

Métodos Numéricos con Matlab

Luis Díaz Basurco
Roger Mestas Chávez
Ricardo Hanco Ancori

20 de agosto de 2015

Índice general

1. Introducción al Matlab	7
1.1. Interfaz de Matlab	7
1.2. Operadores básicos	8
1.3. Funciones elementales en Matlab	9
1.4. Ayuda en línea	11
1.5. Vectores y matrices	11
1.6. Datos booleanos, operadores lógicos y relaciones	14
1.7. Constantes numéricas predefinidas:	14
1.8. Formatos de números	15
1.9. Gráfico de funciones básicas	15
1.10. Problemas propuestos	19
2. Programación en Matlab	25
2.1. Programación estructurada en Matlab	26
2.2. Estructura Secuencial	27
2.3. Estructura selectiva	27
2.4. Estructura Repetitiva o Iterativa	30
2.4.1. Bucle for	30
2.4.2. Bucle while	32
2.5. Funciones definidas por el usuario y archivos script	33
2.6. Problemas propuestos	43
3. Ecuaciones no lineales	57
3.1. Método de Bisección	58
3.2. Método de Newton	60
3.3. Problemas propuestos	68
4. Álgebra de matrices	79
4.1. Ecuaciones algebraicas con matrices	79
4.2. Sistemas de ecuaciones	82
4.3. Problemas propuestos	82

5. Interpolación polinómica	93
5.1. Polinomios	93
5.2. Polinomios de interpolación de Lagrange	100
5.3. Polinomio de interpolación de Newton	104
5.4. Spline	108
5.5. Problemas propuestos	110
 6. Integración numérica	 119
6.1. Método del trapecio	119
6.2. Método de Romberg	121
6.3. Problemas propuestos	125
 7. Ecuaciones diferenciales numéricas	 131
7.1. Métodos de Taylor	133
7.2. Metodología de trabajo para obtener soluciones aproximadas . .	134
7.3. Método de Euler	134
7.4. Método de Runge Kutta	136
7.5. Problemas propuestos	139

Prólogo

Los estudiantes de ciencias e ingeniería frecuentemente se enfrentan con la necesidad de resolver problemas matemáticos que no tienen solución analítica, por lo que requieren de la elección de métodos numéricos adecuados que llevan al diseño de algoritmos para la obtención de soluciones aproximadas. Evidentemente, por la complejidad de los cálculos que se genera, se hace indispensable de la herramienta computacional. El objetivo de este libro es proporcionar las técnicas básicas para resolver este tipo de problemas de cálculo numérico, acompañado del Matlab, software matemático de amplio uso en universidades y centros de investigación, que inicialmente se diseñó para resolver problemas con matrices y en la actualidad conserva a la matriz como estructura básica de datos. El texto se inicia con un rápido recorrido del uso del Matlab para realizar cálculos sencillos, luego se dan los fundamentos de la programación estructurada con la sintaxis propia del Matlab. A continuación se desarrollan los clásicos problemas numéricos: la solución de ecuaciones no lineales, la solución de sistemas de ecuaciones lineales aplicando el álgebra matricial, la interpolación polinómica, la integración numérica y la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Acompaña a cada técnica numérica, un breve fundamento teórico, acompañado del algoritmo para su implementación en Matlab, luego se desarrollan numerosos ejemplos que muestran el uso de estos algoritmos en la resolución de problemas matemáticos. Al final de cada tópico, se presentan ejercicios que tienen la finalidad de reforzar los conocimientos para dominar las técnicas numéricas, y a su vez, desarrollar en el estudiante, el pensamiento algorítmico, de mucha utilidad para su ejercicio profesional.

se encuentra la ventana de directorio (Current Folder) en ella se proporciona la información para saber el area de directorio sobre el que se está trabajando.

1.2. Operadores básicos

Los signos de operaciones matemáticas elementales en **Matlab** son las siguientes:

\wedge	potencia
$*$	producto
$/$	división
$+$	suma
$-$	resta

Por ejemplo:

```
>>2+5
ans = 7
>>2*5
ans = 10
>>12/3
ans= 4
>>3^2
ans = 9
```

El resultado de un cálculo se asigna a una variable que por defecto es ans (answer). Sin embargo es posible asignar estos resultados a una variable, por ejemplo:

```
>>x=2+4
x = 6
```

Para conocer el valor de una variable, basta escribir su nombre:

```
>>x
x = 6
```

Añadimos punto y coma (;) al final de la instrucción, para que la máquina no publique la respuesta, no obstante el resultado queda almacenado en la memoria.

```
>>z=5*3;
```

Si se quiere ver el resultado, basta llamar a la variable:

```
>>z
z =15
```


El orden de jerarquía de las operaciones en una línea es el siguiente: primero, la potencia y la raíz; luego, las multiplicaciones y divisiones; y finalmente, las sumas y las restas. Las operaciones que tienen la misma jerarquía se ejecutan de izquierda a derecha. Si se quiere cambiar el orden de las operaciones, se deben utilizar paréntesis. Por ejemplo

```
» 4/2+1  
ans = 3
```

(Primero se calcula $4/2$ y luego se suma 1).

```
» 4/(2+1)  
ans = 1.3333
```

Primero se calcula el paréntesis $(2+1)$ y luego se realiza la división.

Observación:

- El separador de decimales es el punto `..`
- **Matlab** distingue mayúsculas y minúsculas, por ejemplo **X** y **x** son variables diferentes.

Observación 1. Para limpiar el contenido de la ventana de comandos, se usa la orden **clc**. Con la teclas de dirección podemos recuperar las órdenes procesadas anteriormente.

Observación 2. Se puede guardar en un archivo el contenido del espacio de trabajo. Para guardar todo el contenido del espacio de trabajo utilizamos el comando **save**. Por ejemplo, **save sesion1** guarda todo el contenido del espacio de trabajo en el archivo **sesion1.mat** (**Matlab** añade automáticamente la extensión **mat**, por lo que los archivos así generados se conocen como archivos **mat**). Para abrir la información almacenada en un archivo **mat** se usa el comando **load**. Por ejemplo, **load sesion1** carga el contenido de **sesion1.mat** en el espacio de trabajo.

1.3. Funciones elementales en Matlab

En **Matlab** las funciones matemáticas se usan introduciendo el argumento entre paréntesis después del nombre de la función, sin dejar espacios. Por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 4 debemos escribir:

```
» x=sqrt(4)  
x = 2
```

La siguiente tabla muestra algunas funciones elementales de uso frecuente:

<code>sin(x)</code>	seno de ángulo en radianes
<code>sind(x)</code>	seno de ángulo en grados
<code>cos(x)</code>	coseno de ángulo en radianes
<code>cosd(x)</code>	coseno de ángulo en grados
<code>tan(x)</code>	tangente de ángulo en grados
<code>asin(x)</code>	arco seno
<code>acos(x)</code>	arco coseno (devuelve un ángulo en el intervalo $[0, \pi]$)
<code>atan(x)</code>	arco tangente (devuelve un ángulo en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$)
<code>log(x)</code>	logaritmo natural
<code>log10(x)</code>	logaritmo decimal
<code>exp(x)</code>	función exponencial
<code>sqrt(x)</code>	raíz cuadrada
<code>rem(x,y)</code>	resto de la división entera de x entre y, no necesariamente enteros
<code>round(x)</code>	redondeo hacia el entero más próximo
<code>fix(x)</code>	redondea hacia el entero más próximo a 0
<code>floor(x)</code>	valor entero más próximo hacia $-\infty$
<code>ceil(x)</code>	valor entero más próximo hacia $+\infty$
<code>abs(x)</code>	valor absoluto

Ejemplo 1. Encontrar las funciones en **Matlab** que permitan hallar:

- Máximo entero de un número real.
- Redondear un número real al entero más próximo.

Solución.

- Notemos que, **floor(x)** redondea hacia menos infinito, es decir, al mayor entero menor o igual que x, este sería el equivalente de la función máximo entero. Así:

```
>> floor(2.34)
ans = 2
>> floor(-3.45)
ans = -4
```

- Observemos que, **round(x)** redondea el número x al número entero más cercano. Luego,

```
>> round(3.5)
ans = 4
>> round(2.2)
ans = 2
```

1.4. Ayuda en línea

Se puede obtener información sobre una determinada función escribiendo en la línea de comandos la expresión **help** seguido del nombre de la función. Por ejemplo:

```
» help round
```

```
ROUND Round towards nearest integer.
```

```
ROUND(X) rounds the elements of X to the nearest integers.
```

```
See also FLOOR, CEIL, FIX.
```

Si sólo se escribe **help**, se obtiene un índice de temas. Se puede obtenerse información sobre uno de los temas de esa lista así, **help elfun** proporciona información sobre las funciones matemáticas elementales.

1.5. Vectores y matrices

Un vector se crea introduciendo los componentes, separados por comas o por espacios, entre corchetes:

```
» u=[2 1 -3]
```

```
u = 2.0000 1.0000 -3.0000
```

Para crear un vector columna, se separan los componentes con punto y coma:

```
» v=[2;1;1]
```

```
v =
```

```
2.0000
```

```
1.0000
```

```
1.0000
```

La operación transponer (cambiar filas por columnas) se designa por el apóstrofe:

```
» v'
```

```
ans = 2.0000 1.0000 1.0000
```

Las operaciones matemáticas elementales pueden aplicarse a los vectores:

```
» u*v
```

```
ans =
```

```
2.0000
```

```
» u+v'
```

```
ans =
```

```
4.0000 2.0000 -2.0000
```

Para crear un vector cuyas componentes consecutivas sean igualmente espaciadas se emplean los dos puntos:

```
» x=1:2:7
x =
    1    3    5    7
```

(Las componentes de x van desde 1 hasta 7 de 2 en 2).

A continuación, veremos el tratamiento de matrices con **Matlab**: como se ingresa una matriz, como se modifica y se accede a un elemento, el uso del comodín (:). Así, para introducir matrices, se separa cada fila con un punto y coma.

```
» M = [1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 9]
M =
    1    2    3
    4    5    6
    7    8    9
```

Para acceder a la entrada ubicada en la fila 3 y columna 2 de la matriz M se hace así:

```
» M(3,2)
ans =
    8
```

Para mostrar una determinada fila o columna se emplean los dos puntos:

```
» v1=M(:,3)
v1 =
    3
    6
    9
```

(v1 es la tercera columna de M).

Con matrices también funcionan las operaciones matemáticas elementales:

```
» M^2
ans =
    30    36    42
    66    81    96
   102   126   150
```

Si se quiere operar en los elementos de la matriz, uno por uno, se pone un punto antes del operador. Si se quiere elevar al cuadrado cada uno de los elementos de M, entonces

```
» M.^2
ans =
```

```

1  4  9
16 25 36
49 64 81

```

Algunas funciones definidas para matrices:

det(M)	Halla el determinante de la matriz M
inv(M)	Halla la matriz inversa de M
M'	Halla la transpuesta de M

Ejemplo 2. Escribir los comandos en **Matlab** que permitan calcular el valor de W para los siguientes valores de X , Y , Z donde Z es la medida en grados sexagesimales de un ángulo; luego mostrar los resultados

X	Y	Z
$\sqrt{3}$	2.24	30°
e^2	3.56	45°
π	-4.67	60°

$$W = \frac{3 - Z \cos(Z)}{\ln^2(X^2 + Y)}.$$

Solución.

```

>> x=[sqrt(3) exp(2) pi];
>> y=[2.24 3.56 -4.67];
>> z=[30 45 60]*pi/180;
>> w=(3-z.*cos(z))./log(x.^2+y).^2
w =
    0.92824572359095    0.14807635370667    0.91117042530837

```

Ejemplo 3. Dado los vectores

$$x = \left[\frac{7}{13}, \frac{17}{23}, \frac{43}{7}, \frac{11}{5} \right], y = \left[\frac{29}{5}, \frac{51}{3}, \frac{7}{19}, \frac{67}{17} \right]$$

- Escribir los comandos **Matlab** para hallar el producto punto $z = x \cdot y$.
- Hallar la respuesta en quebrados.

Solución.

```

>> format rational
>> x=[7/13 17/23 43/7 11/5];
>> y=[29/5 51/3 7/19 67/17];
>> dot(x,y)
ans =    3381/127

```

O también

```
>>x.*y
ans = 203/65 289/23 43/19 737/85
>> sum(x.*y)
ans = 3381/127
```

1.6. Datos booleanos, operadores lógicos y relaciones

Cualquier dato diferente de cero se considera verdadero (True), el número cero se considera correcto falso (False). Los operadores entre datos booleanos son:

Operador	Símbolo	Efecto
Conjunción (AND)	&	P & Q es verdadero solo si ambos son verdaderos
Disyunción (OR)		P Q es falso si ambos son falsos
Negación (NOT)	~	~ P es verdadero si P es falso y viceversa.

También se puede operar vectores booleanos así:

```
>>[ 1 0 1 1] & [0 1 1 0]
ans =
0 0 1 0
```

Las relaciones en **Matlab** son:

Relación	Símbolo	Efecto
Igualdad	==	X==Y es verdadero si ambos son iguales
Diferente	~=	X ~=Y verdadero si ambos son diferentes
Mayor o igual	>=	X >= Y verdadero si X es mayor o igual a Y
Mayor	>	X > Y verdadero si X es mayor a Y
Menor o igual	<=	X <= Y verdadero si X es menor o igual a Y
Menor	<	X < Y verdadero si X es menor a Y

Permiten la comparación de escalares (o de matrices elemento a elemento). Devuelve 1, cuando la comparación es verdadera, en caso contrario devuelve 0. Si los datos a comparar son matrices, la comparación se hace elemento a elemento, devolviendo una matriz.

No se debe dejar espacios entre los operadores formados por dos símbolos.

1.7. Constantes numéricas predefinidas:

i, j	unidad imaginaria : $2+3i -1-2j$
pi	número π
inf	“Infinito”, número mayor que el más grande que se puede almacenar. Se produce con operaciones como $x/0$, con $x \neq 0$
NaN	Not a Number” : magnitud no numérica resultado de cálculos indefinidos. Se produce con cálculos del tipo $0/0$ o Inf/Inf . $(0+2i)/0$ da como resultado $\text{NaN} + \text{Inf } i$

1.8. Formatos de números

Para visualizar resultados numéricos en **Matlab** se siguen algunas reglas. Un número entero se visualiza como tal, sin decimales; un número real no entero se visualiza con 4 decimales salvo que los dígitos significativos estuvieran fuera de este rango, en tal caso se visualiza en notación científica.

Podemos cambiar el formato de presentación de números con el menú *File/-Preferences/General/Numerical Format*. Otra forma consiste en usar una de las órdenes de la siguiente tabla.

Orden de Matlab	Descripción	Ejemplo
format long	14 decimales	35.83333333333334
format short	4 decimales	35.8333
format short e	5 dígitos más exponente	3.5833e+01
format long e	16 dígitos más exponente	3.583333333333334e+01
format hex	hexadecimal	4041eaaaaaaaaaab
format bank	2 decimales	+
format rat	aproximación racional	215/6

Observación 3. El cambio de formato cambia la visualización, pero internamente no cambia la representación.

1.9. Gráfico de funciones básicas

Para graficar funciones de una variable, primero se debe crear un vector que almacena la mayor cantidad posible de puntos del intervalo sobre el cual va a

graficarse la función. Por ejemplo, si queremos dibujar la gráfica de la función $y = \sin(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$:

Primero creamos el vector x que contiene puntos, igualmente espaciados, del intervalo $[0, 2\pi]$:

```
>>x=0:pi/100:2*pi;
```

Con esta orden se creó el vector x con 200 valores entre 0 y 2π . Otra forma de conseguir el mismo resultado será utilizando el comando

```
>>x=linspace(0,2*pi,200);
```

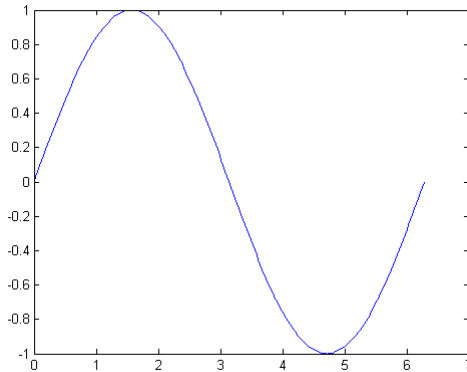
luego, almacenamos en el vector y las imágenes de los componentes del vector x :

```
>> y = sin(x);
```

Finalmente, para graficar escribimos la siguiente orden:

```
>>plot(x,y)
```

para obtener la siguiente gráfica:



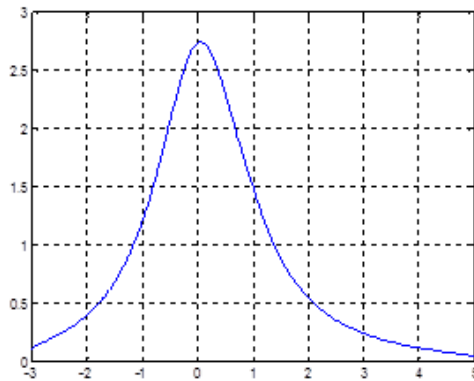
Ejemplo 4. Escribir los comandos para graficar la función en su dominio

$$y = f(x) = \frac{1 + \sqrt{4 - |x - 1|}}{x^2 + 1}.$$

Solución.

El dominio de f : $|x - 1| \leq 4$ si y sólo si $-3 \leq x \leq 5$.


```
>> x=-3:0.01:5;
>> y=(1+sqrt(4-abs(x-1)))/(x.^2+1);
>> plot(x,y),grid
```



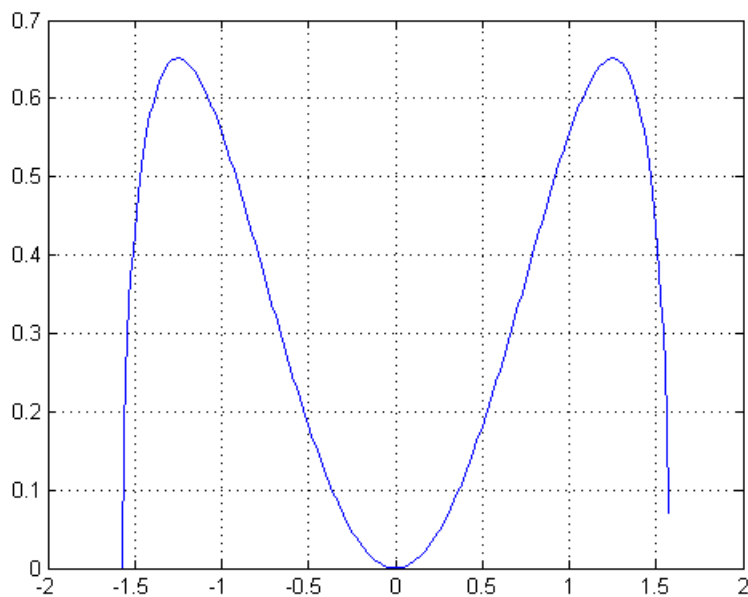
Ejemplo 5. Escribir los comandos **Matlab** que permitan graficar la función y haga un bosquejo de su gráfica:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4x^2}}{\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Solución.

En primer lugar, resolveremos la inecuación $\pi^2 - 4x^2 \geq 0$ para determinar el dominio de la función pedida. Luego, los puntos de referencia son: $x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2}$, por tanto $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

```
>> x=-pi/2:0.01:pi/2;
>> y=sqrt(pi^2-4*x.^2)./csc(x/2).^2;
>> plot(x,y),grid
```

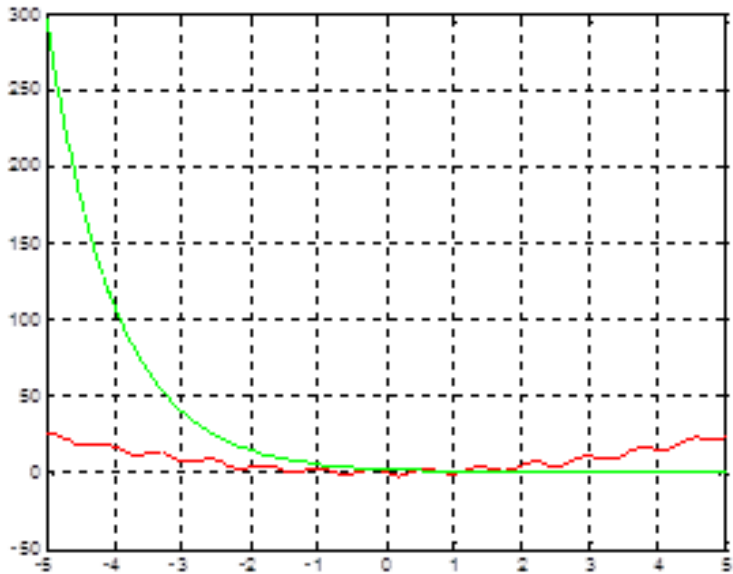


Ejemplo 6. Trazar la gráfica de ambas funciones

$$f(x) = x^2 - 2 \sin(8x), g(x) = 2e^{-x}.$$

Solución.

```
>> x = -5:0.001:5;  
>> y1 = x.^2 - 2 * sin(8 * x);  
>> y2 = 2 * exp(-x);  
>> plot(x, y1, 'r', x, y2, 'g'), grid on
```



1.10. Problemas propuestos

1. Con la orden **help** del **Matlab** investigar el uso de las funciones **floor** y **ceil**, explicar qué es lo que hacen y de un ejemplo para cada uno. ¿Qué función matemática se comporta de esa manera, descríbala mostrando su regla de correspondencia? Explicar.
2. De un ejemplo de una función de una variable de uso en física, química o ingeniería (de una aceptable complejidad) y luego escriba las órdenes en **Matlab** que permitan trazar su gráfica. Describir la relación de las variables que intervienen e interpretar la gráfica.
3. Con ayuda de la orden **help** del **Matlab** investigar el uso de la función **feval**, explicar qué es lo que hace y de un ejemplo de su uso.
4. Utilizar la ayuda del **Matlab** para determinar el valor de:
rem(17,7)
explicar con sus propias palabras lo que hace esta operación.

5. ¿Que retorna las siguientes operaciones?

```
>>[0 1 0 -1]|[1 0 2 0]
>>[~2 0 -1]&[0 ~1 ~0]
```

6. ¿Que retorna las siguientes operaciones?

```
>>[~0 1 ~1 0]|[1 0 2 0]
>> [2 0 ~(~1)]&[~0 1 ~0]
```

7. Mostrar el resultado de w si:

```
>>x=[-1 2 0 1];
>>y=[3 -1 1 4];
>>z=[0 2 0 0];
>>w=(x > y)&(~ z)
```

8. Mostrar el resultado de w si:

```
>>x=[-1 2 0 1];
>>y=[3 -1 1 4];
>>z=[0 2 0 0];
>>w=(x<=y)|(~ z)
```

9. Si $x = \frac{\pi}{4}$, $y = e$; $z = 2.31$, hallar:

$$w = \frac{\ln^2(x) + \sqrt{1+y^3}}{1 - \sin(x)} + yz.$$

10. Dada la expresión:

$$w = \frac{\left(\frac{x^3}{y+z^2} - \ln^2(xy)\right)^{2/3}}{x + \frac{\sqrt{x+z}}{x+y}}$$

a) Escribir los comandos para que hallar w , si $x = \pi$, $y = e$; $z = \frac{4}{7}$.

b) Encontrar el valor de w .

11. Si la medida de un ángulo x en grados sexagesimales es 30° , hallar el valor de la expresión:

$$w = x \cos^2(1.23 + x).$$

12. Dada la expresión:

$$w = \frac{\left(\frac{y^3}{y+z^2} - \ln^2(y)\right)^{2/3}}{x \operatorname{sen}(x) + \frac{\sqrt{1+z}}{z+y}}$$

- a) Escribir todos los comandos **Matlab** necesarios para calcular W si $x = 30^\circ$, $y = e$, $z = 4/7$ (x está en grados sexagesimales, e es el número de Euler o base del logaritmo natural).
- b) Mostrar el resultado.

13. Escribir los comandos en **Matlab** que permitan calcular el valor de W para los valores de x iguales a 30° , 45° y 60° medidos en grados sexagesimales

$$W = \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{(x-1)^2 + 1} + \cos^2(x).$$

14. Escribir los comandos en **Matlab** que permitan calcular el valor de W para los valores de x iguales a 30° , 45° y 60° medidos en grados sexagesimales

$$W = \frac{x + \cos(x)}{x^2 + 1} + \ln^2(x).$$

15. Escribir los comandos que permitan calcular la expresión

$$W = \frac{x + \cos^2(x)}{x^2 + 1} - e^{-x}.$$

para valores de x iguales a 30° , 45° , 60° y 90° . Mostrar los resultados.

16. Si $x = [2 \quad 3 \quad -1]$, $y = [4 \quad -1 \quad 5]$; $z = [2 \quad 4 \quad 6]$, calcular los valores de

$$w = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \ln^2(z).$$

17. Escribir los comandos en **Matlab** que permitan calcular el valor de W para los siguientes valores de X , Y , Z donde Z es la medida en grados sexagesimales de un ángulo; luego mostrar los resultados.

