

Capítulo 6

Controlabilidad y Observabilidad. Estabilización

6.1. Controlabilidad: definiciones

Vamos a comenzar con una definición muy general del concepto de controlabilidad para abarcar todo tipo de sistemas de control. En la Lección 4 vimos que para definir un sistema de control necesitamos:

1. Un conjunto de tiempos \mathcal{T} que puede ser continuo o discreto.
2. Un conjunto U en el que las funciones de entrada toma sus valores: $u(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow U$.
3. Un conjunto \mathcal{U} que define el espacio de funciones de entrada: $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.
4. El espacio de estados X : conjunto en el que están definidos los estados del sistema.
5. El conjunto Y que define el espacio donde las salidas están definidas: $y(\cdot) : \mathcal{T} \rightarrow Y$
6. La función de transición de estados

$$\begin{array}{rcl} \psi & : & \mathcal{T} \times \mathcal{T} \times X \times \mathcal{U} \longrightarrow X \\ & & (t, t_0, x, u(\cdot)) \rightarrow x(t) = \psi(t; t_0, x, u(\cdot)) \end{array}$$

7. La función de salidas: $y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$, $t \in \mathcal{T}$.

Así pues, identificaremos cada sistema con la 7-upla $\Sigma = (\mathcal{T}, U, \mathcal{U}, X, Y, \psi, \eta)$ y nos referiremos a ella como el sistema Σ . Al conjunto $\mathcal{T} \times X$ lo llamaremos el *espacio de eventos* (o *fases*, [5]) y hablaremos del evento o fase $(t, x) \in \mathcal{T} \times X$ para indicar que x es el estado del sistema en el instante t .

Con estos conceptos ya introducidos podemos dar una definición del concepto de controlabilidad. Más adelante lo concretaremos para sistemas definidos por ecuaciones diferenciales.

Definición 6.1 Dado un sistema de control $\Sigma = (\mathcal{T}, U, \mathcal{U}, X, Y, \psi, \eta)$, sea $(t_0, x^0) \in \mathcal{T} \times X$ un evento dado.

- (a) El evento $(t, x) \in \mathcal{T} \times X$ es **alcanzable** desde el evento $(t_0, x^0) \in \mathcal{T} \times X$ si existe un control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ definido en $[t_0, t]$ tal que $\psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = x$; es decir, si, siendo el estado del sistema x^0 en el instante t_0 , existe un control definido en $[t_0, t]$ tal que el estado del sistema en t es x . También se dice que (t_0, x^0) puede **controlarse** hasta (t, x) .
- (b) Σ se dice que es controlable en el intervalo $[t_0, t_1]$ si para cualquier par de estados $x^0, x^1 \in X$ el evento (t_0, x^0) es controlable hasta el evento (t_1, x^1) .
- (c) Si $x^0, x^1 \in X$, $T \in \mathcal{T}$, ($T \geq 0$) y existen $t_0, t_1 \in \mathcal{T}$ tales que $t_1 - t_0 = T$ y (t_1, x^1) es alcanzable desde (t_0, x^0) entonces se dice que el estado x^1 es alcanzable desde el estado x^0 en tiempo T . También se dice que x^0 es controlable hasta x^1 en tiempo T . Si cualquier estado $x^1 \in X$ es alcanzable desde (controlable hasta) cualquier otro estado $x^2 \in X$ en tiempo T entonces se dice que **el sistema Σ es alcanzable (controlable) en tiempo T** .
- (d) El estado x^1 es alcanzable desde el estado x^0 (o x^0 es controlable hasta x^1) si existe $T \in \mathcal{T}$ tal que x^1 es alcanzable desde x^0 en tiempo T (o x^0 es controlable hasta x^1 en tiempo T). Si cualquier estado $x^1 \in X$ es alcanzable desde (controlable hasta) cualquier otro estado $x^2 \in X$ entonces se dice que **el sistema Σ es alcanzable (controlable)**.

Un conjunto que juega un papel muy importante en la teoría de control es el *conjunto de alcanzabilidad* (o controlabilidad)

Definición 6.2 Sea $x \in X$ y $T \in \mathcal{T}$. Al conjunto

$$\mathcal{R}_T(x) := \{z \in X : z \text{ es alcanzable desde } x \text{ en tiempo } T\}.$$

se le llama **conjunto de estados alcanzables** desde x en tiempo T . Y el **conjunto de alcanzabilidad** desde x se define como

$$\mathcal{R}(x) := \{z \in X : z \text{ es alcanzable desde } x \text{ en algún tiempo } \}.$$

Por lo tanto, el conjunto de alcanzabilidad desde x es:

$$\mathcal{R}(x) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{R}_T(x).$$

Una consecuencia inmediata de estas definiciones es

Proposición 6.3 *El sistema Σ es alcanzable/controlable (en tiempo T) si y sólo si $\mathcal{R}(x) = X$ (respectivamente $\mathcal{R}_T(x) = X$) para todo $x \in X$.*

Para sistemas diferenciales: $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^p$ son conjuntos abiertos, $\mathcal{U} = PC(\mathcal{T}, X)$ es el conjunto de funciones continuas a trozos, $\eta: \mathcal{T} \times X \times U \rightarrow Y$ es una función continua y $x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ es la solución del sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in \mathcal{T}, t \geq t_0 \quad (6.1)$$

que cumple la condición inicial $x(t_0) = x^0$. Teniendo en cuenta la Definición 6.1 podemos dar la siguiente definición de controlabilidad/alcanzabilidad de los sistemas diferenciales.

Definición 6.4 *Sea $x^0 \in X$ y $t_0 \in \mathcal{T}$.*

- (i) *Un estado $x^1 \in X$ se dice que es alcanzable/controlable desde x^0 en tiempo T si existe un control $u(\cdot) \in PC([t_0, t_0 + T], X)$ tal que la solución del sistema (6.1) con la condición inicial $x(t_0) = x^0$ está definida en $[t_0, t_0 + T]$ y cumple $x(t_0 + T) = x^1$.*
- (ii) *Un estado $x^1 \in X$ se dice que es alcanzable/controlable desde x^0 si es alcanzable/controlable para algún tiempo T .*
- (iii) *El sistema (6.1) se dice que es alcanzable/controlable desde x^0 en $[t_0, t_f]$ si cualquier estado $x^1 \in X$ es alcanzable/controlable desde x^0 en tiempo $T = t_f - t_0$.*

El sistema (6.1) se dice que es alcanzable/controlable controlable en $[t_0, t_f]$ si para cualquier par de estados $x^0, x^1 \in X$ la solución del sistema (6.1) con la condición inicial $x(t_0) = x^0$ cumple que $x(t_1) = x^1$.

La estructura de los conjuntos de alcanzabilidad para los sistemas diferenciales no lineales no tiene por qué ser, en general, simple; y desde luego para los sistemas no lineales casi nunca es un subespacio vectorial incluso cuando $X = \mathbb{R}^n$ y $U = \mathbb{R}^m$. Por ejemplo, para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t)^2 \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t)^2 \end{cases}$$

con $U = \mathbb{R}^2$, el conjunto de alcanzabilidad desde el origen es el primer cuadrante del plano:

$$\mathcal{R}((0, 0)) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Veremos que, sin embargo, para los sistemas lineales los conjuntos de alcanzabilidad son subespacios vectoriales.

Terminamos esta sección con la siguiente definición que completa la noción de controlabilidad/estabilidad:

Definición 6.5 Se dice que el sistema (6.1) es **accesible desde** x si su conjunto de alcanzabilidad desde x , $\mathcal{R}(x)$, tiene interior no vacío. Y se dice que **fuertemente accesible desde** x si $\mathcal{R}_T(x)$ tiene interior no vacío para todo $T > 0$.

6.2. Controlabilidad de los sistemas lineales

Para los sistemas lineales hay criterios que permiten detectar con cierta facilidad cuándo son controlables. En primer lugar, para los sistemas lineales el conjunto $\mathcal{R}_T(x)$ de los estados alcanzables desde x en tiempo T tiene una estructura muy deseable. La demostración se puede dar para los sistemas lineales más generales sin más que hacer uso de las propiedades vistas en la Lección 4.

Proposición 6.6 Si $\Sigma = (\mathcal{T}, U, \mathcal{U}, X, Y, \psi, \eta)$ es un sistema de control lineal y $x^0 \in X$ entonces $\mathcal{R}_t(x^0)$ es un subespacio vectorial para todo $t \in \mathcal{T}$.

Demostración.- Recordemos que $x \in \mathcal{R}_t(x^0)$ si existen $t_0, t_1 \in \mathcal{T}$ y $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ definida en $[t_0, t]$ tales que $x = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$. Supongamos ahora que $x, y \in \mathcal{R}_t(x^0)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (un cuerpo arbitrario). Como X es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , y $x, y \in X$ tenemos que $\alpha x + \beta y \in X$. Ahora bien, como $x, y \in \mathcal{R}_t(x^0)$:

$$x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)), \quad y(t) = \psi(t; t_0, x^0, v(\cdot)), \quad u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{U},$$

y entonces, como \mathcal{U} es también un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , $w(\cdot) = \alpha u(\cdot) + \beta v(\cdot) \in \mathcal{U}$ y

$$\begin{aligned} \alpha x(t) + \beta y(t) &= \alpha \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)) + \beta \psi(t; t_0, x^0, v(\cdot)) = \psi(t; t_0, x^0, \alpha u(\cdot) + \beta v(\cdot)) = \\ &= \psi(t; t_0, x^0, w(\cdot)). \end{aligned}$$

porque $\psi(t; t_0, \cdot, \cdot) : X \times \mathcal{U} \rightarrow X$ es una aplicación lineal. Además, si $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ están definidas en $[t_0, t]$ también $w(\cdot)$ está definida en este intervalo. En consecuencia $\alpha x(t) + \beta y(t) \in \mathcal{R}_t(x^0)$ y así, $\mathcal{R}_t(x^0)$ es un subespacio vectorial de X . ■

Nos centramos ahora en los sistemas diferenciales lineales. Dado que la controlabilidad sólo afecta a la relación entre los estados y los controles o entradas, podemos considerar sólo la ecuación de estados

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad t \in \mathcal{T}, \quad (6.2)$$

que con la condición inicial $x(t_0) = x^0$, $t_0 \in \mathcal{T}$, tiene como única solución:

$$x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot)) = \Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds. \quad (6.3)$$

