sec. 2.1.2]). En este curso podemos ser menos exigentes. Consideremos primero el caso de sistemas sin controles

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (4.7)$$

y miremos a f como una función de dos variables $f(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Para asegurar suficiente regularidad en f respecto a t supondremos que $f(\cdot, x)$ es, para cada x fijo, una función **continua a trozos**. Esto significa que en cada intervalo acotado tenga un número finito de discontinuidades y límites laterales en cada punto de discontinuidad. Supondremos además que el valor de la función coincida con alguno de los dos límites; es decir, que la función sea continua por la izquierda o por la derecha en cada punto. Por otra parte, como función de x (es decir, para cada

$t \in \mathcal{T}$ fijo), pediremos que $f(t, \cdot)$ sea de clase \mathcal{C}^1 ; esto es, diferenciable con derivadas parciales continuas. Además, $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, x)$ debe ser continua a trozos para cada x fijo, siendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ la matriz Jacobiana de las derivadas parciales de f respecto de todas las componentes de x .

Si f satisface las condiciones de regularidad expuestas, entonces el sistema (4.7) tiene una única solución en algún intervalo $[t_0, t_1]$ de \mathcal{T} . Ahora bien, dado que no exigimos que f sea continua en t , conviene precisar lo que significa que $x(\cdot)$ es solución de (4.7). En la presente situación entenderemos que $x(t) = \psi(t; t_0, x^0)$ es solución de (4.7) si:

- es continua en todo el intervalo de existencia,
- de clase \mathcal{C}^1 en “casi todo” el intervalo de existencia; es decir, en todo el intervalo de existencia excepto en un conjunto de medida nula, y
- satisface la ecuación integral $x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$.

Para garantizar la existencia local y unicidad de solución para los sistemas con controles de la forma (4.6), debemos imponer condiciones sobre f y u que nos permitan invocar el resultado recién expuesto sobre existencia y unicidad cuando se aplica a $g(t, x) = f(t, x, u(t))$. Aunque no es el más exigente posible, un conjunto de suposiciones aceptable para lo que se estudiará en este curso es (recordemos que ahora $f(t, x, u)$ depende tres variables $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^m$):

- f es continua en t y u y de clase \mathcal{C}^1 en x ,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en t y u , y
- $u(\cdot)$ es continua a trozos.

En los sucesivos supondremos que se verifican estas tres condiciones y que \mathcal{U} es el conjunto de las funciones continuas a trozos.

2. **Sistemas recursivos o en diferencias finitas:** En estos sistemas la función de transición de estados también es la solución de un Problema de Condiciones Iniciales pero de sistemas dados por ecuaciones en recurrencias (también llamados en diferencias finitas):

- (i) $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ o \mathbb{Z} .
- (ii) U, X, Y conjuntos no vacíos
- (iii) $x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ es la única solución del sistema en diferencias finitas

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t))$$

con la condición inicial $x(t_0) = x^0$ con $t_0 \in \mathcal{T}$, $x^0 \in X$ y $t \geq t_0$.

- (iv) La función de salidas es cualquier tipo de aplicación $\eta: \mathcal{T} \times X \times U \rightarrow Y$.

3. **Sistemas Lineales:** Un sistema es lineal si:

- (i) U, \mathcal{U}, X, Y son espacios vectoriales sobre \mathbb{K} (un cuerpo).
- (ii) Las aplicaciones

$$\begin{aligned} \psi(t; t_0, \cdot, \cdot) &: X \times \mathcal{U} \rightarrow X \\ (x^0, u(\cdot)) &\rightarrow \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)) \\ \eta(t, \cdot, \cdot) &: X \times U \rightarrow Y \\ (x(t), u(t)) &\rightarrow \eta(t, x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

son lineales para todo $t, t_0 \in \mathcal{T}, t \geq t_0$.

En particular, dado que $\psi(t; t_0, \cdot, \cdot)$ es lineal,

$$\psi(t; t_0, 0_X, 0_U) = 0_X, \quad t, t_0 \in \mathcal{T}, t \geq t_0 \quad (4.9)$$

También, por ser ψ y η lineales:

$$\psi\left(t; t_0, \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^0, \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i(\cdot)\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi(t; t_0, x_i^0, u_i(\cdot)), \quad (4.10)$$

y

$$\eta\left(t, \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i(t), \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i(t)\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \eta(t, x_i(t), u_i(t)). \quad (4.11)$$

Estas ecuaciones expresan el *principio de superposición* para los estados y las salidas: *la salida de una suma de estados y entradas es la suma de las salidas de cada uno de los estados y entradas*. Como caso especial obtenemos el *principio de descomposición*:

$$\psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = \psi(t; t_0, x^0, 0_U) + \psi(t; t_0, 0_X, u(\cdot)),$$

que muestra que las trayectorias de los sistemas lineales se descomponen en una suma de dos términos: un *movimiento libre*: $t \rightarrow \psi(t; t_0, x^0, 0_U)$ que depende exclusivamente del estado inicial del sistema x^0 ; y un *movimiento forzado*: $t \rightarrow \psi(t; t_0, 0_X, u(\cdot))$ que depende sólo de la entrada o control $u(\cdot)$. Y en relación con estos dos tipos de movimientos tenemos los siguientes casos especiales de (4.10): si ponemos $u_i(\cdot) = 0_U$ entonces obtenemos la *ley de superposición para el movimiento libre*

$$\psi\left(t; t_0, \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^0, \sum_{i=1}^k \lambda_i 0_U\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi(t; t_0, x_i^0, 0_U); \quad (4.12)$$

y si ponemos $x_i^0 = 0_X$ obtenemos la *ley de superposición del movimiento forzado*

$$\psi\left(t; t_0, 0_X, \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i(\cdot)\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi(t; t_0, 0_X, u_i(\cdot)). \quad (4.13)$$

Los mismos conceptos pueden aplicarse a las salidas del sistema y en tal caso hablaríamos de los principios de descomposición y superposición para los movimientos libre y forzado

respecto a las salidas. O, mejor, de *la respuesta del sistema al movimiento libre (o control cero)* y de *la respuesta del sistema al movimiento forzado (o al estado inicial cero)*, respectivamente.

En dimensión finita, los sistemas diferenciales y en diferencias finitas están definidos a partir de sistemas de ecuaciones lineales:

| Sistemas Diferenciales | Sistemas en Diferencias | |
|--|--|--------|
| $\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$ | $\begin{cases} x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$ | (4.14) |

Es decir, los estados son soluciones de problemas de condiciones iniciales de sistemas de ecuaciones diferenciales (o en diferencias finitas) lineales y las salidas en cada instante t son combinaciones lineales de los estados del sistema y de los controles en dicho instante. El sistema del Ejemplo 4.1 es un sistema diferencial lineal.

Las matrices (de funciones) $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ en (4.14) reciben nombres especiales: a $A(t)$ se le llama **matriz de estados**, a $B(t)$ **matriz de entradas o controles**, a $C(t)$ **matriz de salidas desde los estados** y a $D(t)$ **matriz de salidas desde las entradas o controles**. Con frecuencia $D(t)$ es la matriz cero y en tales casos se dice que $C(t)$ es la matriz de salidas.

En el caso de sistemas diferenciales supondremos que las funciones matriciales $A(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathcal{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $B(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathcal{T}, \mathbb{R}^{n \times m})$, $C(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathcal{T}, \mathbb{R}^{p \times n})$ y $D(\cdot) \in \mathcal{C}(\mathcal{T}, \mathbb{R}^{p \times m})$ donde $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $\mathcal{C}(\mathcal{T}, \mathbb{R}^{r \times s})$ es el espacio vectorial (respecto a \mathbb{R}) de las funciones continuas definidas en el intervalo \mathcal{T} y con valores en el espacio vectorial de las matrices reales de tamaño $r \times s$. Supondremos también, como ya se ha dicho, que $\mathcal{U} = PC(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m)$ es el conjunto de funciones continuas a trozos. Se cumplen entonces las condiciones de existencia y unicidad de soluciones en todo \mathcal{T} del P.C.I.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in \mathcal{T} \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

para todo $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $t_0 \in \mathcal{T}$ y $x^0 \in X = \mathbb{R}^n$. La solución de estos sistemas $x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ son funciones continuas en \mathcal{T} y diferenciables en todo \mathcal{T} excepto en los puntos de discontinuidad de $u(\cdot)$. Mucha de la teoría se puede desarrollar también para sistemas en \mathbb{C} pero nos restringiremos a sistemas reales (es decir, sobre \mathbb{R}).

En este curso sólo trabajaremos los sistemas diferenciales con especial atención a los lineales. En particular, en esta lección nos centraremos en el estudio de las soluciones de los sistemas lineales mientras que las propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad de los mismos serán estudiadas en lecciones posteriores. También se hará una breve incursión en estas mismas propiedades para sistemas no lineales.

4.2.2. Estados de Equilibrio o Estacionarios

Hay estados para ciertos sistemas que adquieren importancia especial: son los estados estacionarios o de equilibrio. Supongamos que tenemos un sistema sobre el que actúa una

función de control $u(\cdot)$ y cuya función de transición de estados es $\psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$; es decir, el estado en el instante t es

$$x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)) \in X, \quad t \geq t_0, t_0, t \in \mathcal{T},$$

donde X es el espacio de estados para el sistema. Un estado $\bar{x} \in X$ es un *estado de equilibrio o estacionario* de un sistema bajo el control $u(\cdot)$ si

$$\psi(t; t_0, \bar{x}, u(\cdot)) = \bar{x}$$

para todo $t \in \mathcal{T}$ con $t \geq t_0$. En otras palabras, los estados estacionarios son los estados $x(t)$ tales que si $x(t_0) = \bar{x}$ entonces $x(t) = \bar{x}$ para todo $t \in \mathcal{T}$ con $t \geq t_0$. Se trata pues de estados que se mantienen constantes durante su periodo de existencia.

Tal y como hemos visto en (4.9) para los sistemas lineales:

$$\psi(t; t_0, 0_X, 0_U) = 0_X, \quad t, t_0 \in \mathcal{T}, t \geq t_0,$$

lo que indica que el estado cero, 0_X , es siempre un estado estacionario de los sistemas lineales cuando el control es la función nula: $u(t) = 0$ para todo $t \in \mathcal{T}$, $t \geq t_0$. Esto es fácil de comprobar en los sistemas finito-dimensionales. En efecto, en tal caso las ecuaciones de estados con control cero son:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

de modo que $x(t) = 0$ es una solución del sistema cuando el sistema está en reposo en el instante inicial; es decir, $x(t_0) = 0$. Lo mismo sucede en los sistemas en diferencias finitas.

Para los sistemas diferenciales generales

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \geq t_0, t \in \mathcal{T} \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

los estados estacionarios son las *soluciones de equilibrio*; es decir, las soluciones x_e que cumplen lo siguiente: si en un instante inicial $t_0 \in \mathcal{T}$ el estado es $x(t_0) = x_e$ y el sistema está bajo el control de $\tilde{u}(\cdot)$ entonces el estado de Σ es $x(t) = x_e$ para todo $t \geq t_0$, $t \in \mathcal{T}$. En otras palabras, los estados estacionarios bajo el control $\tilde{u}(\cdot)$ son las soluciones constantes de $\dot{x}(t) = f(t, x, \tilde{u}(t))$. Es decir, las que cumplen:

$$f(t, x_e, \tilde{u}(t)) = 0, \quad \text{para todo } t \geq t_0, t \in \mathcal{T}.$$

Veremos a continuación un par de ejemplos.