X	Y	Z
2.24	$\sqrt{3}$	30°
3.56	e^2	45°
-4.67	π	60°

$$W = \frac{Z \cos(Z)}{\ln^2(X^2 + Y)}.$$

18. Escribir los comandos en **Matlab** que permitan calcular el valor de W para los siguientes valores de X, Y, Z donde Z es la medida en grados sexagesimales de un ángulo; luego mostrar los resultados

X	Y	Z
$\sqrt{3}$	2.24	30°
e^2	3.56	45°
π	-4.67	60°

$$W = \frac{Z \cos(Z)}{\ln^2(X^2 + Y)}.$$

19. Escribir los comandos en **Matlab** que permitan calcular el valor de W para los siguientes valores de X, Y, Z donde Z es la medida en grados sexagesimales de un ángulo; luego mostrar los resultados.

X	Y	Z
2.24	$\sqrt{2}$	30°
3.56	e	45°
-4.67	π	60°

$$W = \frac{2 - Z \sin(Z)}{\ln^2(Y^2 + X)}.$$

20. Escribir los comandos que permitan graficar la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el dominio adecuado, hacer un bosquejo de su gráfica.
21. Escribir los comandos que permitan graficar la función $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ en el dominio adecuado, hacer un bosquejo de su gráfica.
22. Escribir los comandos necesarios para graficar la función $y = \sqrt{4 - |x|}$.
23. Escribir los comandos **Matlab** necesarios para graficar la función

$$f(x) = \sqrt{9 - |x|}$$

dentro de su dominio, mostrar la gráfica resultante.

24. Graficar la función $f(x) = \frac{\ln(4-|x|)}{x-4}$ en un intervalo adecuado.
25. Dada la función $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}$.
- a) Determinar su dominio.
 - b) Escribir los comandos **Matlab** que permitan graficarlo.
26. Dada la función $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2+1}$.
- a) Determinar su dominio.
 - b) Escribir los comandos **Matlab** que permitan graficarlo.
27. Dada la función $f(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x-3}$.
- a) Determinar su dominio.
 - b) Escribir los comandos **Matlab** que permitan graficarlo.
28. Dada la función $f(x) = \frac{3-x^2}{\sqrt{9-x^2}}$.
- a) Determinar el dominio de f .
 - b) Escribir los comandos en **Matlab** para graficar dicha función en su dominio.
29. Graficar en **Matlab** la función $f(x) = \frac{2x+\sqrt{1-|x|}}{1+x^2}$ usar un intervalo conveniente.
30. Dada la función $f(x) = \frac{x+\sqrt{5-|x|}}{1+x^2}$.
- a) Determinar el dominio de f .
 - b) Escribir los comandos en **Matlab** para graficar dicha función en su dominio.
31. Dada la función $f(x) = \frac{\sqrt{2-|x-1|}}{x-3}$.
- a) Determinar su dominio.
 - b) Escribir los comandos en **Matlab** que permitan graficarlo.
32. Escribir los comandos **Matlab** que permitan graficar la función y haga un bosquejo de su gráfica:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - 9x^2}}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}.$$

33. Escribir los comandos **Matlab** que permitan graficar la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{x - \pi}.$$

34. Escribir los comandos **Matlab** que permitan graficar la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4x^2}}{x + \pi/2}.$$

35. Escribir los comandos en **Matlab** para graficar la función f en el intervalo $[-5, 5]$

$$f(x) = \begin{cases} 3 + xe^{-x}, & \text{si } x < 2 \\ 2, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

36. Escribir los comandos en **Matlab** para graficar la función f en el intervalo $[-4, 4]$

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x < 2 \\ 2 - (x - 1)^2, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

37. Graficar simultáneamente las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad g(x) = x(x^2 + 1)$$

usar un intervalo conveniente.

2 Programación en Matlab

La programación en **Matlab** se realiza sobre archivos M o M-Files. Se denominan así debido a su extensión “.m”. Estos archivos son creados y modificados por cualquier editor de textos. El **Matlab** incluye un editor de archivos M, diseñado especialmente para este propósito. Los archivos de programación puede ser de dos tipos:

1. Archivo de comandos
2. Funciones

Archivo de Comandos: Estos archivos M contienen instrucciones del **Matlab**, y se guardan con un nombre en algún directorio dentro del path de búsqueda del **Matlab**, por defecto esta carpeta de trabajo se denomina work y se encuentra dentro de la carpeta de instalación del **Matlab**. Para llamar a un archivo M editado de esta manera, basta escribir su nombre y todas las instrucciones que hayan sido escritas en ella serán ejecutadas. Es importante señalar que todas las variables que hayan sido creadas dentro de este archivo, luego de la ejecución, pasarán a formar parte de nuestro espacio de trabajo por lo que hay que tratar de que las variables del espacio de trabajo no coincidan con las variables definidas en estos archivos M que se han de ejecutar. Por ejemplo, para escribir el clásico programa “Hola Mundo”. Abrimos el editor que incluye el **Matlab** y escribimos la siguiente línea:

```
disp (" Hola Mundo ")
```

Guardamos el documento como **hola.m** (con su extensión **.m**). Ahora para ejecutarlo, desde la ventana de comandos del **Matlab** escribimos el nombre del archivo que queremos ejecutar sin la extensión **.m** así:

```
>> hola  
Hola Mundo
```

Funciones: Una función se edita en forma similar a un archivo M de comandos, pero su propósito es definir funciones al igual que las funciones en matemática. Para que un archivo M sea considerado como función, la primera línea del archivo debe tener la siguiente estructura:

```
function [argumentos de salida]=nombre(argumentos de entrada)
```

Nombre corresponde al nombre de la función. Argumentos de salida representa una lista de variables de retorno de la función. Los valores devueltos por la función invocada, serán los valores que se encuentran en los argumentos de salida, variables en el momento que termina la ejecución de la función. Tiene el mismo fin de las variables dependientes en una función matemática. Argumentos de entrada, son los parámetros que recibe la función para poder realizar su proceso; durante la ejecución estos parámetros son recibidos por valor, es decir se hacen duplicados de los parámetros y en estos es donde se realizan las modificaciones. Actúan de forma similar a las variables independientes de una función matemática. A diferencia de los archivos **M** de comandos, todas las variables definidas dentro de una función son locales, su duración es sólo mientras se ejecuta la función y por tanto no forman parte de nuestro espacio de trabajo (workspace). Es importante señalar que en **Matlab**, el nombre de una función debe ser el mismo que el nombre del archivo **M** con el cual se guarda.

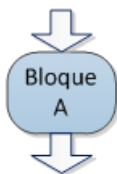
Dentro del cuerpo de la función uno puede salir de la función mediante el comando **return**. Este comando detiene la ejecución del programa y devuelve el valor actual de la variable de salida.

2.1. Programación estructurada en Matlab

La programación en **Matlab** está diseñada para realizarse en forma estructurada. La programación estructurada es una técnica de programación orientada a elaborar programas sencillos y fáciles de entender, haciendo uso de subrutinas y de tres estructuras básicas de control que son: estructura secuencial, estructura selectiva y la estructura repetitiva (ó iterativa).

Los programas escritos con estos principios, tienen no solo una estructura fácil de leer, sino que además tienen una excelente presentación, que permite comprender el código con mayor facilidad.

Un principio básico de esta forma de programación es que cada estructura básica debe tener una única entrada y una única salida



2.2. Estructura Secuencial

Las instrucciones del programa se ejecutan una después de la otra, de acuerdo al orden en el que están escritos en el programa. Se representa gráficamente como una caja o bloque una después de otra, cada una con una sola entrada y una sola salida.



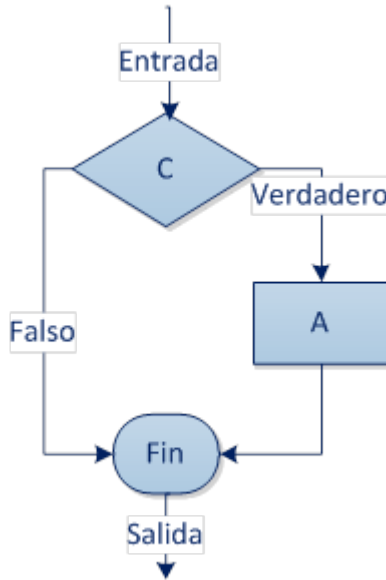
Las cajas o bloques A y B representan una simple instrucción o un módulo o programa completo.

2.3. Estructura selectiva

Esta estructura se caracteriza por la presencia de condiciones, que se evalúan mediante la sentencia if.

Bifurcación simple: Se evalúa una condición C y se ejecuta instrucción sólo si condición C es verdadera.

```
if (condición)
    Bloque A
end
```



En el diagrama de flujo anterior, C es una condición que se evalúa; A es la acción que se ejecuta cuando la evaluación de esta condición resulta verdadera. La estructura tiene una sola entrada y una sola salida. El bloque A puede ser cualquier estructura básica o conjunto de estructuras.

Bifurcación doble: Se evalúa una condición C, si es verdadera se ejecuta A y se es falso se ejecuta B.

```

if (condición)
    Bloque A
else
    Bloque B
end
  
```

Ejemplo 7. Escribir una función cuyo nombre sea impar que reciba un número entero a y retorne 1 si es impar o cero si no lo es. Probarlo con $a = 15$ y luego con $a = 86$.

Solución.

```

function y=impar(n)
y=1;
  
```

```

if rem(n,2)==0
y=0;
end.
>> impar(15)
ans =
    1
>> impar(86)
ans =
    0

```

Ejemplo 8. Escribir una función cuyo nombre sea f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ -1 + \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - (x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Probarla evaluando la expresión:

$$X = \frac{f(-\pi) + 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{f(\pi) + 1}$$

Solución.

```

function y=f(x)
if x<0
    y=x^2-1;
end
if x>=0 & x<=1
    y=-1+sqrt(x);
end
if x>1
    y=1-(x-2)^2;
end
>> X=(f(-pi)+2*f(sqrt(2)/2))/(f(pi)+1)
    X =12.2730

```

Ejemplo 9. Si

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x}+1, & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 5 - \frac{x^2}{8}, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Escribir la función y los comandos en **Matlab** que sirvan para calcular la siguiente expresión, mostrando el resultado con 8 decimales de precisión

$$X = \frac{f\left(\frac{-\pi}{2} + 1\right) + \pi f\left(\frac{e}{3}\right)}{f(\pi + 2)f(\pi - e)}.$$

Solución.

```
function y=f1(x)
if x<0
    y=abs(x+1);
end
if x>=0 & x<=4
    y=sqrt(x)+1;
end
if x>4
    y=5-x^2/8;
end
>> X=(f1(-pi/2+1)+pi*f1(exp(1)/3))/(f1(pi+2)*f1(pi-exp(1)))
X =      2.34444323
```

2.4. Estructura Repetitiva o Iterativa

Este tipo de estructura se caracteriza por la presencia de iteraciones o repetición de un conjunto de instrucciones. Básicamente se implementan mediante dos bucles: `for`, `while`.

En este tipo de estructuras, es necesario conocer unos conceptos adicionales:

Contador: Es una variable numérica de tipo entera (por lo general) que sirve para llevar una cuenta con incrementos o decrementos constantes.

Por ejemplo, $M = M + 1$.

Acumulador: Es una variable que sirve para guardar y acumular valores que pueden ser diferentes cada vez, es decir, es una variable en la cual se puede ir calculando una suma de los valores que toma otra variable dentro del algoritmo.

Por ejemplo, $A = A + V$.

2.4.1. Bucle `for`

Este bucle usa una variable llamada *contador*, la primera vez la variable contador toma un valor igual a *inicio* y ejecuta bloque **A** (ver figura 2.1), luego la variable contador se incrementa un valor igual a *paso*, para nuevamente ejecutar bloque **A**, así sucesivamente. Cada vez que el Bloque **A** se ejecuta, *contador* se

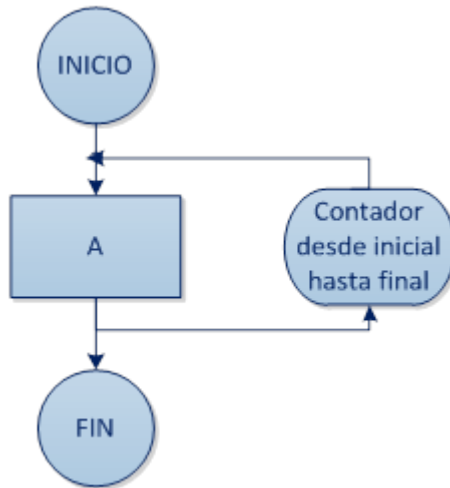


Figura 2.1: Bucle for

incrementa en un valor igual a *paso* (si se omite, se le asigna automáticamente el valor 1). Cuando contador llega al valor *final*, el ciclo repetitivo se acaba y el programa continúa con las sentencias que siguen a **end**.

```

for contador = inicio:paso:final
    Bloque A
end
  
```

Ejemplo 10. Escribir una función cuyo nombre sea *fac*, que reciba un entero no negativo n y calcule su factorial $n!$. Probar con $n = 5$ y $n = 0$.

Solución.

```

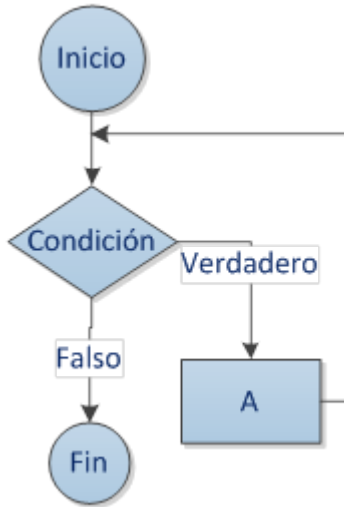
function y=fac(n)
    y=1;% y es acumulador
    for k=1:n
        y=y*k;
    end
>> fac(5)
ans = 120
>> fac(0)
ans = 1
  
```

2.4.2. Bucle while

Algunas veces, no se sabe de antemano cuántas veces habrá que ejecutar el bloque **A** (ver figura 2.1), ya que no se sabe a priori cuántas veces será necesario efectuar dichas órdenes. En ese caso es apropiado el empleo del bucle **while**.

El bucle **while**, se inicia y continúa mientras la condición se cumple (sea verdadera) y finaliza cuando la condición no se cumple (sea falsa). Se acostumbra colocar antes del ciclo la inialización de la variable de la condición, para que esta se cumpla al menos la primera vez.

```
while Condición
    Bloque
end
```



Este bucle ejecuta el bloque **A** mientras la expresión lógica *condición* sea verdadera. Tal como en el caso del bucle anterior **A** representa cualquier estructura básica o conjunto de estructuras.

Ejemplo 11. Escriba una función **numsumandos(tope)**, que retorne el máximo valor n de manera que la suma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ no supere el valor **tope**.

Solución.

```
function n=numsumandos( tope )
s=0;
n=0;
```



```

while s+(n+1)<=tope
    n=n+1;
    s=s+n;
end
>> numsumandos(30)
    ans = 7
>> numsumandos(100)
    ans = 13

```

2.5. Funciones definidas por el usuario y archivos script

Las funciones son módulos o partes en que se divide un programa, permiten que este sea más fácil de entender, ubicar rápidamente errores, evitar la redundancia del código, en fin, de facilitar al programador. Una función es un conjunto de instrucciones cuyo objetivo principal es retornar un valor (o varios valores) a partir de otro valor (o varios valores).

El nombre de la función se sugiere que se escoja de forma tal que sea significativa e indique lo que hace la función. La longitud del nombre es normalmente entre 9 y 20 caracteres, no debe contener espacios y tampoco puede empezar por un número, además tampoco puede ser el nombre de una variable declarada, ni de otra función ya creada o de una palabra reservada como **if**.

Un archivo con extensión *.m* puede ser un script o una función. Una función es un script que posee sus propias variables, es decir que no afectan o otras funciones o al script que usa la función. Además, el nombre del archivo debe ser el mismo de la función, solo que con extensión *.m*. También, el número; tipo y nombre de las variables de entrada y salida de la función, son controladas por el encabezado de la misma (la primera línea). El formato para escribir una función es:

```

function [s1,s2,...]=NombreFuncion(e1,e2,...)
órdenes

```

donde *s1, s2, ...* son los argumentos de salida y *e1,e2, ...* son los argumentos de entrada.

Ejemplo 12. Hacer un seguimiento paso a paso mostrando los pasos intermedios en la siguiente tabla, cuando se ejecuta la función **fib**(8).

Solucion:

```

function x=fib(n)

```

```

x(1)=1;
x(2)=1;
for k=3:n
    x(k)=x(k-1)+x(k-2);
end

```

n	k	$x(k-2)$	$x(k-1)$	$x(k)$

Solución.

n	k	$x(k-2)$	$x(k-1)$	$x(k)$
3	3	$x(1) = 1$	$x(2) = 1$	2
4	4	1	2	3
5	5	2	3	5
6	6	3	5	8
7	7	5	8	13
8	8	8	13	21

Observemos que la función anterior es la serie de Fibonacci.

Ejemplo 13. Haga un seguimiento paso a paso mostrando los pasos intermedios en la tabla que sigue, cuando se ejecuta la función **>> prob (13)**, qué hace?

```

function p = prob(n)
    p=0;
    k=2;
    while mod(n,k)~=0
        k=k+1;
    end
    if k==n
        p=1;
    end
end

```

n	k	$\text{mod}(n,k)$	p
13	2	1	0
13	3	1	0
13	4	1	0
13	5	3	0
13	6	1	0
13	7	6	0
13	8	5	0
13	9	4	0
13	10	3	0
13	11	2	0
13	12	1	0
13	13	0	1

Esta probando si un número es primo, probando con los divisores del número ingresado.

Ejemplo 14. Hacer un seguimiento paso a paso a la siguiente función, cuando se la llama con:

```
>> fun1(5, 0.000001)
```

Complete la tabla. (Use 14 decimales de precisión).

```
function X=fun1(a,e)
X0=a/2;
X=X0/2+a/(2*X0);
while abs(X-X0)>e
    X0=X;
    X=X0/2+a/(2*X0);
end
```

Solución.

x_0	x	$[\text{abs}(x - x_0)]$
2.50000000000000	2.25000000000000	0.25000000000000
2.25000000000000	2.36111111111111	0.01388888888889
2.23611111111111	2.23606797791580	$4.313319530746540e-005$
2.23606797791580	2.23606797749979	

Ejemplo 15. Hacer un seguimiento paso a paso a la siguiente función, cuando se la llama con:

```
>> bis(0,1,0.01)
```

Complete la tabla. (Use 7 decimales de precisión)

```
function r=bis(a,b,error)
while abs(b-a)/2>error
    m=(a+b)/2;
    if (a-exp(-a))*(m-exp(-m))<0
        b=m;
    else
        a=m;
    end
end
r=m;
```

Solución.

a	b	m	$fun(a) * fun(m)$	$\frac{abs(b-a)}{2}$
0	1.0000000	0.5000000	0.106530	0.5000000
0.5000000	1.0000000	0.7500000	-0.029576	0.2500000
0.5000000	0.7500000	0.6250000	-0.009559	0.1250000
0.5000000	0.6250000	0.5625000	0.0007758	0.0625000
0.5625000	0.6250000	0.5937500	-0.0003022	0.0312500
0.5625000	0.5937500	0.5781250	-0.0001250	0.0156250
0.5625000	0.5781250			

Notemos que, $fun(x) = x - \exp(-x)$ se usa en la sentencia **if**.

Ejemplo 16. Escribir una función que permita calcular la expresión

$$y = f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

usarla para:

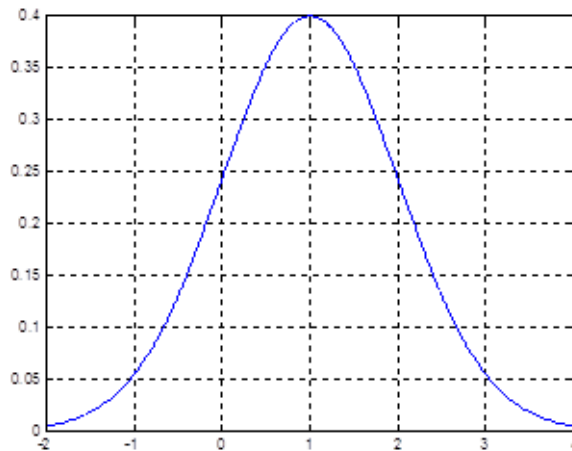
a. Calcular $w = \frac{f(\sqrt{2}+1)+f(\sqrt{2}-1)}{f(\frac{\pi}{2})}$.

b. Graficar la función $g(x) = f(x-1)$ en el intervalo $[-2, 4]$.

Solución.

```
function y=fun1(x)
y=exp(-x.^2/2)/sqrt(2*pi);
```

```
>> w=(fun1(sqrt(2)+1)+fun1(sqrt(2)-1))/fun1(pi/2)
      w = 3.3379
>> x=-2:0.01:4;
>> y=fun1(x-1);
>> plot(x,y),grid
```



Ejemplo 17. Escribir una función que calcule el promedio de todos los números múltiplos de 3 que se encuentren en un vector así, si el vector es

```
>> x=[4 5 7 9 3 11 12 15 7 24 13];
```

la función aplicada a este vector deberá devolver 12.6 que es igual a:

$$\frac{9+3+12+15+24}{5} = 12.6000.$$

Solución.

```
function p=prom3(x)
n=length(x);
p=0; cta=0;
for k=1:n
    if rem(x(k),3)==0
        cta=cta+1;
```

```

    p=p+x(k);
end
end
if cta>0
    p=p/cta;
end
>> x=[4 5 7 9 3 11 12 15 7 24 13];
>> prom3(x)
ans =    12.600000000000000

```

Ejemplo 18. Escribir una función **ctapares**(x) que retorne el número de números pares presentes en el vector x .

```

>>x=[3    5    2    7    8    1    12    11];
>>ctapares(x)
    3

```

Solución.

```

function p=ctapares(x)
n=length(x);
p=0;
for k=1:n
    if rem(x(k),2)==0
        p = p+1;
    end
end
>> x=[1    6    3    8    5    2    9    12    15    45    67 ];
>> ctapares(x)
    ans =4

```

Ejemplo 19. El rango de una colección de números es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de tal colección. Escribir una función **rango**(x) que retorne el rango de los componentes de un vector.

```

>>x=[5    3    8    10    2    15    7];
>>rango(x)
    13

```

Solución.

```

function r=rango(x)
n=length(x);
min=x(1);
max=x(1);
for k=2:n
    if x(k)>max
max=x(k);
    end
    if x(k)<min
min=x(k);
    end
end
r=max-min;
>> x=[1 6 3 8 5 2 9 12 15 45 67];
>> rango(x)
ans = 66

```

Ejemplo 20. Dada la siguiente función:

```

function n=aTum(num)
    k=length(num);
    n=0;
    for j=1:k
        n=10*n+num(j)-'0';
    end

```

Hacer un seguimiento completando el siguiente cuadro 2.1, cuando se llama desde **Matlab** con

```
>> aTum('3628')
```

k	n	j

Cuadro 2.1:

¿Qué valor retorna?

Solución.

k	n	j
4	0	
	3	1
	36	2
	362	3
	3628	4

Por lo tanto, retorna 3628.

Ejemplo 21. Dada la siguiente función

```
function s=dec()
    s=0;
    d=input('d= ');
    while rem(d,2)
        s=s+d;
        d=input('d= ');
    end
```

¿Que retorna si se ingresan los valores 3 7 9 1 2 4?

Solución.

Haciendo el seguimiento de la función, vemos que retorna 20.

Ejemplo 22. Un tanque cilíndrico con casco esférico de base se muestra en la figura 2.2 :

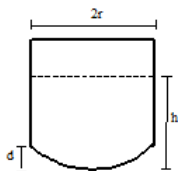


Figura 2.2:

- Deducir una expresión matemática que permita calcular el volumen del líquido almacenado en este tanque cilíndrico en función del radio r del cilindro y el nivel h del líquido.

Se sabe que el radio R de la esfera es de 5m y h no puede ser mayor a $2R$.

- b. Escribir los comandos **Matlab** que permitan trazar la gráfica de V en función de h para $r = 3\text{m}$.

Solución.

En primer lugar, desarrollaremos el ítem *a*) para lo cual calcularemos d . Teniendo en cuenta la figura 2.3 vemos que $R^2 = r^2 + (R - d)^2$, de donde

$$(R - d)^2 = R^2 - r^2, \text{ entonces } d = R - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

De aquí, $d = 5 - \sqrt{25 - r^2}$.

Por lo tanto,

$$v(r, h) = \begin{cases} \frac{\pi h^2}{3} (15 - h), & \text{si, } h < 5 - \sqrt{25 - r^2} = d \\ \frac{\pi h^2}{3} (15 - d) + \pi r^2 (h - d), & \text{si, } h > 5 - \sqrt{25 - r^2} = d \end{cases}$$

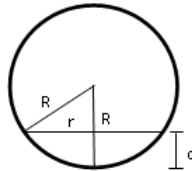


Figura 2.3:

Los comandos para el ítem *b*) son los siguientes:

```
function V=volumen(h)
    if h<1
        V=pi*h.^2.*(15-h)/3;
    else
        V=pi*14/3+pi*r.^2.*(h-1);
    end
```

Ejemplo 23. Un tanque cilíndrico con casco cónico en la parte superior se muestra en la figura 2.4:

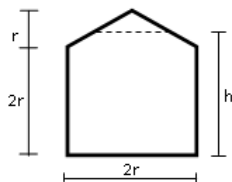


Figura 2.4:

- Deducir una expresión matemática que permita calcular el volumen del líquido almacenado en este tanque cilíndrico en función del radio r del cilindro y el nivel h del líquido.
- Escribir los comandos **Matlab** que permitan trazar la gráfica de V en función de h para $r = 3\text{m}$.