Denotamos con

$$\mathcal{R}(t_f, t_0) = \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, s)B(s)u(s)ds : u(\cdot) \in \mathcal{U} \right\} \quad (6.4)$$

que es el subespacio de los estados alcanzables en tiempo $t_f - t_0$ desde el estado $x^0 = 0$ en t_0 . En efecto, x^1 es alcanzable desde $x^0 = 0$ en tiempo $t_f - t_0$ si y sólo si existe un control $u(\cdot)$ tal que la solución del sistema (6.2) con la condición inicial $x(t_0) = 0$ cumple $x(t_f) = x^1$. Y, teniendo en cuenta (6.3), (6.4) y que $x^0 = 0$, esto sucede si y sólo si

$$x^1 = x^1 - \Phi(t, t_0)x^0 = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, s)B(s)u(s)ds \in \mathcal{R}(t_f, t_0).$$

En otras palabras, el estado del sistema en el instante t_f es x^1 si y sólo si el vector $x^1 - \Phi(t, t_0)x^0$ está en el subespacio $\mathcal{R}(t_f, t_0)$. Ahora bien, por la Definición 6.4, el sistema (6.2) es controlable en $[t_0, t_f]$ si para cualesquiera estados $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $x(t_0) = x^0$ y $x(t_f) = x^1$. En consecuencia

Proposición 6.7 *El sistema (6.2) es controlable en $[t_0, t_f] \subset \mathcal{T}$ si y sólo si $\mathcal{R}(t_f, t_0) = \mathbb{R}^n$.*

El subespacio vectorial $\mathcal{R}(t_f, t_0)$ admite una caracterización algebraica independiente de los controles. Esto es muy útil para saber cuándo un sistema es controlable pero es, al mismo, tiempo una propiedad muy especial de los sistemas lineales. Comenzamos definiendo una aplicación lineal cuya imagen es $\mathcal{R}(t_f, t_0)$:

$$\begin{aligned} L_r : PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u(\cdot) &\longrightarrow \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, s)B(s)u(s)ds \end{aligned} \quad (6.5)$$

Para lo que sigue puede consultarse [5, Sec. A7]. El conjunto $PC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido por

$$\langle u, v \rangle_2 = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T v(t) dt, \quad u, v \in PC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n),$$

y L_r es una aplicación lineal continua. La *aplicación adjunta* se define como $L_r^* : \mathbb{R}^n \longrightarrow PC([t_0, t_f], \mathbb{R})$ tal que:

$$\langle z, L_r u \rangle = \langle L_r^* z, u \rangle_2, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad u \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^n),$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar habitual en \mathbb{R}^n . Obsérvese que se ha cambiado la notación utilizada en los capítulos precedentes (sobre todo en el Capítulo 2) para el producto escalar. A partir de ahora usaremos indistintamente una notación u otra según conveniga: para $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ vectores de \mathbb{R}^n , $x \cdot y = \langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Por lo general, cuando las expresiones de los vectores involucrados son largas, se usará preferentemente la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Así pues:

$$\langle z, L_r u \rangle = z^T \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, s)B(s)u(s)ds = \int_{t_0}^{t_f} (B(s)^T \Phi(t_f, s)^T z)^T u(s)ds.$$

Y

$$\langle L_r^* z, u \rangle_2 = \int_{t_0}^{t_f} (L_r^*(s))^T u(s) ds.$$

Por lo tanto, si

$$\begin{aligned} L_r^* &: \mathbb{R}^n \longrightarrow PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^n) \\ z &\longrightarrow B(\cdot)^T \Phi(t_f, \cdot)^T z \end{aligned} \quad (6.6)$$

se cumple $\langle z, L_r u \rangle = \langle L_r^* z, u \rangle_2$.

Ahora bien, para operadores de rango finito tenemos el siguiente resultado ([5, Sec. A.7.4])

Lema 6.8 Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Sea H un espacio de Hilbert sobre \mathbb{F} y $A : H \rightarrow \mathbb{F}^m$ una aplicación lineal continua con $A^* : \mathbb{F}^m \rightarrow H$ como aplicación adjunta. Entonces,

(i) A^* , AA^* y A^*A son aplicaciones lineales continuas.

(ii) $H = \text{Im } A^* \oplus \text{Ker } A$, $\mathbb{F}^m = \text{Im } A \oplus \text{Ker } A^*$.

(iii) $\text{Ker}(AA^*) = \text{Ker } A^*$, $\text{Im}(AA^*) = \text{Im } A$.

(iv) $\text{Ker}(A^*A) = \text{Ker } A$, $\text{Im}(A^*A) = \text{Im } A^*$.

Como consecuencia de este Lema tenemos que L_r^* es una aplicación lineal continua y $\text{Im } L_r L_r^* = \text{Im } L_r$. Ahora bien, $\text{Im } L_r = \mathcal{R}(t_f, t_0)$ y

$$\text{Im } L_r L_r^* = \text{Im} \left(\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) B(t) B(t)^T \Phi(t_f, t)^T dt \right).$$

Se denota

$$W(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) B(t) B(t)^T \Phi(t_f, t)^T dt \quad (6.7)$$

y se le llama *matriz grammiana* del sistema (6.2). Obsérvese que esta matriz es simétrica (hermítica si trabajáramos con sistemas de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{C}). Además, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\begin{aligned} x^T W(t_f, t_0) x &= \int_{t_0}^{t_f} x^T \Phi(t_f, t) B(t) B(t)^T \Phi(t_f, t)^T x dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \|B(t)^T \Phi(t_f, t)^T x\|_2^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Esto significa que la matriz $W(t_f, t_0) \geq 0$; i.e., es semidefinida positiva (o definida no negativa). Por lo tanto, los valores propios de $W(t_f, t_0)$ son números reales (incluso en el caso complejo) no negativos. Y son todos positivos si y sólo si $\det W(t_f, t_0) \neq 0$ porque el determinante de una matriz es el producto de sus valores propios.

Toda esta discusión y la Proposición 6.7 nos permite concluir:

Teorema 6.9 Con las notaciones introducidas se tiene:

(i) $\mathcal{R}(t_f, t_0) = \text{Im } W(t_f, t_0)$.

- (ii) El sistema (6.2) es controlable en $[t_0, t_f] \subset \mathcal{T}$ si y sólo si $\det W(t_f, t_0) \neq 0$.
- (iii) El sistema (6.2) es controlable en $[t_0, t_f] \subset \mathcal{T}$ si y sólo si $W(t_f, t_0)$ es definida positiva.

Este importante Teorema nos dice que la controlabilidad de los sistemas lineales no depende de los controles que se puedan escoger: el sistema es o no controlable en $[t_0, t_f]$ independientemente de $u(\cdot)$; sólo depende de la matriz de transición de estados (es decir, de las soluciones del sistema autónomo $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$) y de la matriz de controles o entradas $B(t)$. Por esto la siguiente definición tiene sentido

Definición 6.10 Dadas dos matrices $A(\cdot) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n \times n})$, $B(\cdot) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n \times m})$, diremos que el par $(A(\cdot), B(\cdot))$ es controlable si el sistema (6.2) es controlable en $[t_0, t_f]$.

Hay otra observación importante que conviene tener presente. La matriz grammiana depende del intervalo $[t_0, t_f]$. Es perfectamente posible que sea definida positiva en este intervalo (y, por lo tanto, el sistema controlable en $[t_0, t_f]$) y no lo sea en algún intervalo más pequeño (y, por lo tanto, el sistema no puede controlarse en un intervalo de tiempo menor). Y del mismo modo puede no ser definida positiva en $[t_0, t_f]$ y serlo en $[t_0, t'_f]$ con $t'_f > t_f$. Respecto a t_0 se pueden hacer comentarios similares.

El Teorema 6.9 nos proporciona una caracterización de la controlabilidad de un sistema pero no nos da una función de control que nos permita llevar el estado x^0 en el instante t_0 a cualquier otro x^1 en el instante t_1 . Ese es nuestro siguiente cometido. En realidad, vamos a encontrar un control que nos sirve para controlar el sistema (6.2) en $[t_0, t_f]$ con un coste (o “energía”) mínimo en el sentido que se explica a continuación. Para una función $u(\cdot) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R})$ definimos su *coste* como

$$\langle u(\cdot), u(\cdot) \rangle_2 = \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T u(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_2^2 dt = \|u(\cdot)\|_2^2 \quad (6.8)$$

Obsérvese que estamos usando el mismo símbolo para la norma euclídea (la que está dentro de la integral) y la norma L_2 de la función $u(\cdot)$, pero no hay peligro de confusión.

Primero tenemos

Proposición 6.11 Si el sistema (6.2) es controlable y $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ entonces la función

$$\widehat{u}(t) = B(t)^T \Phi(t_f, t)^T W(t_f, t_0)^{-1} (x^1 - \Phi(t_f, t_0)x^0) \quad (6.9)$$

hace que la solución del sistema $x(t)$ cumpla $x(t_0) = x^0$ y $x(t_f) = x^1$.

Demostración.- El problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\widehat{u}(t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad t \in [t_0, t_f] \quad (6.10)$$

tiene una única solución:

$$\psi(t; t_0, x^0, \widehat{u}(\cdot)) = \Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)\widehat{u}(s)ds.$$

Debemos comprobar que $\psi(t_f; t_0, x^0, u(\cdot)) = x^1$. En efecto,

$$\begin{aligned} & \psi(t_f; t_0, x^0, \widehat{u}(\cdot)) = \\ &= \Phi(t_f, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, s)B(s)B(s)^T \Phi(t_f, s)^T W(t_f, t_0)^{-1} (x^1 - \Phi(t_f, t_0)x^0) ds = \\ &= \Phi(t_f, t_0)x^0 + \left[\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, s)B(s)B(s)^T \Phi(t_f, s)^T ds \right] W(t_f, t_0)^{-1} (x^1 - \Phi(t_f, t_0)x^0) = \\ &= \Phi(t_f, t_0)x^0 + (x^1 - \Phi(t_f, t_0)x^0) = x^1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El control $\widehat{u}(\cdot)$ de (6.9) transfiere el evento (t_0, x^0) al evento (t_1, x^1) pero no es el único posible control que lo hace. De hecho, si $v(\cdot) \in \text{Ker } L_r$ donde L_r es la aplicación lineal de (6.5) entonces $\widetilde{u}(\cdot) = \widehat{u}(\cdot) + v(\cdot)$ también transfiere el estado x^0 en el instante t_0 al estado x^1 en el instante t_f . En otras palabras, tal conjunto de controles es la variedad lineal (subespacio afín) $\widehat{u}(\cdot) + \text{Ker } L_r \subset PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$. Nuestro objetivo ahora es probar que la función de $\widehat{u}(\cdot) + \text{Ker } L_r$ de menor coste (6.8) es precisamente la función $\widehat{u}(\cdot)$ de (6.9).