Ejemplo 4.3 Consideremos el péndulo invertido de la Figura 4.1. Se quiere aplicar una

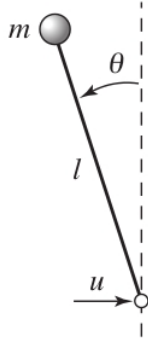


Figura 4.1: Control del péndulo invertido

fuerza en la base del péndulo amortiguado para devolverlo a la posición vertical. Es decir, la fuerza se debe hacer de modo que sobre el péndulo (donde se supone que está concentrada toda la masa) actúe oponiéndose al movimiento. Por lo tanto, en dirección contraria al vector velocidad del mismo. Así pues, suponiendo que los ejes coordenados se encuentran en la base del péndulo en las direcciones habituales tenemos que la fuerza que actúa sobre el péndulo es $\mathbf{F}(t) = u(t)\mathbf{i} - mg\mathbf{j}$ y la velocidad angular del péndulo $\dot{\theta}\mathbf{k}$. Como las coordenadas del péndulo son $(x(t), y(t)) = (-\ell \sin \theta(t), \ell \cos \theta(t))$ el par de la fuerza $\mathbf{F}(t)$ sobre el péndulo respecto del eje de giro es

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t) = (x(t)F_2(t) - y(t)F_1(t))\mathbf{k} = (mg\ell \sin \theta(t) - \ell \cos \theta(t)u(t))\mathbf{k}$$

Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional $\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}(t)) = N(t)$ y teniendo en cuenta que, como estamos considerando al péndulo como una partícula de masa m girando alrededor de un punto alejado a una distancia ℓ , $J = m\ell^2$:

$$m\ell^2\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) + mg\ell \sin \theta(t) - u(t)\ell \cos \theta(t),$$

donde c es la constante de amortiguamiento producido, por ejemplo, por el rozamiento sobre el brazo del péndulo. Suponiendo, por sencillez que $\ell = g = c = \frac{1}{m}$ y suprimiendo el argumento t :

$$\ddot{\theta} = -\dot{\theta} + \sin \theta - u \cos \theta.$$

Para obtener las ecuaciones del espacio-estado realizamos el cambio de variables habitual: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$. De esta manera el sistema de primer orden equivalente es:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + \sin x_1 - u \cos x_1 \end{cases}$$

Así pues, si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$f(t, x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 + \sin x_1 - u \cos x_1 \end{bmatrix}.$$

Los estados estacionarios bajo el control $u(\cdot)$ son las soluciones constantes de $f(t, x, u) = 0$. Si consideramos el control cero ($u(t) = 0$) entonces

$$f(t, x, 0) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 + \sin x_1 \end{bmatrix},$$

de modo que $f(t, x, 0) = 0$ si y sólo si $x_2 = 0$ y $x_1 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En efecto, los estados estacionarios corresponden a la posición vertical (arriba o abajo) del péndulo porque en ausencia de una acción externa, el péndulo permanecería en dicha posición indefinidamente. ■

Ejemplo 4.4 Se trata de modelizar el movimiento de un satélite de comunicaciones. Éstos reciben y emiten ondas electromagnéticas desde y hacia radares situados en la superficie terrestre. A fin de no tener que estar moviendo estos radares para apuntar continuamente al satélite, se intenta que éste ocupe una posición fija relativamente a ellos. Las órbitas que deben describir dichos satélites se llaman *geosíncronas*.

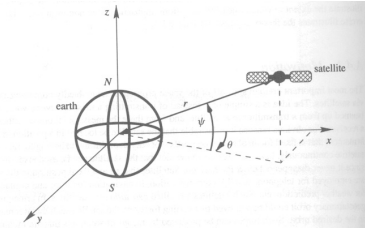


Figura 4.2: Satélite en órbita estacionaria.

Para simplificar el modelo supondremos que el movimiento del satélite se hace en el plano del Ecuador. Tomaremos el centro de la Tierra como origen de coordenadas, usaremos coordenadas polares (r, θ) . Denotamos la masa de la Tierra por M_T ($5,973 \times 10^{19}$ Kgr., aproximadamente), por M_S la del satélite, por G la constante de gravitación universal ($6,67428 \times 10^{-11}$ N·m²/kg²) y por Ω la velocidad angular de la Tierra ($7,27 \times 10^{-5}$ rad/seg). Supondremos que el satélite está dotado de dos propulsores que pueden impulsarlo en la dirección radial y tangencial con fuerzas F_r y F_θ . Aplicando las leyes de Newton, las siguientes ecuaciones proporcionan las posibles trayectorias que describe el satélite:

$$\begin{cases} M_S \ddot{r}(t) = M_S r(t) \dot{\theta}(t)^2 - \frac{GM_T M_S}{r(t)^2} + G_r(t) + F_r(t) \\ M_S r(t) \ddot{\theta}(t) = -2M_S \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + G_\theta(t) + F_\theta(t) \end{cases} \quad (4.15)$$

Estas ecuaciones son el resultado de tener en cuenta las diversas fuerzas a las que está sometido el satélite: La fuerza debida al movimiento del satélite alrededor de la Tierra ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$), la fuerza de atracción de masas, la fuerza debida a los motores y la fuerza perturbadora y, posiblemente mucho más débil que las demás, ejercida por la Luna, el Sol, otros planetas, viento solar, etc. y que las hemos reunido en G_r y G_θ .

Para calcular la fuerza debida al movimiento, se toman vectores unitarios \vec{e}_r y \vec{e}_θ en las direcciones radial y tangencial de la trayectoria del satélite. Así $\vec{e}_r = \vec{e}_r(t)$ y $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(t)$ son vectores que cambian en cada instante de tiempo y si $\vec{r}(t)$ es el vector de posición del satélite; es decir, el que une el centro de masa de la Tierra con el del satélite, la trayectoria de éste está determinada por la función vectorial $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$, siendo $r(t)$ el módulo del vector (de forma general consideramos una partícula que se mueve alrededor de la Tierra pero a una distancia no constante).

Un cálculo simple muestra que para cada instante fijo t ,

$$\begin{aligned} \vec{e}_r(t+h) - \vec{e}_r(t) &= -(1 - \cos(\theta(t+h) - \theta(t)))\vec{e}_r(t) + \sin(\theta(t+h) - \theta(t))\vec{e}_\theta(t) \\ \vec{e}_\theta(t+h) - \vec{e}_\theta(t) &= -\sin(\theta(t+h) - \theta(t))\vec{e}_r(t) + (1 - \cos(\theta(t+h) - \theta(t)))\vec{e}_\theta(t). \end{aligned}$$

Ahora bien, para h próximo a 0, y suponiendo θ infinitamente diferenciable, podemos desarrollar esta función en serie de Taylor cerca de t :

$$\theta(t+h) = \theta(t) + h\dot{\theta}(t) + g(h) = \theta(t) + h\omega(t) + g(h)$$

donde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$. Hacemos lo mismo con las funciones seno y coseno cerca de 0 (recordemos que t está fijo):

$$\begin{aligned}\cos(\theta(t+h) - \theta(t)) &= \cos(\omega(t)h + g(h)) = 1 + f(h), \\ \sin((\theta(t+h) - \theta(t))) &= \sin(\omega(t)h + g(h)) = \omega(t)h + g(h) + m(h)\end{aligned}$$

con $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$ y $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(h)}{h^2} = 0$ y donde $\omega(t)$ es la velocidad angular del satélite en el instante fijo t . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{e}_r(t+h) - \vec{e}_r(t)}{h} = \omega(t)\vec{e}_\theta(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)\vec{e}_\theta(t) \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{e}_\theta(t+h) - \vec{e}_\theta(t)}{h} = -\omega(t)\vec{e}_r(t) = -\frac{d\theta}{dt}(t)\vec{e}_r(t).\end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta,$$

y

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta.$$

Usando la terminología de la Física:

- $\frac{d^2r}{dt^2}$ = aceleración debida al cambio de posición del satélite en la dirección radial,
- $r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ = aceleración centrípeta,
- $r \frac{d^2\theta}{dt^2}$ = aceleración debida al cambio de posición del satélite en la dirección tangencial,
- $2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}$ = aceleración de Coriolis.

Aplicando las leyes de Newton:

$$M_S \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = M_S \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + M_S \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta.$$

Por otra parte, la fuerza de atracción de masas es

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_T M_S}{r(t)^2} \vec{e}_r$$

Y las fuerzas de los motores del satélite y de la perturbación son:

$$\vec{F}_m = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta, \quad \vec{F}_p = G_r \vec{e}_r + G_\theta \vec{e}_\theta$$

En el sistema de referencia no inercial correspondiente al satélite la fuerza total que actúa sobre el mismo es nula (en otras palabras, “en el satélite no se nota que haya ninguna fuerza cuyo origen esté en el mismo satélite”). Por consiguiente:

$$M_S \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + M_S \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta - \vec{F}_g = \vec{F}_m + \vec{F}_p.$$

Igualando las componentes radial y tangencial obtenemos (4.15).

En una primera aproximación vamos a suponer que las fuerzas G_r y G_θ son despreciables respecto a las demás. A fin de simplificar la expresión (4.15) renombramos $F_r = F_r/M_S$, y $F_\theta = F_\theta/M_S$, obteniendo así:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) &= r(t)\dot{\theta}(t)^2 - \frac{GM_T}{r(t)^2} + F_r(t) \\ r(t)\ddot{\theta}(t) &= -2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + F_\theta(t) \end{cases} \quad (4.16)$$

Para obtener las ecuaciones de espacio-estados podríamos hacer el cambio de variables habitual: $x_1(t) = r(t)$, $x_2(t) = \dot{r}(t)$, $x_3(t) = \theta(t)$ y $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$. Sin embargo, este cambio de variables no tendría en cuenta que se quiere que el satélite mantenga una posición constante respecto de la Tierra. Es decir, que gire a la misma velocidad angular que la Tierra (recordemos que la hemos denotado con Ω y que su valor es $7,27 \times 10^{-5}$ rad/seg). El cambio de variables apropiado entonces es:

$$x_1(t) = r(t), \quad x_2(t) = \dot{r}(t), \quad x_3(t) = \theta(t) - (\theta_0 + \Omega t) \quad \text{y} \quad x_4(t) = \dot{\theta}(t) - \Omega,$$

donde θ_0 es el ángulo inicial de la posición del satélite respecto de un punto de referencia prefijado (por ejemplo, el meridiano cero). Por lo tanto, $x_3(0) = 0$. El sistema que se obtiene es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t)(x_4(t) + \Omega)^2 - \frac{GM_T}{x_1(t)^2} + F_r(t) \\ x_4(t) \\ -\frac{2x_2(t)(x_4(t) + \Omega)}{x_1(t)} + \frac{F_\theta(t)}{x_1(t)} \end{bmatrix}$$

Vamos a estudiar los estados estacionarios de este sistema con control nulo $F_r(t) = F_\theta(t) = 0$. Estamos presuponiendo que $x_1(t) = r(t) \neq 0$ (lo contrario significaría que el satélite está en el centro de masa de la Tierra). En particular, los estados estacionarios deben cumplir este requerimiento. Como para los estados estacionarios $x_1(t)$ debe ser constante (digamos R_0), tendremos $x_1(t) = R_0$. Como $x_1(t)$ y $x_3(t)$ son constantes, $x_2(t) = x_4(t) = 0$. Ahora bien, esto implica (sustituyendo en la ecuación de \dot{x}_2) que

$$0 = x_1(t)\Omega^2 - \frac{GM_T}{x_1(t)^2} = R_0\Omega^2 - \frac{GM_T}{R_0^2}.$$

Por lo cual

$$R_0 = \left(\frac{GM_T}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.17)$$

es el valor de $x_1(t)$ para el estado estacionario. Finalmente, $x_3(t)$ es constante y $x_3(0) = 0$. Esto implica que $x_3(t) = 0$ para todo $t > 0$. En definitiva, el estado de equilibrio a control cero es $(R_0, 0, 0, 0)$. En términos de $r(t)$ y $\theta(t)$, esto significa que el estado estacionario corresponde a

$$r(t) = R_0, \quad \theta(t) = \theta_0 + \Omega t, \quad t \geq 0.$$

Es decir, el estado estacionario a control cero determina una trayectoria del satélite a distancia fija de la Tierra ($R_0 = \left(\frac{GM_T}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{3}}$) y con la misma velocidad angular que la Tierra. Esto es lo que se llama *una órbita geoestacionaria y geosíncrona*. ■

4.3. Sistemas Lineales

Consideremos el siguiente sistema lineal con una condición inicial para el estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad t \in \mathcal{T} \quad (4.18)$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ para todo $t \in \mathcal{T}$.

Cuando no hay controles, el conjunto de soluciones del sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t); \quad (4.19)$$

es un espacio vectorial de dimensión n . Cualquier matriz $n \times n$ $X(t)$ cuyas columnas sean soluciones linealmente independientes del sistema (4.19) recibe el nombre de **Matriz Fundamental de Soluciones** de dicho sistema. Una forma de comprobar si las columnas de $X(t)$ son linealmente independientes es mediante el cálculo del determinante $\det X(t)$. Si éste es distinto de 0 para algún $t \in \mathcal{T}$ entonces lo es para todo $t \in \mathcal{T}$ y las columnas de $X(t)$ son linealmente independientes.

Tal y como hemos comentado más arriba, bajo la hipótesis de continuidad de $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y la de continuidad a trozos de $u(\cdot)$ en un intervalo de tiempo \mathcal{T} , el Problema de Condición Inicial (P.C.I.)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad t \in \mathcal{T} \quad (4.20)$$

tiene solución única. Ésta se puede obtener por el método de *variación de las constantes*:

$$x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = \Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds, \quad t \in \mathcal{T} \quad (4.21)$$

donde $\Phi(t, t_0)$ es una matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo (4.19) que cumple la condición $\Phi(t_0, t_0) = I_n$. Se puede comprobar fácilmente que ésta es la única matriz que es solución del P.C.I. matricial:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), & t \in \mathcal{T} \\ X(t_0) = I_n \end{cases} \quad (4.22)$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n . A esta matriz se le llama **Matriz de Transición de Estados** del sistema (4.19) desde el instante t_0 . En algunos tratados (ver por ejemplo [11]) se diferencia el operador evolución: $\chi(t, t_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $\chi(t, t_0)x = \psi(t; t_0, x^0, 0_U)$ de la matriz de este operador en las bases canónicas que es la matriz de transición de estados. Nosotros no haremos distinción entre el operador y la matriz que lo representa.

La caracterización de $\Phi(t, t_0)$ como solución del sistema (4.22) permite demostrar propiedades importantes de esta matriz que se proponen como ejercicios.