Solución.

En primer lugar, desarrollaremos el ítem a). Teniendo en cuenta la figura 2.5 vemos que $\frac{r}{r} = \frac{r-d}{x}$, de donde $x = r - d$. Luego,

$$V_T = V_r - V_x = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi (r-d)^3 = \frac{1}{3}\pi (r^3 - (r-d)^3).$$

Por lo tanto,

$$V(r, h) = \begin{cases} \pi r^2 h, & \text{si } h < 2r \\ \pi r^2 (2r) + \frac{1}{3}\pi (r^3 - (r-d)^3), & \text{si } h > 2r \end{cases}, \text{ donde } d = h - 2r.$$

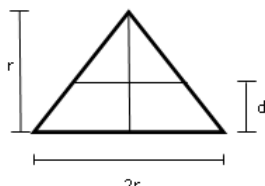


Figura 2.5:

Los comandos para el ítem b) son los siguientes:

```
function V=volumen(h)
if h<6r
```

```

V=9*pi*h;
else
V=54*pi+(27-(9-h)).^3*pi/3;
end

```

2.6. Problemas propuestos

1. Si

$$f(x) = \begin{cases} |x+2|, & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{x+1} + 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 6 - \frac{x^2}{3}, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Escribir la función y los comandos en **Matlab** que sirvan para calcular la siguiente expresión, mostrando el resultado con 8 decimales de precisión:

$$x = \frac{f(-2\pi + 3) + e * f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{f(\pi + 3) * f(\pi - e)}.$$

2. Si

$$f(x) = \begin{cases} |x+2|, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+1}, & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ 5 - \frac{x^2}{8}, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Escribir la función y los comandos en **Matlab** que sirvan para calcular la siguiente expresión:

$$X = \frac{f(-\pi + 1) + \pi * f(e)}{f(\pi + 1)}.$$

3. Hacer un seguimiento a las órdenes de la siguiente función, para el parámetro de entrada $x = [-3 \ 2 \ -3 \ 4 \ 2 \ 1 \ 2 \ -1 \ 3 \ 5]$.

```

function y=ejer1(x)
n=length(x);
k=1;
y=1; % & es la conjunción de dos proposiciones
while x(k)>=0 & k<=n
    y=y*x(k);
    k=k+1;
end

```

Escribir los valores que se registran en la siguiente tabla, a medida que se ejecuta la función:

k	y	$x(k)$	n

¿Qué es lo que hace?

4. Dada la siguiente función

```
function s=sas()
    s=0;
    f=input('f=');
    while ~rem(f,2)
        s=s+f;
        f=input('f=');
    end
```

¿Que retorna si se ingresan los valores 4 8 10 1 3 5?

5. Hacer un seguimiento paso a paso de la ejecución de la función:

```
>> prob2(18,24)
```

```
function y = prob2(a,b)
    while rem(a, b) ~= 0
        t = a;
        a = b;
        b = rem(a, b);
    end
    y=b;
```

a) Registrar los cambios de las variables en la siguiente tabla:

a	b	t
18	24	

b) ¿Qué valor retorna?

6. Dada la siguiente función:

```
function r=aSum(s)
    t=length(s);
    r=0;
    for i=1:t
        r=10*r+s(j)-'0';
    end
```

Hacer un seguimiento completando el siguiente cuadro 2.2, cuando se lo llama desde **Matlab** con

```
>> aSum('4731')
```

t	r	i

Cuadro 2.2:

¿Qué valor retorna?

7. Hacer un seguimiento paso a paso mostrando los pasos intermedios en la siguiente tabla, cuando se ejecuta la función **tib**(8).

```
fuction x=tib(n)
    x(1)=1;
    x(2)=2;
    for k=3:n
        x(k)=2*x(k-1)+x(k-2);
    end
```

n	k	$x(k-2)$	$x(k-1)$	$x(k)$

8. Hacer un seguimiento paso a paso a la siguiente función, cuando se la llama con:

```
>> fun1(3, 0.000001)
```

Complete la tabla (usar 8 decimales de precisión).

```
function X=fun1(a, e)
X0=a/2;
X=X0/2+a/(2*X0);
while    abs(X-X0)>e
    X0=X;
    X=X0/2+a/(2*X0);
end
```

x_0	x	$\text{abs}(x - x_0)$

9. Hacer un seguimiento paso a paso a la siguiente función, cuando se la llama con:

```
>> bis(1, 2, 0.01)
```

Complete la tabla (usar 8 decimales de precisión).

```
function r=bis(a,b,error)
while    abs(b-a)/2>error
    m=(a+b)/2;
    if    (a-log(a+4))*(m-log(m+4))<0
        b=m;
    else
        a=m;
    end
end
r=m;
```

a	b	m	$fun(a) * fun(m)$	$\frac{ b-a }{2}$

Donde $fun(x) = x - \log(x+4)$ que se usa en el **if**.

10. Hacer un seguimiento a la siguiente función para el valor del parámetro de entrada $y = [9 \ 1 \ 5 \ 1 \ 2 \ 7 \ 2 \ 1]$.

```
function z=prel(y)
n=length(y);
lim=n/2;
for k=1:lim
    u=y(k);
    y(k)=y(n-k+1);
    y(n-k+1)=u;
end
z=y;
```

Colocar los valores que se registran a medida que se ejecuta la función en una tabla como la que se muestra a continuación:

k	u	$y(k)$	$y(n-k+1)$	n	lim

11. Para el vector dado

```
>> x=[1 0 1 1 0 1 0 1];
```

hacer un seguimiento paso a paso usando una tabla, mostrar como varían las variables que intervienen cuando se ejecuta la función **prob3**:

```
function y=prob3(x)
n=length(x);
t=1;
for k=1:n
```

```

    if x( k )
        y( t )=k;
        t = t + 1;
    end
end

```

12. Escribir una función que determine el máximo valor n para el cual la suma S , no sea mayor o igual a un valor tope dado:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}.$$

13. Escribir una función que tome dos arreglos del mismo tamaño A y B . Suma el primer elemento de A con el último de B , el segundo de A con el penúltimo de B , y así sucesivamente.
14. Determinar el valor al cual converge la sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n}.$$

15. Se considera la sucesión definida por: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$; $a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$, para $n > 3$. Se desea obtener el valor y el rango del primer término que sea mayor o igual a 100.
16. Definir una función que determine si un número positivo de exactamente cuatro cifras es capicua o no.
17. Escribir una función **CtaDig(num)**, que reciba un número entero positivo y retorne cuantos dígitos tiene, así **CtaDig(416)** debe retornar 3, pues el número 416 tiene 3 dígitos que son 4, 1, 6.
18. Escribir un programa que reciba números enteros positivos por teclado y determine cuantos son mayores que 10. El número cero será el indicador del fin de ingreso.
19. Escribir un programa que cuente los números pares ingresados por teclado. El número cero será la marca para finalizar el ingreso y no se contabiliza.
20. Escribir una función en **Matlab** que solicite por teclado el ingreso de números positivos hasta ingresar el número cero, luego retorne el promedio de los números ingresados (sin considerar el cero ingresado al final); así, si se ingresa sucesivamente los números 1, 2, 3, 4, 5, 0 deberá retornar su promedio que es: $(1+2+3+4+5/5)$ que es igual a 3.

21. Escribir un programa que ingrese un número entero comprendido entre 0 y 999999 y lo exprese en letras, así por ejemplo, si se ingresa 128321, deberá imprimir ciento veintiocho mil trescientos veintiuno.
22. Escribir una función **sumapar**(n) que sume todos los números pares desde 2 hasta n , así **sumapar**(9), sumará $2 + 4 + 6 + 8$ y retornará 20.
- Hágalo usando un **for**.
 - Luego haga otra versión usando el **while**.
23. Escribir una función que reciba un número entero n y retorne 1 si es múltiplo de 5 o cero si no lo es. Probarlo con $n = 35$ y luego con $n = 86$.
24. Escribir una función que halle los números primos de 2 hasta n .
25. Escribir una función que devuelva el i -ésimo número de la sucesión de Fibonacci. Esta sucesión tiene como primer término 0, como segundo 1, y cualquier otro término se obtiene sumando los dos que le preceden: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...
26. Escribir una función que reciba un vector x y calcule la suma de las componentes positivas presentes en el vector x . Probarlo con.
- ```
>>x=[2 -5 6 8 -1 4].
```
27. Escribir una función que calcule el promedio de todos los números impares que se encuentren en un vector de números positivos así, si el vector es
- ```
>>x=[4 5 7 9 3 11 12 15 7 24 13];
```
- la función aplicada a este vector deberá devolver 8.75 que es igual a:
- $$(5+7+9+3+11+15+7+13)/8 = 8.75.$$
28. Escribir una función que calcule el promedio de todos los números que se encuentran entre *mín* y *máx* presentes en un vector así, si el vector es
- ```
>>x=[4 5 7 9 3 11 12 15 7 24 13]
```
- el *mín* = 7 y el *máx* = 15. La función aplicada a este vector, con estos topes pasados con estos parámetros, *máx*, *mín*, deberá devolver 10.57143 que es igual a:  $\frac{7+9+11+12+15+7+13}{7} = 10.57142857142857$ .
29. Escribir una función que calcule el promedio de todos los números pares que se encuentren en un vector de números positivos así, si el vector es
- ```
>>x=[4 5 7 9 3 11 12 15 7 24 13];
```

la función aplicada a este vector deberá devolver 13.3333 que es igual a:
 $(4+12+24)/3 = 13.3333$.

30. Escribir una función **function y=sum3(x)**, que suma sólo los números múltiplos de 3 que se encuentran en el vector *x*. Así, por ejemplo

```
>>x=[4 6 8 7 3 10 2 15];
>>sumpar(x)
    24
```

(suma $6 + 3 + 15 = 24$, todos los sumando múltiplos de 3).

31. Escribir una función **function y=mayores_que(x, num)**, que cuente cuantos números presentes en el vector *x* son mayores que el número **num**.

```
>>x=[4 6 2 7 3 10 9];
>>mayores_que(x, 6)
    3
```

(los tres números 7, 10 y 9 son mayores que 6).

32. Escribir una función **function y=encuentra_posicion(x, num)**, que encuentre la primera posición del número **num** en el vector *x*. En el caso que no se encuentra, que retorne cero. Por ejemplo:

```
>>x=[4 6 8 7 3 10 2];
>>encuentra_posicion(x,3)
    5
```

(5 es la posición donde se encuentre el número 3 en el vector *x*).

33. Escribir una función **function y=mediana(x)** que reciba como parámetro un vector *x* con datos ordenados de menor a mayor, que retorne la mediana de estos datos, es decir: si el número de datos es impar, devolverá el dato que ocupa la posición intermedia, y si el número de datos es par entonces devolverá el promedio de los datos que ocupan la posición intermedia. Por ejemplo:

```
>>x=[ 2 5 7 11 17 ];
>>mediana(x)
    7
>>x=[1 2 8 10 12 15];
>>mediana(x)
    9
```

34. Escribir una función: **function s=exponencial (x,n)** que calcule en forma eficiente:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

35. Escribir una función: **function s=sen (x,n)** que calcule en forma eficiente la siguiente expresión para un x y un n dado:

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Probarlo con $x = \pi/2$, $n = 4$.

36. Escribir la función **function y=prob5 (x)** que retorne un vector con las posiciones donde se encuentran los números negativos del vector x . Por ejemplo, si

```
>>x=[5 - 6 7 9 -11 -13 15];
>>prob5(x)
      2      5      6
```

37. Escribir una función que reciba un vector de números enteros y sume los números impares que están en el vector, así: si el vector es $[2\ 4\ 3\ 6\ 7\ 2\ 8]$, deberá devolver la suma de los impares $3 + 7$ que es 10.
38. Determinar la distancia h para la cual el centroide del área sombreada esté tan alto como sea posible por encima de BB' . Graficar la relación h/b como función de k para valores de entre 0.125 y 0.875.

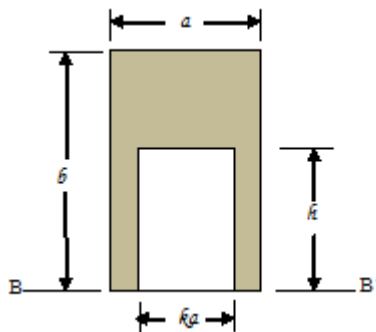


Figura 2.6:

39. Una ecuación o relación de atenuación es una expresión matemática que describe la variación de parámetros de movimiento del terreno (usualmente, aceleración, velocidad o desplazamiento) con la distancia entre una fuente sísmica y un sitio en particular.

La siguiente es una de las muchas ecuaciones de atenuación de la aceleración que han sido desarrolladas. Es la llamada ecuación de Campbell y Bozorgnia, la cual es del año 1994, desarrollada para magnitud de sismos entre 4.7 y 8.1:

$$\begin{aligned} \ln PHA = & -3.512 + 0.904M_W \\ & -1.328 \ln \sqrt{R^2 + [0.149e^{0.647M_W}]^2} \\ & + (1.125 - 0.112 \ln R - 0.0957M_W) F \\ & + (0.440 - 0.171 \ln R) S_{SR} \\ & + (0.405 - 0.222 \ln R) S_{HR} \end{aligned}$$

Donde:

R : Distancia más corta entre la zona de ruptura y el sitio (≤ 60 Km).

F : Factor que toma en cuenta el tipo de falla (0, si es normal ó 1 si es reversiva).

S_{SR} y S_{HR} : Factores que toman en cuenta el tipo de suelo.

M_W : Magnitud del sismo.

Suponga que le dicen que la falla es de tipo reversiva, y el suelo está constituido por depósitos sedimentarios, ya que se encuentra cerca de dos ríos, por lo cual $S_{SR} = S_{HR} = 1$. Determinar la variación de la aceleración pico horizontal (PHA) con la distancia para magnitudes de sismo M_W de 6, 6.5, 7 y 8, para valores de R desde 3.0 Km hasta 60 Km, tomando puntos cada 1.5 Km.

- Imprimir los resultados (o almacénelos en una matriz) por columnas de manera que: en la primera columna estén los valores de R , y en las subsiguientes, los valores de las PHA en Gals (1 Gal= 1 cm/s^2) para cada magnitud de sismo.
- Imprimir los resultados anteriores en m/s^2 (o convierta las columnas de resultados de la matriz anterior a m/s^2).
- ¿Cuáles son los máximos valores de PHA ? Imprimir sus respuestas (o expresar su respuesta en una matriz que los contenga).
- Al observar los resultados de PHA ¿Qué puede concluir de la relación entre PHA y la distancia? ¿Es este el resultado por usted esperado?

40. El collar **A** puede deslizarse libremente sobre la barra horizontal como se muestra en la figura 2.7. El resorte conectado tiene una constante k y no sufre deformación cuando el collar está directamente debajo del soporte **B**.

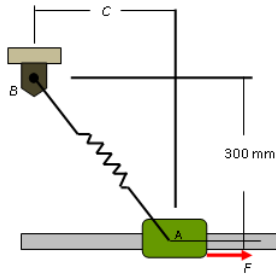


Figura 2.7:

- Expresar en términos de k y de c la magnitud F requerida para mantener el equilibrio del sistema.
 - Graficar F como función de c para valores de c entre 0 y 600 mm. Cuando $k = 2\text{ N/mm}$ y cuando $k = 4\text{ N/mm}$.
41. La barra **AB** es mantenida en posición por un cordón **AC** que tiene una tensión T .

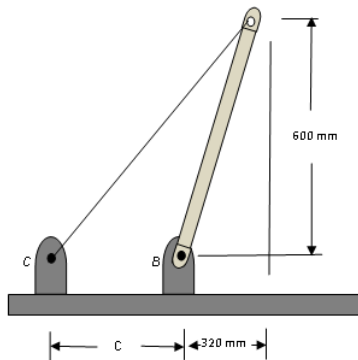


Figura 2.8:

- a) Determinar el momento con respecto a B de la fuerza ejercida por el cordón en el punto A en términos de la tensión T y la distancia c .
- b) Graficar el momento con respecto B para c entre 320 y 390 milímetros, si $T = 50$ N y $T = 100$ N.
42. Una barra delgada AB de peso W se une a los bloques A y B que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura 2.9. El resorte de constante k se encuentra sin deformación cuando la barra está en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, derive una ecuación en términos de θ , W , I y k que deben ser satisfecha cuando la barra esté en equilibrio. Se sabe que $W = 10$ lb y $I = 40$ in.

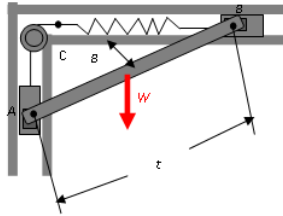


Figura 2.9:

- a) Calcular y graficar el valor de k del resorte como una función del ángulo θ para valores entre 15° y 40° .
- b) Determinar los dos valores del ángulo θ correspondientes a la posición de equilibrio cuando $k = 0.7 \text{ lb/in}$.
43. Escribir un programa que calcule el costo de construcción de un muro de 2.40 m de altura y L de largo, sin considerar la mano de obra. El muro tendrá columnas cada 3 metros con fierro de $3/8''$ y el ladrillo empleado se colocará tipo tabique (no portante) cara vista, los cimientos son de 1 metro de profundidad. El programa deberá solicitar ingresar los costos del millar de ladrillo, bolsa de cemento, varilla de $3/8''$, agregados (piedra, arena gruesa, cascajo) y la longitud L del muro.
44. Para la carga mostrada, determinar la fuerza en cada elemento de la armadura como una función de a . Graficar la fuerza en cada elemento, para a entre 40 y 240 pulgadas considerando las fuerzas de tensión como positivas y las fuerzas de compresión como negativas.

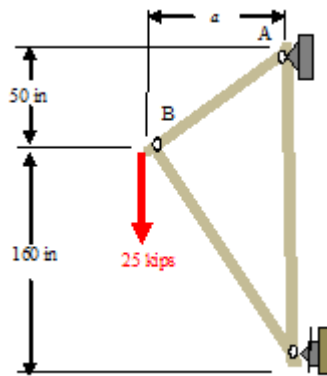


Figura 2.10:

45. La figura 2.11 muestra un tanque cilíndrico con base cónica de radio R . Si el volumen del líquido es muy bajo y cubre sólo la parte cónica, el volumen es simplemente el volumen cónico del líquido. Si el volumen llega hasta la mitad de la parte cilíndrica, el volumen total del líquido comprende la parte cónica llena y la parte cilíndrica parcialmente llena.

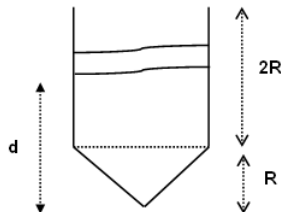


Figura 2.11:

- Escribir una función para calcular el volumen líquido almacenado en el tanque en función de los valores dados R y d (altura del líquido).
- Escribir un programa que imprima el volumen del líquido para diferentes valores R y d ingresados por teclado y de un mensaje de error, si d es mayor que $3R$ (altura máxima del tanque).
- Probar el programa ingresando valores para R y para d .

3 Ecuaciones no lineales

En este capítulo estudiaremos métodos que permitirán obtener soluciones aproximadas de ecuaciones de la forma:

$$f(x) = 0,$$

en realidad, cualquier ecuación de una variable puede ser llevada a esa forma.

Por ejemplo, la ecuación

$$x \cos(x^2 + x + 2) = e^{2x-5} + \ln(x^4 + 3)$$

es equivalente a

$$x \cos(x^2 + x + 2) - e^{2x-5} - \ln(x^4 + 3) = 0$$

siendo en este caso $f(x) = x \cos(x^2 + x + 2) - e^{2x-5} - \ln(x^4 + 3)$.

Se trata de determinar un valor numérico para x llamada raíz o solución que satisfaga la ecuación dada.

Está claro que no toda ecuación admite solución (en el conjunto de números reales), sin embargo un resultado de naturaleza teórica que nos garantiza la existencia de solución es el teorema del valor intermedio: si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe $r \in]a, b[$ tal que $f(r) = 0$.

Por ejemplo, la ecuación polinómica

$$43x^{15} - 30x^{10} + 40x^7 - 20 = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo $]0, 1[$, desde que la función polinómica $f(x) = 43x^{15} - 30x^{10} + 40x^7 - 20$ es continua en el intervalo $]0, 1[$, con $f(0) = -20$ y $f(1) = 33$.

Una vez garantizada la existencia de solución el principal obstáculo consiste en hallar la solución, infelizmente los métodos analíticos que consisten en despejar la incógnita son, en muchos casos, inaplicables.

La solución de ecuaciones de esta forma donde el lado izquierdo es una expresión lineal o cuadrática, es tratado en cursos básicos de matemática, sin embargo se presenta la necesidad de resolver ecuaciones donde este lado izquierdo tiene

naturaleza no lineal y de cierta complejidad. Ejemplos de la necesidad de resolver este tipo de ecuaciones aparece cuando se tiene que determinar los puntos extremos de una función o cuando se calculan los ceros de un polinomio característico en la resolución de una ecuación diferencial lineal de orden superior. No existe una fórmula general para hallar estas raíces, los métodos que se desarrollaran permitirán encontrar estas raíces o soluciones usando métodos iterativos con una precisión deseada.

3.1. Método de Bisección

Recordemos que, si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces hay al menos una raíz real de f entre a y b .

El método de bisección, es un tipo de búsqueda en el que se inicia con un intervalo que contiene a la raíz, luego este intervalo se divide por la mitad y se escoge el subintervalo que contiene a la raíz, con el subintervalo escogido se efectúa el mismo proceso, así sucesivamente. El proceso se repite hasta obtener una mejor aproximación, considerando como aproximación a la raíz el punto medio de cada intervalo escogido.

Ejemplo 24. Dada la ecuación $0.1x - 2e^{-0.5x} = 0$.

- a. Determinar un intervalo $[a, b]$ de longitud menor o igual a 0.5 que contenga una raíz de la ecuación, mostrando los siguientes resultados: $f(a)$, $f(b)$ y $[a, b]$.
- b. Completar los encabezamientos de la tabla siguiente y realice cinco iteraciones usando el método de la bisección (muestre los resultados con 5 decimales exactos).

	a	b	m	$f(a) * f(m)$	$\frac{(b-a)}{2}$
1					
2					
3					
4					
5					

Solución. Como $f(3) = -0.146260320296860$ y $f(3.5) = 0.002452113099110$, tomamos $[a, b] = [3, 3.5]$.

Luego,

	a	b	m	$f(a) * f(m)$	$\frac{(b-a)}{2}$
1	3.00000	3.50000	3.25000	0.01006	0.25000
2	3.25000	3.50000	3.375000	0.00223	0.12500
3	3.37500	3.50000	3.43750	0.00048	0.06250
4	3.43750	3.50000	3.46875	0.00009	0.03125
5	3.46875	3.50000	3.484375	0.00001	0.01562

Ejemplo 25. Dada la ecuación $x^2 - \sin(3x + 2) = 0$.