Proposición 6.12 Sean $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ y sea $u(\cdot) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ una función tal que el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad t \in [t_0, t_f] \quad (6.11)$$

cumple $x(t_f) = x^1$. Y sea $\widehat{u}(\cdot)$ la función de (6.9). Entonces

$$\|\widehat{u}(\cdot)\|_2 \leq \|u(\cdot)\|_2 \quad (6.12)$$

con igualdad si y sólo si $\widehat{u}(t) = u(t)$ para casi todo $t \in [t_0, t_f]$.

Demostración.- Sea $v(\cdot) := u(\cdot) - \widehat{u}(\cdot)$ y sean $\widehat{x}(t) = \psi(t; t_0, x^0, \widehat{u}(\cdot))$ y $x(t) = \psi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ las soluciones de (6.10) y (6.11), respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t)B(s)v(t)dt &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t)B(s)u(t)dt - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t)B(s)\widehat{u}(t)dt = \\ &= (x(t_f) - \Phi(t_f, t_0)x^0) - (\widehat{x}(t_f) - \Phi(t_f, t_0)x^0). \end{aligned}$$

Como $x(t_f) = x^1 = \widehat{x}(t_f)$,

$$\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t)B(s)v(t)dt = 0. \quad (6.13)$$

Ahora, como $\widehat{u}(t)^T v(t) = v(t)^T \widehat{u}(t)$,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot)\|_2^2 &= \int_{t_0}^{t_f} u(t)^T u(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} (\widehat{u}(t) + v(t))^T (\widehat{u}(t) + v(t)) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \|\widehat{u}(t)\|^2 dt + \int_{t_0}^{t_f} \|v(t)\|^2 dt + 2 \int_{t_0}^{t_f} \widehat{u}(t)^T v(t) dt. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Pero por (6.9), teniendo en cuenta que $W(t_f, t_0)^T = W(t_f, t_0)$ por ser simétrica,

$$\int_{t_0}^{t_f} \widehat{u}(t)^T v(t) dt = [(x^1 - \Phi(t_f, t_0)x^0)^T W(t_f, t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) B(t) v(t) dt.$$

De (6.13) obtenemos $\int_{t_0}^{t_f} \widehat{u}(t)^T v(t) dt = 0$; y así

$$\|u(\cdot)\|_2^2 = \|\widehat{u}(\cdot)\|_2^2 + \|v(\cdot)\|_2^2 \quad (6.15)$$

De aquí se sigue (6.12) y $\|u(\cdot)\|_2^2 = \|\widehat{u}(\cdot)\|_2^2$ si y sólo si

$$\int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_2^2 dt = \int_{t_0}^{t_f} \|\widehat{u}(t)\|_2^2 dt,$$

lo cual equivale a que $\|u(t)\|_2 = \|\widehat{u}(t)\|_2$ para casi todo $t \in [t_0, t_f]$ tal y como se deseaba demostrar. ■

Notemos que la condición (6.15) es el teorema de Pitágoras debido a que $\int_{t_0}^{t_f} \widehat{u}(t)^T v(t) dt = 0$ significa que $\widehat{u}(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son ortogonales. En realidad, la función $\widehat{u}(\cdot)$ de la variedad $\widehat{u}(\cdot) + \text{Ker } L_r$ de coste $\min_{u(\cdot) \in \widehat{u}(\cdot) + \text{Im } L_r} \|u(\cdot)\|$ es, por definición, aquella que está a menor distancia de la función $0 \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$. La teoría general nos dice que tal función debe estar en el subespacio ortogonal a $\text{Ker } L_r$. Pero $(\text{Ker } L_r)^\perp = \text{Im } L_r^*$ por lo que $\widehat{u}(\cdot) = L_r^* \xi$ para algún $\xi \in \mathbb{R}^n$. Recordando la definición de L_r en (6.5), vemos que la función $\widehat{u}(\cdot)$ en (6.9) tiene esta precisa forma. La Proposición 6.12 nos dice que es en la función $\widehat{u}(\cdot)$ donde se alcanza el mínimo coste.

La condición de controlabilidad a través de la matriz grammiana exige conocer la matriz de transición de estados. Cuando las matrices $A(t)$ y $B(t)$ son de clase C^∞ en $[t_0, t_f]$; es decir, son diferenciables infinitamente, se puede dar un criterio para saber si un sistema es controlable en términos de las matrices $A(t)$ y $B(t)$ del sistema. Como preparación para ello vamos a construir una sucesión de matrices de la siguiente forma: Para $t \in [t_0, t_f]$:

$$\begin{cases} K_0(t) := B(t) \\ K_j(t) := -A(t)K_{j-1}(t) + \dot{K}_{j-1}(t), \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.16)$$

Lema 6.13 Si las matrices $A(t)$ y $B(t)$ del sistema (6.2) son infinitamente diferenciables en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ y $\Phi(t, t_0)$ es su matriz de transición de estados correspondiente a la condición inicial $x(t_0) = x^0$, se tiene

$$\frac{\partial^j}{\partial s^j} (\Phi(t, s) B(s)) = \Phi(t, s) K_j(s), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

Obsérvese que si $A(t)$ y $B(t)$ son infinitamente diferenciables en \mathcal{I} , $\Phi(t, t_0)$ también lo es.

Demostración.- Lo haremos por inducción sobre $j = 0, 1, 2, \dots$. Si $j = 0$ no hay nada que demostrar porque $K_0(s) = B(s)$. Supongamos entonces que (6.17) es verdadero hasta j y calculemos

$$\frac{\partial^{j+1}}{\partial s^{j+1}}(\Phi(t, s)B(s)) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^j}{\partial s^j}(\Phi(t, s)B(s)) \right) = \frac{\partial}{\partial s}(\Phi(t, s)K_j(s)).$$

Como $\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)$, y recordando que para cualquier matriz invertible $X(t)$ se tiene $\frac{d}{dt}X(t)^{-1} = -X(t)^{-1}\dot{X}(t)X(t)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j+1}}{\partial s^{j+1}}(\Phi(t, s)B(s)) &= \frac{\partial}{\partial s}(\Phi(s, t)^{-1}K_j(s)) = \\ &= -\Phi(s, t)^{-1}\frac{\partial}{\partial s}(\Phi(s, t))\Phi(s, t)^{-1}K_j(s) + \Phi(s, t)^{-1}\dot{K}(s) \end{aligned}$$

Por ser $\Phi(s, t)$ la matriz de transición de estados del sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, es solución del sistema diferencial matricial $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$. Es decir, $\frac{\partial}{\partial s}(\Phi(s, t)) = A(s)\Phi(s, t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j+1}}{\partial s^{j+1}}(\Phi(t, s)B(s)) &= -\Phi(s, t)^{-1}A(s)\Phi(s, t)\Phi(s, t)^{-1}K_j(s) + \Phi(s, t)^{-1}\dot{K}(s) = \\ &= -\Phi(t, s)A(s)K_j(s) + \Phi(t, s)\dot{K}(s) = \\ &= \Phi(t, s)(-A(s)K_j(s) + \dot{K}(s)) = \Phi(t, s)K_{j+1}(s) \end{aligned}$$

tal y como se deseaba demostrar. ■

Una consecuencia de (6.17) es que

$$K_j(t) = \left[\frac{\partial^j}{\partial s^j}(\Phi(t, s)B(s)) \right]_{s=t}$$

porque al ser $\Phi(t, t) = I_n$ tenemos

$$\left[\frac{\partial^j}{\partial s^j}(\Phi(t, s)B(s)) \right]_{s=t} = \Phi(t, t)K_j(t) = K_j(t).$$

En lo que sigue usaremos la siguiente notación: Para $t \in \mathcal{T}$ y $q \geq 0$ entero

$$M_q(t) = \begin{bmatrix} K_0(t) & K_1(t) & \dots & K_q(t) \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Teorema 6.14 *Supongamos que las matrices $A(t) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ y $B(t) \in \mathbb{F}^{n \times m}$ del sistema (6.2) son infinitamente diferenciables en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ y sea $[t_0, t_f] \subset \mathcal{I}$. Si existen $t_c \in [t_0, t_f]$ y un entero $q \geq 0$ tal que $\text{rang } M_q(t_c) = n$ entonces el sistema (6.2) es controlable en $[t_0, t_f]$.*

Demostración. Si el sistema (6.2) no es controlable en $[t_0, t_f]$ entonces la matriz gramiana del sistema $W(t_f, t_0)$ en (6.7) no es invertible. Esto implica que existe un vector $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ tal que $W(t_f, t_0)y = 0$. Y también $y^T W(t_f, t_0)y = 0$. Entonces

$$0 = y^T W(t_f, t_0)y = \int_{t_0}^{t_f} y^T \Phi(t_f, t) B(t) B(t)^T \Phi(t_f, t)^T y dt = \int_{t_0}^{t_f} \|B(t)^T \Phi(t_f, t)^T y\|_2^2 dt$$

y por lo tanto $y^T \Phi(t_f, t) B(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, t_f]$. Sea $t_c \in [t_0, t_f]$ cualquiera y $z = \Phi(t_f, t_c)^T y$. Entonces $z \neq 0$ porque $y \neq 0$ y $\Phi(t_f, t_c)$ es invertible. Además $y^T = z^T \Phi(t_f, t_c)^{-1} = z^T \Phi(t_c, t_f)$ y

$$0 = y^T \Phi(t_f, t) B(t) = z^T \Phi(t_c, t_f) \Phi(t_f, t) B(t) = z^T \Phi(t_c, t) B(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

En particular, para $t = t_c$ tenemos que $\Phi(t_c, t_c) = I_n$ y por lo tanto

$$0 = z^T \Phi(t_c, t_c) B(t_c) = z^T B(t_c) = z^T K_0(t_c).$$

Ahora, derivando sucesivamente $z^T \Phi(t_c, t) B(t) = 0$ respecto de t tenemos que, por el Lema 6.13, para $j = 1, 2, \dots$

$$0 = \frac{\partial^j}{\partial t^j} (z^T \Phi(t_c, t) B(t)) = z^T \Phi(t_c, t) K_j(t).$$

Para $t = t_c$ obtenemos

$$0 = z^T K_j(t_c), \quad j = 1, 2, \dots$$

En definitiva para todo $q \geq 0$

$$0 = z^T [K_0(t_c) \quad K_1(t_c) \quad \dots \quad K_q(t_c)] = z^T M_q(t_c),$$

lo que implica que para todo $q \geq 0$ y todo $t_c \in [t_0, t_f]$, $\text{rang } M_q(t_c) < n$. Llegamos así a una contradicción. ■

Debe observarse que si se cumple $\text{rang } M_q(t_c) = n$ para algún $t_c \in \mathcal{I}$ y $q \geq 0$ entonces el sistema es controlable en cualquier intervalo que contenga a t_c y esté contenido en \mathcal{I} .