Por otra parte la función de salida para el sistema (4.18) será:

$$\begin{aligned} y(t) &= \eta(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = C(t)x(t) + D(t)u(t) = \\ &= C(t)\Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, s)B(s)u(s)ds + Du(t), \quad t \in \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

No hay fórmulas explícitas generales para calcular las matrices de transición de estados para sistemas lineales salvo que $A(t) = A$ sea invariante en el tiempo (constante para todo t). Enseguida veremos la forma que tienen éstas. Ahora bien, comprobar si una matriz dada es o no la matriz de transición de estados de un sistema dado es trivial tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5 Dado el sistema

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{t(t-1)} \begin{bmatrix} -(t+1) & 2t \\ -3 & t+2 \end{bmatrix} x(t), \quad t \in (0, 1), \quad (4.24)$$

vamos a comprobar que

$$Y(t) = \begin{bmatrix} t & t^{-1} \\ t & t^{-2} \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones y vamos a calcular la matriz de transición de estados para $t_0 = 1/2$.

Que $Y(t)$ es una matriz fundamental de soluciones de (4.24) significa que $\det Y(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, 1)$ y que $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ siendo $A(t)$ la matriz de coeficientes del sistema (4.24).

En primer lugar, $\det Y(t) = t^{-1} - 1 \neq 0$ para todo $t \in (0, 1)$. Además,

$$\dot{Y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -t^{-2} \\ 1 & -2t^{-3} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} A(t)Y(t) &= \frac{1}{t(t-1)} \begin{bmatrix} -t^2 - t + 2t^2 & -(t+1)t^{-1} + 2t^{-1} \\ -3t + t^2 + 2t & -3t^{-1} + (t+2)t^{-2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{t(t-1)} \begin{bmatrix} t^2 - t & (-t+1)t^{-1} \\ t^2 - t & -2(t-1)t^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t^{-2} \\ 1 & -2t^{-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$ por lo que $Y(t)$ es una matriz fundamental de soluciones. Pero no puede ser la matriz de transición de estados $\Phi(t, t_0)$ para ningún t_0 . La razón es que si fuera $Y(t) = \Phi(t, t_0)$ entonces $Y(t_0) = \Phi(t_0, t_0) = I_n$ y esto no es verdad para ningún $t_0 \in (0, 1)$. Ahora bien, como $Y(t)$ es una matriz fundamental de soluciones, es invertible en $(0, 1)$. En particular, para $t_0 = 1/2$, $Y(t_0)Y(t_0)^{-1} = I_n$.

Por otra parte, las columnas de $Y(t)$ forman una base del espacio vectorial de soluciones del sistema (4.24), de modo que si P es cualquier matriz invertible, también $Z(t) = Y(t)P$ es una matriz fundamental de soluciones porque $\dot{Z}(t) = \dot{Y}(t)P = A(t)Y(t)P(t) = A(t)Z(t)$. En particular, $\Phi(t, t_0) = Y(t)Y(t_0)^{-1}$ es una matriz fundamental de soluciones; es decir, $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$, y $\Phi(t_0, t_0) = Y(t_0)Y(t_0)^{-1} = I_n$. En consecuencia, $\Phi(t, 1/2)$ es la matriz de transición de estados de (4.24) desde el instante $t_0 = 1/2$. Explícitamente,

$$\Phi(t, 1/2) = \begin{bmatrix} t & t^{-1} \\ t & t^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 1/2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8t^2 - 1}{2t^2} & \frac{1 - 4t^2}{2t^2} \\ \frac{2t}{8t^2 - 1} & \frac{2t}{1 - 4t^3} \end{bmatrix}.$$

■

El ejemplo anterior nos muestra que encontrar la matriz de transición de estados de un sistema lineal con un tiempo inicial dado es sencillo una vez se ha conseguido una matriz fundamental de soluciones de dicho sistema. Ahora bien, calcular una matriz fundamental de soluciones no es, en general, una tarea fácil. En algunos casos se pueden usar “algunos trucos” que ayudan en dicha tarea, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6 Sea

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{-t}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} \\ \frac{t}{1+t^2} & \frac{-4t}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

Vamos a calcular una matriz de transición de estados para el sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, con la condición inicial $x(t_0) = x^0$. Para ello observamos que, en realidad,

$$A(t) = \frac{t}{1+t^2} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

El “truco” aquí es triangularizar o, mejor, diagonalizar la matriz $A(t)$. ¿Cómo? Diagonalizando, si es posible, la matriz $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. ¿En qué ayuda esta estrategia? Si pudiéramos

encontrar una matriz invertible y constante (no dependiente de t) T tal que $T^{-1}A(t)T = D(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) & 0 \\ 0 & d_2(t) \end{bmatrix}$ entonces, haciendo el cambio de variable $y(t) = T^{-1}x(t)$ obtendríamos

$$\dot{y}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}A(t)x(t) = T^{-1}A(t)Ty(t) = D(t)y(t).$$

De esta forma el nuevo sistema se reduciría a

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = d_1(t)y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = d_2(t)y_2(t), \end{cases}$$

siendo $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$. Se trata de un sistema *desacoplado* que se puede integrar fácilmente: la matriz fundamental de estados de este sistema para la condición inicial t_0 sería

$$\Psi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{\int_{t_0}^t d_1(s)ds} & 0 \\ 0 & e^{\int_{t_0}^t d_2(s)ds} \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, mediante un cálculo sencillo se comprueba que $\Phi(t, t_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = I_n \end{cases}$$

si y sólo si $\Psi(t, t_0) = T^{-1}\Phi(t, t_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = D(t)Y(t) \\ Y(t_0) = T^{-1}. \end{cases}$$

En efecto,

$$\dot{\Psi}(t, t_0) = T^{-1}\dot{\Phi}(t, t_0) = T^{-1}A(t)\Phi(t, t_0) = T^{-1}A(t)T\Psi(t, t_0) = D(t)\Psi(t, t_0),$$

$$\text{y } \Psi(t_0, t_0) = T^{-1}\Phi(t_0, t_0) = T^{-1}.$$

Nuestro objetivo es diagonalizar la matriz $A(t)$. Para ello basta hacerlo con la matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Y para diagonalizar esta matriz basta calcular sus valores y vectores propios:

$$\det(\lambda I_2 - B) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3).$$

Los valores propios de B son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -3$. Y para calcular vectores propios asociados a estos valores propios debemos resolver los sistemas $(\lambda_1 I_2 - B)v_1 = 0$ y $(\lambda_2 I_2 - B)v_2 = 0$. Hay infinitas soluciones para ambos sistemas. Soluciones sencillas son

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poniendo $T = [v_2 \ v_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tenemos $T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Así

$$D(t) = T^{-1}A(t)T = \frac{t}{1+t^2} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

y obtenemos el sistema desacoplado $\dot{y}(t) = D(t)y(t)$:

$$\dot{y}_1(t) = \frac{-3t}{1+t^2}y_1(t), \quad \dot{y}_2(t) = \frac{-2t}{1+t^2}y_2(t).$$

Integrando,

$$y_1(t) = e^{\int -\frac{3t}{1+t^2}dt} = e^{-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)} = e^{\ln(1+t^2)^{-3/2}} = (1+t^2)^{-3/2} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$$

$$y_2(t) = e^{\int -\frac{2t}{1+t^2}dt} = e^{-\ln(1+t^2)} = e^{\ln(1+t^2)^{-1}} = (1+t^2)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}$$

Entonces,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones del sistema desacoplado $\dot{y}(t) = D(t)y(t)$ y, además, $Y(0) = I_2$. Pero necesitamos $\Psi(t, 0) = T^{-1}$. Para ello basta tomar $\Psi(t, 0) = Y(t)T^{-1}$. Finalmente, $\Phi(t, 0) = T\Psi(t, 0) = TY(t)T^{-1}$. Es decir, la matriz de transición de estados del sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ en el instante $t_0 = 0$ es

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}} & \frac{2}{(t^2+1)^{3/2}} - \frac{2}{t^2+1} \\ \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}} & \frac{2}{(t^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{t^2+1} \end{bmatrix}.$$

■

4.3.1. Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo son aquellos en los que todas las matrices (de estados, controles y salidas) son independientes del tiempo; es decir, son constantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in \mathbb{R} & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m} \end{cases} \quad (4.25)$$

Estos sistemas son los más sencillos y más estudiados. En realidad son los modelos de espacio-estado de los sistemas estudiados en el Capítulo 3 en términos de la función de transferencia.

En primer lugar prestamos atención a la ecuación que rige la dinámica de los estados:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Comenzando con el P.C.I. asociado al sistema autónomo $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(t_0) = x^0$. La matriz de transición de estados de este sistema es la matriz exponencial:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

La matriz exponencial e^{At} se puede definir de varias formas equivalentes. La más rápida y conveniente para este curso es la que se obtiene a partir de una serie de potencias matriciales:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.27)$$

Se puede demostrar que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ converge para toda matriz A siempre que en $\mathbb{R}^{n \times n}$ (conjunto de matrices de números reales de n filas y n columnas) consideremos las normas de matriz habituales. Por ello es perfectamente razonable definir e^A como el límite de esta serie.

De la definición se desprende que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At},$$

de modo que $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ es la única solución del P.C.I.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t), & t \in \mathbb{R} \\ X(t_0) = I_n. \end{cases}$$

Por lo tanto, tal y como se ha mencionado más arriba, $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ es la matriz de transición de estados del sistema (4.26). Se sigue de aquí que la función de transición de estados (solución) para los sistemas (4.26) se puede dar explícitamente (ver (4.21)):

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

En consecuencia, la respuesta del sistema será:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C e^{A(t-t_0)} x^0 + \int_{t_0}^t C e^{A(t-s)} Bu(s) ds + Du(t). \quad (4.29)$$

En la práctica, el cálculo de la matriz $e^{A(t-t_0)}$ no es una tarea sencilla y se basa, por lo general, en el cálculo de los valores y vectores propios (quizá generalizados) de la matriz de estados A . Es conocido que dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existe una matriz no singular (es decir, determinante distinto de cero o, equivalentemente, invertible) $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, de **números complejos**, tal que

$$T^{-1}AT = J,$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}. \quad (4.30)$$

La matriz J , diagonal por bloques, recibe el nombre de **Forma Normal de Jordan** de A . Los números, λ_k , que aparecen en la diagonal de cada uno de los bloques J_k , son los valores propios (quizá repetidos) de A . En general son números complejos porque son las raíces del polinomio característico de A ; es decir, las raíces del polinomio que se obtiene al calcular $\det(\lambda I_n - A)$.

Para muchas matrices (casi todas en un cierto sentido) sus valores propios son todos distintos. En tal caso, $n_k = 1$ y

$$J = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

En este caso, las columnas de las matrices T para las que $T^{-1}AT = J$ son vectores propios de A (la i -ésima columna de T es vector propio de A asociado al valor propio λ_i). Cuando J no es diagonal, a las columnas de T se les llama *vectores propios generalizados* para los correspondientes valores propios que forman los bloques de Jordan J_k .

Es fácil ver, utilizando la definición de e^A como serie de potencias, que si $T^{-1}AT = J$ entonces

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}. \quad (4.31)$$

Además, de la propia definición se tiene también que

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_r t} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

donde los bloques no especificados son bloques de ceros. Ahora bien cada bloque en la diagonal de la forma de Jordan se puede escribir como

$$J_k = \lambda_k I_{n_k} + N_k, \quad \text{con} \quad N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

y donde I_{n_k} es la matriz identidad de orden (o tamaño) n_k . Se comprueba sin dificultad que $N_k^{n_k} = 0$ y, en consecuencia, en el desarrollo de la serie de potencias

$$e^{J_k t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} J_k^i = e^{\lambda_k t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} N_k^i, \quad t \in \mathbb{R}.$$

sólo hay un número finito de sumandos no nulos. En definitiva, sumando los términos no

nulos se obtiene

$$e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Finalmente, si $\lambda_k = a_k + ib_k$ entonces, usando la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$:

$$e^{\lambda_k t} = e^{a_k t} e^{ib_k t} = e^{a_k t} (\cos(b_k t) + i \sin(b_k t)).$$