- Localizar todas las raíces, en un intervalo de longitud menor o igual a 0.2.
- Usar el algoritmo de la bisección para hallar la raíz negativa con una precisión de 8 decimales exactos, a partir del intervalo encontrado en a) y completando la siguiente tabla:

	a	b	m	$f(a) \cdot f(m)$	$\frac{(b-a)}{2}$
1					
2					
3					
4					
5					

Solución.

x	$f(x)$
-1.0000	1.8415
-0.8000	1.0294
-0.6000	0.1613
-0.4000	-0.5574
-0.2000	-0.9454
0.0000	-0.9093
0.2000	-0.4755
0.4000	0.2184
0.6000	0.9719
0.8000	1.5916
1.0000	1.9589

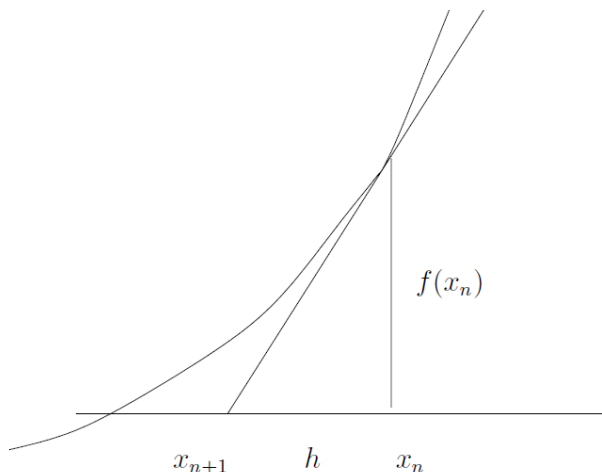
N°	a	b	m	$f(a) * f(m)$	$\frac{ b-a }{2}$
1	-0.60000000	-0.40000000	-0.50000000	-0.03701337	0.10000000
2	-0.60000000	-0.50000000	-0.55000000	-0.00651741	0.05000000
3	-0.60000000	-0.55000000	-0.57500000	0.00953110	0.02500000
4	-0.57500000	-0.55000000	-0.56250000	0.00052980	0.01250000
5	-0.56250000	-0.55000000	-0.55625000	-0.00014179	0.00625000
6	-0.56250000	-0.55625000	-0.55937500	-0.00003090	0.00312500
7	-0.56250000	-0.55937500	-0.56093750	0.00002471	0.00156250
8	-0.56093750	-0.55937500	-0.56015625	-0.00000095	0.00078125
9	-0.56093750	-0.56015625	-0.56054686	0.00000332	0.00039063
10	-0.56054688	-0.56015625	-0.56035156	0.00000052	0.00019531
11	-0.56035156	-0.56015625	-0.56025391	0.00000002	0.00009766
12	-0.56025391	-0.56015625	-0.56020508	-0.00000001	0.00004883
13	-0.56025391	-0.56020508	-0.56022949	-0.00000000	0.00002441
14	-0.56025391	-0.56022949	-0.56024170	-0.00000000	0.00001221
15	0.56025391	-0.56024170	-0.56024780	0.00000000	0.00000610
16	-0.56024780	-0.56024170	-0.56024475	0.00000000	0.00000305
17	-0.56024475	-0.56024170	-0.56024323	0.00000000	0.00000153
18	-0.56024475	-0.5602432251	-0.56024399	0.00000000	0.00000076
19	-0.56024399	-0.5602432251	-0.56024361	0.00000000	0.00000038
20	-0.56024361	-0.5602432251	-0.56024342	0.00000000	0.00000019
21	-0.56024361	-0.5602434158	-0.56024351	0.00000000	0.00000010
22	-0.56024361	-0.5602435112	-0.56024356	0.00000000	0.00000005
23	-0.56024361	-0.5602435589	-0.560244	0.00000000	0.00000002
24	-0.56024358	-0.5602435589	-0.56024357	0.00000000	0.00000001
25	-0.56024357	-0.5602435589	-0.56024356	0.00000000	0.00000001

Por lo tanto, la raíz pedida es -0.5602435648 .

3.2. Método de Newton

Si f es una función definida en un intervalo $[a, b]$, tal que $f \in C^2[a, b]$ (es decir, que la derivada de f es continua en $[a, b]$) y si $x_0 \in [a, b]$ es el punto que inicia el proceso de convergencia; entonces, la formula del método de Newton es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Ejemplo 26. Dada la ecuación $4 - x - \ln(x + 1) = 0$ resolver usando el método de Newton o punto fijo, para ello:

- Encontrar la función de contracción.
- Determinar un intervalo que contenga la raíz y asegure la convergencia del método.
- Realizar 4 iteraciones usando el método.

Solución.

Notemos que,

$$[a, b] = [2.5, 3].$$

La función de contracción es :

$$g(x) = x + \left(\frac{4 - x - \ln(x + 1)}{x + 2} \right)(x + 1),$$

Luego,

x_0	2.5
x_1	2.69229546894805
x_2	2.69344132107417
x_3	2.69344135896065
x_4	2.69344135896065

Ejemplo 27. Se tiene la función $f(x) = 0.1x + \ln(0.3x + 3)$

- Encontrar el intervalo $[a, b]$ que contenga la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, y luego la función de contracción que permitirá hallar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ usando el método de Newton.
- Encontrar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ con toda precisión, use todos los decimales posibles.

Solución.

Notemos que, $[-5, -5]$ y la función contracción viene dada por:

$$g(x) = x - \frac{(0.3x + 3)(0.1x + \ln(0.3x + 3))}{(0.03x + 0.6)}$$

```
>> x=-4;
>> x=x-(0.3*x+3)*(0.1*x+log(0.3*x+3))/(0.03*x+0.6)
x = -4.70419999338295
>> x=x-(0.3*x+3)*(0.1*x+log(0.3*x+3))/(0.03*x+0.6)
x = -4.67830663824090
>> x=x-(0.3*x+3)*(0.1*x+log(0.3*x+3))/(0.03*x+0.6)
x = -4.67826525601622
>> x=x-(0.3*x+3)*(0.1*x+log(0.3*x+3))/(0.03*x+0.6)
x = -4.67826525591120
>> x=x-(0.3*x+3)*(0.1*x+log(0.3*x+3))/(0.03*x+0.6)
x = -4.67826525591120
```

Ejemplo 28. Dada la ecuación $e^{-x} + 6\cos x = 0$.

- Encontrar un intervalo $[a, b]$ de longitud menor o igual a 0.25 que contenga a la menor raíz de la ecuación.
- Hallar la función de contracción o iteradora del método de Newton.
- Mostrar el punto inicial del proceso iterativo.
- Realizar 5 iteraciones usando el método de Newton (usar 12 decimales de precisión).

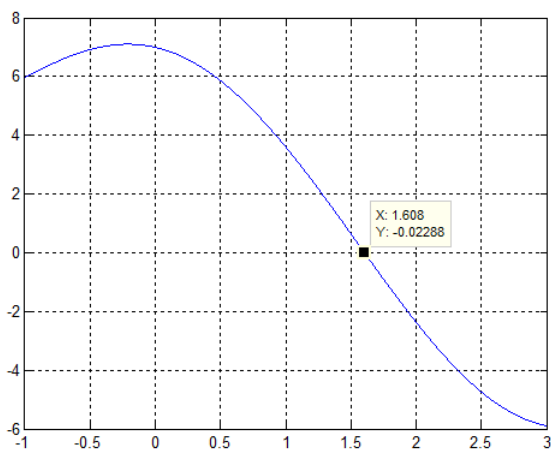
Solución.

El intervalo pedido es: $[a, b] = [1.5, 1.75]$, una vez que:

x	$f(x)$
1.5	0.647553370154647
1.75	-0.895702390446508

Luego, la función de contracción es:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x + \frac{e^{-x} + 6\cos x}{e^{-x} + 6\sin x}.$$



Además, el punto para iniciar el proceso es:

$$x_0 = 1.6043$$

x_0	1.604304174021670
x_1	1.604305990082261
x_2	1.604306780228629
x_3	1.604307124012461
x_4	1.604307273589058
x_5	1.604307338668225
x_6	1.604307366983472
x_7	1.604307379303134
x_8	1.604307384663287
x_9	1.604307386995432
x_{10}	1.604307388010124
x_{11}	1.604307388451606
x_{12}	1.604307388643689
x_{13}	1.604307388727263
x_{14}	1.604307388763625
x_{15}	1.604307388779446
x_{16}	1.604307388789324
x_{17}	1.604307388789324
x_{18}	1.604307388790627
x_{19}	1.604307388791194
x_{20}	1.604307388791441
x_{21}	1.604307388791548
x_{22}	1.604307388791595
x_{23}	1.604307388791615
x_{24}	1.604307388791624
x_{25}	1.604307388791628
x_{26}	1.604307388791629
x_{27}	1.604307388791630

Ejemplo 29. Hallar las coordenadas del punto de intersección de las gráficas de las funciones:

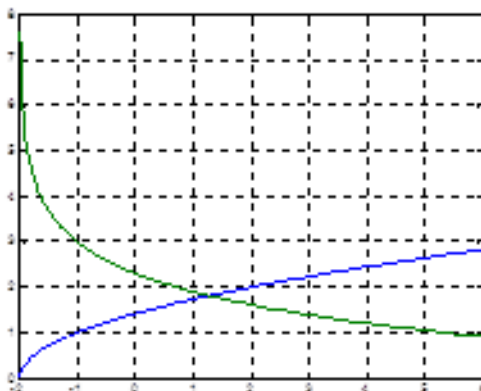
$$f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = 3 - \ln(x+2).$$

- Escribir las órdenes para visualizar las dos gráficas.
- Identificar la ecuación a resolver para hallar una de las coordenadas.
- Hallar las coordenadas del punto de intersección con 8 decimales de precisión.

Solución.

En primer lugar, los comandos para graficar son los siguientes:

```
>> x = -2.01:0.01:6;
>> y = sqrt(x+2);
>> z = 3 - log(x+2);
>> plot(x, y, x, z), grid
```



Para el ítem *b*), vemos que la ordenada del punto de intersección ocurre cuando $f(x) = g(x)$, es decir,

$\sqrt{x+2} = 3 - \log(x+2)$ que equivale a resolver la ecuación:

$$h(x) = \sqrt{x+2} - 3 + \log(x+2) = 0.$$

Usando el método de Newton se tiene que la función de contracción r es:

$$r(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}$$

$$r(x) = x - \frac{[\sqrt{x+2} - 3 + \log(x+2)](x+2)\sqrt{x+2}}{x+2 + \sqrt{x+2}}$$

Para el ítem *c*) observando el gráfico, se nota que la abscisa del punto de intersección es cercano a 1, luego tomamos $x_0 = 1$ y generamos la sucesión usando la función de contracción como se muestra a continuación.

```

>> x=1;
>> x=x-2*(sqrt(x+2)-3+log(x+2))*(x+2)*sqrt(x+2)/
    ((x+2)+2*sqrt(x+2))
    x = 1.27224211967252
>> x=x-2*(sqrt(x+2)-3+log(x+2))*(x+2)*sqrt(x+2)/
    ((x+2)+2*sqrt(x+2))
    x = 1.28184787305790
>> x=x-2*(sqrt(x+2)-3+log(x+2))*(x+2)*sqrt(x+2)/
    ((x+2)+2*sqrt(x+2))
    x = 1.28185862874695
>> x=x-2*(sqrt(x+2)-3+log(x+2))*(x+2)*sqrt(x+2)/
    ((x+2)+2*sqrt(x+2))
    x = 1.28185862876038
>> x=x-2*(sqrt(x+2)-3+log(x+2))*(x+2)*sqrt(x+2)/
    ((x+2)+2*sqrt(x+2))
    x = 1.28185862876038
>> x=x-2*(sqrt(x+2)-3+log(x+2))*(x+2)*sqrt(x+2)/
    ((x+2)+2*sqrt(x+2))
    x = 1.28185862876038

```

Para hallar la ordenada del punto de intersección, evaluamos f en x :

```

>>sqrt(x+2)
1.81159008298246

```

Luego el punto de intersección es: $(1.28185862876038, 1.81159008298246)$.

Ejemplo 30. Dadas las funciones $y = e^{-x}$, $y = 2x + 5$.

- Trazar las graficas de ambas funciones, simultáneamente.
- Encontrar un intervalo $[a, b]$ de longitud menor o igual que 0.5 que contenga la abscisa x del punto de intersección de ambas funciones.
- Encontrar dicho punto de intersección con toda la precisión posible usando el método de la bisección

Solución.

En primer efectuaremos las gráficas:

```

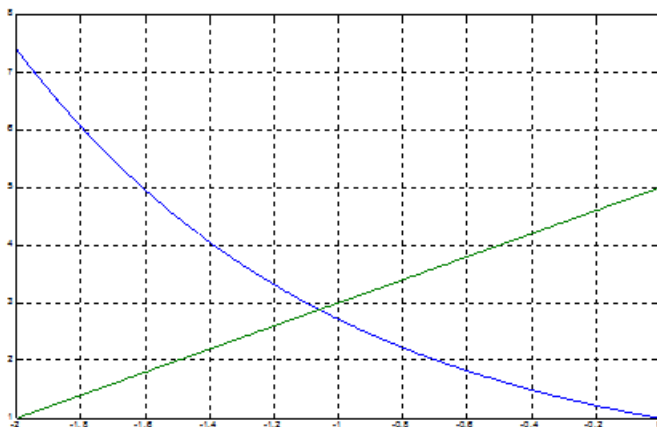
»x=-4:0.1:4;
» y=exp(-x);
» u=-4:0.1:4;

```

```

» v=2*u+5;
» plot(x,y,u,v),grid
» x=-2:0.001:0;
» y=exp(-x);
» u=-2:0.001:0;
» v=2*u+5;
» plot(x,y,u,v),grid

```



Teniendo en cuenta, la figura precedente vemos que el intervalo pedido $[a, b]$ es: $[-1.2, -0.7]$.

Luego, la ecuación y método que se usara para su resolución es igualando las dos funciones (que es donde se cortan) se tiene la ecuación $e^{-x} - 2x - 5 = 0$. En seguida, para conseguir la mejor precisión posible usar el método de newton, para ello hallaremos la función generadora: $g(x) = x + \frac{\exp(-x) - 2x - 5}{\exp(-x) + 2}$.

A continuación las ordenes en **Matlab** son las siguientes:

```

» z = -1
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =
-1.04926622716266
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =
-1.05724127411265
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =
-1.05847275805599
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)

```

```

z =      -1.05866153743006
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869044388365
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869486936742
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869554687680
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869565059814
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566647705
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566890799
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566928014
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566933712
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566934584
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566934717
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566934738
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566934741
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566934742
» z=z+(exp(-z)-2*z-5)/(exp(-z)+2*z+5)
z =      -1.05869566934742

```

Por lo tanto, la raíz pedida es: -1.05869566934742 .

3.3. Problemas propuestos

1. Usando un procedimiento gráfico, hallar la raíz de la ecuación

$$0.2x + \ln(5 + 0.1x) = 0.$$

2. Hallar una raíz de la ecuación $x + \ln(3 + x) = 0$, usando un método gráfico.
3. Encontrar un intervalo $[a, b]$ de longitud menor que uno ($b - a < 1$) que contenga una raíz de la ecuación $x^2 - 0.25e^{-x} = 0$.

4. Usando un procedimiento gráfico encontrar el punto de intersección de las gráficas $y = x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = 0$ con $y = 10 - 0.4x^2$.
5. Usando una hoja de cálculo **Excel**, localizar y luego, hallar la raíz de la ecuación $0.5x + \ln(x + 2)$ con una precisión de 0.000001. Usar la siguiente tabla para llenar los valores:

Nº	a	b	m	$f(a) * f(m)$	$\frac{ b-a }{2}$
1					
2					
...					

6. Implementar el algoritmo de la bisección. Usar una función que tenga como esquema, **function raíz = bisección(ecuación, a, b error)**, donde ecuación es el nombre del archivo que guarda la ecuación que deseamos resolver, a y b son los extremos que contienen la raíz, error es la precisión que deseamos conseguir, probar su funcionamiento con la ecuación $2 - x^2 - \sin(x) = 0$ y hallar sus raíces con una precisión de 0.000001.

7. Dada la ecuación $3x + \ln(x + 6) = 0$.

- a) Usando un procedimiento gráfico, determine un intervalo $[a, b]$ que contenga la raíz de esta ecuación.
- b) A partir del intervalo hallado en a), realice 10 iteraciones del método de la bisección para hallar aproximadamente la raíz de esta ecuación. Para ello haga uso del **Matlab**.

8. Dada la ecuación $0.5x - 3e^{-0.5x} = 0$.

- a) Determinar un intervalo $[a, b]$ de longitud menor o igual a 0.5 que contenga una raíz de la ecuación.
- b) Completar los encabezamientos de la tabla siguiente y realizar 5 iteraciones usando el método de la bisección (mostrar los resultados con 8 decimales exactos).

	a	b	m	$f(a) * f(m)$	$\frac{ b-a }{2}$
1					
2					
3					
4					
5					

9. Usar el método de la bisección y realizar 4 iteraciones con el fin de hallar una raíz de la ecuación $2x + \ln(x+4) = 0$, en el intervalo $[-1, 0]$. Llenar la siguiente tabla, registrando cada paso:

Iteración	a	b	m	$f(a)f(m)$	$\frac{ b-a }{2}$
1	-1	0	-0.5		
2					
3					
4					

10. Dada la ecuación $0.5x - 3 + e^{-0.2x} = 0$.

- a) Determinar un intervalo $[a, b]$ de longitud menor o igual a 0.5 que contenga una raíz de la ecuación.
- b) Completar los encabezamientos de la siguiente tabla y realizar cinco iteraciones usando el método de la bisección (mostrar los resultados con 8 decimales exactos).

	a	b	m	$f(a) * f(m)$	$\frac{ b-a }{2}$
1					
2					
3					
4					
5					

11. Usar el método de la bisección y realice 4 iteraciones con el fin de hallar una raíz de la ecuación $x + \ln(x+5) = 0$, en el intervalo $[-1, 0]$. Llenar la siguiente tabla, registrando cada paso:

Iteración	a	b	m	$f(a)f(m)$	$\frac{ b-a }{2}$
1	-1	0	-0.5		
2					
3					
4					

12. Usar el método de la bisección para hallar aproximadamente una raíz de la ecuación:

$$x^2 - e^{-0.5x} - 1 = 0.$$

Para ello, completar la tabla mostrando paso a paso las variaciones de los extremos a , b y el punto medio m del intervalo que contienen a la raíz. Realizar tantas iteraciones como sea necesario para aproximar la raíz de la ecuación con un error menor que 0.01.

a	b	m	$f(a)f(m)$	$\frac{ b-a }{2}$
1	1.5	1.25		
		1.125		
		1.1875		
		1.2188		
		1.2344		

13. Hallar una raíz de la ecuación $x^3 - 5x - 18 = 0$ con dos decimales exactos usando el método de la bisección. Usar un método analítico y no gráfico.
14. Usar el método de la bisección para completar la tabla, haga tantas iteraciones como sea necesario en el intervalo $[-1.7, -1.3]$ para aproximar la raíz de la ecuación $f(x) = x + \ln(5 + 0.2x)$ con un error menor que 0.01 en el intervalo.

a	b	m	$f(a) \star f(m)$	$ b-a > 0.01$

15. Dada la sucesión recursiva:

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}.$$

Si $x_0 = 1$, hallar los 6 primeros términos de la sucesión.

16. Si $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ y $x_0 = 1, x_1 = 2$, entonces el valor de x_8 es:
17. Si $x_n = x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-2}}$ y además $x_0 = 1, x_1 = 2$, entonces el valor de x_8 es:
18. Usando una hoja de cálculo **Excel**, localizar y luego, hallar la raíz de la ecuación $0.1x + \ln(3 + 0.3x)$ con toda la precisión posible.
19. Implementar el algoritmo de Newton. Usar una función que tenga como esquema, **function raíz = newton(ecuación, x0, error)**, donde ecuación es el nombre del archivo que guarda la ecuación que deseamos resolver, x_0 es el punto inicial, error es la precisión que deseamos conseguir, probar su funcionamiento con la ecuación $2 - x^2 - \cos(x) = 0$ y halle sus raíces con una precisión de 0.000000001.
20. Dada la ecuación $f(x) = 3 - x - \ln(x+1) = 0$.

- a) Encontrar un intervalo $[a, b]$, que contenga una raíz de la ecuación y luego realice 4 iteraciones usando el método de la bisección, llenar el siguiente cuadro paso a paso (usar 4 decimales de precisión):

N	a	b	m	$f(a)f(m)$	$\frac{ b-a }{2}$

- b) Elegir un punto x_0 dentro del intervalo $[a, b]$ para iniciar el método de Newton.
- c) Encontrar la función de contracción o iteradora $g(x)$.
- d) Realizar cuatro iteraciones usando el método.

21. Dada la ecuación $0.5x + \ln(x + 3) = 0$.

- a) Determinar un intervalo $[a, b]$ de longitud menor o igual a 0.25 que contenga una raíz de la ecuación, mostrando el intervalo pedido.
- b) Aplicar el método de Newton a la ecuación anterior y hallar la solución exacta mostrando:
- 1) La función de contracción o iteradora.
 - 2) El punto que inicie el proceso de convergencia.
 - 3) Realizar 4 iteraciones usando el método.

x_0	
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

22. Usar el método de Newton, para hallar una raíz de la ecuación

$$x^3 - 3x - 12 = 0.$$

- a) Encontrar la función iteradora o de contracción.
- b) Usar esta función de contracción y el punto que inicie el proceso, para hallar la raíz con una precisión de 3 decimales exactos.

23. Dada la ecuación $x^3 - x^2 - 5 = 0$ resuélvala usando el método de Newton, para ello:

- a) Encontrar la función de contracción o iteradora.
 - b) Determinar un intervalo $[a, b]$ que contenga la raíz, justificar.
 - c) Realizar 4 iteraciones usando el método de Newton.
24. Hallar la raíz de la ecuación $9 - x^2 - \sqrt{x-2} = 0$, con toda la precisión posible (usar el método de Newton).
25. Si g es la función de contracción que se utiliza para resolver la ecuación $x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$, entonces el valor de $|g(\pi/4)|$ es igual a:
26. Usar el método de Newton, para hallar una raíz de la ecuación

$$x^3 - 5x - 15 = 0.$$

- a) Encontrar la función iteradora o de contracción.
 - b) Usar esta función de contracción y el punto que inicie el proceso, para hallar la raíz con una precisión de 3 decimales exactos.
27. Dada la ecuación $3 + x - e^{-0.5x} = 0$ resuélvala la usando el método de Newton o del punto fijo, para ello:
- a) Encontrar la función de contracción o iteradora $g(x)$.
 - b) Determinar un intervalo $[a, b]$ que contenga la raíz y asegure la convergencia del método, justifique.
 - c) Encontrar el punto que inicia el proceso de convergencia.
 - d) Realizar 4 iteraciones usando el método.

x_0	
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

28. Se tiene la función $f(x) = 0.5x + \ln(0.1x + 2)$.
- a) Determinar el punto de intersección de la recta L con el eje X , donde L es la recta tangente a la gráfica de la función en $(-2, f(-2))$.
 - b) Encontrar el intervalo $[a, b]$ que contenga la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, y luego la función de contracción que permitirá hallar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, usando el método de Newton.
 - c) Hallar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ con toda precisión.

29. Encontrar la menor raíz positiva de la ecuación $x^2 - 1 = 2\text{sen}(8x)$.

30. Dada la ecuación $4 - x^2 + \cos(10x) = 0$.

- Encontrar un intervalo que contenga solo a la menor raíz positiva.
- Hallar la función de contracción requerida en el método de Newton.
- Usando el método de Newton encontrar la menor raíz positiva de la ecuación. Realizar 5 iteraciones:

x_0	
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

31. Dada la ecuación $x^2 - 3 - 2\text{sen}(8x) = 0$.

- Encontrar un intervalo que contenga solo a la menor raíz positiva.
- Hallar la función de contracción requerida en el método de Newton.
- Usando el método de Newton encuentre la menor raíz positiva de la ecuación. Realizar 5 iteraciones.

x_0	
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

32. Dada la ecuación $x^2 - 3 + 2\cos(10x) = 0$.

- Encontrar un intervalo que contenga solo a la menor raíz positiva.
- Hallar la función de contracción requerida en el método de Newton.
- Usando el método de Newton encontrar la menor raíz positiva de la ecuación. Realizar 5 iteraciones.

33. Dada la ecuación $3 - x^2 - 2\cos(8x) = 0$.

- Encontrar un intervalo que contenga sólo a la menor raíz positiva.
- Hallar la función de contracción requerida en el método de Newton.
- Usando el método de Newton encontrar la menor raíz positiva de la ecuación. Realizar 5 iteraciones.

x_0	
x_1	
x_2	
x_3	
x_4	

34. Se tiene la función $f(x) = 0.3x + \ln(0.5x + 1)$.

- Encontrar el intervalo $[a, b]$ que contenga la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, y luego la función de contracción que permitirá hallar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, usando el método de Newton.
- Encontrar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ con toda precisión.

35. Usar el método de Newton para hallar la solución de la ecuación

$$x + 1 + \ln(2x + 3) = 0.$$

- Hallar la función de contracción.
- Hallar la raíz con toda precisión.

36. Encontrar la menor raíz positiva de la ecuación:

$$4e^{-x} - \cos(8x) = 0.$$

- Ubicar la raíz en un intervalo $[a, b]$ de longitud igual o menor a 0.1 ($|b - a| \leq 0.1$).
- Encontrar la raíz usando los métodos de Newton y secante, con toda la precisión posible, para ello debe mostrar:
 - La función de contracción.
 - El algoritmo de Newton en código **Matlab**.
 - El algoritmo de la secante en código **Matlab**.
 - Los comandos y archivos que utiliza para hallar la raíz, usando ambos métodos.

37. La abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = 4 - (x - 1)^2$ y la función $h(x) = x^3$ es: (hallarla con toda precisión).

38. La abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + e^{-0.2x}$ y la función $h(x) = \sqrt{x + 1}$ es: (hallarla con toda precisión).

39. Encontrar el punto de intersección de las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{con} \quad g(x) = 4 + e^{-x}.$$

Encontrar este punto de intersección usando los siguientes métodos:

a) Gráfico.

b) Bisección con **Excel**.

c) Bisección con **Matlab**.

Incluir, la gráfica, hoja de cálculo empleada, con los resultados, **archivos.m** y comandos en **Matlab**.

40. Usar el método de Newton para hallar la abscisa del punto de intersección de las funciones

$$f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \ln(2x + 5).$$

a) Hallar la función de contracción.

b) Hallar la raíz con toda precisión.

41. Dada las curvas:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2, \quad y = \sqrt{x+2}.$$

Escribir las órdenes en **Matlab** para:

a) Graficar simultáneamente ambas curvas.

b) Calcular los puntos de intersección de ambas curvas (usar el método de Newton).