Por otra parte, la condición suficiente $\text{rang } M_q(t_c) = n$ para algún $t_c \in [t_0, t_f]$ y algún entero $q \geq 0$ no es, en general, necesaria para que el sistema lineal (6.2) sea controlable. Un ejemplo de sistema controlable que no cumple esta condición puede verse en [6, pag. 11]. Sin embargo, tenemos:

Teorema 6.15 Si $A(t)$ y $B(t)$ son funciones matriciales analíticas en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ entonces la condición $\text{rang } M_q(t_c) = n$ para algún $t_c \in [t_0, t_f] \subset \mathcal{I}$ y algún entero $q \geq 0$ es necesaria y suficiente para que el sistema (6.2) sea controlable en $[t_0, t_f]$.

Demostración. Recordemos que una función es analítica en un punto si es desarrollable en serie de potencias en un entorno de ese punto. Recordemos también que en el caso complejo ser analítica y diferenciable es lo mismo.

Ya sabemos que la condición $\text{rang } M_q(t_c) = n$ para algún $t_c \in [t_0, t_f] \subset \mathcal{I}$ y algún entero $q \geq 0$ es suficiente para que (6.2) sea controlable. Veamos que también es suficiente. Para ello supongamos que el sistema (6.2) es controlable en $[t_0, t_f]$ y que $A(t)$, $B(t)$ son funciones matriciales analíticas en $\mathcal{I} \supset [t_0, t_f]$. Supongamos que, sin embargo, para todo $t \in [t_0, t_f]$ y todo entero $q \geq 0$, $\text{rang } M_q(t) < n$. Sean $t_c \in [t_0, t_f]$ y $q \geq 0$, y para este t_c y q definamos

$$P_q = \{z \in \mathbb{R}^n : z^T M_q(t_c) = 0\}$$

Como $\text{rang } M_q(t_c) < n$, tenemos que $P_q \neq \{0\}$ para todo $q \geq 0$. Es claro que P_q es un subespacio vectorial de \mathbb{R} para cada $q \geq 0$ y que se cumple

$$P_0 \supseteq P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$$

Las dimensiones de estos subespacios forman una sucesión no creciente de modo que debe haber un índice r tal que $\{0\} \neq P_r = P_{r+1} = \dots$. Escojamos un vector $z \in P_r$ de modo que $z^T M_j(t_c) = 0$ para $j = 0, 1, 2, \dots$. En particular,

$$z^T B(t_c) = z^T K_0(t_c) = z^T M_0(t_c) = 0.$$

Y si $y = \Phi(t_0, t_c)^T z$ entonces $y^T \Phi(t_0, t_c) B(t_c) = 0$. Ahora bien, si $A(t)$ y $B(t)$ son analíticas en \mathcal{I} también $\Phi(t_0, t)$ lo es. Por lo tanto, si definimos $F(t) = \Phi(t_0, t) B(t)$ tenemos que $F(t)$ es analítica en \mathcal{I} . Pero $z^T F(t_c) = 0$. Teniendo en cuenta que $z^T M_j(t_c) = 0$ para $j = 0, 1, 2, \dots$ se puede ver que $z^T \left[\frac{d^j}{dt^j} F(t) \right]_{t=t_c} = 0$ de modo que por ser $F(t)$ analítica

concluimos que $z^T F(t) = 0$ para todo t en un entorno de t_c . Como esto sucede para todo $t_c \in [t_0, t_f]$, por continuación analítica, llegamos a que $z^T F(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, t_f]$. Es decir, $z^T \Phi(t_0, t) B(t) = 0$ para $t \in [t_0, t_f]$.

Ahora, como el sistema es controlable en $[t_0, t_f]$, existe un control $u(\cdot)$ que lleva el sistema en el estado $x(t_0) = z$ al estado $x(t_f) = 0$. Es decir

$$0 = \Phi(t_f, t_0) z + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, s) B(s) u(s) ds.$$

Despejando z :

$$\begin{aligned} z &= - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t_0)^{-1} \Phi(t_f, s) B(s) u(s) ds = - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t_f) \Phi(t_f, s) B(s) u(s) ds = \\ &= - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, s) B(s) u(s) ds. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $z^T \Phi(t_0, t) B(t) = 0$ para $t \in [t_0, t_f]$,

$$z^T z = - \int_{t_0}^{t_f} z^T \Phi(t_0, s) B(s) u(s) ds = 0.$$

En conclusión, $\|z\|_2^2 = z^T z = 0$, que implica $z = 0$; llegando a una contradicción. ■

Para los sistemas invariantes en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in \mathcal{T} \quad (6.19)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, podemos aplicar directamente la condición $\text{rang } M_q(t_c) = n$ directamente para obtener una caracterización de la controlabilidad especialmente sencilla de expresar.

Teorema 6.16 *El sistema (6.19) es controlable en $[t_0, t_f] \subset \mathcal{T}$ si y sólo si*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (6.20)$$

A la matriz

$$\mathcal{C}(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

se le llama *matriz de controlabilidad* del sistema (6.19) o del par (A, B) .

Demostración. Por una parte, para todo $t \in \mathcal{T}$, $K_0(t) = B$, y por inducción es fácil ver que $K_j(t) = (-1)^j A^j B$, $j = 1, 2, \dots$. Entonces, la condición $\text{rang } M_q(t_c) = n$ para algún $t_c \in [t_0, t_f] \subset \mathcal{T}$ y algún entero $q \geq 0$ es equivalente a que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^qB \end{bmatrix} = n$$

para algún entero $q \geq 0$. Ahora bien, para $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^jB \end{bmatrix} \leq \text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{j+1}B \end{bmatrix},$$

de modo que si $q < n$,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^qB \end{bmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n.$$

Y si $q \geq n$ entonces, por el Teorema de Cayley-Hamilton¹, $A^n = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$. En consecuencia,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^qB \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

Es decir, el sistema (6.19) (o el par (A, B)) es controlable si y sólo si $\text{rang } \mathcal{C}(A, B) = n$. ■

La controlabilidad de los sistemas invariantes en el tiempo es independiente del intervalo concreto. Por eso, se suele decir que el sistema es controlable sin referencia a ningún intervalo.

Ejemplo 6.17 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

¹El teorema de Hamilton-Cayley establece que toda matriz satisface su polinomio característico; es decir, si $\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ entonces $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n = 0$

Sea $T > 0$. Calcúlese el control de coste mínimo que lleva el sistema de $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $x(T) = 0$; y hállese el estado del sistema par dicho control en todo instante t .

Observamos, en primer lugar, que el sistema es controlable porque $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$$\mathcal{C}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que es una matriz de rango 2.

Calculamos ahora una matriz fundamental de soluciones. Como A está en forma de Jordan, $e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$\Phi(t, t_0)x^0 = e^{A(t-t_0)}x^0 = \begin{bmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz grammiana para $t_0 = 0$ y $t_f = T$ sería:

$$W(T, 0) = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} ds = \int_0^T \begin{bmatrix} s^2 & s \\ s & 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix}.$$

Ahora

$$\widehat{u}(t) = B(t)^T \Phi(T, t)^T W(T, 0)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \Phi(T, 0) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{6}{T^3} (T - 2t)$$

Finalmente, usando la fórmula de variación de las constantes:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)}bu(s)ds = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{6}{T^3} (T-2s) ds \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{6}{T^3} \int_0^t \begin{bmatrix} Tt-2ts-sT+2s^2 \\ ts-s^2 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{6}{T^3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}t^3 + \frac{T}{2}t^2 \\ Tt - t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\left(\frac{t}{T}\right)^3 + 3\left(\frac{t}{T}\right)^2 - 1 \\ \frac{6}{T}\left(\frac{t}{T} - \left(\frac{t}{T}\right)^2\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obteniendo así la fórmula de los estados del sistema para $t \in [0, T]$. Además, claramente, $x(T) = 0$. ■

Ejemplo 6.18 Vimos en el Ejemplo 5.18 que las ecuaciones del sistema que se obtiene al linealizar el sistema que rige el movimiento de un satélite en órbita alrededor de la Tierra

en torno a la órbita estacionaria son de la forma (ver (5.33)) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega^2 & 0 & 0 & 2R_0\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\Omega}{R_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_0} \end{bmatrix}$$

siendo R_0 la distancia a la órbita geoestacionaria y Ω la velocidad angular de la Tierra. El vector de controles está formado por las fuerzas que mediante propulsores se puede ejercer desde el satélite en las direcciones radial y tangencial con el objetivo de compensar las perturbaciones que pudieran desviar el satélite de su órbita estacionaria: $u(t) = (F_r(t), F_\theta(t))$.