Teniendo en cuenta (4.28) y (4.31) resulta que la presencia de valores propios complejos produce soluciones complejas del sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, si el sistema es real, se requieren soluciones reales. El paso de una solución compleja a una real para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes reales se puede hacer como se explica a continuación. En primer lugar, dado que la matriz A del sistema es real, si ésta tiene valores propios complejos, deben aparecer conjugados a pares. Es decir, si $\lambda_k = a_k + ib_k$ ($b_k > 0$) es valor propio de A , también $\bar{\lambda}_k = a_k - ib_k$ (su conjugado) es valor propio de A . Y si $x_k = u_k + iv_k$ es un vector propio (o vector propio generalizado) de A para el valor propio λ_k , entonces $\bar{x}_k = u_k - iv_k$ es vector propio (o vector propio generalizado, respectivamente) de A para el valor propio $\bar{\lambda}_k$. Además, para cada bloque de Jordan $J(\lambda_k)$ en la forma de Jordan de A asociado a λ_k , hay un bloque de Jordan $J(\bar{\lambda}_k)$ asociado a $\bar{\lambda}_k$ teniendo ambos el mismo tamaño, digamos n_k . Multiplicando J (forma de Jordan de A) por la izquierda y por la derecha por una matriz de permutación, digamos P , podemos reordenar los elementos de la forma de Jordan de A de manera que cada elemento diagonal λ_k de $J(\lambda_k)$ se empareje con un elemento diagonal $\bar{\lambda}_k$ de $J(\bar{\lambda}_k)$:

$$\widehat{J}_k = \begin{bmatrix} C_k & I_2 & & & \\ & C_k & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & C_k & I_2 \\ & & & & C_k \end{bmatrix}$$

donde $C_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_k \end{bmatrix}$. Realizando la misma permutación en las columnas de T podemos emparejar cada vector propio generalizado $u_k + iv_k$ de λ_k con el vector propio generalizado $u_k - iv_k$ de $\bar{\lambda}_k$; todo ello en relación a los bloques de Jordan $J(\lambda_k)$ y $J(\bar{\lambda}_k)$ que estamos considerando. Ahora para cada bloque C_k y la correspondiente submatriz $T_k = \begin{bmatrix} u_k + iv_k & u_k - iv_k \end{bmatrix}$ definimos la matriz

$$W_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es unitaria; es decir, $W_k^{-1} = W_k^*$ siendo $W_k^* = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ la matriz transpuesta y conjugada de W_k . Un simple cálculo muestra que

$$R_k := W_k^* C_k W_k = \begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix}$$

y

$$T_k W_k = \sqrt{2} \begin{bmatrix} v_k & u_k \end{bmatrix}.$$

Aplicando de esta forma, tantas veces como sea necesario, matrices W_k a los bloques diagonales de \widehat{J}_k y a las correspondientes matrices T_k de valores propios (o valores propios generalizados) vemos que la forma de Jordan de A es semejante a una matriz real y que la matriz de paso es también real. En definitiva, dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existen matrices $K, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que P es invertible y $K = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal por bloques cuyos bloques son bloques de Jordan de la forma (4.30) si $\lambda_k \in \mathbb{R}$ y de la forma:

$$K_k = \begin{bmatrix} R_k & I_2 & & & \\ & R_k & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R_k & I_2 \\ & & & & R_k \end{bmatrix}, \quad R_k = \begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

si $\lambda_k = a_k + ib_k$ y $\bar{\lambda}_k = a_k - ib_k$ son valores propios de A complejos conjugados.

Podemos usar esta matriz para dar una expresión de la solución real del P.C.I.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Tal y como hemos hecho con la forma de Jordan compleja, $e^{A(t-t_0)} = P e^{K(t-t_0)} P^{-1}$ por lo que dicha solución será

$$x(t) = P e^{K(t-t_0)} P^{-1} x^0.$$

De nuevo, la exponencial e^{Kt} (ponemos $t_0 = 0$ para simplificar la notación) sigue siendo una matriz diagonal por bloques. Si $\lambda_k \in \mathbb{R}$, e^{J_k} es la matriz de (4.33) pero si λ_k y $\bar{\lambda}_k$ son valores propios complejos conjugados la expresión de $e^{K_k t}$ es un poco más difícil de escribir de forma explícita. Por sencillez, reducimos el estudio al caso 2×2 ; es decir $e^{R_k t}$. A fin de cuentas, este cálculo es el único que hay que hacer cuando los valores propios son simples (multiplicidad 1) que es el más “abundante” (caso genérico).

En primer lugar,

$$e^{C_k t} = \begin{bmatrix} e^{(a_k + b_k i)t} & 0 \\ 0 & e^{(a_k - b_k i)t} \end{bmatrix} = e^{a_k t} \begin{bmatrix} \cos(b_k t) + i \operatorname{sen}(b_k t) & 0 \\ 0 & \cos(b_k t) - i \operatorname{sen}(b_k t) \end{bmatrix}$$

Pongamos, por simplicidad notacional $c_k = \cos(b_k t)$ y $s_k = \operatorname{sen}(b_k t)$. Utilizando la matriz W_k ,

$$e^{R_k t} = W_k^* e^{C_k t} W_k = e^{a_k t} W_k^* \begin{bmatrix} c_k + i s_k & 0 \\ 0 & c_k - i s_k \end{bmatrix} W_k = e^{a_k t} \begin{bmatrix} c_k & -s_k \\ s_k & c_k \end{bmatrix}.$$

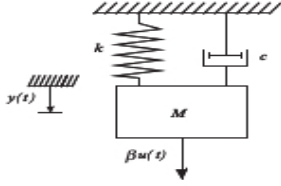


Figura 4.3: Sistema masa-muelle con amortiguamiento

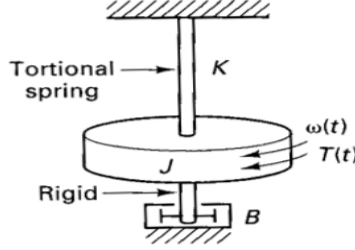


Figura 4.4: Cuerpo rígido en rotación

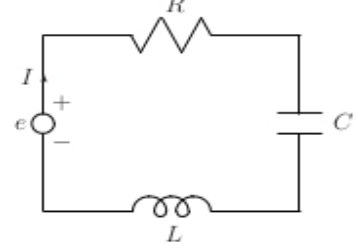


Figura 4.5: Circuito eléctrico simple

Ahora, si $T_k = \begin{bmatrix} u_k + iv_k & u_k - iv_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz de vectores propios para los valores propios $a_k + ib_k$ y $a_k - ib_k$ ($b_k > 0$) entonces

$$x(t) = e^{At} x^0 = T_k e^{Kt} T_k^{-1} x^0 = T_k W_k W_k^* e^{C_k t} W_k W_k^* T_k^{-1} x^0 = \begin{bmatrix} v_k & u_k \end{bmatrix} e^{R_k t} x^1$$

donde $x^1 = \begin{bmatrix} v_k & u_k \end{bmatrix}^{-1} x^0$ que es un vector de números reales. Así pues

$$x(t) = e^{a_k t} \begin{bmatrix} v_k & u_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k & -s_k \\ s_k & c_k \end{bmatrix} x^1.$$

Si ponemos $v_k = \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{bmatrix}$, $u_k = \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \end{bmatrix}$ y $x^1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$, entonces obtenemos

$$x(t) = e^{a_k t} (\alpha \cos(b_k t) + \beta \sin(b_k t)) \quad (4.36)$$

donde

$$\alpha = \begin{bmatrix} x_{11} v_{k1} - x_{12} u_{k1} \\ x_{11} u_{k1} - x_{12} v_{k1} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} x_{11} v_{k2} - x_{12} u_{k2} \\ x_{11} u_{k2} - x_{12} v_{k2} \end{bmatrix}.$$

Tenemos así una forma muy simple de expresar la solución del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con la condición inicial $x(0) = x^0$. Si el instante inicial fuera $t_0 \neq 0$ bastaría sustituir t por $t - t_0$ en (4.36).

El siguiente ejemplo, en el que se estudian las soluciones del oscilador armónico amortiguado, es ilustrativo de todo el proceso expuesto hasta aquí.

Ejemplo 4.7 (Oscilador Armónico Amortiguado Lineal) Vimos en el Capítulo 2 que las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de los sistemas en las Figuras 4.3, 4.4, 4.5 son las mismas:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= u(t) \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

En cada caso, por supuesto, el significado de m , c , k y u es diferente, pero estos tres sistemas tienen un comportamiento dinámico que puede modelizarse con la misma ecuación.

Diremos que (4.37) es la ecuación del oscilador armónico amortiguado (si $c \neq 0$) lineal. Por consiguiente, los tres sistemas son modelos físicos diferentes de dicho oscilador.

La forma en la que se suele presentar la ecuación de los osciladores lineales no es (4.37) sino una equivalente que se obtiene al hacer las sustituciones

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

A ω_0 se le conoce con el nombre de **frecuencia natural** del sistema y a ζ como la **razón de amortiguamiento**. Con esta sustitución el sistema de (4.37) se convierte en

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = k\omega_0^2u(t), \quad (4.38)$$

donde hemos sustituido k por $\frac{1}{k}$ para simplificar la notación.

Las ecuaciones del modelo espacio-estado correspondiente a esta ecuación se obtienen mediante el cambio de variables: $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = \dot{x}(t)$. Así el problema de condiciones iniciales (4.37) es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k\omega_0^2 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Como una aplicación simple de la forma de Jordan, vamos a analizar la dinámica de los osciladores lineales en movimiento libre; es decir, cuando no hay fuerzas externas actuando sobre él ($u(t) = 0$). En este caso la ecuación diferencial (4.38) queda:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (4.40)$$

Y las ecuaciones en espacio-estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Calculamos los valores propios de la matriz de estados:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \omega_0^2 & \lambda + 2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} &= \lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 \\ &= (\lambda + \zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})(\lambda + \zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}). \end{aligned}$$

Así pues, la matriz de estados puede tener valores propios reales y distintos (si $\zeta > 1$), complejos no reales conjugados (si $0 < \zeta < 1$) o un valor propio real doble (si $\zeta = 1$). Analizaremos el comportamiento de las soluciones del sistema (también llamadas trayectorias) en cada caso. Recordemos que la solución de (4.41) es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix}$ es la matriz de estados, T es una matriz de vectores propios (o vectores propios generalizados) de A y J es su forma de Jordan.

1. $\zeta > 1$. En este caso $\zeta^2 - 1 > 0$, y la matriz de estados A tiene dos valores propios reales distintos $\lambda_1 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$ y $\lambda_2 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$. Su forma de Jordan es $J = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ y

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-\omega_0(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega_0(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \end{bmatrix}.$$

Ahora, si $T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix}$ entonces

$$Te^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-\omega_0(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} t_1 & e^{-\omega_0(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} t_2 \end{bmatrix},$$

y si escribamos $T^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, entonces

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = Te^{Jt}T^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = ae^{-\omega_0(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} t_1 + be^{-\omega_0(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} t_2.$$

En palabras, tanto el desplazamiento $x_1(t)$ como la velocidad $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ son combinaciones lineales de las funciones exponenciales $e^{-\omega_0(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$ y $e^{-\omega_0(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$.

La Figura 4.6 muestra las gráficas del desplazamiento y la velocidad de un sistema en el que $\zeta > 1$. El sistema se dice que es **sobreamortiguado**: la razón de amortiguación es muy grande y la solución converge a cero a medida que aumenta el tiempo.

2. $0 < \zeta < 1$. En este caso $\zeta^2 - 1 < 0$ y la matriz de estados tiene dos valores propios complejos (no reales) conjugados. Es decir, si $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ (cantidad que se conoce con el nombre de *frecuencia de amortiguamiento*) entonces los valores propios de A son $\lambda_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_d i$ y $\lambda_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_d i$, $\omega_d > 0$. Hemos visto más arriba (véase (4.36)) que la solución del sistema es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-\zeta\omega_0 t} (a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t))$$

donde a y b son vectores columna reales de 2 componentes. Vemos así que, también en este caso, tanto el desplazamiento $x_1(t)$ como la velocidad $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ son productos de la función exponencial $e^{-\zeta\omega_0 t}$ y de una combinación lineal de las funciones $\cos(\omega_d t)$ y $\sin(\omega_d t)$. No obstante, el hecho de que a y b sean reales permite escribir la expresión $x_1(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} (a_1 \cos(\omega_d t) + b_1 \sin(\omega_d t))$ de otra forma más compacta siempre que $a_1 \neq 0$. En efecto, podemos pensar en a_1 y b_1 como los catetos de un triángulo rectángulo tal que $\arctan(b_1/a_1) = \phi$. Si A es la hipotenusa, tenemos $a_1 = A \cos \phi$ y $b_1 = A \sin \phi$. Es claro que la relación entre (a_1, b_1) , $a_1 \neq 0$ y (A, ϕ) , $0 \leq \phi < \pi$, es biunívoca. Entonces

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\zeta\omega_0 t} (a_1 \cos(\omega_d t) + b_1 \sin(\omega_d t)) = \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t} (A \cos \phi \cos(\omega_d t) + A \sin \phi \sin(\omega_d t)) = \\ &= Ae^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi). \end{aligned}$$

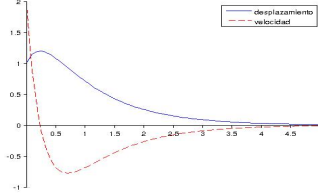


Figura 4.6: Trayectoria de un oscilador lineal con sobre-amortiguamiento.

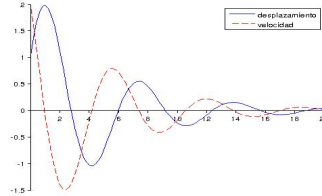


Figura 4.7: Trayectoria de un oscilador lineal subamortiguado.

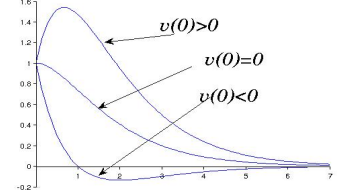


Figura 4.8: Trayectoria de un oscilador lineal críticamente amortiguado .