42. Hallar los puntos de intersección de las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 - 2\sin(8x) \quad \text{y} \quad g(x) = 2e^{-x}.$$

a) Trazar la gráfica de ambas funciones.

b) Plantear la ecuación a resolver.

c) Hallar la abscisa y ordenada del punto de intersección con toda precisión.

43. Encontrar los puntos de intersección de las graficas:

$$y = 3\cos(0.5x) \quad \text{con} \quad y = (x-1)^2 - 3.$$

Usar el método de Newton, mostrando:

- a) La función de contracción.
- b) Los valores x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 al aplicar el método de Newton para hallar las abscisas de los 2 puntos de intersección con 8 decimales exactos.

44. Encontrar los puntos de intersección de las graficas:

$$y = 3 \cos(0.4x) \quad \text{con} \quad y = (x+1)^2 - 3.$$

Usar el método de Newton, mostrando:

- a) La función de contracción.
- b) Los valores x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 al aplicar el método de Newton para hallar las abscisas de los 2 puntos de intersección con 8 decimales exactos.

4 Álgebra de matrices

Con **Matlab** podemos efectuar diversas operaciones con matrices: suma, producto por un escalar, producto de matrices, cálculo del determinante, etc.

Recuerde que para efectuar el producto $A \cdot B$, se debe tener que el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B , además esta operación no es conmutativa lo que implica una diferencia en la forma de resolver un problema algebraico matricial de uno similar numérico.

Matlab tiene algunas funciones incorporadas que sirven para el tratamiento de matrices, algunas de ellas son: **size**, **det**, **inv**, **ones**, **eye**, **zeros**.

4.1. Ecuaciones algebraicas con matrices

Problema. Resolver una ecuación matricial de la forma:

$$AX + B = C,$$

asumiendo compatibilidad en las dimensiones de las matrices. En este caso la solución es:

$$X = A^{-1}(C - B).$$

Siempre y cuando A sea una matriz inversible. Lo importante aquí es que la inversa multiplica a por la izquierda a la matriz $C - B$, de lo contrario, si fuera por la derecha, el resultado sería completamente diferente, debido a la no conmutatividad de la multiplicación de matrices.

Ejemplo 31. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & & & & \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = [b_{ij}], \quad b_{ij} = \begin{cases} i + (-1)^j j, & \text{si } i \geq j \\ j - (-1)^i i, & \text{si } i < j \end{cases}$$

- Escribir funciones que permitan leer las matrices A y B para un n dado.

- b. Resolver la ecuación matricial $BXA - AB = 3BX$.
- c. Escribir los comandos **Matlab** para hallar X con $n = 5$.

Solución.

```
a. function A=leera(n)
    A=3*ones(n);
    for k=1:n
        A(k,k)=k;
    end
    function B=leerb(n)
        for i=1:n
            for j=1:n
                if i>=j
                    B(i,j)=i+((-1)^j)*j;
                else
                    B(i,j)=j-((-1)^i)*i;
                end
            end
        end
    end
end
```

```
>> A=leera(5)
    A =     1     3     3     3     3
          3     2     3     3     3
          3     3     3     3     3
          3     3     3     4     3
          3     3     3     3     5
```

```
>> B=leerb(5)
    B =     0     3     4     5     6
          1     4    -5    -4    -3
          2     5     0    85    86
          3     6     1     8   -1019
          4     7     2     9     0
```

b. $X = B^{-1}AB(A - 3I)^{-1}$.

```
c. >> X=inv(B)*A*B*inv(A-3*eye(5))
    X =    92.2817    117.8521    150.8579    274.0809   -483.7002
          -91.6102   -117.7628   -149.8075   -274.6447    484.3185
          -0.2490   -0.3113     0.1016   -0.0601     0.2358
          -0.1043   -0.1303   -0.1798   -0.2382     0.4660
          0.1022     0.1277     0.1705     0.2546   -0.4839
```


Ejemplo 32. Resolver la ecuación matricial $AX = 2X + AB$ para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 1 & n-1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

- Escribir una función que sirva para generar la matriz A .
- Escribir una función que sirva para generar la matriz B .
- Despejar X .
- Hallar X para $n = 5$, mostrando los comandos **Matlab** usados para su correcto cálculo.

Solución.

```
function A=leea(n)
```

```
A=2*ones(n);
```

```
A(:,n)=[1:n]';
```

```
for i=1:n
```

```
A(i,i)=1;
```

```
end
```

```
function B=leeb(n)
```

```
for i=1:n
```

```
B(i,i)=i;
```

```
end
```

```
AX-2X=AB
```

```
(A-2I)X=AB
```

```
X=inv(A-2I)AB
```

```
>> A=leea(5)
```

```
A =
```

```
1 2 2 2 1
```

```
2 1 2 2 2
```

```
2 2 1 2 3
```

```
2 2 2 1 4
```

```
2 2 2 2 1
```

```
>> B=leeb(5)
```

```
B =
```

```

1 0 0 0 0
0 2 0 0 0
0 0 3 0 0
0 0 0 4 0
0 0 0 0 5
>> X=inv(A-2*eye(5))*A*B
X =
0.4400 0.2133 0.3200 0.4267 2.0000
0.1600 0.9867 0.4800 0.6400 1.3333
0.2133 0.4267 1.6400 0.8533 0.6667
0.2667 0.5333 0.8000 2.4000 0
0.1600 0.3200 0.4800 0.6400 3.0000

```

4.2. Sistemas de ecuaciones

Un caso especial de ecuaciones algebraicas con matrices se da cuando el sistema es de la forma $AX = b$, donde A es una matriz cuadrada y b un vector columna, caso típico de un sistema de ecuaciones lineales, donde X representa un vector columna de incógnitas. En este caso la solución es $X = A^{-1}b$ siempre que la matriz A sea invertible.

Ejemplo 33. Resolver usando **Matlab** el siguiente sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Solución.

En primer lugar ingresamos la matriz A , junto con el vector columna c , luego utilizando la expresión matricial nos lleva a la respuesta apropiada, esto es:

```

>>A=[1 -1;1 1];
>>c=[2 3]';
>>X=inv(A)*c
X= 2.5000
    0.5000

```

concluimos que la solución es: $x = 2.5$, $y = 0.5$.

4.3. Problemas propuestos

1. Definir las funciones **circular** **circularD** que permutan circularmente a la izquierda (o a la derecha) la matriz.

2. Un número es perfecto si coincide con la suma de sus divisores propios. Por ejemplo, 6 es perfecto una vez que $1 + 2 + 3 = 6$. Escribir una función que devuelva la matriz de números perfectos.
3. Escribir una función que reciba como parámetro una matriz cuadrada A , y retorne la suma de ésta matriz con su transpuesta dividida entre 2, es decir $(A+A')/2$. Así por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Entonces, la función devolverá $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
4. Escribir la siguiente funciones en **Matlab** y luego comprobar su ejecución con un ejemplo, **function B = IntercambiaFilas(A,fil1,fil2)**; que retorne una matriz B que resulte de la matriz A intercambiando la fila **fil1** con la fila **fil2**. Así, si

```
>>A=[1 1 1;2 2 2;3 3 3;4 4 4];
>>B=IntercambiaFilas(A,2,4)
1      1      1
4      4      4
3      3      3
2      2      2
```

5. Escribir la siguiente funcion en **Matlab** y luego comprobar su ejecución con un ejemplo, **function B = EliminaFila(A, fil)**. Que retorne una matriz B que resulte de la matriz A al eliminar la fila que se encuentra en la ubicación **fil**, así:

```
>>A=[1 1 1; 2 2 2; 3 3 3; 4 4 4];
>>B=EliminaFila(A,3)
1      1      1
2      2      2
4      4      4
```

6. Escribir una función llamada **norma** que reciba como parámetro de entrada una matriz y retorne un número igual a

$$\sqrt{\text{traza}(A \star A')}$$

donde A' es la transpuesta de la matriz A , traza es la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz. Por ejemplo,

```
>> A=[1 3; -1 5];
>>norma(A)
6
```

7. Resolver la ecuación matricial $BXA + 3AB = XA$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Despejar X .

b) Escribir los comandos en **Matlab** para hallar X .

8. Hallar la suma de todas las entradas de la matriz X , solución de la ecuación matricial $AXB - BA = XB$, si A, B están definidos por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & 6 & 7 \\ 8 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

9. Resolver la ecuación matricial $AX - 3A = 5X$.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ con } n = 5.$$

10. Dada la ecuación matricial $X - I = XA$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & n \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & n-1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Escribir los comandos o la función que genere A .

b) Despejar X .

c) Escribir los comandos en **Matlab** para hallar X con $n = 5$.

11. Dada la ecuación matricial $XA - 3I = 2X$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & \dots & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(unos en la diagonal principal y cincos en la diagonal secundaria).

- a) Escribir el código **Matlab** de la función que genere A .
- b) Despejar X .
- c) Escribir los comandos en **Matlab** para hallar X con $n = 5$.

12. Dada la ecuación matricial $3X - 2I = AX$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix}$$

(matriz de 3, pero en la última columna sucesión del 1 al n y en la última fila sucesión del 1 al n).

- a) Escribir los comandos o la función que genere A .
- b) Despejar X .
- c) Escribir los comandos en **Matlab** para hallar X con $n = 5$.

13. Resolver la ecuación matricial $AX - 3A = 5X$, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

con $n = 5$.

14. Dada la ecuación matricial $AXB - 2BA = 3XB$.

- a) Despejar X .
- b) Escribir las funciones para generar las matrices A y B para cualquier n .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 4 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Escribir los comando en **Matlab** para hallar X para cuando $n = 5$.

15. Dada la ecuación matricial $BXA - 3AB = 3XA$.

a) Despejar X .

b) Escribir las funciones para generar las matrices A y B para cualquier n .

$$A = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & n & n-1 & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Escribir los comando en **Matlab** para hallar X para cuando $n = 5$.

16. Dada la ecuación matricial $AXB - BA = 3AX$.

a) Despejar X .

b) Escribir los comando en **Matlab** para hallar X si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \end{bmatrix}$$

Mostrar el valor de X para cuando $n = 5$.

17. Escribir los comandos **Matlab** para resolver la ecuación matricial: $AX - B = 5X$, donde A y B son las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & \dots & 19 & 20 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 81 & 82 & 83 & \dots & 89 & 90 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Resolver la ecuación matricial $AXB = XB + BA$ para las siguientes matrices:

$$A = [a_{ij}], \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} (-1)^j j + i, & \text{si } i \neq j \\ i - j, & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}$$

19. Escribir los comandos **Matlab** para resolver la ecuación matricial $XA - 2B = 3X$, donde A y B son las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & \dots & -2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & -9 & 9 & \dots & 9 & -9 \\ -10 & 10 & -10 & \dots & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Indicar como ingresar las matrices A y B usando comandos en **Matlab** o usando un programa de lectura.

20. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & 3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$B = [b_{ij}], b_{ij} = \begin{cases} 2i + (-1)^i j, & \text{si } i \geq j \\ i + (-1)^i i, & \text{si } i < j \end{cases}$$

- Escribir funciones que permitan leer las matrices A y B para un n dado.
- Resolver la ecuación matricial $AXB - BA = 2XB$.
- Escribir los comandos **Matlab** para hallar X , con $n = 5$.

21. Dadas las matrices de orden 4 por 4: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = AB = [c_{ij}]$ y

si $a_{ij} = (-1)^{i+j} (2i + 3j)$ y $b_{ij} = (-1)^j (i + 3j)$ el valor de $\sum_{k=1}^4 c_{kk}$ es:

22. Dadas las matrices de orden 4 por 4: $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = AB = [c_{ij}]$ y

si $a_{ij} = (-1)^{i-j} (2i + 3j)$ y $b_{ij} = (-1)^i (i + 3j)$ el valor de $\sum_{i=1}^4 c_{i3}$ es:

23. a) Escribir una expresión que calcule la matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

24. Escribir los comando **Matlab** para resolver el sistema de ecuaciones lineales, encuentre su solución

$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x - y + 2z = 12 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

25. Escribir los comando **Matlab** para resolver el sistema de ecuaciones lineales, encuentre su solución

$$\begin{cases} z + y - x = 3 \\ y - z + 2x = 4 \\ 2x + z + y = -1 \end{cases}$$

26. Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x - ay + 2z = 12 \\ ax - y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Si $a = 3$, escribir los comandos **Matlab** para resolver el sistema anterior.
27. Una compañía constructora ofrece tres tipos de casas: I, II y III. Cada casa del tipo I requiere 3 unidades de concreto, 2 unidades de madera para cancelaría y 5 unidades de madera para estructura. Cada casa del tipo II y del tipo III requiere 2, 3, 5 y 4, 2, 6 unidades respectivamente, de concreto, madera para cancelaría y madera para estructura. La compañía dispone de 150 unidades de concreto, 100 unidades de madera para cancelaría y 250 unidades de madera para estructura y debe usar todas las unidades. Si la compañía desea ofertar la mayor cantidad posible de casas del tipo III por ser más rentables, ¿cuántas casas de cada tipo debe ofrecer? (tener en cuenta que dichas cantidades deben ser números enteros). Resolver el sistema de ecuaciones.
28. Un proveedor de productos para el campo tiene cuatro tipos de fertilizantes A , B , C y D que tienen contenidos de nitrógeno de 30 %, 20 %, 15 % y 60 % respectivamente. Se ha planeado mezclarlas para obtener 700 kg de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 30 %. Esta mezcla debe contener 100 kg más del tipo C que del tipo B y además la cantidad que intervenga del tipo A debe ser exactamente igual a la suma de las cantidades de los tipos C y D con el doble del tipo B . Por métodos matriciales, hallar la cantidad de kg que se deben usar para este tipo.
29. La Texas Electronics Inc. (TEI) produce tres nuevos modelos de computadoras: 1, 2 y 3. Como parte del proceso de elaboración, estos productos pasan por la planta técnica y por la planta de ensamblaje. Los tiempos empleados por unidad en cada una de estas plantas se muestran en la siguiente tabla:

Modelo	Planta técnica	Planta de ensamblaje
1	30 minutos	0.5 hora
2	12 minutos	2 horas
3	36 minutos	2 horas
Tiempo total empleado por mes en cada planta	116 horas	370 horas

¿Cuántas unidades de cada modelo produjo la empresa si obtuvo una utilidad mensual de 37 500 dólares, sabiendo que las ganancias obtenidas por la venta de los modelos 1, 2 y 3 fueron de 200, 50 y 100 dólares por unidad, respectivamente? Asumir que se vendió toda la producción.

30. Cine Planet tiene 8 salas, de la I a la VIII. El precio de cada función depende del día: los lunes y miércoles el precio es de 6 soles; los martes 5 soles y jueves, viernes, sábados y domingos el precio es de 8 soles. A continuación se presenta una tabla en la que se expresa una asistencia promedio durante la semana. Calcular cuál es el ingreso bruto en cada sala y el ingreso bruto total de dicha semana.

Salas	Lunes y Miércoles	Martes	Jueves a Domingo
Sala I	50	45	150
Sala II	59	40	160
Sala III	47	39	149
Sala IV	68	55	99
Sala V	66	61	163
Sala VI	43	33	100
Sala VII	55	46	180
Sala VIII	48	57	200

31. Una compañía constructora decide urbanizar 1000 acres de terreno en una ciudad donde los Reglamentos Municipales exigen a todas las urbanizaciones a futuro, que:
- Sólo se puede construir tres tipos de casas: para una familia, dos familias o tres familias, donde las casas unifamiliares constituyen el 50 % del total de casas.
 - Se requieren tamaños de lotes de 2, 3 y 4 acres para casas de una, dos y tres familias, respectivamente.
 - Se deben establecer áreas de recreo de un acre por cada 40 familias. La compañía incluirá en la nueva urbanización casas para una, dos y tres familias y estima que el 22.8 % del terreno se utilizará en la apertura de calles y vías de acceso para servicios. Considerar a x , y ,

e z como el número de casas para una, dos y tres familias respectivamente y a w como el número entero de acres destinados para recreo.

- Reducir el sistema de ecuaciones lineales.
- Encontrar el valor de cada una de las incógnitas.

32. Una fábrica de muebles posee tres aserraderos: A , B y C , en los cuales se corta a razón de 60 m^3 , 45 m^3 y 30 m^3 por día, respectivamente. La madera se distribuye a 2 fábricas de muebles M y N que necesitan 65 m^3 y 70 m^3 por día, respectivamente. Los costos de transporte en dólares por metro cúbico desde los aserraderos hasta las fábricas se muestran en la siguiente tabla:

Desde el aserradero	Hasta M	Hasta N
A	1.5	3.0
B	3.5	2.0
C	2.9	1.9

Considerar que:

- Toda la madera cortada por día en los aserraderos se debe emplear para satisfacer la demanda diaria de las fábricas.
- Los costos de transporte de la madera recibida por la fábrica M desde el aserradero A son iguales a los costos de transporte de la madera recibida por la fábrica N desde el aserradero B , por día.
- Los costos totales de transporte de la madera desde los aserraderos a las fábricas ascienden a 242 dólares por día.

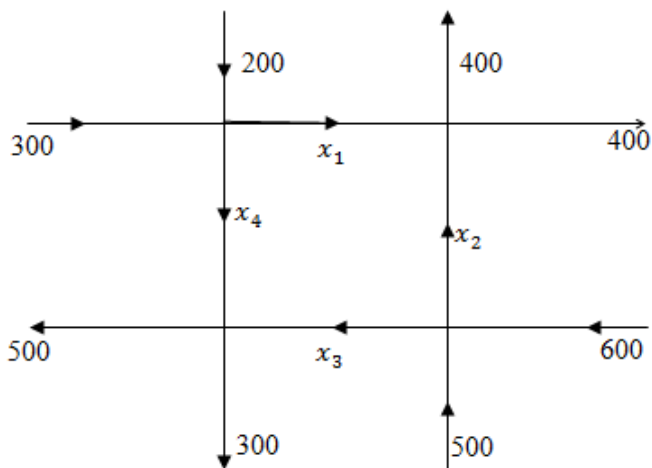
Hallar las cantidades de madera transportadas desde los aserraderos A , B y C a las fábricas M y N .

33. En una fábrica de ropa se producen tres estilos de camisas a los que llamaremos I , II , III . Cada camisa pasa por tres procesos: cortado, cosido y planchado. Las camisas se elaboran por lotes. El tiempo en minutos requerido para producir un lote se indica en el siguiente cuadro:

	Cortado	Cosido	Planchado
Tipo I	30	40	50
Tipo II	50	50	50
Tipo III	65	40	15

¿Cuántos lotes de cada tipo de camisas se pueden producir si se emplean exactamente 8 horas en cada uno de los procesos? Resolver el sistema planteado y dar todas las soluciones enteras no negativas.

34. Una compañía aérea transporta tres tipos de carga: *I*, *II* y *III*. Cada unidad de tipo *I* pesa 2 kilogramos, requiere 5 pies cúbicos de espacio y vale \$10. Cada unidad de tipo *II* requiere 2 pies cúbicos de espacio, pesa 3 kilogramos y vale \$40. En tanto que cada unidad de tipo *III* vale \$60, pesa 1 kilogramo y requiere 4 pies cúbicos de espacio. Si un avión transportó carga por un valor de \$13500, que ocupó 1050 pies cúbicos de espacio y pesó 550 kilogramos, hallar cuántas unidades de cada tipo se trasportaron.
35. En la siguiente figura se ilustra una red de calles y los números indican la cantidad de autos por hora que salen o entran (según sea el sentido de las flechas) de las intersecciones. Así por ejemplo, en una de las intersecciones, en una hora, ingresan x_1 y x_2 autos y salen 400 autos por una de las calles y 400 por otra.



Si se considera que todos los autos que ingresan a cada una de las intersecciones deben salir.

- Plantear un sistema de ecuaciones lineales que relacione las variables x_1 , x_2 , x_3 y x_4 .
- Resolver el sistema planteado.

5 Interpolación polinómica

En muchas ocasiones se tiene una serie de puntos en el plano y lo deseable es encontrar una función cuya gráfica pase por dichos puntos. En el caso que esta función es un polinomio es el tema que trataremos en este capítulo.

Problema: Dados $n + 1$ puntos diferentes

t_x	x_0	x_1	\dots	x_n
t_y	y_0	y_1	\dots	y_n

con $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Se trata de encontrar un polinomio P de menor orden posible que interpole dichos puntos, es decir,

$$P(x_k) = y_k$$

para $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

En este capítulo incluimos el tratamiento de polinomios con **Matlab**.

5.1. Polinomios

En **Matlab** se puede implementar polinomios de forma sencilla, un polinomio es un vector cuyos componentes son coeficientes del polinomio, en que el orden de los coeficientes va de mayor a menor grado.

Ejemplo 34. Si queremos representar el polinomio $p(x) = x^2 - 1$ bastará ingresar sus coeficientes en orden del mayor a menor grado y asignarlo a una variable, por ejemplo p , es:

```
>> p = [1 0 -1]
p = 1 0 -1
```

Matlab incluye una serie de funciones para operar polinomios cuando se representan de esta manera, las más importantes son:

Comando	Función
roots	Cálculo de las raíces de un polinomio
poly	Construye un polinomio con unas raíces específicas
polyval	Evalúa un polinomio
conv	Producto de dos polinomios
deconv	Cociente de dos polinomios

Por ejemplo:

```
>> p = [1 5 6] % x^2+5*x+6
p = 1 5 6
>> q = [1 3] % x + 3
q = 1 3
```

Para evaluar el polinomio p en el punto $x = -1$, usamos la función **polyval**:

```
>> polyval(p,-1) % Evalua el polinomio p en x= -1
ans = 2
```

Para hallar las raíces del polinomio p, usamos la función **roots**

```
>> roots(p) % Raices del polinomio p
ans =
-3
-2
```

Para multiplicar el polinomio p con el polinomio q usamos **conv**:

```
>> conv(p,q) % Producto de p por q
ans = 1 8 21 18
```

Por ejemplo, para obtener el polinomio cociente y polinomio residuo de la división de p entre q utilizamos la función **deconv**

```
>>[C,R] = deconv(p,q) %C cociente , R residuo de dividir p entre q
C = 1 2
R = 0
```

La función **poly(v)** construye un polinomio a partir de sus raíces. Retorna un vector cuyos elementos son los coeficientes del polinomio cuyas raíces son los elementos de v. Puede apreciarse que **roots** y **poly** son funciones inversas.

```
>> raices = roots(p)
raices = 2 -3
>> R =poly(raices)
R = 1 5 6
```

Para sumar y restar polinomios usando esta representación vectorial sólo hay que tener cuidado de que ambos vectores tengan el mismo tamaño. Si los polinomios son de distinto grado y por lo tanto su representación en forma de vector es de diferente longitud, para sumarlos o restarlos habrá que completar el vector de menor tamaño con ceros a la izquierda. Por ejemplo

```
>> p = [ 2 1 0 5 ];
>> q = [ 3 4 ];
>> p + [0 0 q]
ans = 2 1 3 9
```

Ejemplo 35. Dado los polinomios

$$p(x) = (\sqrt{7}x^5 - 3\pi x^3 + 2x^2 - 5)(\pi x^2 - \sqrt{3}x + 2) + 4x^4 - 3\sqrt{5}x^3 - 2x + 7$$

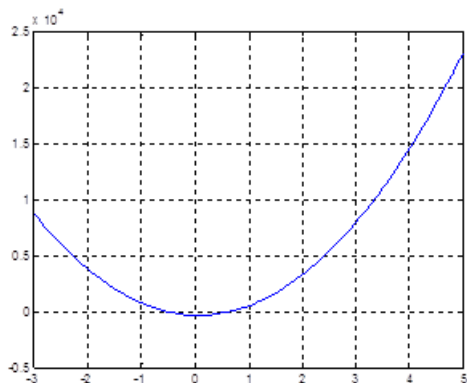
$$q(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

Escriba los comandos **Matlab** que permitan:

- Graficar el polinomio residuo que resulta de dividir p entre q . Trace un bosquejo de su gráfica
- Hallar las raíces de este polinomio residuo, muestre todas las raíces (con 4 decimales).

Solución.

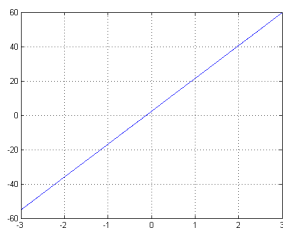
```
>> a=[sqrt(7) 0 -3*pi 2 0 -5];
>> b=[pi -sqrt(3) 2];
>> c=[4 -3*sqrt(5) 0 -2 7];
>> p=conv(a,b)+[0 0 0 c];
>> q=[1 -3 0 1];
>> [c,r]=deconv(p,q);
>> x=-3:0.1:5;
>> y=polyval(r,x);
>> plot(x,y), grid
>> roots(r)
ans = 0.6612
      -0.5343
```



Ejemplo 36. Escribir los comandos que permitan graficar el residuo de la división del polinomio $p(x) = (x^3 + 3x^2 - 2x + 5)(\sqrt{3}x^3 - \pi x^2 + 3)$, con el polinomio $q(x) = 2x^2 + x - 1$ en el intervalo $[-3, 3]$, mostrar el polinomio residuo en su forma polinómica y trazar un bosquejo de su gráfica.