En este ejemplo, se puede calcular “a mano” la matriz de controllabilidad del sistema:

$$\mathcal{C}(A, B) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\Omega & -\Omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\Omega & -\Omega^2 & 0 & 0 & -2\Omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_0} & -\frac{2\Omega}{R_0} & 0 & 0 & -\frac{4\Omega^2}{R_0} \\ 0 & \frac{1}{R_0} & -\frac{2\Omega}{R_0} & 0 & 0 & -\frac{4\Omega^2}{R_0} & \frac{2\Omega^3}{R_0} & 0 \end{array} \right]$$

pudiéndose comprobar que las cuatro primeras columnas son linealmente independientes. Es decir, $\text{rang } \mathcal{C}(A, B) = 4$ y por lo tanto el sistema linealizado es controlable. Calcular su matriz grammiana o el control de coste mínimo que permite controlarlo en todo momento es una tarea en la que la ayuda de software se hace imprescindible. En la función de MATLAB `controlsatellite.m`, que se puede encontrar en la página web del curso, se calcula la función de control de coste mínimo que lleva el sistema desde el reposo en $t = 0$ al estado $x = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ en $t = 1$. También se explora lo que sucedería si alguno de los dos propulsores del satélite dejaran de funcionar (¿sería el sistema linealizado controlable?). ■

6.2.1. La descomposición de Kalman y el test PBH

Para los sistemas lineales invariantes en el tiempo, el test del rango (6.20) es muy atractivo por su aparente sencillez. Sin embargo adolece de un defecto práctico: las columnas de la matriz de controlabilidad tienden a ser cada vez más linealmente dependientes. Esto es debido a que para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ la sucesión de subespacios $\langle A^k x \rangle$ tiende a un subespacio $\langle y \rangle$ que es A -invariante; es decir, tal que $Ay = \alpha y$. Por lo tanto, cerca de la convergencia $A^k x$ está, aproximadamente, en la misma dirección que $A^{k+1} x$. Por supuesto, el valor de k para el que esto vaya a suceder puede ser muy grande pero hay matrices (mal condicionadas por lo general) para las que el test del rango puede fallar. Consideremos, por ejemplo, el siguiente código de MATLAB:

```
>> P=hilb(7); D=diag(10.^(-7:-1)); A=P^(-1)*D*P;
>> b=rand(7,1);C=b;
```

```
>> for j=1:6
C=[C A*C(:,j)];
end
>> rank(C)
ans =
    6
```

En él se define P como una matriz de Hilbert. Se sabe que estas matrices son invertibles pero muy mal condicionadas. En aritmética exacta los valores propios de A son los de D : $10^{-7}, 10^{-6}, \dots, 10^{-1}$. La matriz A es, por lo tanto, no derogatoria. Esto significa que para casi todo vector $x \in \mathbb{F}^n$, $x \neq 0$, los vectores x, Ax, \dots, A^6x son linealmente independientes. Así pues, el rango de la matriz de controlabilidad de (A, b) debería ser 7 para cualquier $b \neq 0$ escogido aleatoriamente. Sin embargo, el valor que devuelve MATLAB es 6.

Este problema puede ser difícilmente evitable cuando la matriz A está muy mal condicionada pero hay otra forma de caracterizar la controlabilidad de (A, B) que puede ser, en ocasiones, más efectiva. Para demostrar su validez haremos uso de la llamada *descomposición de Kalman*. El objetivo de esta descomposición es separar, para los sistemas que no son controlables, los estados controlables de los que no lo son.

En esta sección consideraremos sistemas lineales invariantes en el tiempo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad t \in \mathcal{T} = \mathbb{R}, \quad (6.21)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Teorema 6.19 (Descomposición de Kalman) Sea $r = \text{rang } \mathcal{C}(A, B)$ el rango de la matriz de controlabilidad del sistema (6.21). Existe una matriz invertible $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

donde $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ y (A_1, B_1) es controlable.

Demostración.- Consideremos la matriz de controlabilidad del sistema (6.21):

$$\mathcal{C}(A, B) = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B].$$

Como esta matriz tiene rango r , hay r columnas en ella que son linealmente independientes. Escojamos en $\mathcal{C}(A, B)$ r columnas linealmente independientes y formemos con ellas una matriz $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Las columnas de T_1 forman un sistema libre de vectores de \mathbb{R}^n que puede ampliarse hasta una base de \mathbb{R}^n . Sea $T_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ la matriz cuyas columnas sean los vectores añadidos de forma que $T = [T_1 \quad T_2]$ sea una matriz invertible.

Observemos lo siguiente: si t_j es la j -ésima columna de T_1 entonces es de la forma $t_j = A^k b_i$ para algunos enteros $i = 1, \dots, m$ y $k = 0, 1, \dots, n-1$ siendo b_i la i -ésima columna

de B . Por lo tanto, $At_j = A^{k+1}b_i$. Si $k+1 \leq n-1$ entonces At_j es una columna de $\mathcal{C}(A, B)$ y, en consecuencia, es una combinación lineal de las columnas de T_1 . Y si $k+1 = n$, por el teorema de Hamilton-Cayley, $A^{k+1} = A^n = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$, de modo que $At_j = A^n b_i$ es una combinación lineal de las columnas de $\mathcal{C}(A, B)$ y, así, una combinación lineal de las columnas de T_1 . En definitiva, At_j es una combinación lineal de las columnas de T_1 . Es decir, $At_j = T_1 a_j$, $1 \leq j \leq r$. Si $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_r \end{bmatrix}$ entonces,

$$A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AT_1 & AT_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}.$$

Además, como las columnas de B son combinaciones lineales de las de T_1 :

$$B = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esto prueba (6.21). Además:

$$\begin{aligned} r &= \text{rang } \mathcal{C}(A, B) = \text{rang}(T^{-1}\mathcal{C}(A, B)) = \text{rang } \mathcal{C}(T^{-1}AT, T^{-1}B) = \\ &= \text{rang} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^{n-1} B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^{r-1} B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado de nuevo el Teorema de Hamilton-Cayley. Así pues $\text{rang } \mathcal{C}(A_1, B_1) = r$ y por consiguiente (A_1, B_1) es controlable. ■

El resultado de este teorema se puede interpretar de la siguiente forma: existe un cambio reversible de las variables de estado:

$$z = T^{-1}x$$

de modo que, respecto de estas nuevas variables el sistema (6.21) se escribe como sigue:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = A_1 z_1(t) + A_2 z_2(t) + B_1 u(t) \\ \dot{z}_2(t) = A_3 z_2(t) \\ y(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) + Du(t) \end{cases} \quad (6.23)$$

con $\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = CT$. Tal y como muestra la Figura 6.1 mediante este cambio de variable hemos extraído un subsistema de orden $n-r$ al que no le afecta el control u y, que por lo tanto, es completamente incontrolable (sólo tiene componente de movimiento libre). A la matriz de este sistema (en la nueva base) A_3 la llamaremos *parte incontrolable del sistema*.

Nótese que el sistema (6.23) también puede verse como un sistema controlable en los estados $z_1(t)$ en los que la función de control es $\begin{bmatrix} z_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$ con matriz de control $\begin{bmatrix} A_2 & B_1 \end{bmatrix}$ y con matrices de salida C_1 y $\begin{bmatrix} C_2 & D \end{bmatrix}$, siendo $z_2(\cdot)$ la solución del sistema libre $\dot{z}_2(t) = A_3 z_2(t)$.

La descomposición de Kalman es la base de la demostración del siguiente resultado que caracteriza la controlabilidad de los sistemas lineales sin hacer uso de la matriz de controlabilidad.

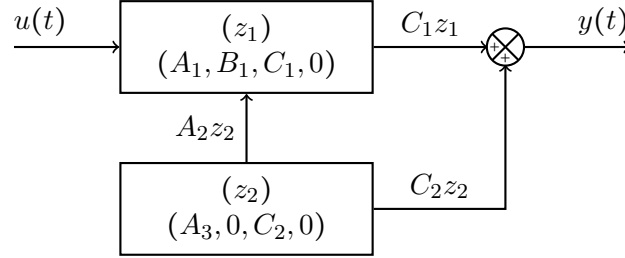


Figura 6.1: Extracción de la parte incontrolable

Teorema 6.20 (*Test PBH²*) El sistema (6.21) es controlable si y sólo si para todo $\lambda \in \Lambda(A)$ (el conjunto de los valores propios de A) se tiene

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & B \end{bmatrix} = n. \quad (6.24)$$

Demostración.- Veamos que si no se cumple la condición (6.24) entonces la matriz de controlabilidad no tiene rango completo. En efecto, supongamos que para algún $\lambda \in \Lambda(A)$ el rango de $\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & B \end{bmatrix}$ no es n . Esto significa que las filas de esta matriz son linealmente dependientes; es decir, existe un vector $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que

$$v^T \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & B \end{bmatrix} = 0.$$

Entonces $v^t(\lambda I_n - A) = 0$ y $v^T B = 0$ simultáneamente. Es decir,

$$v^T A = \lambda v^T \text{ y } v^T B = 0.$$

Pero entonces $v^T AB = \lambda v^T B = 0$ e inductivamente $v^T A^k B = (v^T A) A^{k-1} B = \lambda v^T A^{k-1} B = 0$. Esto implica que

$$v^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0,$$

y por lo tanto, las filas de la matriz de controlabilidad son linealmente dependientes. De aquí se deduce que $\text{rang } \mathcal{C}(A, B) < n$ y el sistema no es controlable.

Recíprocamente, si el sistema no fuera controlable, por el Teorema de la Descomposición de Kalman, existiría una matriz invertible T para la que se verificaría la condición (6.22). Como A y

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

son semejantes, ambas matrices tienen los mismos valores propios. Sea $\lambda_0 \in \Lambda(A_3)$ un valor propio de A_3 . Entonces $\det(\lambda_0 I_{n-r} - A_3) = 0$ siendo $r = \text{rang } \mathcal{C}(A, B)$. Como las

²Popov-Belevitch-Hautus

filas de $\lambda_0 I_{n-r} - A_3$ son linealmente dependientes, existe un vector $v_1 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times 1}$ tal que $v_1^T (\lambda_0 I_{n-r} - A_3) = 0$. Si ponemos $v = \begin{bmatrix} 0 & v_1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tenemos que

$$v^T \begin{bmatrix} \lambda_0 I_r - A_1 & -A_2 & B_1 \\ 0 & \lambda_0 I_{n-r} - A_3 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_0 I_r - A_1 & -A_2 & B_1 \\ 0 & \lambda_0 I_{n-r} - A_3 & 0 \end{bmatrix} < n.$$

Y como

$$T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_0 I_n - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_r - A_1 & -A_2 & B_1 \\ 0 & \lambda_0 I_{n-r} - A_3 & 0 \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_0 I_n - A & B \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_0 I_r - A_1 & -A_2 & B_1 \\ 0 & \lambda_0 I_{n-r} - A_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, $\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_0 I_n - A & B \end{bmatrix} < n$. Pero los valores propios de A_3 son valores propios de A porque $\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_r - A_1) \det(\lambda_{n-r} - A_3)$. En definitiva, si (A, B) no es controlable, hay al menos un valor propio, λ_0 , de A tal que $\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_0 I_n - A & B \end{bmatrix} < n$; en contradicción con (6.24). ■

Una consecuencia interesante del test PBH, que se estudia en la relación de problemas, es que permite determinar el mínimo número de controles necesarios para controlar un sistema lineal invariante en el tiempo.