El caso $a_1 = 0$ corresponde a $\phi = \pi/2$. Además, $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$.

$Ae^{-\zeta\omega_0 t}$ es conocido con el nombre de *amplitud amortiguada* y ϕ como *fase* de la solución. El motivo de estas denominaciones se verá en la Sección 4.3.2. La Figura 4.7 muestra las gráficas del desplazamiento y la velocidad de un sistema en el que $0 < \zeta < 1$. El sistema se dice que es **subamortiguado**: cuanto más pequeño es el amortiguamiento, más veces oscila la trayectoria aunque con una amplitud cada vez menor y tendiendo a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

3. $\zeta = 1$. Los sistemas con razón de amortiguamiento igual a 1 se llaman sistemas **críticamente amortiguados**. Tienen un único valor propio doble: $-\omega_0$ por lo que la forma de Jordan de la matriz de estados es

$$J = \begin{bmatrix} -\omega_0 & 1 \\ 0 & -\omega_0 \end{bmatrix}.$$

Así, véase (4.33),

$$e^{Jt} = e^{-\omega_0 t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Y si $A = TJT^{-1}$ entonces la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Te^{Jt}T^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Usando el mismo procedimiento que en el caso de dos valores propios reales y distintos, existen vectores reales a y b de dos componentes tales que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= e^{-\omega_0 t} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ &= e^{-\omega_0 t} (a + bt) \end{aligned}$$

Los vectores a y b se pueden dar explícitamente:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-\omega_0 t} \left(\begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_0 + \omega_0 x_0) \\ v_0 - \omega_0(v_0 + \omega_0 x_0) \end{bmatrix} t \right)$$

La Figura 4.8 muestra las gráficas de un oscilador lineal críticamente amortiguado en función del signo de la velocidad inicial del mismo.

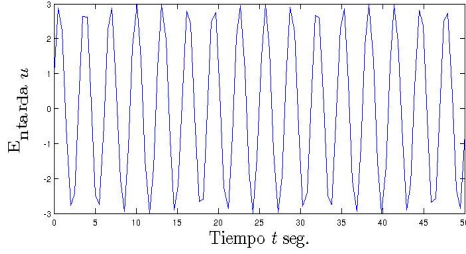


Figura 4.9: Entrada para un sistema lineal.

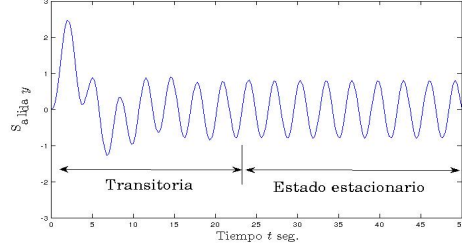


Figura 4.10: Respuesta transitoria y de espacio-estado a la entrada de la Figura 4.9.

Una característica común a las tres gráficas es que las trayectorias, después de un periodo transitorio en el que pueden crecer o decrecer, tienden a cero asintóticamente. Ello es debido a que los valores propios, λ_1 y λ_2 , de los osciladores lineales con amortiguamiento siempre tienen la parte real negativa: $-\omega_0\zeta$ y, por lo tanto, para t suficientemente grande la función exponencial $e^{-\omega_0\zeta t}$ tienden a cero. ■

4.3.2. Respuesta de un sistema lineal

Recordemos que la respuesta de los sistemas lineales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad t \in \mathcal{T}. \quad (4.42)$$

viene dada por la fórmula (4.23) que reproducimos de nuevo aquí:

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t), \quad t \in \mathcal{T}. \quad (4.43)$$

Vemos en esta expresión que la solución consiste de una respuesta a la condición inicial, $C(t)\Phi(t, t_0)x^0$, y una respuesta a la entrada, $\int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t)$. Utilizando la terminología de la Sección 4.2, $\eta(t, x, 0_U) = C(t)\Phi(t, t_0)x^0$ es la respuesta del sistema al movimiento libre, y $\eta(t, 0_X, u) = \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t)$ es la respuesta del sistema al movimiento forzado.

Resulta además que la respuesta a la entrada (movimiento forzado) se divide en muchas ocasiones en dos respuestas: una que se conoce con el nombre de *respuesta transitoria* y otra que se llama *respuesta de estado estacionario*. La Figura 4.10 muestra la respuesta de un sistema lineal a una entrada de tipo sinusoidal (Figura 4.9). En ella se aprecian las dos partes de la respuesta a dicha entrada. En particular para entradas periódicas la respuesta de estado-estacionario suele ser también periódica y representa el comportamiento del sistema a largo plazo. Veremos este fenómeno con más claridad cuando analicemos la

respuesta del sistema a las funciones salto unidad y a las funciones de tipo sinusoidal. De hecho, analizaremos con detalle la respuesta de los sistemas lineales a los tres tipos de funciones de entrada que estudiamos en el Capítulo 3 y que son los que se usan habitualmente para el análisis de la respuesta de los sistemas lineales: la función impulso, la función salto unidad y las funciones seno o coseno. Para la función impulso también daremos la expresión de la solución para sistemas lineales generales. Para las demás funciones, expresiones explícitas son sólo posible para sistema invariantes en el tiempo.

Recordemos que para sistemas invariantes en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.44)$$

la matriz de transición de estados es $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

Respuesta a un impulso

Se llama respuesta a un impulso a la respuesta forzada de un sistema cuando la entrada es la “función” impluso unidad en un instante τ . Es decir, se supone que el sistema está en reposo hasta el instante τ ($x(\tau-) = 0$) y el sistema se excita con un impulso unidad en el instante τ . Recordemos que el impulso unidad viene representado por la delta de Dirac que en el instante τ tiene la siguiente representación:

$$\delta_\tau(t) := \begin{cases} 0, & t \neq \tau \\ +\infty, & t = \tau. \end{cases}$$

Equivalentemente $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$ siendo δ la delta de Dirac en $\tau = 0$. Ya vimos en el Capítulo 3 (véase la Sección 3.4) que δ no es una función en sentido clásico y en el Apéndice A se ponen las bases para un uso riguroso de δ . En particular se da sentido a la expresión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\delta(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\delta(u)du = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.45)$$

Con esta propiedad en nuestras manos podemos decir cuál es la respuesta de un sistema lineal a un impulso. Sea e_i la i -ésima columna de la matriz I_m ; es decir, el vector de tamaño m con todas sus componentes 0 excepto la i -ésima que es 1, y consideremos como entrada del sistema $u(t) = \delta(t - \tau)e_i$. Aplicando (4.45) a la función $f(z) = C(t)\Phi(t, z)B(z)$ en el intervalo $[\tau, t]$ y teniendo en cuenta que $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$ se anula fuera de este intervalo, tenemos que

$$\int_{\tau}^t C(t)\Phi(t, z)B(z)\delta(z - \tau)e_i dz = \int_{-\infty}^{+\infty} C(t)\Phi(t, z)B(z)\delta(z - \tau)e_i dz = C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau).$$

Por otra parte $D(t)\delta(t - \tau) \neq 0$ sólo para $t = \tau$ porque $\delta(t - \tau)$ sólo es distinta de cero en $t = \tau$. Por lo tanto, la respuesta forzada del sistema a un impulso unidad en el instante τ es

$$h_i(t, \tau) = [C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(\tau)\delta(t - \tau)]e_i, \quad t \geq \tau.$$

Observamos que $h_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$ es una función vectorial: la i -ésima columna de la matriz $C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(\tau)\delta(t - \tau)$. Se suele escribir (sustituyendo τ por s):

$$H(t, s) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, s)B(s) + D(s)\delta(t - s) & \forall t \geq s \\ 0 & \forall t < s, \end{cases} \quad (4.46)$$

y esta matriz recibe el nombre de *matriz de respuesta a un impulso*. Teniendo en cuenta que por (4.45)

$$\int_0^t D(s)u(s)\delta(t - s)ds = D(t)u(t),$$

tenemos que

$$\int_{t_0}^t H(t, s)u(s)ds = \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t).$$

En consecuencia, la respuesta de un sistema lineal a la entrada $u(t)$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t H(t, s)u(s)ds, \quad (4.47)$$

Esta expresión se puede interpretar como que la respuesta del sistema lineal (4.42) $y(t)$ es la superposición (suma) de las respuestas a un “conjunto infinito de impulsos desplazados entre t_0 y t , cada uno de los cuales de magnitud $u(t)$ ” (esta “suma de los infinitos impulsos” entre t_0 y t sería la integral de las respuestas $H(t, s)$ a cada impulso).

Para los sistemas (4.44) invariantes en el tiempo, la matriz de transición de estados es $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ y para $t \geq s$ tendríamos $H(t, s) = Ce^{A(t-s)}B(s) + D\delta(t - s)$. Así pues, la matriz de respuesta a un impulso para los sistemas invariantes en el tiempo sólo depende del “tiempo transcurrido” $t - s$. Por eso se suele escribir $H(t - s)$ en vez de $H(t, s)$ y dado que $H(t - s) = H(t, s) = H(t - s, 0)$ se suele tomar como matriz de respuesta a un impulso la correspondiente al impulso en el instante $s = 0$. Es decir,

$$H(t) = \begin{cases} Ce^{At}B + D\delta(t) & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

Así, la respuesta del sistema lineal (4.44) a una entrada arbitraria $u(t)$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x^0 + \int_0^t H(t - s)u(s)ds. \quad (4.49)$$

El *Control System Toolbox* de MATLAB dispone de las funciones `impulse` y `impzplot` para calcular y dibujar las gráficas de la respuesta de un sistema lineal a la función impulso. Por ejemplo, para dibujar la gráfica del desplazamiento y velocidad de un oscilador lineal, inicialmente en reposo, cuando es sometido a un impulso podríamos proceder de la siguiente forma (suponiendo que el oscilador lineal tiene una frecuencia natural $\omega_0 = 0,5$ una razón de amortiguamiento $\zeta = 0,25$ y $k = 1/\omega_0^2$):

1. Definimos el sistema con el comando `ss` (veremos cuando estudiemos la respuesta a la función salto que hay otras formas de definir un sistema). Para ello construimos las matrices A , B y C . En este caso $D = 0$ y $C = I_2$ porque queremos tener información de $x(t) = x_1(t)$ y $\dot{x}(t) = x_2(t)$. Es decir, queremos que la salida sea el estado completo.

```
>> w=0.5; z=0.25;
>> A=[0 1; -w^2 -2*z*w]; B=[0;1]; C=eye(2);
>> sis=ss(A,B,C,0)
sis =
  a =
           x1      x2
  x1         0       1
  x2    -0.25   -0.25

  b =
      u1
  x1    0
  x2    1

  c =
      x1  x2
  y1     1   0
  y2     0   1

  d =
      u1
  y1    0
  y2    0
Continuous-time state-space model.
```

2. Usamos `impulse` o `impzplot` (véase la ayuda de MATLAB para conocer el alcance de estas dos funciones) para dibujar las gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

```
>> impulse(sis)
```

En la Figura 4.11 se muestran las gráficas de las dos variables. `Out(1)` es la del desplazamiento ($x(t) = x_1(t)$) y `Out(2)` la de la velocidad ($\dot{x}(t) = x_2(t)$). En ellas se aprecian las respuestas transitorias y de estado estacionario; siendo cero esta última. Veamos cómo interpretarlas. Las gráficas representan las funciones componentes de la matriz $H(t) = Ce^{At}B$. En este caso la matriz es 2×1 (una entrada, dos salidas). Observemos que $Ce^{At}B$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

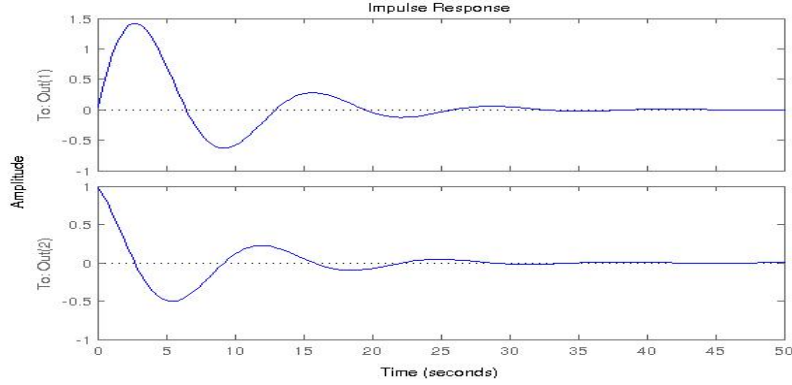


Figura 4.11: Gráficas de los estados del sistema en forma de espacio-estado para el oscilador lineal con parámetros $\omega_0 = 0,5$, $\zeta = 0,25$ y $k = 1/\omega_0^2$.

con la condición inicial $x(0) = B$. En el ejemplo que nos ocupa $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. De ahí que la gráfica de $x_1(t)$ comience en el punto $(0,0)$ y la de $x_2(t)$ en $(0,1)$. Por otra parte, vimos en el Ejemplo 4.7 que la solución para el oscilador armónico es $x_1(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi)$. Como $x(0) = 0$, debe ser $\cos(-\phi) = 0$ por lo que $\phi = \pm \frac{k\pi}{2}$. Pero la onda del coseno está desplazada a la derecha $\pi/2$; es decir, es “como si empezara en $-\pi/2$ ”. Por lo tanto, la fase debe ser negativa y así $\phi = \frac{\pi}{2}$. Finalmente, la matriz de estados A tiene dos valores propios que son complejos conjugados y con parte real negativa $-\zeta\omega_0$. Por ello, la onda del coseno se amortigua (disminuye su amplitud) transitoriamente y tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$. De ahí que la respuesta de estado estacionario sea 0.