Solución.

```
>> p1=[1 3 -2 5];
>> p2=[sqrt(3) -pi 0 3];
>> q=[2 1 -1];
>> D=conv(p1,p2);
>> [c r]=deconv(D,q)
c = 0.86602540378444 0.59426718266620 -6.30856067739445
12.42313360254231 -12.71982877394286
r = 19.14296237648517 2.28017122605714
>> x=-3:0.01:3;
>> y=polyval(r,x);
>> plot(x,y),grid
```



Ejemplo 37. Graficar y hallar las raíces del polinomio p en el intervalo $[-5, 5]$, si

$$q(x) = x^5 - 3x^3 + 5x - 2$$

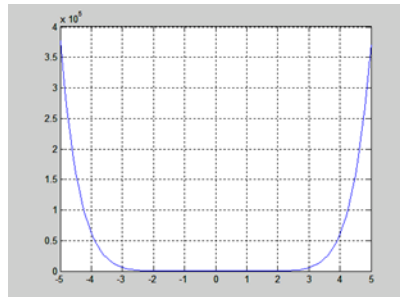
$$r(x) = x^7 - 3x^3 + 5$$

$$s(x) = x^3 + 2x - 1.$$

- $p(x) = q(x)s(x) + t(x)$, donde $t(x)$ es el residuo que resulta de dividir $r(x)$ con $s(x)$.
- $p(x) = t(x)(x^2 - 3) + q(x)$, donde $t(x)$ es el cociente de la división de $r(x)$ con $s(x)$.
- $p(x) = r(x)t(x) - s(x)$, donde $t(x)$ es el residuo de la división de $r(x)$ con $q(x)$.

Solución.

```
a. >> q=[1 0 -3 0 5 -2];
>> r=[1 0 0 0 -3 0 0 5];
>> s=[1 0 2 -1];
>> [c, t]=deconv(r, s)
c = 1 0 -2 1 1
t = 0 0 0 0 0 -4 -1 6
>> w=conv(q, s)
w = 1 0 -1 -1 -1 1 10 -9 2
>> t=[0, t]
t = 0 0 0 0 0 0 0 -4 -1 6
>> p=w+t
p = 1 0 -1 -1 -1 1 6 -10 8
>> x=-5:0.1:5;
>> y=polyval(p, x);
>> plot(x, y), grid
```

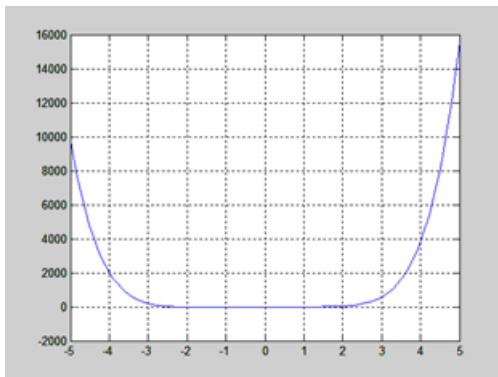


b.

```

>> q=[1 0 -3 0 5 -2];
>> r=[1 0 0 0 -3 0 0 5];
>> s=[1 0 2 -1];
>> z=[1 0 -3];
>> t=deconv(r,s)
t = 1 0 -2 1 1
>> w=conv(t,z)
w = 1 0 -5 1 7 -3 -3
>> q
q = 1 0 -3 0 5 -2
>> q=[0 ,q]
q = 0 1 0 -3 0 5 -2
>> p=w+q
p = 1 1 -5 -2 7 2 -5
>> x=-5:0.1:5;
>> y=polyval(p,x);
>> plot(x,y),grid

```



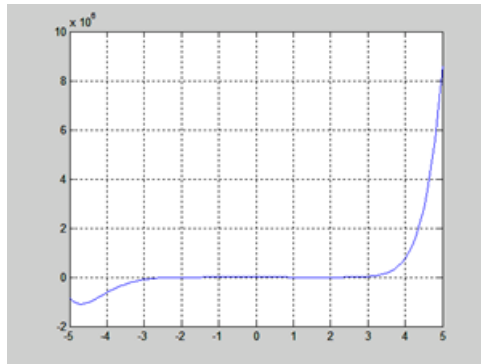
c.

```

>> [c,t]=deconv(r,q)
c = 1 0 3
t = 0 0 0 0 1 2 -15 11
>> w=conv(r,t)
w = 0 0 0 0 1 2 -15 11 -3 -6 45 -28 10 -75 55
s = [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 2 -1];
>> p=w-s
p = 0 0 0 0 1 2 -15 11 -3 -6 45 -29 10 -77 56
>> x=-5:0.1:5;

```

```
>> y=polyval(p,x);
>> plot(x,y),grid
```



Ejemplo 38. Sea

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})(x_k-x_n)}$$

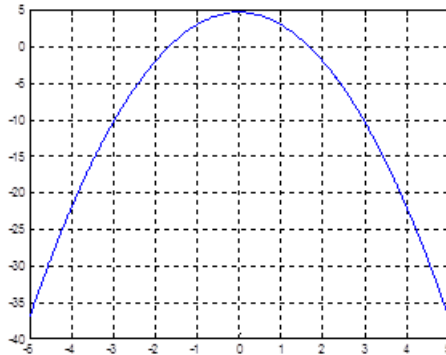
Si $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ y si además $y_0 = -2$, $y_1 = 3$, y $y_2 = 3$.

- Construir el polinomio $P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$.
- Graficar el polinomio $p(x)$ en el intervalo $[-5, 5]$.
- Hallar $p(0)$.
- Hallar las raíces de p .

Solución.

```
>> x0=-2;
>> x1=1;
>> x2=-1;
>> y0=-2;
>> y1=3;
>> y2=3;
>> y3=3;
>> p0=poly([x1,x2]);
>> d0=poly(p0,x0);
>> p1=poly([x0,x2]);
>> d1=poly(p1,x1);
>> p2=poly([x0,x1]);
```

```
>> d2=poly(p2,x2]);
>> p=y0*p0/d0+y1*p1/d1+y2*p2/y2;
>> x=-5:0.01:5;
>> y=polyval(p,x);
>> plot(x,y), grid on
```



```
>> P=polyval(p,0)
P =4.6667
>> roots(p)
ans = 1.6733
      -1.6733
```

5.2. Polinomios de interpolación de Lagrange

Por lo general se conoce una expresión matemática que relaciona dos variables como $y = f(x)$ a partir de esta relación podemos encontrar valores de y para distintos valores de x . Sin embargo, ¿qué sucede si conocemos puntos (x, y) en forma de tabla, pero no conocemos la expresión matemática que relaciona x con y ? ¿Cómo encontrar una función que pase por dichos puntos?

La interpolación responde a esta pregunta, en particular la interpolación polinómica encuentra el polinomio cuya gráfica pasa por estos puntos.

Problema: Dados $n+1$ puntos diferentes $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$; donde $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Trataremos de encontrar el polinomio P de menor grado posible que interpole dichos puntos, es decir, $P(x_k) = y_k$, para $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Lagrange respondió a esta pregunta y a continuación esbozamos la manera cómo encontró tal polinomio. Supongamos que deseamos interpolar los puntos:

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ donde $x_0 < x_1 < x_2$ asumamos que el polinomio P es de la forma:

$$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2,$$

donde $L_0 = L_0(x)$, $L_1 = L_1(x)$, $L_2 = L_2(x)$ son polinomios. Para que $P(x_0) = y_0$, L_1 y L_2 deben anularse en x_0 , pero L_0 en x_0 debe ser igual a 1 de esta forma se garantiza que $P(x_0) = y_0$. De igual forma para que $P(x_1) = y_1$, L_1 y L_2 deben anularse en x_1 , pero L_1 en x_1 debe ser igual a 1. También $P(x_2) = y_2$, esto se logra si L_0 y L_1 se anulan en x_2 , pero L_2 en x_2 debe ser igual a 1. En resumen: $L_k(x_j) = 0$ si k es diferente a j y debe ser igual a 1 si $k = j$ o $L_k(x_j) = \delta_{k,j}$ conocido como el delta de Kronecker.

Ahora bien, para que el polinomio L_0 se anule en x_1 y x_2 , debe ser de la forma $(x - x_0)(x - x_1)$ y para que L_0 sea igual a 1 en x_0 , L_0 debe ser:

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

Se comprueba que L_0 definido de esta manera se anula en x_1 y x_2 pero L_0 en x_0 es 1 pues el numerador y el denominador de esta expresión son iguales cuando $x = x_0$.

En forma similar:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ L_2 &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

De esta forma se tiene que el polinomio P pedido será:

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2$$

Fácilmente se generaliza este resultado y se tiene que el polinomio P que interpola a $n + 1$ puntos es de la forma:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n L_k y_k = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

P se llama polinomio de interpolación de Lagrange y los polinomios L_k se llaman coeficientes de Lagrange.

Ejemplo 39. Encontrar el polinomio que interpola los puntos que se encuentran en la tabla siguiente:

x	1	3	4
y	2	5	3

Solución.

$$P(x) = L_0 2 + L_1 5 + L_2 3,$$

donde

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6}(x-3)(x-4) \\ L_1 &= \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} = -\frac{1}{2}(x-1)(x-4) \\ L_2 &= \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = \frac{1}{3}(x-1)(x-4); \end{aligned}$$

luego

$$P(x) = \frac{2}{6}(x-3)(x-4) - \frac{5}{2}(x-1)(x-4) + \frac{3}{3}(x-1)(x-4).$$

Para implementar este algoritmo en **Matlab** usaremos la función **poly**:

```
function p=lagrange ( xtab , ytab )
p=0;
n=length ( xtab );
for k=1:n
    raices=[];
    for j=1:n
        if j~=k
            raices=[ raices , xtab ( j ) ];
        end
    end
    l=poly ( raices );
    l=l / polyval ( l , xtab ( k ) );
    p=p+l * ytab ( k );
end
```

Usando el ejemplo anterior, la forma de usar este algoritmo sería el siguiente:

```
>> xtab=[1    3    4];
>> ytab=[2    5    3];
>> p=lagrange ( xtab , ytab )
```

y tendremos los coeficientes del polinomio de interpolación en forma de vector.

Ejemplo 40. Hallar el polinomio $p(x)$ que coincide con la función $f(x) = x^2 \cos(\pi - x)$ en los puntos $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$, mostrando paso a paso su obtención; luego determine $P(\frac{\pi}{4})$.

Solución.

En primer lugar, tabulamos los puntos

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f(x)$	-0.2374	0	5.9356

En seguida, hallaremos el polinomio de interpolación de Lagrange:

$$P(x) = \frac{(x - \frac{\pi}{2})(x - \frac{5\pi}{6})}{(-1.047197)(-2.0944)}(-0.2374) + \frac{(0)(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{5\pi}{6})}{(1.047197)(-1.047197)} \\ + \frac{(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{2})}{(2.0944)(1.047197)}(5.9356).$$

Luego, $p(x) = -0.10825(x - \frac{\pi}{2})(x - \frac{5\pi}{6}) + 2.706329(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{2})$.

Por lo tanto, $P(\frac{\pi}{4}) = -0.712277344720507$.

Ejemplo 41. Dado los puntos:

x	$-2a$	$-a$	a	$2a$
y	3	5	2	8

- Hallar el polinomio p de Lagrange que interpola dichos puntos.
- Encontrar el valor de $p(0)$.

Solución.

$$p(x) = \frac{(x+a)(x-a)(x-2a)}{(-a)(-3a)(-4a)}3 + \frac{(x+2a)(x-a)(x-2a)}{(a)(-2a)(-3a)}5 \\ + \frac{(x+2a)(x+a)(x-2a)}{(3a)(2a)(-a)}2 + \frac{(x+2a)(x+a)(x-a)}{(4a)(3a)(a)}8 \\ = -\frac{1}{4a^3}(x+a)(x-a)(x-2a) + \frac{5}{6a^3}(x+2a)(x-a)(x-2a) \\ - \frac{1}{3a^3}(x+2a)(x+a)(x-2a) + \frac{2}{3a^3}(x+2a)(x-a)$$

Por lo tanto, en el ítem b) tendremos:

$$p(0) = -\frac{2a^3}{4a^3} + \frac{20a^3}{6a^3} + \frac{4a^3}{3a^3} - \frac{4a^3}{3a^3} = -\frac{1}{2} + \frac{10}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{17}{6} = 2.8\bar{3}.$$

5.3. Polinomio de interpolación de Newton

¿Qué sucede si se desea encontrar otro polinomio Q que coincida con P en estos primeros $n + 1$ puntos pero además pase por un punto adicional como por ejemplo (x_{n+1}, y_{n+1}) ? Si usamos el método de Lagrange, esto implica recalculer todos los coeficientes de Lagrange desde L_0 hasta L_n y además hallar L_{n+1} , esto significa demasiado esfuerzo de cálculo. Newton ideó una solución a este problema. El polinomio Q que coincide con P en los $n + 1$ primeros puntos debe ser de la forma

$$Q(x) = P(x) + kR(x).$$

Para que Q coincida con P en esos $n + 1$ puntos, R debe anularse en x_0, x_1, \dots, x_n , es decir, todo estos valores deben ser sus raíces, luego $R(x)$ debe ser de la forma $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, además para que $Q(x_{n+1}) = y_{n+1}$, k debe tener un valor especial, debe ser tal que

$$Q(x_{n+1}) = y_{n+1} = P(x_{n+1}) + K(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)$$

despejando K tenemos:

$$K = \frac{y_{n+1} - P(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n)}$$

Podemos emplear esta forma de trabajo para hallar el polinomio que interpola $n + 1$ puntos.

Ejemplo 42. Encontrar el polinomio que interpola los puntos que se encuentran en la siguiente tabla:

x	1	3	4
y	2	5	3

usando el método de Newton.

Solución.

Sea P_0 el polinomio de menor grado que interpola al primer punto de la tabla, es decir al punto $(1, 2)$. Este polinomio debe ser el polinomio constante

$$P_0(x) = 2.$$

Ahora encontremos el polinomio P_1 que coincide con P_0 pero además pasa por el punto $(3, 5)$, usando el método de Newton, el polinomio

$$P_1 = P_0(x) + K_1(x - 1) = 2 + K_1(x - 1).$$

Pero $P_1(3) = 5 = 2 + K_1(3-1)$ despejando K_1 se tiene $K_1 = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$. Luego

$$P_1(x) = 2 + \frac{3}{2}(x-1).$$

Por último, encontremos el polinomio P_2 que coincide con P_1 en $x=1$ y $x=3$, pero además cuya gráfica pase por $(4,3)$; es decir, por el método de Newton

$$P_2(x) = P_1(x) + K_2(x-1)(x-3),$$

pero como

$$\begin{aligned} P_2(4) &= 3 \\ &= P_1(4) + K_2(4-1)(4-3) \\ &= 2 + \frac{3}{2}(4-1) + K_2(4-1)(4-3) \\ &= 2 + \frac{9}{2} + K_2(3)(1), \end{aligned}$$

despejando K_2 se tiene

$$K_2 = ((3-2) - \frac{9}{2}) / ((3)(1)) = -\frac{7}{6},$$

luego,

$$P_2(x) = 2 + \frac{3}{2}(x-1) - \frac{7}{6}(x-1)(x-3)$$

que es justamente el polinomio Q pedido.

La implementación del algoritmo de newton es la siguiente:

```
function Y=newtonp(x0,y0,x);
n=length(x0);
p=zeros(1,n);
for k=1:n
    t=1;
    for j=1:n;
        if j~=k
            r(t)=x0(j);
            t=t+1;
        end
    end
    l=poly(r);
    l=l/polyval(1,x0(k));
    p=p+y0(k)*l;
end
y=polyval(p,x);
```

Observación 4. Al usar los métodos de Lagrange y el de Newton, los polinomios de interpolación serán los mismos. Esto no es una coincidencia, pues el polinomio de menor grado que interpola un conjunto de puntos es único.

Ejemplo 43. Hallar el polinomio p que interpola los puntos:

tx	1	2	3	4
ty	5	1	2	-1

Usando Lagrange:

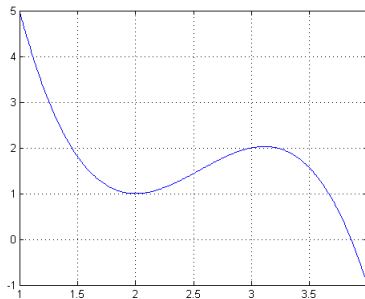
```
tx = [1 2 3 4];
ty = [5 1 2 -1];
Q=lagrange(tx,ty)
Q =
    -1.5000    11.5000   -28.0000    23.0000
```

Usando Newton

```
P = pnewton(tx,ty)
P =
    -1.5000    11.5000   -28.0000    23.0000
```

Para trazar la gráfica de P en el intervalo $[1,4]$:

```
x = 1:0.01:4;
y = polyval(P,x);
plot(x,y), grid
```



El polinomio de Newton de grado n es:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \left(b_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \right) \\
 &= b_0 + b_1 (x - x_0) + \dots + b_n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),
 \end{aligned}$$

donde las diferencias divididas son:

$$b_0 = f(x_0),$$

$$\vdots$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}.$$

En particular, el polinomio de Newton de grado 1 es:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) \\ &= f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0), \end{aligned}$$

donde

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Además, el polinomio de Newton de grado 2 es:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1), \end{aligned}$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0};$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}.$$

Ejemplo 44. Hallar el polinomio de Newton de grado $P_2(x)$ que coincide con la función $f(x) = x \sin(\pi - x)$ en los puntos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, mostrando paso a paso su obtención; luego determine $P_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Solución.

Notemos que el polinomio de Newton de grado 2 deseado es:

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 0.555360367269796 + 1.292893218813453 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &\quad - 0.998879082516293 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.030763206402592$.

5.4. Spline

Con los métodos de interpolación polinómica estudiados hasta ahora si los puntos a interpolar son muchos, el polinomio de interpolación generalmente tiene alto grado, esto hace bastante inestables los cálculos por la presencia de potencias altas. Una spline es una curva continua construida de modo que interpole una serie de puntos. La curva entre cada par de puntos es un polinomio de tercer grado, calculado de forma tal que el empalme entre todos los puntos sea de forma continua y suave (diferenciable). Esta forma de interpolar puntos presenta la ventaja de ser bastante estable por la presencia de polinomios de grado tres. En **Matlab**, la interpolación por *spline cúbica* se calcula con la función **interp1** usando un argumento que indica la interpolación de tipo spline:

`y = interp1(tx, ty, x, 'spline')`

tx son las abscisas de los puntos por donde debe pasar la curva, ty son las ordenadas de los puntos por donde pasa la curva, x es la abscisa del nuevo punto que se desea conocer su ordenada, y es la ordenada del punto cuya abscisa es x hallada por interpolación, spline es el argumento que especifica la modalidad de interpolación.

Ejemplo 45. Usar **spline**, para hallar $f(2.5)$ donde $f(x)$ es el polinomio que interpola los puntos

x	1	1.5	2	2.8
y	3	5	2	7

Solución.

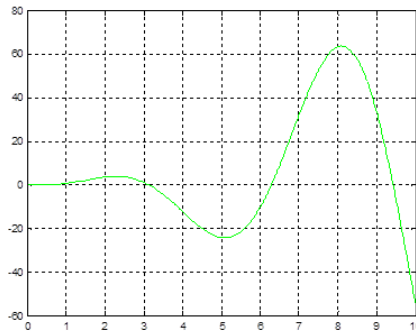
```
function y= laboInterpolacion(x)
xx=[1 1.5 2 2.8];
```

```
yy=[3 5 2 7];
y=interp1(xx,yy,x,'spline');
>> laboInterpolacion(2.5)
ans =2.092948717948719
```

Ejemplo 46. Graficar el polinomio $p(x)$ que coincide con la función $g(x) = x^2 \sin(\pi - x)$ en los puntos $x = 0 : 0.01 : 10$.

Solución.

```
xx=0:0.01:10;
yy=(xx.^2).*sin(pi-xx);
y=interp1(xx,yy,xx,'spline');
plot(xx,y,'g'), grid on
```



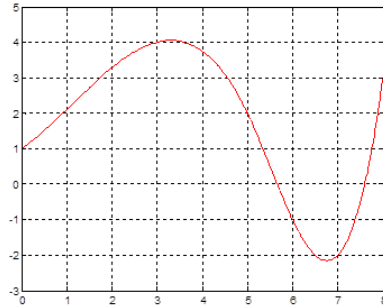
Ejemplo 47. Dados los puntos

x	0	3	5	6	8
y	1	4	2	-1	3

Escribir los comandos adecuados que permiten trazar la gráfica del polinomio p que interpola a los puntos dados. Mostrar la gráfica.

Solución.

```
x=0:0.01:8;
xx=[0 3 5 6 8];
yy=[1 4 2 -1 3];
y=interp1(xx,yy,x,'spline');
plot(x,y,'r'), grid on
```



Ejemplo 48. Determinar el polinomio p que interpola los puntos $(-0.6, f(-0.6)), (2.5, g(2.5))$, donde $f(x)$ es el polinomio que interpola los puntos

x	1	3	4	6
y	-2	-1	3	7

y donde $g(x) = x \cos(\pi - x)$.

```
function z=f(x)
xx=[1 3 4 6];
yy=[-2 -1 3 7];
z=interp1(xx,yy,x,'spline');

function w=g(x)
w=x.*cos(pi-x);

tx=[-0.6 2.5];
ty=[f(0) g(0)];
y=interp1(tx,ty,'spline')
y = 13.039999999999974 -3.700000000000000
```

5.5. Problemas propuestos

1. Definir la función **polinomioOrdenado** tal que **polinomioOrdenado** p se verifica si el polinomio p está ordenada de menor a mayor.
2. Definir la función **insertar** tal que **insertar** x p inserta el elemento x en el polinomio delante del primer coeficiente de p mayor o igual que x .

3. Graficar la suma de los polinomios $p(x) = (\sqrt{3}x^2 - \pi x - e)(x^2 - \sqrt{2})$ con el polinomio mónico $q(x)$ que tiene como raíces: $-\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi, 4, 2e$ en el intervalo $[-5, 5]$.
4. Escribir los comandos que permitan graficar el residuo de la división del polinomio $p(x) = (3x^2 + 2\pi)(\sqrt{3}x - \pi x^2 + 3) + x^4 - \sqrt{7}x - 1$, con el polinomio $q(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[-4, 4]$.
5. Escribir los comandos que permitan graficar el residuo de la división del polinomio $p(x) = (3x^2 + 2\pi)(\sqrt{3}x^3 - \pi x^2 + 3) + x^4 - \sqrt{7}x - 1$, con el polinomio $q(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[-4, 4]$, mostrar el polinomio residuo en su forma polinómica y trazar un bosquejo de su gráfica.
6. Escribir los comandos en **Matlab** que permitan graficar el polinomio residuo que resulta de dividir el polinomio:

$$p(x) = (x^3 - \sqrt{2}x^2 + \pi x - 1) (\sqrt{3}x^3 + 3x - 1) - x^4 + \pi x^2 - 2$$

con el polinomio $q(x) = x^2 - x + \pi$ en el intervalo $[-3, 3]$.

7. Dado los polinomios

$$p(x) = (x^5 - \sqrt{2}x^3 + \pi x^2 - 3.456) (3\sqrt{2}x^2 - 2x + 3\pi) - x^6 - 2.35x^3 + 7.8x - 2\pi$$

$q(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Escribir los comandos que permitan

- a) Hallar las raíces del polinomio p .
 - b) Graficar el polinomio residuo de la división de p entre q en el intervalo $[-3, 3]$.
8. Dado el polinomio: $p(x) = (x-1)(x-1)(x-2)\dots(x-n) + x^n - 1$.
 - a) Escribir una función que permita generar el polinomio p para cualquier n .
 - b) Escriba los comando en **Matlab** que tracen su gráfica en el intervalo $[-3, 3]$ para cuando $n = 5$.
 9. Dado el polinomio: $p(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n) - 1 - x^n$.
 - a) Escribir una función que permita generar el polinomio p para cualquier n .

- b) Escriba los comando en **Matlab** que tracen su gráfica en el intervalo $[-3, 3]$ para cuando $n = 5$.

10. Sea $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2; y_0 = 2, y_1 = 4, y_2 = 1$, y los polinomios:

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2,$$

$$q(x) = (x^2 - \sqrt{2}) (\pi x^3 + \sqrt{3}x - 1) - (x + \sqrt{2}) (x-3)(x+4) (x - \sqrt{2}).$$

Escribir los comandos para:

- Hallar p .
- Hallar q .
- Hallar el residuo de la división de q entre p .
- Trazar el cociente de la división de q entre p en el intervalo $[-5, 5]$.

11. Sea $x_0 = 3, x_1 = -1, x_2 = 2; y_0 = 3, y_1 = 5, y_2 = 4$, y los polinomios:

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2,$$

$$q(x) = (x^2 - \sqrt{2}) (\pi x^3 + 2x - 1) - (x^2 - 1) (x-3)(x+4) (x - \sqrt{2}).$$

Escribir los comandos para:

- Hallar p .
- Hallar q .
- Hallar el residuo de la división de p entre q .
- Trazar el cociente de la división de p entre q en el intervalo $[-5, 5]$.

12. Sea $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; $y_0 = 3$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$, y los polinomios

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2,$$

$$q(x) = (x^2 - \sqrt{2})(\pi x^3 - x - 1) \\ - (x+2)(x+3)(x+4)(x-5)(x-1)(x+\sqrt{3}).$$

Escribir los comandos:

- Hallar p .
- Hallar q .
- Hallar el cociente de la división de q entre p .
- Trazar el residuo de la división de q entre p en el intervalo $[-5, 5]$.