6.3. Observabilidad de los sistemas lineales

El concepto de observabilidad está relacionado con la capacidad de determinar el estado del sistema a partir de las salidas (conocido el control). Con precisión:

Definición 6.21 *El sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad t \in \mathcal{T} \quad (6.25)$$

se dice que es **observable** en $[t_0, t_f]$ si para cualquier entrada $u(\cdot) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ el estado inicial del sistema $x(t_0) = x^0$ está determinado de manera única por la salida $y(t)$ en $[t_0, t_f]$.

Un par de observaciones:

- Una vez conocido el estado inicial del sistema, el estado del mismo queda determinado de forma única en $[t_0, t_f]$ porque la solución del problema de condiciones iniciales $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t)$, $x(t_0) = x^0$ tiene solución única.

- La respuesta del sistema es

$$y(t) = C\Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t C\Phi(t_f, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t) \quad (6.26)$$

El segundo término $y_r(t) = \int_{t_0}^t C\Phi(t_f, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t)$ es la respuesta forzada del sistema y, conocidas las matrices del sistema y la entrada, se puede “calcular” independientemente de x^0 . Por lo tanto, una vez obtenida y_r la relación entre $y(t)$ y x^0 queda determinada por la respuesta del sistema a una entrada cero. Es decir, podemos centrarnos sin pérdida de generalidad en :

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x^0, \text{ para } t \in [t_0, t_f]. \quad (6.27)$$

De la misma forma que el subespacio de estados alcanzables $\mathcal{R}(t_0, t_f)$ ((6.4)) jugaba un papel fundamental en el estudio de la controlabilidad de (6.25), y lo caracterizábamos como la imagen de la aplicación lineal L_r definida en (6.5), también para la observabilidad tenemos un subespacio y aplicación lineal que juegan un papel similar. Específicamente, definimos

$$\begin{aligned} L_o &: \mathbb{R}^n \longrightarrow PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^p) \\ x^0 &\longrightarrow C(\cdot)\Phi(\cdot, t_0)x^0|_{[t_0, t_f]} \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde $C(\cdot)\Phi(\cdot, t_0)x^0|_{[t_0, t_f]}$ representa la restricción de $C(\cdot)\Phi(\cdot, t_0)x^0$ al intervalo $[t_0, t_f]$.

Definición 6.22 *El estado x^0 se dice que es **inobservable** en $[t_0, t_f]$ si la respuesta del sistema a la entrada 0 con la condición inicial $x(t_0) = x^0$ es cero en $[t_0, t_f]$. En otras palabras, si*

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x^0 = 0 \text{ para } t \in [t_0, t_f].$$

Decir que x^0 es inobservable en $[t_0, t_f]$ equivale a decir que $x^0 \in \text{Ker } L_o$; en otras palabras, el conjunto de estados inobservables en $[t_0, t_f]$ es el subespacio $\text{Ker } L_o$. En consecuencia tenemos

Proposición 6.23 *El sistema (6.25) es observable en $[t_0, t_f]$ si y sólo si $\text{Ker } L_o = \{0\}$.*

Ahora bien, vimos que para la aplicación lineal L_r definida en (6.5) por $L_r(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, s)B(s)u(s)ds$, su aplicación adjunta es (ver (6.6)): $L_r^*(z) = B(\cdot)^T \Phi(t_f, \cdot)^T z$. Como para aplicaciones lineales continuas definidas en espacios de Hilbert se tiene que la adjunta de la adjunta de una aplicación lineal es la propia aplicación lineal ([5, Sec. A.7.3]) tenemos que

$$\begin{aligned} L_o^* &: PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v(\cdot) &\longrightarrow \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^T C(t)^T v(t)dt \end{aligned} \quad (6.29)$$

Por otra parte, por el Lema 6.8, $\text{Ker } L_o^* L_o = \text{Ker } L_o$, $\text{Im } L_o^* L_o = \text{Im } L_o^*$ y también $\text{Im } L_o \oplus \text{Ker } L_o = \mathbb{R}^n$. Observemos finalmente que

$$\text{Im } L_o^* L_o = \text{Im} \left(\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^T C(t)^T C(t) \Phi(t, t_0) dt \right).$$

Se denota con

$$M(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^T C(t)^T C(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (6.30)$$

y se le llama *matriz grammiana de observabilidad*. Su parecido con la matriz grammiana de controlabilidad $W(t_f, t_0)$ es más que evidente. Como $W(t_f, t_0)$, $M(t_f, t_0)$ es una matriz simétrica semidefinida positiva, y es definida positiva ($\det M(t_f, t_0) \neq 0$) si y sólo si $\text{Im } L_o^* L_o = \mathbb{R}^n$. En consecuencia,

Teorema 6.24 *El sistema (6.25) es observable en $[t_0, t_f]$ si y sólo si $\det M(t_f, t_0) \neq 0$.*

Es destacable, de nuevo, el gran parecido de las caracterizaciones de controlabilidad del Teorema 6.9 y de observabilidad del Teorema 6.24. Diremos más sobre ello más adelante.

Corolario 6.25 *Supongamos que el sistema (6.25) es observable en $[t_0, t_f]$.*

(i) *Si $y(\cdot)$ es la respuesta del sistema a una entrada nula en $[t_0, t_f]$ con la condición inicial $x(t_0) = x^0$ entonces*

$$\|y(\cdot)\|_2 = x^{0T} M(t_f, t_0) x^0.$$

(ii) *Si $y(\cdot)$ es la respuesta del sistema a una entrada nula en $[t_0, t_f]$ entonces*

$$x^0 = (L_o^* L_o)^{-1} L_o^* y(\cdot) = M(t_f, t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^T C(t)^T y(t) dt.$$

Demostración.- (i) Para $t \in [t_0, t_f]$, $y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x^0$ de modo que

$$\begin{aligned} \|y(\cdot)\|_2^2 &= \int_{t_0}^{t_f} y(t)^T y(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} x^{0T} \Phi(t, t_0)^T C(t)^T C(t) \Phi(t, t_0) x^0 dt = \\ &= x^{0T} \left(\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^T C(t)^T C(t) \Phi(t, t_0) dt \right) x^0 = x^{0T} M(t_f, t_0) x^0. \end{aligned}$$

(ii) Teniendo en cuenta la definición de L_o en (6.28), tenemos

$$y(\cdot) = L_o x^0 \text{ en } [t_0, t_f].$$

Dado que el sistema es observable, por la Proposición 6.23, $L_o^* L_o$ es un isomorfismo en \mathbb{R}^n y como

$$L_o^* y(\cdot) = L_o^* L_o x^0,$$

obtenemos $x^0 = (L_o^* L_o)^{-1} L_o^* y(\cdot)$. Ahora bien, $L_o^* y(\cdot) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^T C(t)^T y(t) dt$ y $M(t_f, t_0)$ es la matriz de $L_o^* L_o$ en las bases canónicas. En consecuencia

$$x^0 = M(t_f, t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, t_0)^T C(t)^T y(t) dt \quad (6.31)$$

tal como se deseaba demostrar. ■

Recordando que $\text{Ker } L_o^* L_o = \text{Ker } L_o$ y que, la matriz de $L_o^* L_o$ en las bases canónicas de \mathbb{R}^n es la matriz grammiana $M(t_f, t_0)$, tenemos

Corolario 6.26 *El subespacio de estados inobservables en $[t_0, t_f]$ es $\text{Ker } M(t_f, t_0)$.*

Al igual que para los sistemas controlables hay criterios basados en rangos de matrices que sirven para saber si un sistema dado es observable. Los siguientes resultados se dan sin demostración porque son muy parecidas a las de los correspondientes resultados para sistema controlables. Definimos, como en (6.16), la siguiente sucesión de matrices para $t \in [t_0, t_f]$:

$$\begin{cases} L_0(t) = C(t) \\ L_j(t) = L_{j-1}(t)A(t) + \dot{L}_{j-1}(t), \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.32)$$

Se demuestra por inducción que

$$L_j(t) = \left[\frac{\partial^j}{\partial s^j} (C(s)\Phi(s, t)) \right]_{s=t}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Teorema 6.27 *Supongamos que las matrices $A(t)$ y $C(t)$ del sistema (6.25) son infinitamente diferenciables en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ y sea $[t_0, t_f] \in \mathcal{I}$. Si existen $t_a \in [t_0, t_f]$ y un entero $q \geq 0$ tal que*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} L_0(t_a) \\ L_1(t_a) \\ \vdots \\ L_q(t_a) \end{bmatrix} = n, \quad (6.33)$$

entonces el sistema (6.25) es observable en $[t_0, t_f]$.

Al igual que en el caso controlable, si se cumple (6.33) para algún $t_a \in \mathcal{I}$ y algún entero $q \geq 0$ entonces el sistema es observable en cualquier intervalo que contenga a t_a y esté contenido en \mathcal{I} .

De nuevo, la condición (6.33) no es necesaria, en general, para la observabilidad del sistema pero sí lo es si $A(t)$ y $C(t)$ son analíticas en \mathcal{I} . La demostración es la misma que para la controlabilidad.

Finalmente, para los sistemas invariantes en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad t \in \mathcal{T} = \mathbb{R} \quad (6.34)$$

tenemos el siguiente criterio cuya demostración sigue las mismas pautas que en el caso de sistemas controlables.

Teorema 6.28 *El sistema (6.34) es observable en $[t_0, t_f] \subset \mathcal{T}$ si y sólo si*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n. \quad (6.35)$$

A la matriz

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

se le llama *matriz de observabilidad* del sistema (6.34) o del para (A, C) y se demuestra que el subespacio de inobservabilidad es $\text{Ker } \mathcal{O}(A, C)$.

Al igual que con los sistemas controlables, la observabilidad de los sistemas invariantes en el tiempo es independiente del intervalo concreto. Por eso, se suele decir que el sistema es observable sin referencia a ningún intervalo.

Comparando los Teoremas 6.16 y 6.28 enseguida vemos que el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

es controlable si y sólo si el sistema

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A^T z(t) \\ y(t) = B^T z(t) \end{cases}$$

es observable. Esto permite una rápida traslación entre los resultados de controlabilidad y observabilidad de los sistemas invariantes en el tiempo.