Respuesta a un salto

Recordemos que la función salto unidad (o función de Heaviside) es:

$$\gamma(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Obsérvese que cualquier función continua puede aproximarse por una sucesión de funciones que son múltiplo de funciones salto unidad.

La *respuesta a un salto* del sistema (4.44) con $m = p = 1$ se define como la salida $y(t)$ del sistema cuando el estado inicial está en reposo ($x(0) = 0$) y la entrada es $\gamma(t)$ para $t \geq 0$. Cuando el sistema es lineal, invariante en el tiempo y multivariable ($m > 1$ o $p > 1$), la matriz de respuesta a un salto $S(t)$ es aquella cuya j -ésima columna es la respuesta a la entrada $\gamma(t)e_j$ siendo e_j la j -ésima columna de I_m . Así pues, si $S(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) & s_2(t) & \dots & s_n(t) \end{bmatrix}$ y la matriz de estados A es invertible, la respuesta a un salto $u(t) = \gamma(t)e_j$ se obtiene a

partir de (4.43):

$$\begin{aligned} s_j(t) &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) = \left(C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau + D \right) e_j = \\ &= \left(C \int_0^t e^{A\sigma} B d\sigma + D \right) e_j = \left(C (A^{-1} e^{A\sigma} B) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=t} + D \right) e_j = \\ &= (C A^{-1} e^{At} B - C A^{-1} B + D) e_j. \end{aligned}$$

Podemos escribir cada componente de $s_{ij}(t)$ de la siguiente forma:

$$s_{ij}(t) = \underbrace{c_i A^{-1} e^{At} b_j}_{\text{transitoria}} + \underbrace{d_{ij} - c_i A^{-1} b_j}_{\text{estado-estacionario}}, \quad t > 0. \quad (4.50)$$

donde c_i , b_j y d_{ij} son: la i -ésima fila de C , la j -ésima columna de B y el elemento (i, j) de D , respectivamente. Es decir, $s_{ij}(t)$ es la respuesta en el “canal i ” a un salto unidad en el “canal j ”. La matriz de respuesta a un salto es entonces

$$S(t) = \underbrace{C A^{-1} e^{At} B}_{\text{transitoria}} + \underbrace{D - C A^{-1} B}_{\text{estado-estacionario}}, \quad t > 0.$$

El primer término recibe el nombre de *respuesta transitoria* cuando converge a cero al tender $t \rightarrow \infty$. Esto sucede cuando las partes reales de los valores propios de A son negativas. Cuando hay respuesta transitoria, el segundo término recibe el nombre de respuesta de estado-estacionario y, dado que la respuesta transitoria converge a 0, representa el valor de la salida del sistema a largo plazo. Nótese que

$$\frac{d}{dt} S(t) = C e^{At} B,$$

que comparando con (4.48) hacer pensar que la respuesta a un impulso es la derivada de la respuesta a un salto unidad. De hecho, tal y como se demuestra en el Apéndice A, la función impulso es la derivada, en el sentido de las distribuciones, de la función de Heaviside.

En la Figura 4.12 se muestra un ejemplo de respuesta a un salto para un sistema lineal. Se suele usar cierta terminología para referirse a los parámetros fundamentales que definen el comportamiento de la señal de salida:

- *El valor de estado estacionario* y_{ee} es el valor final de la salida (suponiendo que converja).
- *Tiempo de Subida* T_r es la cantidad de tiempo que se requiere para que la señal pase del 10 % al 90 % de su valor final.
- *Sobreelongación (Overshoot)* M_p es el porcentaje del valor final que la señal sube por encima de éste en la etapa transitoria (en el supuesto de que la señal no suba en tiempos posteriores por encima del valor en la etapa transitoria).

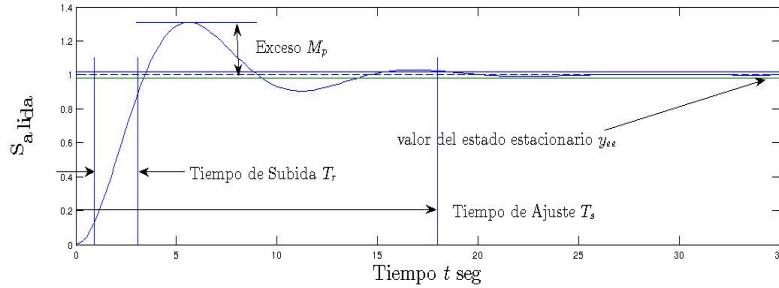


Figura 4.12: Ejemplo de respuesta a un salto. El tiempo de subida, exceso, tiempo de ajuste, y el valor de la respuesta de estado-estacionario son los valores que definen el comportamiento de la señal del sistema.

- *Tiempo de Ajuste T_s* es la cantidad de tiempo necesaria para que la señal se sitúe en el 2% de su valor final.

Hay varias funciones en el *Control System Toolbox* de MATLAB diseñadas para analizar la respuesta de un sistema a un salto. Explicaremos el uso de algunas de ellas tomando como referencia el oscilador lineal con amortiguamiento. Recordemos que la ecuación que rige la dinámica de los osciladores lineales viene dada por (4.38) que, en el modelo de espacio-estado, es equivalente a (4.39). Para hacer cálculos supondremos que la razón de amortiguamiento del sistema es $\zeta = 0,25$ y la frecuencia natural es $\omega_0 = 0,6$ rad/seg. Con estos datos concretos el sistema (4.38) queda:

$$\ddot{x}(t) + 0,30\dot{x}(t) + 0,36x(t) = 0,36ku(t) \quad (4.51)$$

cuya función de transferencia (suponiendo $y(t) = x(t)$) es

$$g(s) = \frac{0,36k}{s^2 + 0,30s + 0,36}. \quad (4.52)$$

Por su parte, las ecuaciones del sistema en la forma de espacio-estado quedarían:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,36 & -0,30 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,36k \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{cases} \quad (4.53)$$

siendo, ahora, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. Ya hemos visto que los sistemas (4.51) y (4.53) son equivalentes a través del cambio de variable $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$ donde, ahora, $x(t)$ es la variable del sistema (4.51). La ecuación $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$ de (4.53) nos indica que la salida del sistema es la solución del sistema (4.51). En consecuencia, la relación entre las transformadas de Laplace (con condición inicial cero) de la salida y la entrada del sistema (4.53) debe ser la función de transferencia $g(s)$ en (4.52). En efecto, denotando con A , B y C a las matrices de estados, entradas y salidas, respectivamente, del sistema (4.53):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,36 & -0,30 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,36k \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y usando las propiedades de la transformada de Laplace obtenemos

$$y(s) = C(sI_2 - A)^{-1}Bu(s).$$

A la matriz $C(sI_n - A)^{-1}B + D$, que es una matriz de tamaño $p \times m$ de funciones racionales, se le llama *Matriz de Transferencia* del sistema. En este ejemplo $m = p = 1$ de modo que la matriz de transferencia se reduce a una sola función que podemos calcular a mano:

$$C(sI_2 - A)^{-1}B = \frac{0,36k}{s^2 + 0,30s + 0,36} = g(s).$$

Para sistemas más complicados o de mayores dimensiones podemos hacer uso de los comandos `ss` (*state-space*) y `tf` (*transfer function*) del *Control System Toolbox* de MATLAB. En nuestro ejemplo, podríamos proceder como sigue (se ha tomado $k = 1$):

```
>> A=[0 1;-0.36 -0.30]; B=[0;0.36];C=[1 0];
>> sis=ss(A,B,C,0);
>> g=tf(sis)
g =
      0.36
-----
s^2 + 0.3 s + 0.36
Continuous-time transfer function.
```

Dada una función (o matriz, en el caso multivariable) de transferencia se puede obtener un sistema en forma de espacio-estado cuya matriz de transferencia sea la dada. Los comandos a utilizar son los mismos en orden inverso:

```
>> num=[0.36]; den=[1 0.3 0.36];
>> sis=tf(num,den)
sis =
      0.36
-----
s^2 + 0.3 s + 0.36
Continuous-time transfer function.
>> sises=ss(sis)
sises =
a =
      x1      x2
x1   -0.3   -0.72
x2    0.5     0

b =
      u1
x1     1
```

```

    x2    0

c =
      x1    x2
y1      0  0.72

d =
      u1
y1      0
Continuous-time state-space model.

```

Las matrices de estados, entradas y salidas producidas se pueden extraer usando los siguientes comandos:

```

>> A1=sises.a
A1 =
   -0.3000   -0.7200
    0.5000         0
>> B1=sises.b
B1 =
     1
     0
>> C1=sises.c
C1 =
     0    0.7200

```

Observamos que estas matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,3 & -0,72 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0 \quad 0,72], \quad (4.54)$$

son diferentes de las del sistema (4.51). Es fácil comprobar, sin embargo que los sistema (A, B, C) y (A_1, B_1, C_1) son semejantes en el sentido de que existe una matriz T no singular tal que

$$A_1 = T^{-1}AT, \quad B_1 = T^{-1}B, \quad C_1 = CT.$$

En este ejemplo la matriz $T = \begin{bmatrix} 0 & 0,72 \\ 0,36 & 0 \end{bmatrix}$ sirve para realizar el cambio.

Una vez definidos los sistemas, bien a través de la función o matriz de transferencia o con las matrices del modelo de espacio-estado, los comandos **step**, **stepplot** y **stepinfo** pueden usarse para analizar la respuesta del sistema cuando la entrada es la función salto unidad. Para dibujar la gráfica de dicha respuesta se puede utilizar tanto **step** como **stepplot**. La primera, además, produce (si se le pide) los valores de la respuesta en ciertos instantes de tiempo, los instantes de tiempo en los que se calcula la salida y, cuando el sistema está dado en forma de espacio estado, los valores del vector de estados en esos instantes de tiempo. El comando **stepplot** se usa, sobre todo, para poder manipular (editar) la gráfica una vez producida. Los comandos

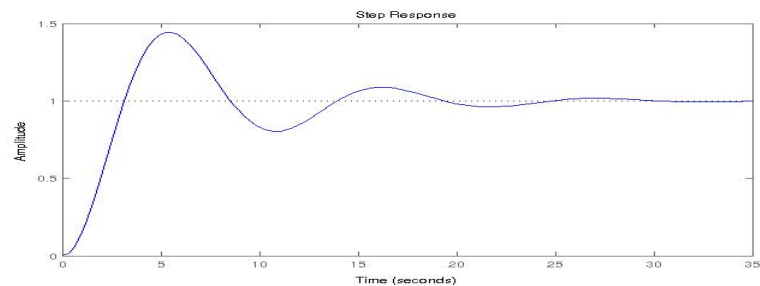


Figura 4.13: Gráfica producida por los comandos `step` y `stepplot` para el sistema (4.53) y sus equivalentes (4.52) y (4.54).

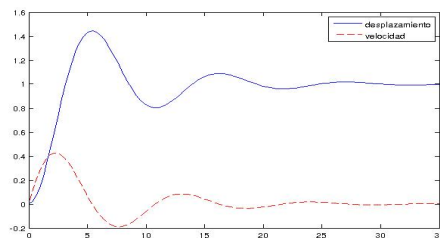


Figura 4.14: Trayectorias de los estados del sistema (4.53).

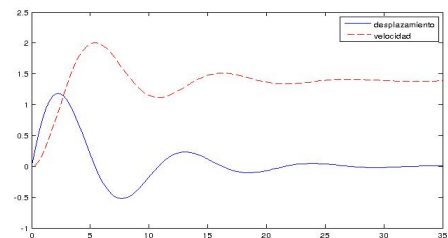


Figura 4.15: Trayectorias de los estados del sistema definido por las matrices en (4.54).

```
>> step(g)
>> step(sis)
>> step(sises)
```

producen los tres la misma gráfica; la que aparece en la Figura 4.13. Esta misma gráfica se obtiene sustituyendo `step` por `stepplot` en los tres comandos.

Si lo que se desea es una gráfica de la evolución de los estados del sistema, se podría proceder de la siguiente forma:

```
>> [y t x]=step(sis);
>> plot(t,x(:,1), 'b-',t,x(:,2), 'r--')
>> legend('desplazamiento', 'velocidad')
```

La gráfica obtenida se presenta en la Figura 4.14 mientras que la gráfica que producirían estos comandos para los estados del sistemas `sises` (que es el devuelto por el comando `ss` a partir de la función de transferencia $g(s)$ en (4.51)) se presenta en la Figura 4.15. Nótese que aún cuando la respuesta, $y(t)$, de los dos sistemas es la misma (Figura 4.13), no lo son sus estados.