13. Sea $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; $y_0 = 2$, $y_1 = 4$, $y_2 = 1$, y los polinomios:

$$q(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2,$$

$$p(x) = (x^2 - \sqrt{2})(\pi x^3 - x - 1) \\ - (x-2)(x-3)(x+4)(x-\sqrt{2}).$$

Escribir los comandos para:

- Hallar p .
- Hallar q .
- Hallar el residuo de la división de q entre p .
- Trazar el cociente de la división de q entre p en el intervalo $[-5, 5]$.

14. Implementar el algoritmo de interpolación polinómica de Lagrange con la siguiente interfaz: **function p = lagrange(tx,ty)**, donde tx y ty son las abscisas y ordenadas correspondientes de los puntos a interpolar y p es el polinomio de Lagrange en forma de vector.
15. Si ya está implementada la función **Lagrange** (xt, yt, x), que permite evaluar el polinomio p en el punto x , siendo p el polinomio que interpola los puntos cuyas abscisas son xt y ordenadas yt .
- Escribir los comandos en **Matlab** que permiten trazar la gráfica del polinomio p en el intervalo $[-2, 2]$ si $xt = [-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2]$, $yt = [3 \quad 5 \quad 2 \quad -1 \quad -4]$.
 - Escribir los comando en **Matlab** que permitan hallar el punto de intersección de este polinomio con el eje X .
16. Hallar una función que coincida con la función $f(x) = x \cos(x)$ en $x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ y luego calcular $f(\frac{\pi}{8})$.
17. Encontrar los puntos de intersección entre el polinomio p que interpola los puntos

$$\begin{array}{c|ccc} tx & -1 & 2 & 4 \\ \hline ty & -3 & 5 & 1 \end{array}$$

con la recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

18. Hallar el polinomio $p(x)$ que interpola los siguientes puntos, luego hallar $p(0)$.

$$\begin{array}{c|ccc} x & -a & a & 2a \\ \hline y & 4 & -1 & 3 \end{array}$$

19. Dado los puntos:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -a & a & 2a & 3a \\ \hline y & 2 & 6 & 3 & 9 \end{array}$$

- Hallar el polinomio p de Lagrange que interpola dichos puntos.
 - Encontrar el valor de $p(0)$.
20. Encontrar el polinomio p de Lagrange que interpola los puntos. Luego hallar el valor de $p(0)$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} t_x & -a & a & 2a & 3a \\ \hline t_y & 5 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

21. Encontrar el polinomio p de Lagrange que interpola los puntos. Luego hallar el valor de $p(0)$.

t_x	$-2a$	$-a$	a	$2a$
t_y	2	3	1	5

22. Encontrar el polinomio p de Lagrange que interpola los puntos. Luego hallar el valor de $p(0)$.

t_x	$-3a$	$-2a$	$-a$	a
t_y	5	1	3	2

23. Encontrar el polinomio p de Lagrange que interpola los puntos. Luego hallar el valor de $p(0)$.

t_x	$-a$	a	$2a$	$3a$
t_y	4	5	1	3

24. Si ya está implementada la función **Pnewton**(xt, yt, x), que permite evaluar el polinomio p en el punto x , siendo p el polinomio que interpola los puntos cuyas abscisas son xt y ordenadas yt según el método de Newton. Luego:

- Escribir los comandos en **Matlab** que permiten trazar la gráfica del polinomio p en el intervalo $[-3, 3]$, si $xt = [-3 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 3]$, $yt = [-5 \quad -3 \quad 1 \quad 4 \quad 7]$.
- Escribir los comando en **Matlab** que permitan hallar el punto de intersección de este polinomio con el eje X .

25. Encontrar el polinomio q que coincide con el polinomio $p(x) = x^3 - x^2 + 7$ en los puntos

tx	-1	0	1	2
ty	5	7	7	11

Pero además $q(-2) = 1$ (implementar y usar el método de Newton).

26. Usando el método de interpolación de Newton, encontrar el polinomio q que coincide con el polinomio $p(x) = 4 - x^2$ en los puntos $x = -1, 0$ y 2 , pero además que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(3, 2)$.
27. Usando el método de interpolación de Newton, encontrar el polinomio q que coincide con el polinomio $p(x) = 9 - x^2$ en los puntos $x = -1, 0$ y 2 , pero además que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(3, 2)$.

28. Sea $p(x) = x^2 - 5x + 1$, hallar el polinomio $q(x)$ que coincida con p en los valores $x = -1, 1, 2$ y pase por el punto $(3, 10)$, mostrando paso a paso su obtención; luego hallar $q(0)$.
29. Sea $p(x) = 1 + 3x - 5x^2$, hallar el polinomio $q(x)$ que coincida con p en los valores $x = -1, 1, 2$ y pase por el punto $(3, 10)$, mostrando paso a paso su obtención; luego hallar $q(0)$.
30. Dado el polinomio $p(x) = x^3 - 2x + 5$, hallar el polinomio q que coincida con p en los puntos cuyas abscisa son $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$ y además pasa por $(0, 3)$.
31. Dado el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5$, hallar el polinomio q que coincida con p en los puntos $(-1, 2), (1, 4), (2, 5), (-2, -11)$ y además pasa por $(0, -1)$.
32. Dado el polinomio $p(x) = 2 - x + x^2$. Hallar el polinomio q de menor grado posible que coincida con p en los puntos $x = -3, -2, 1$ y además $q'(0) = -2$.
33. Hallar la suma de $p(x)$, donde p es el polinomio que interpola a los puntos

$$xt = [-2 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \quad 4], \quad yt = [5 \quad 3 \quad 7 \quad -1 \quad 4];$$

para los valores de:

a) $x = [-1.5 \quad -0.5 \quad 0.5 \quad 1.5 \quad 2.5 \quad 3.5]$

b) $x = [-1 \quad -1.5 \quad -0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 2.5]$

c) $x = [-1.7 \quad -0.7 \quad 1.7 \quad 2.7].$

d) Hallar la intersección del polinomio p con la recta de ecuación:

1) $y = x$

2) $y = 2x$

3) $y = 3 - x.$

34. Dados los puntos

x	1	3	4	6
y	-2	-1	3	7

- a) Escribir los comandos adecuados que permiten trazar la gráfica del polinomio p que interpola a los puntos dados. Mostrar la gráfica.

- b) Escribir los comandos adecuados para trazar la gráfica del polinomio p' y mostrar dicha gráfica.
- c) Encontrar el valor z tal que $p'(z) = \frac{p(6)-p(1)}{6-1}$.
- d) Interpretar geométricamente el significado del problema.

35. Dados los puntos

x	0	3	5	6	8
y	1	4	2	-1	3

- a) Escribir los comandos adecuados que permiten trazar la gráfica del polinomio p que interpola a los puntos dados. Mostrar la gráfica.
- b) Escribir los comandos adecuados para trazar la gráfica del polinomio p' y mostrar dicha gráfica.
- c) Encontrar los valores z tal que $p'(z) = 0$.
- d) Interpretar geométricamente el significado del problema.

36. Usar **spline**, para encontrar el polinomio p que interpola los puntos

tx	-1	2	3	5
ty	-3	5	2	-1

y el polinomio q que interpola los puntos

tx	-1	1	4	5
ty	1	-3	-2	2

Trazar sus gráficas simultáneamente en el intervalo $[-1, 5]$, y luego encontrar sus puntos de intersección, con toda la precisión posible.

6 Integración numérica

La integración numérica nos ofrece una amplia gama de algoritmos para calcular el valor numérico aproximado de una integral definida

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Esto está motivado por la existencia de muchas funciones que a pesar de ser integrables, su cálculo usando antiderivadas resulta prácticamente imposible ya que no tienen antiderivada, existen muchos ejemplos de estas integrales:

$$\int_{-1}^1 e^{x^2} dx, \int_1^2 \ln(x^2) dx, \int_0^\pi \cos(x^2) dx, \dots$$

También es frecuente que se tenga funciones continuas pero que se las define en forma tabular, pero sin embargo necesitamos estimar su integral. Los métodos tradicionales no permiten su cálculo.

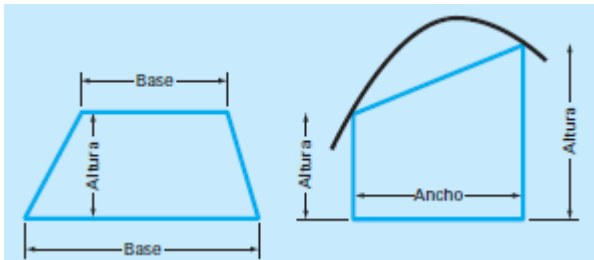
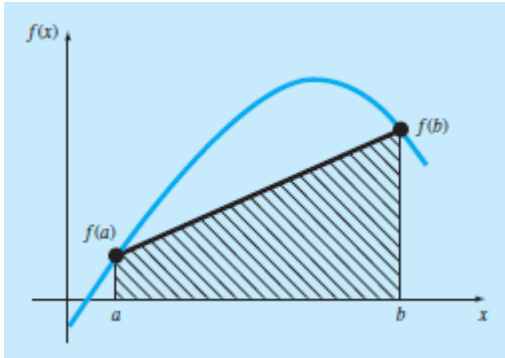
6.1. Método del trapecio

Si la función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre $[a, b]$, y los números $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ forman una partición de $[a, b]$ con intervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) + f(x_n) \right],$$

donde n es previamente establecido y $f(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$.

Geométricamente, el método del trapecio es equivalente a aproximar el área de la región por debajo de la gráfica de f por el área del trapecio bajo la línea recta que une $f(a)$ y $f(b)$.



Ejemplo 49. Escribir el algoritmo del trapecio con la siguiente interfaz:

function area=trapecio (fun , a , b , n)

donde **fun** es la función que se desea integrar, a y b son los límites inferior y superior de integración, n es el número de divisiones del intervalo $[a, b]$ que usa el método del trapecio. Probarlo con la siguiente integral $\int_0^4 x \sin(x+2) dx$, para $n = 8$.

Solución.

function y=funr (x)

y=x.*sin (x+2);

function A=trapecio (fun , a , b , n)

h=(b-a)/n;

s=0;

for k=1:n-1

s=s+feval (fun , a+k*h);

end

A=(feval (fun , a)+feval (fun , b)+2*s)*h/2;

>> trapecio ('funr' , 0 , 4 , 8)

ans = -4.974122003042410

Ejemplo 50. Calcular la siguiente integral $\int_1^2 \ln(x) dx$, usando el método del trapecio con $n = 6$.

Solución.

Notemos que, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{6}$ y $x_i = a + ih = 1 + \frac{i}{6}$, $0 \leq i \leq 6$.

Tabulando, obtenemos:

x_i	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{6}$	2
$f(x_i)$	0	0.1542	0.2877	0.4055	0.5108	0.6061	0.6931

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(x) dx &= \left(\frac{1}{2}\right) [f(1) + 2f\left(\frac{7}{6}\right) + 2f\left(\frac{4}{3}\right) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\quad + 2f\left(\frac{5}{3}\right) + 2f\left(\frac{11}{6}\right) + f(2)] = 0.3851. \end{aligned}$$

6.2. Método de Romberg

La integración de Romberg se empieza, usando el método del trapecio con $n = 2^{i-1}$ con $1 \leq i \leq m$; de donde nos permite determinar los valores $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{3,1}$ y $R_{4,1}$; luego el resto de valores se calculan siguiendo la siguiente regla:

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1} R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}.$$

Ejemplo 51. Escribir el algoritmo de romberg con la siguiente interfaz:

function area=romberg (fun , a , b , **error**)

donde **fun** es la función que se desea integrar, a y b son los límites inferior y superior de integración, error es la aproximación deseada.

Probarlo calculando las siguientes integrales:

a. $\int_1^2 \ln(x) dx$

b. $\int_{-1}^1 \ln(1+x^2) dx$

c. $\int_0^4 f(x) dx$, donde $f(x)$ es el polinomio que interpola los puntos .

x	0	1	2	3	4
y	0	7	2	5	0

Solución.

```
function y=funr(x)
y=log(x);
```

```
function y=funr(x)
y=log(x);
function A=romberg(fun,a,b,error)
r(1,1)=trapecio(fun,a,b,1);
r(2,1)=trapecio(fun,a,b,2);
r(2,2)=(4*r(2,1)-r(1,1))/3;
i=2;
while abs(r(i,i)-r(i,i-1))>=error
    i=i+1;
r(i,1)=trapecio(fun,a,b,2^(i-1));
    for j=2:i
        r(i,j)=(4^(j-1)*r(i,j-1)-r(i-1,j-1))/(4^(j-1)-1);
    end
end
A=r(i,i);
```

```
>> romberg('funr',1,2,0.000000000001)
ans =0.386294361119623
function y=funr(x) y=log(1+x.^2);
>> romberg('funr',-1,1,0.000000000001)
ans =0.527887014709689
```

```
function w=fff(x)
xx=[0 1 2 3 4];
yy=[0 7 2 5 0];
w=interp1(xx,yy,x,'spline');
```

```
function z=funIntegranterfff(x)
z=fff(x);
>> romberg('funIntegranterfff',0,4,0.000000000001)
ans =17.33333333333329
```

Ejemplo 52. Usando el método de Romberg hallar la integral $\int_0^2 \sqrt{x}e^{-x}$ con un error menor a 0.001, anotar los resultados intermedios en una tabla.

Solución.

i	n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}
1		0.1914			
2		0.4636	0.5543		
3		0.5829	0.6226	0.6272	
4		0.6286	0.6439	0.6453	0.6456

Por lo tanto, la integral pedida es: 0.64555257 .

Ejemplo 53. Usando el método de Romberg, hallar el área comprendida entre las gráficas $y = \sqrt{8x}$, $y = x^2$ con cuatros decimales exactos. Los cálculos intermedios póngalos en una tabla.

Solución.

i	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}
1	0			
2	1.8284	2.4379		
3	2.3963	2.5855	2.5954	
4	2.5775	2.6380	2.6415	2.6422

Ejemplo 54. Usando el método de Romberg hallar la integral $\int_0^2 \sqrt{x} \ln(x+1)$ con un error menor a 0.001, anotar los resultados en una siguiente tabla.

Solución.

i	n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}
1		1.5537		
2		1.4700	1.4421	
3		1.4395	1.4293	1.4284

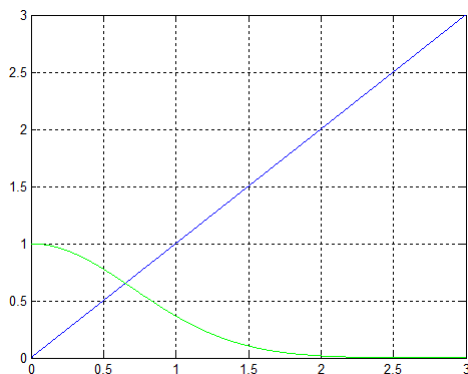
Por consiguiente, la integral pedida es: 1.428427045

Ejemplo 55. Usando el método de Romberg, hallar el área comprendida entre las gráficas $y = x$, $y = e^{-x^2}$, $x = 0$ con tres decimales exactos. Para ello:

- Graficar la región de integración.
- Hallar los puntos de intersección de las gráficas frontera.
- Calcular los valores intermedios y póngalos en la siguiente tabla.

i	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}
1				
2				
3				
4				

Solución.



Teniendo en cuenta la figura, vemos que los puntos de intersección son: $P_0(0, 0)$, $P_1(0, 1)$ y $P_2(0.6529, 0.6529)$; además, el área solicitada es:

$$A = \int_0^{0.6529} (e^{-x^2} - x) dx.$$

En seguida, usando el método de Romberg completamos la tabla solicitada.

i	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}
1	0.3264613			
2	0.35011101	0.35799426		
3	0.35584499	0.357756321	0.357740458	
4	0.35726810	0.3577424737	0.35774155056	0.35774156789

Por lo tanto, el área es:

$$A = \int_0^{0.6529} (e^{-x^2} - x) dx = 0.35774156789.$$

Ejemplo 56. Determinar el área de la región acotada por las curvas:

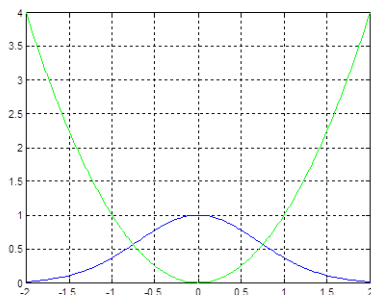
$$y = e^{-x^2}, y = x^2.$$

Solución.

```

function y=graficaL9(x)
y1=exp(-x.^2);
y2=x.^2;
plot(x,y1,'b',x,y2,'g'), grid on
>> x=-2:0.01:2;
>> graficaL9(x)

```



```

function y=funr(x)
y=exp(-x.^2)-x.^2;

>> romberg('funr',-0.7531,0.7531,0.000000000000001)
ans = 0.979263048134729

```

6.3. Problemas propuestos

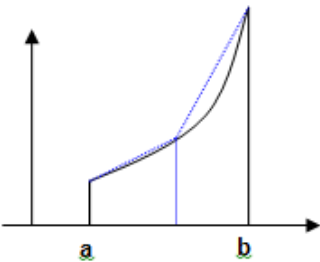
1. Hallar la siguiente integral $\int_0^2 x \ln(x+1) dx$, usando el método del trapecio con $n = 8$.

2. Usando el método del trapecio, hallar la integral $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$, con $n = 8$.

3. Hallar la siguiente integral $\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin(x^2)) dx$, usando el método del trapecio con $n = 4$.

4. Calcular la integral de la función $f(x) = 1 + x^2$ desde $a = 1$ hasta $b = 2$ en forma aproximada, usando trapecios. Para ello haga lo siguiente:

- a) Construir un trapecio que tenga como base, el intervalo $[a, b]$ y como altura, el valor de la función en $x^* = (a+b)/2$, punto medio del intervalo $[a, b]$. De esta manera tenga una primera aproximación a la integral por medio del área del trapecio.
- b) Construir dos trapecios, dividiendo el intervalo $[a, b]$ en dos partes iguales. Cada uno de los trapecios tendrá como base, la longitud de estos subintervalos, y como altura el valor de la función f en el punto medio de estos subintervalos. De esta manera tenemos una segunda aproximación a la integral sumando el área de estos dos trapecios.



c) Repetir este procedimiento, con $n = 4$ y 8 trapecios.

5. Usando el método de Romberg, calcular $\int_0^{\pi} \cos(\sqrt{x}) dx$ para ello complete la tabla. Trabajar con toda la precisión, pero mostrar los resultados con 4 decimales.

n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}
1			
2			
4			

6. Usando el método de Romberg, calcular $\int_0^{\pi/2} \cos(x^2) dx$ para ello complete la tabla. Trabajar con toda la precisión, pero mostrar los resultados con 4 decimales.

n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}
1			
2			
4			

7. Usando el método de Romberg, calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2) dx$ para ello complete la tabla. Trabajar con toda la precisión, pero mostrar los resultados con 4 decimales.

n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}
1			
2			
4			

8. Calcular la integral $\int_1^2 \ln(x^2) dx$, usando el método de Romberg con un error menor a 0.001, colocar en la tabla, los resultados intermedios, con 4 decimales.

n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}

9. Usando el método de Romberg, hallar la integral $\int_0^2 \ln(\sqrt{x} + 1) dx$ desarrollando 3 filas en la tabla:

i	n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}
1				
2				
3				

10. Calcular la integral $\int_0^2 e^{x^2} dx$, usando el método de Romberg con un error menor a 0.001, colocar en la tabla, los resultados intermedios, con 4 decimales.

n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}

11. Usando el método de Romberg, calcular $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$ para ello complete la tabla. Trabajar con toda la precisión, pero mostrar los resultados con 4 decimales.

n	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}
1			
2			
4			

12. Calcular aproximadamente la integral:

$$\int_1^3 \frac{e^x}{\sqrt{x^3}} dx$$

Usando el método de Romberg, con $h = 0.1$ y tolerancia 0.0001.

13. Usando el método de Romberg, hallar el área comprendida entre las gráficas $y = \sqrt{32x}$, $y = x^3$ con tres decimales exactos. Los cálculos intermedios póngalos en la siguiente tabla

i	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	R_{i4}

14. Usando el método de Romberg, hallar el área comprendida entre las gráficas $y = |x|e^{-x^2}$, $y = e^{-|x|}$.
15. Determinar el área de la región acotada por las curvas $x = -3$, $x = 1$, $y = \ln(x + 5)$, $y = x \operatorname{sen}(x + 4)$.
16. Escribir los **archivos.m** y luego escriba las ordenes en **Matlab** que permitan hallar el área que está debajo de la gráfica de la función $f(x) = 2e^{-x^2}$, el eje X y las rectas $x = -2$, $x = 3$. (Asumir que ya está implementadas las funciones Romberg y trapecio).

17. Definir los **archivos.m** y luego escriba las ordenes en **Matlab** que permitan calcular la integral $\int_1^3 \sqrt{x-1} f(x) dx$, donde $f(x)$ es el polinomio que interpola los puntos

x	1	1.5	2	2.8
y	3	5	2	7

18. Hallar la integral $\int_1^3 e^{-x^2} f(x) dx$, donde $f(x)$ es el polinomio que interpola los puntos:

x	1	1.5	2	3
y	5	3	-2	7

19. Definir los **archivos.m** y luego escribir las ordenes en **Matlab** que permitan calcular la integral $\int_0^e e^{-|t|} f(t) dt$, donde $x = f(t)$ es el polinomio que interpola los puntos. Muestre el resultado de la integral con 4 decimales de precisión.

t	0	0.7	1.8	2.8
x	-1	4	1	6

20. Definir los **archivos.m** y luego escriba las ordenes en **Matlab** que permitan calcular la integral $\int_0^\pi \sin(2t) f(t) dt$, donde $x = f(t)$ es el polinomio que interpola los puntos. Mostrar el resultado de la integral con 4 decimales de precisión.

t	0	0.8	1.8	3.2
x	3	5	2	7

21. Escribir los **archivos.m** y luego las ordenes en **Matlab** que permitan calcular la integral $\int_0^\pi g(t) dt$, donde $g(t) = \sin(3t) f(t)$, y $f(t)$ es el polinomio que interpola los puntos

t	0	0.8	1.8	3.4
x	1	5	4	7

22. Escribir los **archivos.m** y luego las ordenes en **Matlab** que permitan calcular la integral $\int_0^{\pi} h(t) dt$, donde $h(t) = \cos(2t)g(t)$, y $g(t)$ es el polinomio que interpola los puntos

t	0	0.9	2.8	3.5
x	1	4	3	6

7 Ecuaciones diferenciales numéricas

Las ecuaciones diferenciales sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas como: resistencia de materiales, mecánica de fluidos, hidráulica, circuitos eléctricos, flujo de calor, vibraciones, reacciones químicas y nucleares, economía, biología, etc. La razón de esta gran cantidad de aplicaciones se debe a que la derivada se puede interpretar como el índice de cambio de una variable respecto de la otra, y las variables que explican los fenómenos se relacionan entre sí por sus índices de cambio. Al expresar estas relaciones mediante símbolos matemáticos se obtiene una gran cantidad de ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales nos permiten dar tratamiento matemático a problemas, esto es considerado un gran logro para nuestra civilización.

Una **ecuación diferencial ordinaria** (EDO) es una ecuación en el que la incógnita es una función, además debe involucrar derivadas de la función incógnita. Ejemplos de ecuación diferencial son:

Ecuación diferencial	Solución
$x' = x + e^t$	$x(t) = te^t + ce^t$, c es constante
$x'' = e^t - 9x$	$x(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)$, c_1 y c_2 son constantes
$x' + \frac{1}{x} = 0$	$x(t) = \sqrt{c - t}$, c es constante

La presencia de constantes en la solución es una indicación de que, en general, una ecuación diferencial admite una colección de soluciones, en la práctica, generalmente, las ecuaciones diferenciales van acompañadas de condiciones auxiliares, que determinan soluciones específicas, por ejemplo:

Ecuación diferencial	Condición auxiliar	solución
$x' = x + e^t$	$x(0) = 2$	$x(t) = te^t + 2e^t$
$x'' = e^t - 9x$	$x(0) = 3$, $x(\frac{\pi}{2}) = -2$	$x(t) = 2\sin(3t) + 3\cos(3t)$
$x' + \frac{1}{x} = 0$	$x(1) = 0$	$x(t) = \sqrt{1 - t}$

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de técnicas numéricas para la solución de ecuaciones diferenciales que involucran solamente primera derivada de

la función incógnita, junto con una condición auxiliar. Este tipo de problemas se pueden llevar a la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (7.0.1)$$

Este problema es conocido como **problema de valor inicial** (PVI), también llamado problema de Cauchy. Un ejemplo de PVI es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^t + \sen(tx) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

en este caso $f(t, x) = e^t + \sen(tx)$.