Los siguientes resultados se obtienen directamente dualizando los correspondientes resultados sobre controlabilidad de la Sección 6.2.1

Teorema 6.29 (*Descomposición de Kalman de observabilidad*) *Sea $r = \text{rang } \mathcal{O}(A, C)$ el rango de la matriz de observabilidad del sistema (6.34). Existe una matriz invertible $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}, \quad CT = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

donde $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times r}$ y (A_1, C_1) es controlable.

Teorema 6.30 (Test PBH de observabilidad) El sistema (6.34) es observable si y sólo si para todo $\lambda \in \Lambda(A)$ (el conjunto de los valores propios de A) se tiene

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n. \quad (6.37)$$

La dualidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, que permiten trasladar resultados de los sistemas controlables a los observables y al revés, se extiende, sin demasiada dificultad, a los sistemas lineales no invariantes en el tiempo pero este problema no lo abordaremos aquí.

Ejemplo 6.31 Retomamos el Ejemplo 6.18 sobre el sistema linealizado en torno a la órbita geoestacionaria del Ejemplo 4.4. Las ecuaciones del sistema linealizado en torno al punto de equilibrio $x_e = (R_0, 0, 0, 0)$ a control cero son (ver (5.33)) (incluimos ahora las ecuaciones de salida):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega^2 & 0 & 0 & 2R_0\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\Omega}{R_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_0} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo R_0 la distancia a la órbita geoestacionaria y Ω la velocidad angular de la Tierra. Vamos a estudiar si el sistema es observable respecto de cada ecuación de salida independiente.

En primer lugar suponemos que sólo se mide la distancia radial a la posición del satélite:

$$y_1(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x(t) = x_1(t) = r(t)$$

La matriz de observabilidad en este caso es:

$$\mathcal{O}(A, c_1) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A \\ c_1 A^2 \\ c_1 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega^2 & 0 & 0 & 2R_0\Omega \\ 0 & -\Omega^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, claramente, tiene rango 3. Por lo tanto el sistema no es observable y el espacio de inobservabilidad es

$$\text{Ker } \mathcal{O}(A, c_1) = \{[0 \ 0 \ x \ 0]^T : x \in \mathbb{R}\}.$$

En otras palabras, que la observación sólo de la posición radial del satélite en cualquier intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$ no nos permite saber cuál era el desplazamiento angular del satélite en el instante t_0 .

Por otra parte, si suponemos que sólo se mide el desplazamiento angular

$$y_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = x_3(t) = \theta(t) - (\theta_0 + \Omega t),$$

la matriz de observabilidad del sistema sería:

$$\mathcal{O}(A, c_2) = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 A \\ c_2 A^2 \\ c_2 A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\Omega}{R_0} & 0 & 0 \\ -\frac{6\Omega^3}{R_0} & 0 & 0 & -4\Omega^2 \end{bmatrix}$$

que tiene rango 4 y por lo tanto, sólo midiendo el desplazamiento angular en cada intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$ podemos conocer los estados del sistema en t_0 y, en consecuencia, en todo el intervalo. ■

6.4. Estabilización de los sistemas lineales por *feedback* de estados

Un buen número de problemas de control son consecuencia de nuestro deseo de modificar las características del sistema para que se comporte de una forma determinada. Una de las herramientas comúnmente usadas es el diseño de controladores de “feedback”; es decir, construir sistemas que tomando como entradas las salidas del sistema original produzcan en éste el comportamiento deseado (realimentamos el sistema original a partir de la información proporcionada por el mismo). En la Figura 6.2 se presenta un esquema de realimentación (*feedback*): las salidas del sistema Σ (*planta*) se usan para producir, a través del sistema Γ (*controlador*), nuevas entradas para el sistema original Σ . El sistema Γ se diseña de modo las entradas en la planta Σ permitan controlar (de ahí el nombre) el comportamiento dinámico de ésta. En ocasiones se utiliza además una señal externa, $v(t)$, que puede ser la referencia para la salida o una entrada par ayudar al control.

Supongamos entonces que las ecuaciones de Σ en el modelo de espacio-estado son las habituales (supondremos $D = 0$ para simplificar la notación):

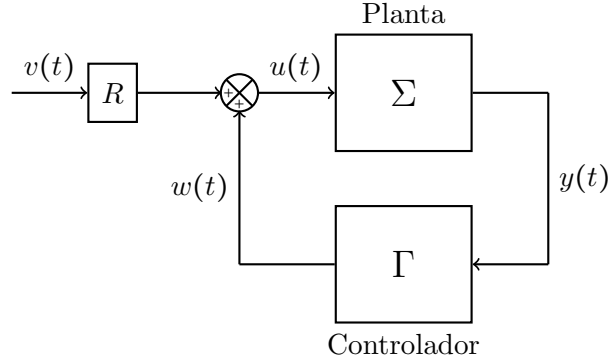
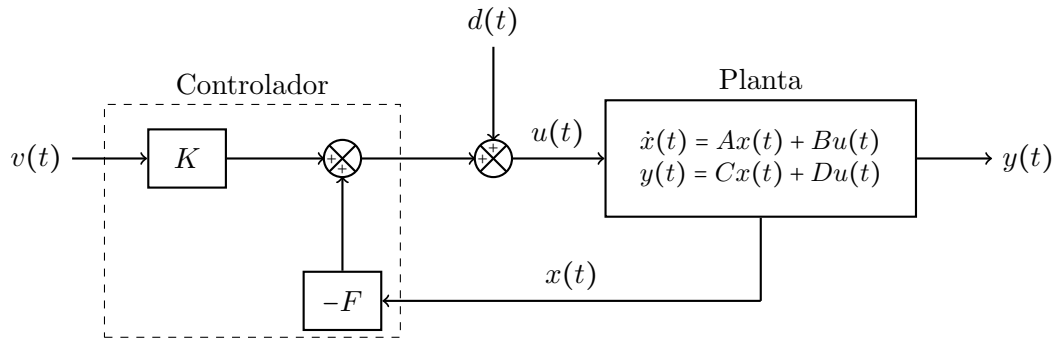
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (6.38)$$

Supongamos también que las ecuaciones para el sistema Γ son

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Kz(t) + Ly(t) \\ u(t) = Mz(t) + Fy(t) + Rv(t) \end{cases} \quad (6.39)$$

Las ecuaciones del sistema conectado se obtienen sustituyendo los valores correspondientes de cada sistema en el otro:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BMz(t) + BFCx(t) + BRv(t) = (A + BFC)x(t) + BMz(t) + BRv(t),$$

Figura 6.2: Realimentación del sistema Σ Figura 6.3: Sistema de control con un *feedback* de estados

y

$$\dot{z}(t) = Kz(t) + LCx(t)$$

Así, las ecuaciones del sistema conectado (llamado también, por razones obvias, *sistema en lazo cerrado*) son:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BFC & BM \\ K & LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BR \\ 0 \end{bmatrix} v(t). \quad (6.40)$$

La conexión más simple consiste en suponer que las únicas matrices no nulas en el sistema Γ son F y R . En este caso, las ecuaciones del sistema en lazo cerrado se reducen a

$$\dot{x}(t) = (A + BFC)x + BRv(t). \quad (6.41)$$

Se dice entonces que se ha realizado un *feedback de salidas* sobre el sistema (6.38) y que el sistema resultante (6.41) es el sistema en lazo cerrado por dicho *feedback* de salidas.

El análisis del comportamiento del sistema en lazo cerrado por un *feedback* de salidas es un problema, en general, difícil. Más simple es el análisis del comportamiento del sistema

cuando el *feedback* se puede hacer desde los estados; cosa que es implementable físicamente cuando estos pueden ser medidos. En tal caso, un diagrama de un sistema típico de control en el que se usa un *feedback* de estados es el que se presenta en la Figura 6.3. El sistema completo está compuesto por: *la planta* definida por un sistema de ecuaciones (lineales en este caso) que determina el proceso dinámico, *el controlador* compuesto por los elementos F y K , la señal de referencia (o señal de control) v y unas perturbaciones que se han reunido en la función d . El controlador usa el estado del sistema x y la señal de referencia v para definir la entrada al sistema dinámico y controlar así el proceso. El objetivo del controlador de *feedback* es regular la salida del sistema $y(t)$ para que siga la señal de referencia de entrada en presencia de perturbaciones y, quizá, incertidumbres.

Una faceta importante en el diseño de control es especificar el tipo de comportamiento que se requiere del sistema. El comportamiento básico es que sea estable. Es decir, que en ausencia de perturbaciones, el estado de equilibrio del sistema sea asintóticamente estable. Otras especificaciones más sofisticadas pueden ser que la respuesta a un salto o la respuesta de frecuencia tengan propiedades tales como que el tiempo de subida, la sobreelongación o el tiempo de ajuste tengan valores predeterminados.

Dado que estamos suponiendo que se pueden medir los estados y que el conocimiento del estado en el instante t contiene toda la información necesaria para predecir el comportamiento futuro del sistema, el controlador podría diseñarse para producir una ley de control que sea una función general del estado y de la señal de referencia:

$$u = \alpha(x, v).$$

En el diagrama de la Figura 6.3 se ha supuesto que esta ley es una función lineal en x y v :

$$u(t) = -Fx(t) + Kv(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.42)$$

El signo menos es una convención para indicar que un *feedback* negativo es la situación habitual.

La ecuaciones del sistema en lazo cerrado serían entonces (la ecuación de salidas no se vería afectada):

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + BKv(t) \quad (6.43)$$

Dado que un objetivo básico de diseño para el controlador es que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable el problema fundamental que queremos resolver es el de la estabilización de los sistemas lineales mediante un *feedback* de estados. Ahora bien, la estabilidad de los sistemas lineales depende de la posición en el plano complejo de los valores propios de la matriz de estados. Como, a su vez, los valores propios de una matriz son las raíces de su polinomio característico, el problema que se trata de resolver es: *dado un polinomio de grado n :*

$$p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1s + p_0,$$

encontrar una matriz de feedback F tal que el polinomio característico de la matriz en lazo cerrado $A - BF$ sea $p(s)$. Este problema se conoce con el nombre de *problema de*

asignación de valores propios o problema de asignación de polos. Esta última denominación tiene que ver con el hecho de que los polos de la matriz de transferencia del sistema son valores propios de la matriz de estados (todos, de hecho, cuando el sistema es controlable y observable). Veremos que el problema de asignación de valores propios siempre tiene solución si y sólo si el sistema (A, B) es controlable. La demostración la haremos para sistemas con un sólo control aunque es verdad para sistemas con cualquier número de controles.

Antes de enunciar y demostrar el teorema de asignación de valores propios conviene observar que la matriz K no afecta a la estabilidad interna del sistema que queda determinada por los valores propios de $A - BF$, pero afecta a la solución en estado estacionario. En efecto, suponiendo que el sistema es de una sola entrada y una sola salida (la generalización al caso multivariable es inmediata) y que la señal de referencia es constante ($v(t) = v$ para todo $t \in \mathbb{R}$), la solución de equilibrio del sistema (6.43) es

$$x_e = -(A - BF)^{-1}BKv,$$

y la salida para este estado de equilibrio es

$$y_e = Cx_e + Du_e = Cx_e + D(Fx_e + Kv) = (C + DF)x_e + DKv.$$

Si el objetivo de control es que y_e siga la señal de referencia, debe ser $y_e = v$. Así pues, si $D = 0$ (que es, como ya se ha dicho, el caso más habitual):

$$\begin{aligned} v = Cx_e = -C(A - BF)^{-1}BKv &\Rightarrow 1 = -C(A - BF)^{-1}BK \Rightarrow \\ &\Rightarrow K = -\frac{1}{C(A - BF)^{-1}B} \end{aligned}$$

Obsérvese que, una vez estabilizado asintóticamente el sistema con el feedback de estados F , K es exactamente el inverso de la ganancia de frecuencia cero del sistema en lazo cerrado y también el inverso de la respuesta de estado estacionario a un salto unidad. En consecuencia, usando F , K y v se puede controlar la dinámica del sistema en lazo cerrado para alcanzar el comportamiento deseado. El Ejemplo 6.4 de [1] es una buena muestra de como utilizar los resultados obtenidos.

Como ya se ha anunciado, nuestro último objetivo en esta sección es probar que controlabilidad equivale a asignabilidad en el caso monovariable ($m = 1$). Es decir,

Teorema 6.32 *Consideremos el sistema (6.38) con $m = 1$. Este sistema es controlable si y sólo si para cualquier polinomio de grado n*

$$p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1s + p_0, \quad (6.44)$$

existe una matriz $f \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que el polinomio característico de $A - bf^T$ es $p(s)$.

Demostración.- Supongamos primero que el sistema (A, b) no es controlable. Por el Teorema de Descomposición de Kalman (Teorema 6.19) existe una matriz invertible $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\widehat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

donde $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ y $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ siendo $r = \text{rang } \mathcal{C}(A, b)$.

Sea $p(s)$ cualquier polinomio mónico (i.e., con coeficiente principal 1) de grado n cuyo conjunto de raíces es disjunto con $\Lambda(A_3)$. Y sea $f \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ cualquier matriz. Pongamos $\widehat{f}^T = f^T T$ y observemos que

$$T^{-1}(A - bf^T)T = \widehat{A} - \widehat{b}\widehat{f}^T = \begin{bmatrix} A_1 - b_1 f_1^T & A_2 - b_1 f_2^T \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

donde f_1 y f_2 son las submatrices de \widehat{f} formadas por los r primeros elementos de \widehat{f} y los últimos $n - r$ elementos de \widehat{f} , respectivamente. Como $A - bf^T$ y $\widehat{A} - \widehat{b}\widehat{f}^T$ son semejantes, tienen el mismo polinomio característico. Ahora bien, $p(s)$ no puede ser el polinomio característico de $\widehat{A} - \widehat{b}\widehat{f}^T$ porque los valores propios de A_3 siempre son raíces de éste. En consecuencia $p(s)$ no es el polinomio característico de $A - bf^T$ cualquiera que sea f . Esto demuestra la parte “sólo si” del teorema.

Recíprocamente, supongamos ahora que (A, b) es controlable y sea $p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$ un polinomio mónico de grado n . Como (A, b) es controlable, la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C}(A, b) = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

tiene rango n y es, por tanto, invertible. Sea $S = \mathcal{C}(A, b)^{-1}$ y denotemos con s^T su última fila. Con este vector fila construimos la matriz

$$T = \begin{bmatrix} s^T \\ s^T A \\ \vdots \\ s^T A^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Obsérvese que por ser s^T la última fila de $\mathcal{C}(A, b)^{-1}$ y $\mathcal{C}(A, b)^{-1}\mathcal{C}(A, b) = I_n$ tenemos que

$$\begin{cases} s^T A^k b = 0 & k = 0, 1, \dots, n-2 \\ s^T A^{n-1} b = 1. \end{cases} \quad (6.46)$$

Por lo tanto

$$T\mathcal{C}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \star & \star \end{bmatrix}$$

donde \star representa elementos indeterminados. Así pues, T es una matriz invertible. Además, por el Teorema de Hamilton-Cayley se tiene que si

$$p_A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

es el polinomio característico de A entonces $A^n = -a_0I_n - a_1A - \dots - a_{n-1}A^{n-1}$. Por lo tanto

$$TA = \begin{bmatrix} s^T A \\ s^T A^2 \\ \vdots \\ s^T A^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^T \\ s^T A \\ \vdots \\ s^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

A la matriz

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

se le llama *matriz compañera* de $p_A(s)$ y (6.47) muestra que $TAT^{-1} = A_c$ siendo T la matriz de (6.45). Más aún, de (6.46) se tiene

$$b_c = Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente (A, b) y (A_c, b_c) son sistemas semejantes. De hecho, se puede ver que (A_c, b_c) es una forma canónica para la semejanza de sistemas controlables cuando $m = 1$. Se dice que (A_c, b_c) es un sistema en forma canónica de controlabilidad. Para el sistema (A_c, b_c) es muy fácil encontrar un vector $f_c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que $A_c - b_c f_c^T$ tiene el polinomio $p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1s + p_0$ como polinomio característico. En efecto, basta tomar

$$f_c^T = [p_0 - a_0 \quad p_1 - a_1 \quad \cdots \quad p_{n-1} - a_{n-1}].$$

Con este vector tenemos:

$$A_c - b_c f_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

Definiendo

$$f^T = f_c^T T = [p_0 - a_0 \quad p_1 - a_1 \quad \cdots \quad p_{n-1} - a_{n-1}] T \quad (6.48)$$

se obtiene

$$A_c - b_c f_c^T = T(A - bf^T)T^{-1},$$

lo que demuestra que $A - bf^T$ es semejante a la matriz compañera del polinomio $p(s)$. Es decir, $p(s)$ es el polinomio característico de $A - bf^T$ tal y como se quería demostrar. ■

La segunda parte de la demostración del Teorema 6.32 proporciona un método para calcular el vector de *feedback* f con el que $A - bf^T$ tiene el polinomio que se desee como polinomio característico.

Procedimiento para calcular la matriz de *feedback*

Dado el sistema controlable (A, b) y el polinomio $p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1s + p_0$:

1. Fórmese la matriz de controlabilidad del sistema $\mathcal{C}(A, b)$.
2. Calcúlese su inversa $\mathcal{C}(A, b)^{-1}$.
3. Extraíga la última fila s^T de $\mathcal{C}(A, b)^{-1}$.
4. Fórmese la matriz T de (6.45).
5. Calcúlese el polinomio característico de A : $p_a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ (por ejemplo, mediante la fórmula TAT^{-1} si T está bien condicionada).
6. La matriz de *feedback* requerida es (véase (6.48)):

$$f^T = [p_0 - a_0 \quad p_1 - a_1 \quad \dots \quad p_{n-1} - a_{n-1}] T.$$

Para sistemas con múltiples entradas el Teorema 6.32 sigue siendo válido: El sistema (6.38) es controlable si y sólo si para cualquier polinomio mónico de grado n existe una matriz $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que el polinomio característico de $A - BF$ es $p(s)$. La demostración precisa de algunos resultados técnicos que alargarían mucho esta exposición.

El Teorema 6.32 establece que si el sistema no es controlable entonces no se puede asignar cualquier polinomio de grado n como polinomio característico para los sistemas en lazo cerrado. Una pregunta natural es la de saber cuánta libertad se tiene en la asignación; es decir, qué polinomios se pueden asignar y cuáles no. La respuesta es una consecuencia inmediata del Teorema 6.32 y el Teorema de Descomposición de Kalman (Teorema 6.19). Recordemos que este teorema establece que si el sistema (A, B) no es controlable entonces es semejante a un sistema de la forma

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

donde A_3 representa la parte incontrolable del sistema y (A_1, B_1) es controlable.

Corolario 6.33 *Dado el sistema (6.38) que puede ser no controlable, sea $p(s)$ un polinomio mónico de grado n y $q(s)$ el polinomio característico de la parte incontrolable del sistema. Entonces existe una matriz de feedback $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A - BF$ tiene $p(s)$ como polinomio característico si y sólo si $q(s)$ divide a $p(s)$.*

Demostración.- Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces si escribimos $F = [F_1 \quad F_2]$ con r el tamaño de A_1 :

$$A_f = A - BF = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 F_1 & A_2 - B_1 F_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, existe F tal que $A - BF$ tiene $p(s)$ como polinomio característico si y sólo si $p(s)$ es el polinomio característico de A_f . Pero el polinomio característico de esta matriz es el producto de los polinomios característicos de $A_1 - B_1 F_1$ y A_3 . En definitiva, $p(s)$ es el polinomio característico de $A - BF$ si y sólo si $q(s)$ divide a $p(s)$. ■

Definición 6.34 *El sistema (6.38) se dice estabilizable por feedback de estados si existe una matriz $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que la matriz de estados del sistema en lazo cerrado $A - BF$ es asintóticamente estable.*

Del Teorema 6.32 se deduce directamente que si el sistema es controlable entonces es estabilizable por *feedback* de estados. En efecto, se pueden escoger n números complejos con parte real negativa (conjugados a pares) y formar un polinomio mónico real de grado n que los tenga como raíces. Para este polinomio existe F tal que $A - BF$ tiene dicho polinomio como polinomio característico. El sistema en lazo cerrado es, por tanto, asintóticamente estable.

La demostración del siguiente corolario es consecuencia del Corolario 6.33

Corolario 6.35 *El sistema (6.38) es estabilizable por feedback de estados si y sólo si los valores propios de la parte incontrolable están en el semiplano $\Re s < 0$.*