Finalmente, el comando `stepinfo` se usa para obtener información de los parámetros de la respuesta del sistema a la función salto. Debe recordarse que el valor de estado estacionario (y_{ee}) es, de acuerdo con (4.50), $D - CA^{-1}B$. El valor de los demás parámetros los proporciona `stepinfo`. Así para el oscilador lineal que venimos considerando cualquiera de los tres comandos

```
>> S=stepinfo(sis)
>> S=stepinfo(g)
>> S=stepinfo(sises)
```

produce la misma salida (ver Figura 4.13):

```
S =
    RiseTime: 2.1145
  SettlingTime: 23.5265
  SettlingMin: 0.8027
  SettlingMax: 1.4432
    Overshoot: 44.3235
    Undershoot: 0
         Peak: 1.4432
    PeakTime: 5.5262
```

donde `RiseTime` es el tiempo de subida, T_r , `SettlingTime` es el tiempo de ajuste, T_s , `Overshoot` es la sobreelongación por encima de y_{ee} , M_p , `Undershoot` es el *defecto* por debajo de y_{ee} (que se define como el *overshoot* pero por defecto), `SettlingMin` y `SettlingMax` son los valores mínimo y máximo de y después del tiempo de subida, `Peak` es el valor máximo de y , y `Peakttime` es el instante en el que se alcanza el máximo valor de y .

En general, para un sistema de segundo orden como el oscilador lineal, la forma de la curva que representa la respuesta del sistema a la función salto depende de la razón de amortiguamiento ζ mientras que la velocidad depende de la frecuencia natural del sistema ω_0 . En la Figura 4.16 se muestran las respuestas del sistema (4.38) a la función salto unidad ($(u(t) = \gamma(t))$) para $k = 1$, $\zeta = 0,25$ y varios valores de ω_0 . Y en la Figura 4.17 se muestran las respuestas del mismo sistema para $k = 1$, $\omega_0 = 0,5$ y varios valores de ζ .

Para el oscilador lineal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ k\omega_0^2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{cases} \quad (4.55)$$

se puede dar una expresión explícita de la respuesta a la función salto unidad $u(t) = \gamma(t)$. Para ello, partimos mejor de la ecuación cuadrática original

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = k\omega_0^2, \quad (4.56)$$

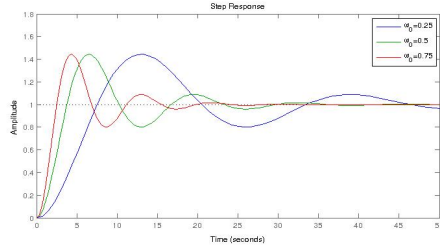


Figura 4.16: Respuesta del sistema (4.38) a la función salto unidad para $k = 1$, $\zeta = 0,25$ y $\omega_0 = 0,25, 0,5, 0,75$.

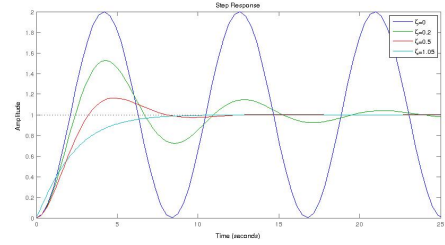


Figura 4.17: Respuesta del sistema (4.38) a la función salto unidad para $k = 1$, $\omega_0 = 0,5$ y $\zeta = 0, 0,2, 0,5, 1,05$.

y observamos que $x_p(t) = k$ es una solución particular de la ecuación. Entonces, la solución general de la ecuación es $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ siendo $x_h(t)$ la solución general de la ecuación (4.56) cuando la fuerza externa es 0; es decir, de la correspondiente ecuación homogénea. Recordemos que la expresión de $x_h(t)$ es diferente según que $\zeta > 1$, $0 < \zeta < 1$ o $\zeta = 1$ (véase Ejemplo 4.7). En cualquier caso, lo que nos interesa es la respuesta del sistema (en este caso $y(t) = x(t)$) cuando el sistema se encuentra en reposo en el instante inicial $t = 0$; es decir, cuando $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Un simple cálculo muestra que cuando se impone esta condición inicial a $x(t) = x_h(t) + k$ para cada expresión de $x_h(t)$ en función de ζ , se obtiene la siguiente expresión explícita de la respuesta del sistema:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= k \left(1 - e^{-\zeta\omega_0 t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right), & 0 < \zeta < 1; \\
 y(t) &= k(1 - e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t)), & \zeta = 1; \\
 y(t) &= k \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} + 1 \right) e^{-\omega_0 t(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} - 1 \right) e^{-\omega_0 t(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right), & \zeta > 1
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

donde, recordemos, $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la frecuencia de amortiguamiento.

Usando estas fórmulas se pueden calcular los parámetros (tiempo de subida, exceso, tiempo de ajuste, ...) asociados a las respuestas a saltos unidad. Por ejemplo, para sistemas subamortiguados ($0 < \zeta < 1$) haciendo la sustitución $\varphi = \arccos \zeta$, la correspondiente expresión en (4.57) queda:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= k \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sin \varphi} (\cos(\omega_d t) \sin \varphi + \cos \varphi \sin(\omega_d t)) \right) \\
 &= k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \varphi) \right).
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Así, el estado estacionario es

$$y_{ee} = k, \tag{4.59}$$

y la sobreelongación se alcanza en el primer instante en que la derivada de y en (4.58) se hace 0 que es en $t = \frac{\pi}{2\omega_d}$. Se puede comprobar que las expresiones explícitas para la sobreelongación, el tiempo de subida y el tiempo de ajuste son, respectivamente:

$$M_p = e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad T_r \approx \frac{1}{\omega_0} e^{\frac{\varphi}{\tan\varphi}}, \quad T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_0}, \quad (4.60)$$

Respuesta a una excitación sinusoidal

Otra señal de entrada comúnmente usada para el análisis y diseño de sistemas lineales es un senoide (o una combinación de sinusoides). A la respuesta de los sistemas lineales a este tipo de entradas se le conoce con el nombre de *respuesta de frecuencia* y mide la forma en la que el sistema responde a una excitación sinusoidal en una de sus entradas. Para ver la forma en que se hace esto, evaluaremos la salida (4.43) para $u(t) = \sin\omega t$, suponiendo $m = p = 1$. Aquí ω es la frecuencia de la señal de entrada. Realizar los cálculos que se necesitan al implantar directamente $u(t) = \sin\omega t$ en (4.43) resulta bastante engorroso. Para aliviarlos haremos uso del *principio de superposición* (ver (4.10)-(4.11)) de los sistemas lineales aplicándolo a la salida. Para ello, notemos que

$$\sin\omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \quad (4.61)$$

de modo que calcularemos la respuesta del sistema lineal a entradas de la forma e^{st} (con s un número complejo arbitrario) y, luego, escogeremos $s = i\omega$ y $s = -i\omega$. Esto nos proporcionará la respuesta a la entrada $\sin\omega t$ restando ambas respuestas y dividiendo por $2i$.

Consideremos el sistema lineal invariante en el tiempo (4.44) con la condición inicial $x(0) = x^0$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. La función de controles $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es m -dimensional para cada $t \in \mathbb{R}$. Vamos a analizar la respuesta “en el canal” i a una excitación exponencial “en el canal” j . Es decir, la componente $y_{ij}(t)$ de la salida, cuando la entrada es el vector m -dimensional $e^{st}e_j$ siendo $e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ la j -ésima columna de la matriz I_m .

Usando (4.43) obtenemos:

$$\begin{aligned} y_{ij}(t) &= c_i e^{At} x^0 + \int_0^t c_i e^{A(t-\tau)} B e^{s\tau} e_j d\tau + d_{ij} e^{st} = \\ &= c_i e^{At} x^0 + c_i e^{At} \int_0^t e^{(sI-A)\tau} B e_j d\tau + d_{ij} e^{st}, \end{aligned}$$

donde $c_i = e_i^T C$ es la i -ésima fila de la matriz C .

En el supuesto de que $s = \pm i\omega$ no sean valores propios de A , tendríamos que $sI - A$ es

invertible y podríamos escribir

$$\begin{aligned}
 y_{ij}(t) &= c_i e^{At} x^0 + c_i e^{At} \left((sI - A)^{-1} e^{(sI-A)\tau} B e_j \right) \Big|_0^t + d_{ij} e^{st} = \\
 &= c_i e^{At} x^0 + c_i e^{At} (sI - A)^{-1} \left(e^{(sI-A)t} - I \right) B e_j + d_{ij} e^{st} = \\
 &= c_i e^{At} x^0 + c_i e^{At} (sI - A)^{-1} \left(e^{st} e^{-At} - I \right) B e_j + d_{ij} e^{st} = \\
 &= c_i e^{At} x^0 - c_i e^{At} (sI - A)^{-1} B e_j + c_i (sI - A)^{-1} e^{st} B e_j + d_{ij} e^{st}.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

En el paso de la segunda línea a la tercera en la ecuación anterior, (4.62), se han usado dos importantes propiedades. Una de ellas es que si A, B son matrices que conmutan ($AB = BA$) entonces $e^{A+B} = e^A e^B$. La otra es que $(sI - A)^{-1}$ y e^{-At} conmutan. Ambas son consecuencia de la definición de e^{At} como una serie de potencias matriciales en A (véase (4.27)).

Reuniendo en el vector $y_j(t)$ todas las funciones $y_{ij}(t)$ para $i = 1, 2, \dots, p$, vemos que la salida a la entrada $u(t) = e^{st} e_j$ es:

$$y_j(t) = \underbrace{C e^{At} (x^0 - (sI - A)^{-1} B e_j)}_{\text{respuesta transitoria}} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1} B + D) e^{st} e_j}_{\text{respuesta de estado estacionario}}. \tag{4.63}$$

Vemos de nuevo que, cuando los valores propios de A tienen parte real negativa, la solución se compone de una respuesta transitoria y una de estado estacionario. En tal caso la respuesta de estado-estacionario es proporcional a la entrada (compleja) $u(t) = e^{st}$.

La matriz

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1} B + D$$

recibe el nombre de *matriz de transferencia* del sistema (4.44). En efecto, tomando la transformada de Laplace de dicho sistema con la condición inicial $x_0 = 0$ obtenemos

$$\begin{cases} sI_n \widehat{x}(s) = A \widehat{x}(s) + B \widehat{u}(s) \\ \widehat{y}(s) = C \widehat{x}(s) + D \widehat{u}(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (sI_n - A) \widehat{x}(s) = B \widehat{u}(s) \\ \widehat{y}(s) = C \widehat{x}(s) + D \widehat{u}(s) \end{cases}$$

Despejando $\widehat{x}(s)$ en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$$\widehat{y}(s) = (C(sI_n - A)^{-1} B + D) \widehat{u}(s).$$

En lo sucesivo nos centraremos en el caso monovariable: $p = m = 1$. Para el caso multivariable basta hacer el mismo estudio para cada componente de la salida respecto a la entrada $u(t) = e^{st} e_j$. En el caso de una entrada y una salida la respuesta de estado estacionario sería

$$y_{ee}(t) = (c(sI - A)^{-1} b + d) e^{st} \tag{4.64}$$

donde hemos sustituido c_i , $B e_j$ y d_{ij} en (4.62) por c , b y d , respectivamente. La presencia del número complejo s en $c(sI - A)^{-1} b + d$ hace que este número sea, en general, complejo incluso cuando A , b , c y d sean reales. Si llamamos M al módulo de este número y θ a su argumento, respectivamente, tenemos que

$$M e^{i\theta} = c(sI - A)^{-1} b + d, \tag{4.65}$$

que es, cuando s se mira como una variable compleja, la función de transferencia del sistema. Por lo tanto el valor de $y_{ee}(t)$, la respuesta en estado estacionario, será:

$$y_{ee}(t) = Me^{i\theta} e^{st} = Me^{st+i\theta}. \quad (4.66)$$

Cuando $s = i\omega$, se dice que M es la *ganancia* y que θ es la *fase* del sistema a una frecuencia forzada dada ω . Es decir, $\text{ganancia}(\omega) = M$ y $\text{fase}(\omega) = \theta$. Esto tiene la siguiente interpretación: supongamos que la entrada es una onda sinusoidal de amplitud A_u , frecuencia ω y desfase ψ : $u(t) = A_u \sin(\omega t + \psi)$. ¿Cuál es la respuesta de estado estacionario a esta entrada? Por una parte, tal y como hemos visto en (4.61)

$$\sin(\omega t + \psi) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(\omega t + \psi)} - e^{-i(\omega t + \psi)} \right).$$

Si $y_{ee}^+(t)$ es la respuesta de estado estacionario a la entrada $e^{i(\omega t + \psi)} = e^{i\psi} e^{i\omega t}$ entonces, usando (4.66) y teniendo en cuenta que $e^{i\psi}$ es constante y que el sistema es lineal,

$$y_{ee}^+(t) = e^{i\psi} M e^{i\omega t + i\theta} = M e^{i(\omega t + \theta + \psi)}.$$

Calculemos ahora la respuesta de estado estacionario, $y_{ee}^-(t)$, a la entrada $e^{-i(\omega t + \psi)} = e^{-i\psi} e^{-i\omega t}$. Por (4.64) y como $e^{-i\psi}$ es constante

$$y_{ee}^-(t) = e^{-i\psi} (c(-i\omega I - A)^{-1}b + d) e^{-i\omega t}. \quad (4.67)$$

Pero resulta que si $z = c(i\omega I - A)^{-1}b + d$ entonces el conjugado de z es $\bar{z} = c(-i\omega I - A)^{-1}b + d$. En efecto, si ponemos $Z = i\omega I - A$ y tenemos en cuenta que c , b y d son reales,

$$\bar{z} = c\overline{Z^{-1}}b + d = c\bar{Z}^{-1}b + d = c(\overline{i\omega I - A})^{-1}b + d = c(-i\omega I - A)^{-1}b + d.$$

Por lo tanto como, por (4.65), $Me^{i\theta} = c(i\omega I - A)^{-1}b + d$ cuando $s = i\omega$, su conjugado, $Me^{-i\theta}$, es el conjugado de $c(i\omega I - A)^{-1}b + d$. Es decir, $Me^{-i\theta} = c(-i\omega I - A)^{-1}b + d$. Sustituyendo en (4.67)

$$y_{ee}^-(t) = e^{-i\psi} M e^{-i\theta} e^{-i\omega t} = M e^{-i(\omega t + \theta + \psi)}.$$

Dado que $\sin(\omega t + \psi) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(\omega t + \psi)} - e^{-i(\omega t + \psi)} \right)$, la respuesta de estado estacionario a la entrada $u(t) = A_u \sin(\omega t + \psi)$ será

$$y_{ee}(t) = A_u \frac{y_{ee}^+(t) - y_{ee}^-(t)}{2i} = A_u M \frac{e^{i(\omega t + \theta + \psi)} - e^{-i(\omega t + \theta + \psi)}}{2i} = A_u M \sin((\omega t + \psi) + \theta).$$

Esto significa que y_{ee} es una función de la misma naturaleza que la entrada: una función sinusoidal con la misma frecuencia ω pero desplazada hacia la derecha o izquierda según que θ sea negativo o positivo, respectivamente. Y la amplitud de la salida es M veces la de la entrada. Es decir, si $y_{ee}(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$ entonces

$$\text{ganancia}(\omega) = M = \frac{A_y}{A_u}, \quad \text{fase}(\omega) = \varphi - \psi = \theta.$$

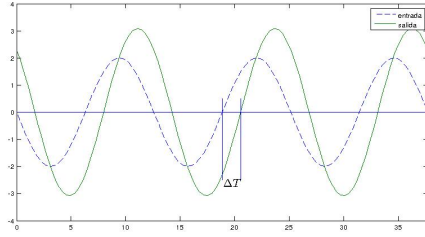


Figura 4.18: Respuesta de un sistema lineal a un sinusoidal. La entrada en línea discontinua y la respuesta en continua va adelantada ΔT segundos.

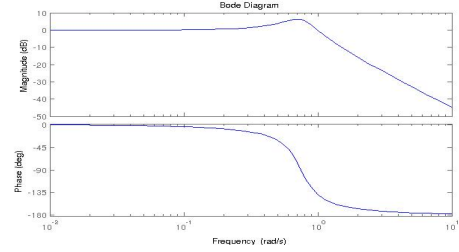


Figura 4.19: Respuesta de frecuencia en la que se muestra la ganancia y fase del sistema en función de frecuencia de entrada.

Si la fase θ es positiva se dice que la salida *se adelanta* a la entrada; mientras que si la fase es negativa se dice que la salida *se rezaga* de la entrada. En la Figura 4.18 se muestra la respuesta de frecuencia de un sistema lineal. La línea discontinua muestra la gráfica de la entrada que tiene amplitud 2 y la continua la respuesta a dicha entrada que tiene mayor amplitud porque, en este ejemplo, la ganancia es aproximadamente $M = 1,54$. Además la fase es negativa porque está deslaza hacia la derecha respecto a la entrada). Por ello, la salida se retrasa de la entrada. Recordemos que el período de la senoide es $T = \frac{2\pi}{\omega}$ segundos y, por consiguiente $\Delta T = -\frac{\theta}{\omega} = -\frac{T}{2\pi}\theta$ segundos es el tiempo que la salida se adelanta (si $\theta > 0$) o se retrasa (si $\theta < 0$). En la gráfica, la salida va retrasada ΔT segundos respecto a la entrada. Por ello $\theta < 0$ tal y como ya habías hecho observar.

Cuando el sistema es multivariable ($m > 1$ o $p > 1$) para cada elemento de la matriz de transferencia tendríamos una ganancia y una fase. Si $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$ es la matriz de transferencia, entonces pondríamos

$$M_{kj}e^{i\theta_{kj}} = g_{kj}(i\omega_j), \quad 1 \leq k \leq p, \quad 1 \leq j \leq m,$$

donde $g_{kj}(s)$ es el elemento en la posición (k, j) de $G(s)$. M_{kj} y θ_{kj} son la ganancia y fase de la respuesta $y_{kj}(t) = (c_k(i\omega_j I_n - A)^{-1}b_j + d_{kj})e^{i\omega_j t}$ a la excitación sinusoidal $u_j(t) = e^{i\omega_j t}e_j$.

Para analizar las respuestas de frecuencia de los sistemas lineales se suelen usar las gráficas de Bode (*Bode plot*). En ellas se representa la ganancia y la fase del sistema en función de la frecuencia de la entrada. Este tipo de gráficas se pueden obtener con la función `bode` o `bodeplot` del *Control Toolbox* de MATLAB, por ejemplo. La Figura 4.19 muestra un ejemplo de este tipo de representación.

Como en el caso de respuesta a la función salto, hay algunas propiedades estándar que se usan para caracterizar la respuesta de frecuencia:

- La *ganancia de frecuencia cero* M_0 es la ganancia del sistema para $\omega = 0$. Corresponde a la razón entre una entrada constante y la salida en estado estacionario. Su valor

se obtiene al sustituir $s = 0$ en (4.65)

$$M_0 = -cA^{-1}b + d;$$

i.e., es la respuesta de estado estacionario a la función salto unidad. Es importante notar que la ganancia de frecuencia cero sólo está definida cuando A es invertible; es decir, si no tiene 0 como valor propio.

- *El ancho de banda* ω_b es el rango de frecuencia en el que la ganancia ha decrecido no más que $1/\sqrt{2}$ de su valor de referencia. Para sistemas con ganancia finita y no nula a frecuencia cero, el valor de referencia es dicha ganancia. El valor de referencia puede ser distinto dependiendo de cada tipo de sistema.
- *El pico resonante* M_r y la *frecuencia del pico*. El primero es el valor máximo de la ganancia del sistema y el segundo es el valor de la frecuencia de entrada donde se alcanza el primero.

La *resonancia* es un fenómeno que se produce en los sistemas cuadráticos (como los osciladores lineales) que por su propia naturaleza producen una respuesta (salida) sinusoidal. Para estos sistemas hay valores de frecuencias que hacen que la ganancia de la respuesta a dicha frecuencia se amplifique enormemente. A este fenómeno se le llama resonancia. De ahí que al valor máximo de la ganancia de un sistema a una frecuencia dada se le llame pico resonante. Este fenómeno para el oscilador lineal se estudia un poco más adelante.

Comandos del *Control Toolbox* de MATLAB que proporcionan valores significativos de la respuesta de frecuencia son:

- **freqresp** devuelve un vector, **h**, (o matriz si el sistema es multivariable) con la respuesta (número complejo) de frecuencia de un sistema para ciertas frecuencias, **w**, determinadas por el propio algoritmo que implementa el comando. Para saber las frecuencias usadas y sus respuestas, se puede usar **[h,w]=freqresp(sis)**, donde **sis** es el sistema definido en forma de espacio-estado o como matriz de transferencia. El comando **h=freqresp(sis,w)** devuelve la respuesta de frecuencia del sistema **sis** a la frecuencia **w**. En todos los casos las respuestas de frecuencia son números complejos; su módulos son las ganancias en unidades absolutas y los ángulos las fases en radianes. Para pasar de unidades absolutas a decibelios, *dB*, hay que multiplicar por $20 \log_{10}$. El comando **mag2db** hace esta operación.

El valor de M_0 se puede obtener de la siguiente forma: **M0=freqresp(sis,0)**, aunque el comando **dcbain** es más apropiado.

- **getPeakGain** devuelve M_r y la frecuencia ω_r donde se alcanza el pico. Las unidades para M_r que devuelve **getPeakGain** son *unidades absolutas*.
- **bandwidth(sis,vdB)** devuelve la primera frecuencia en la que la ganancia de la respuesta del sistema cae por debajo del $70,79\% \approx \frac{100}{\sqrt{2}}\%$ de M_0 , o del valor **vdB** especificado en decibelios.

- `getGainCrossover(sis,vub)` devuelve un vector de dos frecuencias; son los extremos del intervalo de frecuencias entre los que la ganancia del sistema está por encima o por debajo del valor especificado, `vub`, en unidades absolutas. Por ejemplo, si para un sistema `H`, `wc = getGainCrossover(H,1)` devuelve

```
>>wc =
    1.2582
   12.1843
```

esto quiere decir que entre (aproximadamente) 1,3 rad/seg y 12,2 rad/seg, el sistema excede la ganancia 0 dB.

Para el oscilador lineal, podemos dar explícitamente una expresión para $Me^{i\theta}$. En efecto, $Me^{i\theta} = C(i\omega - A)^{-1}B + D$. Ahora bien,

$$g(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

es la función de transferencia del sistema, que en el caso del oscilador lineal es:

$$g(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

En consecuencia,

$$Me^{i\theta} = \frac{k\omega_0^2}{(i\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(i\omega) + \omega_0^2} = \frac{k\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_0\omega}.$$

Por lo tanto

$$M = \frac{k\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

y

$$\theta = \arccos \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}}.$$

Se comprueba así que la ganancia es muy grande si la frecuencia de entrada, ω , es muy parecida a la frecuencia natural del sistema, ω_0 , y el coeficiente de amortiguamiento, ζ , es muy pequeño. Es para estos valores cuando hay peligro de que se produzca el fenómeno de la resonancia (que “el sistema entre en resonancia”, se suele decir). Además, la fase es casi cero para valores de la frecuencia forzada, ω , próximos a la frecuencia natural del sistema ω_0 (siempre suponiendo ζ muy pequeño).

En la Figura 4.20 se muestran las gráficas de la ganancia y fase de un oscilador lineal para varios valores ζ . Valores pequeños de ζ producen picos resonantes más agudos y un cambio rápido en la fase cuando $\omega \approx \omega_0$. A medida que ζ aumenta la magnitud del pico decrece y los cambios de fase se hacen más suaves. Nótese que cuando ζ es pequeño, θ es casi 0 si $\omega_0 > \omega$ y casi π radianes si $\omega_0 < \omega$.

Los siguientes comandos de MATLAB proporcionan el pico resonante y la frecuencia del pico para el oscilador lineal con valores $\omega_0 = 0,6$ y $\zeta = 0,05$:

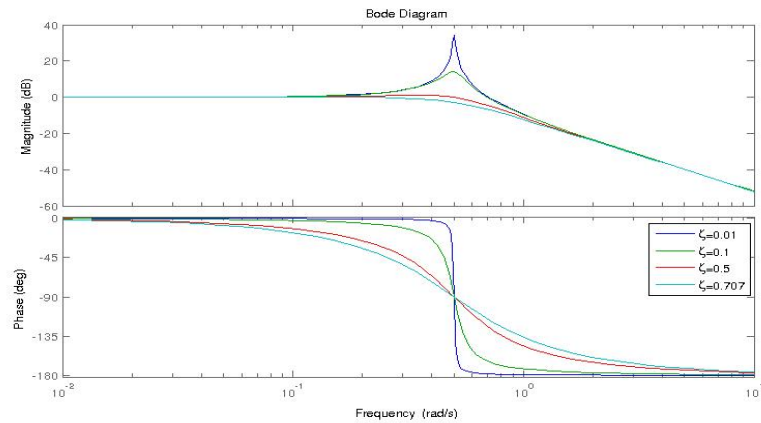


Figura 4.20: Respuesta de frecuencia para un sistema de segundo orden en función de ζ . La gráfica superior representa la ganancia y la inferior la fase.

```
>> w=0.6; z=0.05;
>> num=w^2; den=[1 2*z*w w^2];
>> ft=tf(num,den)
ft =
      0.36
-----
      s^2 + 0.06 s + 0.36
Continuous-time transfer function.
>> [gp,fp] = getPeakGain(ft)
gp =
      10
fp =
      0.6000
>> gp_dB = mag2db(gp)
gp_dB =
      20
```

El pico resonante se alcanza cuando la frecuencia de entrada coincide, aproximadamente, con la frecuencia natural del sistema $\omega_0 = 0,6$ (medidas absolutas).