Un aspecto teórico que debemos tener presente es: un problema de valor inicial no necesariamente tiene solución y, en caso que admita solución, esta no necesariamente es única. Afortunadamente, bajo ciertas condiciones naturales, está garantizado la existencia de solución, más aún, está garantizada la existencia de solución única. Para más detalle al respecto, sugerimos la lectura del libro (Cheney, 2011). Una buena referencia para explorar de manera más profunda este tema es el libro de (Sotomayor, 1979), en este libro, asumiremos que el problema de valor inicial en cuestión admite solución única.

En caso de ecuaciones diferenciales, existen bastantes técnicas para obtener solución exacta en forma de fórmula (explícita o implícita), aún así, existen muchas ecuaciones diferenciales cuya solución en forma de fórmula es extremadamente complicada o no se puede obtener en forma de fórmula explícitamente ni implícitamente usando las técnicas tradicionales, o a pesar de que la teoría matemática garantiza existencia de solución, esto con lleva al uso de métodos numéricos para obtener solución aproximada.

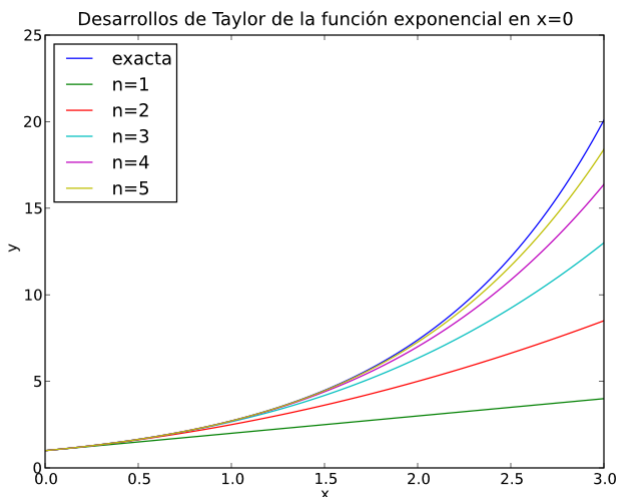
Las técnicas numéricas para resolver PVI's que presentamos están basadas en el teorema de Taylor. Informalmente, el teorema de Taylor nos dice que si para una función $x(t)$ conocemos $x(t_0)$, $x'(t_0)$, $x''(t_0)$, ..., $x^{(n)}(t_0)$, entonces, para h pequeño $x(t_0 + h)$ es aproximadamente igual a:

$$x(t_0) + \frac{1}{1!}x'(t_0)h + \frac{1}{2!}x''(t_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{(n)}(t_0)h^n$$

conocida como fórmula de Taylor de orden n alrededor de t_0 . Esta aproximación mejora a medida que aumente el valor de n .

Por ejemplo si consideramos la función exponencial $x(t) = e^t$; la fórmula de Taylor alrededor de $t_0 = 0$, para $n = 1, 2, \dots, 5$ queda:

n	Fórmula de Taylor
1	$1 + t$
2	$1 + t + \frac{t^2}{2}$
3	$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$
4	$1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$



7.1. Métodos de Taylor

En el PVI 7.0.1, $f(t, x)$ es la primera derivada de la función desconocida $x(t)$, si continuamos derivando (usando la regla de la cadena) en $x' = f(t, x)$ hasta obtener $x^{(n)}(t)$, luego, usando la fórmula de Taylor podemos obtener aproximadamente el valor de $x(t_0 + h)$ mediante:

$$x(t_0 + h) \approx x(t_0) + \frac{1}{1!}x'(t_0)h + \frac{1}{2!}x''(t_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{(n)}(t_0)h^n,$$

esta aproximación es confiable sólo para h con valores pequeños. Si deseamos aproximar $x(t_0 + 2h)$ usamos el valor de $x(t_0 + h)$ obtenido y la fórmula de Taylor alrededor de $t_0 + h$. Procediendo de la misma forma obtenemos aproximaciones de $x(t_0 + h)$, $x(t_0 + 2h)$, $x(t_0 + 3h)$, ..., $x(t_0 + kh)$. Este procedimiento es conocido como método de Taylor de orden n . El mayor defecto de este método radica en que al hallar derivadas de orden superior, el número de términos crece

demasiado, la evaluación en esta gran cantidad de términos provoca un error que descompensa la precisión esperada del método de Taylor.

7.2. Metodología de trabajo para obtener soluciones aproximadas

Para resolver el PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

en un intervalo $[a, b]$ (con $t_0 = a$) usando métodos numéricos, se estimará el valor de la solución en un número finito de puntos igualmente espaciados $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ (llamados también puntos red), las aproximaciones en los respectivos puntos serán denotados por x_0, x_1, \dots, x_n . Para hallar la solución en puntos que no están en la respuesta, se usará interpolación. El valor constante $h = t_i - t_{i-1}$ es conocido también como tamaño de paso.

7.3. Método de Euler

El método de Taylor de orden $n = 1$ es conocido como el método de Euler, aunque no es eficiente en cuanto a precisión, sin embargo es bastante simple para programar. Su ecuación de diferencia es:

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i) h,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, donde $h = \frac{(b-a)}{n}$ y $t_0 = a$.

Ejemplo 57. Aplicar el método de Euler a la ecuación diferencial ordinaria:

$$x' = f(t, x) = -tx^2, \quad x(0) = 2;$$

para calcular aproximadamente $x(1)$ con $h = 0.1$.

Solución.

En este caso la fórmula de Euler es:

$$x_{i+1} = x_i + 0.1 (-t_i x_i^2)$$

Para $i = 0$ tenemos que $t_0 = 0$ y $x_0 = 2$, de donde: $x(0.1) = 2 + 0.1 (0) = 2$.

Luego, para $i = 1$ tenemos que $t_1 = 0.1$ y $x_1 = 2$, de donde:

$$x(0.2) = 2 - 0.1(0.1)(4) = 1.96$$

y así sucesivamente se calcula los siguientes valores:

t_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x_i	2	1.96	1.8832	1.7768	1.6505

t_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1
x_i	1.5143	1.3767	1.2440	1.1202	1.0073

Por lo tanto, $x(1) \approx 1.007283952$.

El código en **Matlab** para el método de Euler con tamaño de paso h constante es:

```
function E=euler(F,a,b, ya,n)
% para resolver la EDO dy/dt=F(t,y)
h=(b-a)/n;
T=a:h:b;
Y(1)=ya;
for j=1:n
Y(j+1)=Y(j)+h*feval(F,T(j),Y(j));
end
E=[T' Y'];
end
```

Para el problema de valor inicial del ejemplo anterior obtenemos:

```
function [z]=F(t,x)
z=-t*x^2; end
```

```
>> euler('F',0,1,2,10)
ans =
0 2.000000000000000
0.100000000000000 2.000000000000000
0.200000000000000 1.960000000000000
0.300000000000000 1.883168000000000
0.400000000000000 1.776778348513280
0.500000000000000 1.650500696523457
0.600000000000000 1.514293069062236
0.700000000000000 1.376708059121641
0.800000000000000 1.244035303518107
0.900000000000000 1.120225396606156
1.000000000000000 1.007283952078028
```

Ejemplo 58. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x \ln(xt)$$

con condición inicial $x(3) = 2$. Determinar $\frac{d^2x}{dt^2}$, luego, usando el método de Taylor de orden 2, hallar $x(3.1)$ y $x(3.2)$.

Solución.

Notemos que, $\frac{dx}{dt} = f(t, x) = x \ln(xt)$, entonces por la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) \\ &= \frac{x}{xt}(x) + \left[\ln(xt) + \frac{x}{xt}(t) \right] x \ln(xt) \\ &= \frac{x}{t} + x \ln^2(xt) + x \ln(xt). \end{aligned}$$

Como

$$f_1 = f = x'_0 = f(3, 2) = 2 \ln 6$$

y

$$f_2 = x''_0 = \frac{x_0}{t_0} + x_0 \ln^2(x_0 t_0) + x_0 \ln(x_0 t_0) = 10.6710,$$

concluimos que $x(3.1) = 2.4117$. Luego,

$$x(3.2) = 2.9738$$

donde $f_1 = 4.8517$ y $f_2 = 15.3900$.

7.4. Método de Runge Kutta

El método de Runge - Kutta de orden 4 que presentamos a continuación es una adaptación del método de Taylor de orden 4, tiene la particularidad de ser eficiente prácticamente igual al de Taylor de orden 4, con la ventaja de que no se necesitan recurrir al cálculo de derivadas de orden superior.

La ecuación de diferencia del método de Runge Kutta de orden 4 es:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6} (F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4), \quad k \in \{0, \dots, n\}$$

donde:

$$\begin{aligned} F1 &= hf(t_k, x_k), \\ F2 &= hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{F1}{2}\right), \\ F3 &= hf\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{F2}{2}\right), \\ F4 &= hf(t_k + h, x_k + F3). \end{aligned}$$

Ejemplo 59. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x - 2t$$

con condición inicial $x(2) = 1$, usar el método de Runge Kutta de orden 4 para determinar $x(2.2)$.

Solución.

En primer lugar, hallaremos $x(2.1)$, para lo cual vemos que:

$$h = t_1 - t_0 = 2.1 - 2 = 0.1.$$

$$\begin{aligned} F1 &= hf(t_0, x_0) = 0.1f(2, 1) = 0.1(1 - 4) = -0.3, \\ F2 &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{F1}{2}\right) = 0.1f(2.05, 0.85) = -0.325, \\ F3 &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{F2}{2}\right) = 0.1f(2.05, 0.8375) = -0.32625, \\ F4 &= hf(t_0 + h, x_0 + F3) = 0.1f(2.1, 0.67375) = -0.352625. \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } x(2.1) = 0.6741.$$

Análogamente, hallaremos $x(2.2)$, para lo cual observamos que: $h = t_2 - t_1 = 2.2 - 2.1 = 0.1$

$$\begin{aligned} F1 &= hf(t_1, x_1) = 0.1f(2.1, 0.6741) = -0.35259, \\ F2 &= hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{F1}{2}\right) = 0.1f(2.15, 0.497805) = -0.3802, \\ F3 &= hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, x_1 + \frac{F2}{2}\right) = 0.1f(2.15, 0.484) = -0.3816, \\ F4 &= hf(t_1 + h, x_1 + F3) = 0.1f(2.2, 0.2925) = -0.4108. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_{2,2} = x(2.2) = 0.292935$.

Ejemplo 60. Usando el método de Rungen Kutta de orden 4 resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^2e^{-(t+2)},$$

$y(2) = 1$, numéricamente, mostrando en cada paso los valores de $F1, F2, F3$ y $F4$, y los valores $y(2.1)$, $y(2.2)$

t	2	2.1	2.2
y	1	1.0017	1.0033

Solución.

F1 = 0.0018
F2 = 0.0017
F3 = 0.0017
F4 = 0.0017
F1 = 0.0017
F2 = 0.0016
F3 = 0.0016
F4 = 0.0015

Ejemplo 61. Usando el método de Rungen Kutta de orden 4 resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y\ln(t^2 + 1)$; $y(1) = 2$, mostrando en cada paso los valores de $F1, F2, F3$ y $F4$, y los valores $y(1.1)$, $y(1.2)$.

t	1	1.1	1.2
y	2	2.1543	2.3437

Solución.

F1 = 0.1386
F2 = 0.1538
F3 = 0.1543
F4 = 0.1708
F1 = 0.1708
F2 = 0.1887
F3 = 0.1895
F4 = 0.2091

Ejemplo 62. Escribir el algoritmo de Rungen Kutta de orden 4 con la siguiente interfaz:

```
function x=rk4(ecua ,tx ,y0)
```

Que se usa para resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Donde: **ecua** es el nombre del archivo que contiene la función f , y define la ecuación diferencial que se desea resolver, tx es el vector de las abscisas de los puntos que se desea conocer, y_0 es la condición inicial. Probarlo con la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \ln(x + y), \quad y(2) = 3.$$

Solución.

```
function dx=ecua(x,y)
dy=log(x+y);

function x=rk4(ecua,x,y0)
n=length(t);
x(1)=x0;
for k=2:n
    h=x(k)-x(k-1);
    F1=h*feval(ecua,x(k-1),y(k-1));
    F2=h*feval(ecua,x(k-1)+h/2,y(k-1)+F1/2);
    F3=h*feval(ecua,x(k-1)+h/2,y(k-1)+F2/2);
    F4=h*feval(ecua,x(k-1)+h,y(k-1)+F3);
    x(k)=x(k-1)+(F1+2*F2+2*F3+F4)/6;
end

function y=solu(x)
tx=2:0.1:2.4;
ty=rk4('ecua',tx,2);
y=interp1(tx,ty,x,'spline');
>> x=2:0.1:2.4;
>> solu(x)
ans = 3.0000    3.1635    3.3321    3.5056    3.6838
```

7.5. Problemas propuestos

1. Dada la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = t \ln(xt)$ con condición inicial $x(2) = 3$. Determinar $\frac{d^2x}{dt^2}$, luego usando el método de Taylor de orden 2, hallar $x(2.1)$ y $x(2.2)$.

2. Dada la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = te^{-tx}$ con condición inicial $x(2) = 3$. Determinar $\frac{d^2x}{dt^2}$, luego usando el método de Taylor de orden 2, hallar $x(2.1)$ y $x(2.2)$.
3. Usar el método de Taylor de orden 2 para calcular $y(2.1)$, $y(2.2)$, si y es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}y' &= \ln(x + y) \\ y(2) &= 3.\end{aligned}$$

4. Usar el método de Taylor de orden 2 para calcular $y(3.1)$, $y(3.2)$, si y es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}y' &= x + \ln(y) \\ y(3) &= 2.\end{aligned}$$

5. Resolver la ecuación diferencial: $y' + y^2y' = -1$ si $y(0) = 1$, para $y(1)$ con $h = 0.1$. Empleando Runge-Kutta de orden 4.
6. Aplicar el método de Runge Kutta de orden 4 para hallar los valores de $x(1.1)$ y $x(1.2)$, si x es la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales. Llenar los resultados intermedios en la tabla que sigue.

$$\frac{dx}{dt} = t - x, \quad x(1) = 2$$

t	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$x(t)$
1.1					
1.2					

7. Aplicar el método de Runge Kutta de orden 4 para hallar los valores de $x(2.1)$ y $x(2.2)$, si x es la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales. Llenar los resultados intermedios en la tabla que sigue.

$$\frac{dx}{dt} = 2t - x, \quad x(2) = 3$$

t	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$x(t)$
2.1					
2.2					

8. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x - 2t$$

con condición inicial $x(3) = 1$, usar el método de Runge Kutta de orden 4 para determinar $x(3.2)$.

9. Usando el método de Runge Kutta de orden 4 resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - 2y, y(3) = 1$$

numéricamente, mostrando en cada paso los valores de $F1, F2, F3$ y $F4$, y los valores $y(3.1)$, $y(3.2)$.

10. Usando el método de Runge Kutta de orden 4 resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{du} = v^2 e^{-u+2}, v(2) = 1$$

numéricamente, mostrando en cada paso los valores de $F1, F2, F3$ y $F4$, y los valores $y(2.1)$, $y(2.2)$.

11. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{t^2 + x^2}, x(2) = 1$$

usando el método de Runge Kutta de orden 4, hallar $x(2.1)$, $x(2.2)$ para ello complete la tabla, colocando los resultados intermedios propios del método. Hacer los cálculos con toda precisión posible, pero mostrar los resultados con 4 decimales.

t_k	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$x(t_k)$
$t_1 = 2.1$					
$t_2 = 2.2$					

12. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = t\sqrt{2+x^2}, x(2) = 1$$

usando el método de Runge Kutta de orden 4, hallar $x(2.1)$, $x(2.2)$ para ello complete la tabla, colocando los resultados intermedios propios del método. Hacer los cálculos con toda precisión posible, pero mostrar los resultados con 4 decimales.

t_k	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$x(t_k)$
$t_1 = 2.1$					
$t_2 = 2.2$					

13. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x\sqrt{1+t^2}, x(3) = 2$$

usando el método de Runge Kutta de orden 4, hallar $x(3.1)$, $x(3.2)$ para ello complete la tabla, colocando los resultados intermedios propios del método. Hacer los cálculos con toda precisión posible, pero mostrar los resultados con 4 decimales.

t_k	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$x(t_k)$
$t_1 = 3.1$					
$t_2 = 3.2$					

14. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2t^2 + x^2}, x(1) = 3$$

usando el método de Runge Kutta de orden 4, hallar $x(1.1)$, $x(1.2)$ para ello completar la tabla, colocando los resultados intermedios propios del método. Hacer los cálculos con toda precisión posible, pero mostrar los resultados con 4 decimales.

t_k	$F1$	$F2$	$F3$	$F4$	$x(t_k)$
$t_1 = 1.1$					
$t_2 = 1.2$					

15. Usar el método de Runge Kutta de orden 4, para calcular $y(4.1)$, $y(4.2)$, si y es solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x}{y},$$

$$y(4) = 2.$$

16. Usar el método de Runge Kutta de orden 4, para calcular $y(4.1)$, $y(4.2)$, si y es solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x}{y},$$

$$y(4) = 3.$$

17. Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$x' = f(t, x) = -tx^2, \quad x(2) = 1$$

para obtener aproximadamente $x(3)$, con $h = 0.1$.

18. Resolver la ecuación diferencial, usando el método de Runge Kutta de orden 4

$$\frac{dx}{dt} = x \sin(t), \quad x(0) = 2$$

Si $x = x(t)$ representa la solución de la ecuación diferencial:

a) Completar la tabla:

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x					

b) Calcular: $\frac{x(\frac{\pi}{3}) + x(\frac{\pi}{4})}{x(\sqrt{2})}$.

c) Hallar la integral

$$\int_0^{\pi} tx(t) dt.$$

19. Dada la ecuación diferencial definida por:

$$\frac{dv}{du} = u \ln(v^2 + 1), \quad v(1) = 3$$

Escribir los archivos **Matlab.m** y los comandos que permitan hallar

$$\int_1^5 uv du$$

(Asumir que la función Runge Kutta de orden 4 ya está implementada).

20. Escribir los comandos para hallar la siguiente integral

$$\int_1^3 tx^2 dt$$

donde $x = x(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = t^2 - 2x, \quad x(1) = 2$$

Escriban las funciones adecuadas y consideren que las funciones Romberg y Rungen Kutta de orden 4 ya fueron implementadas. Considerar un error conveniente.

21. Escribir los comandos para hallar la siguiente integral

$$\int_1^3 t\sqrt{x}dt$$

donde $x = x(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 2x - t^2, \quad x(1) = 2$$

Escriban las funciones adecuadas y consideren que las funciones Romberg y Rungen Kutta de orden 4 ya fueron implementadas. Considerar un error conveniente.

22. Calcular la siguiente integral

$$\int_0^4 t^2\sqrt{x}dx$$

donde $x = x(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = t \operatorname{sen}(x)$ con condición inicial $x(0) = 3$.

23. Calcular la siguiente integral

$$\int_0^4 (t^2 - 1)\sqrt{x}dx$$

donde $x = x(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = t \cos(x)$ con condición inicial $x(0) = 3$.

24. Escribir los comandos **Matlab** necesarios para hallar

$$\int_0^{\pi} (2t^2 - 1) g(t) dt$$

donde $x = g(t)$ es la solución de la ecuación diferencial. Mostrar su resultado con 4 decimales

$$\begin{cases} x' = x \ln(t+2) \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

25. Escribir las órdenes en **Matlab** para calcular la siguiente integral

$$\int_0^4 y^2 dx$$

donde y es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x}{y} \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

26. Escribir las órdenes en **Matlab** para calcular la integral

$$\int_0^{\pi} \cos(y) dx$$

donde y es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+y}{x} \\ y(0) &= 3. \end{aligned}$$

27. Escribir las órdenes en **Matlab** para calcular la integral

$$\int_0^4 \ln(y) dx$$

donde y es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+y}{x} \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

28. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}e^{tx}, x(2) = 1$$

escribir los comandos **Matlab** que permitan trazar la gráfica de $g(t) = tx(t)$ en el intervalo $[2, 5]$, donde $x = x(t)$ es solución de la ecuación diferencial dada.

29. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}e^{-tx}, x(0) = \pi/6$$

escribir los comandos **Matlab** que permitan trazar la gráfica de $g(t) = \sin(t + x(t))$ en el intervalo $[0, \pi]$, donde $x = x(t)$ es solución de la ecuación diferencial dada.

30. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{t}e^{-tx}, x(0) = \pi/3$$

escribir los comandos **Matlab** que permitan trazar la gráfica de $g(t) = \cos(t - x(t))$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, donde $x = x(t)$ es solución de la ecuación diferencial dada.

31. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = xe^{-t\sqrt{x}}, x(0) = 3$$

escribir los comandos **Matlab** que permitan trazar la gráfica de $g(t) = \sin(t + x(t))$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, donde $x = x(t)$ es solución de la ecuación diferencial dada.

32. Dada la ecuación diferencial definida por

$$\frac{dx}{dt} = t^2 \ln(tx + 2), x(0) = 3\pi/2$$

Escribir los **archivos.m** y los comandos **Matlab** necesarios para trazar la gráfica de su solución $x = h(t)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$. Luego haga un bosquejo de la gráfica.

33. Dada la ecuación diferencial definida por

$$\frac{dv}{du} = u^2 \cos(uv + 1), \quad x(0) = \pi/4$$

Escribir los archivos **Matlab.m** y los comandos que permitan trazar la gráfica de su solución $v = g(u)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego haga un bosquejo de la gráfica.

34. Escribir los comando **Matlab** y **archivos.m** necesarios para trazar la gráfica de la función

$$h(t) = \frac{dx}{dt}, \quad t \in [0, 5]$$

donde $x = g(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t \operatorname{sen}(tx + 1) \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

35. Escribir los comando **Matlab** y **archivos.m** necesarios para trazar la gráfica de la función

$$h(t) = \frac{dx}{dt}, \quad t \in [0, 3]$$

donde $x = g(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \ln(t + 2) \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

36. Dada la ecuación diferencial definida por

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-y}, \quad y(1) = 3$$

- Escribir los archivos **Matlab.m** y los comandos que permitan trazar la gráfica de su solución $y = g(x)$ en el intervalo $[1, 5]$.
- Escribir los **archivos.m** y los comandos para hallar los puntos de intersección de las gráficas de $g(x)$ con $h(x)$, definida por

$$h(x) = 4 - (x - 3)^2.$$

37. Dada la ecuación diferencial definida por :

$$\frac{dy}{dt} = t \ln(y^2 + 1), \quad y(1) = 3$$

- a) Escribir los archivos **Matlab.m** y los comandos que permitan trazar la gráfica de su solución $y = g(t)$ en el intervalo $[1, 5]$.
- b) Escribir los **archivos.m** y los comandos para hallar los puntos de intersección de las gráficas de $g(t)$ con $h(t)$

$$h(t) = 12 - 4(t - 3)^2.$$

38. Dada la ecuación diferencial con condición inicial

$$\frac{dy}{dx} = x \ln(y + 2), \quad y(1) = 3$$

- a) Trazar la gráfica de la función $y = g(x)$ solución de la ecuación diferencial en el intervalo $[1, 5]$.
- b) Si h es la función definida por $h(x) = 12 - 4(x - 3)^2$, hallar la abscisa del punto de intersección izquierdo, entre las curvas g y h .
- c) Hallar la abscisa del punto de intersección derecho, entre las curvas g y h .
- d) Hallar el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones g y h .

39. Hallar el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones g, h ; donde $x = g(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x' = x \ln(t + 2) \\ x(1) = 3 \end{cases}$$

y h es la función $h(t) = (t - 3)^2$.

40. Dada la ecuación diferencial definida por

$$\frac{dx}{dt} = te^{-|x|}, \quad x(-3) = 0$$

Si $x = g(t)$ es solución de la ecuación diferencial, escribir los **archivos.m** y los comandos **Matlab** para hallar el área comprendida entre las gráficas de las funciones $g(t), h(t)$, donde la función h está definida por

$$h(t) = 3 - |t|.$$

41. Dada la ecuación diferencial definida por

$$\frac{dx}{dt} = t \operatorname{sen}(x^2 + 1), \quad x(-\pi) = 0$$

Si $x = g(t)$ es solución de la ecuación diferencial, escribir los **archivos.m** y los comandos **Matlab** para hallar el área comprendida entre las gráficas de las funciones $g(t)$, $h(t)$, donde la función h está definida por

$$h(t) = \pi - |t|.$$

42. Escribir los comandos Matlab necesarios para hallar el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones g , h donde $x = g(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t \operatorname{sen}(tx) \\ x(1) = 3 \end{cases}$$

y h es la función $h(t) = (t - 3)^2$. Presentar el resultado con 4 decimales.

Bibliografía

- Burden, R. L. and Faires, J. D. (1998). *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana, 7 edition.
- CEMATI (2013). <http://cemati.com/math/areas/nu/>.
- Chapra, S. C. and Canale, R. P. (2007). *Métodos Numéricos Para Ingenieros*. McGraw-Hill, 5 edition.
- Cheney, W. and Kincaid, D. (2011). *Métodos Numéricos y Computación*. Cengage, 6 edition.
- Gupta, S. (1998). *Numerical methods for engineers*. New Age International.
- Moore, H. (2012). *MATLAB para ingenieros*. Pearson.
- Nieves, A. and Dominguez, F. (2012). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Editorial Patria, 4 edition.
- Sotomayor, J. (1979). *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides.