

## Capítulo 2

# Modelización: Ejemplos y aplicaciones

### 2.1. ¿Qué es un modelo?

Un **modelo** es una representación idealizada pero precisa de los (algunos) componentes de un sistema dinámico cuyo comportamiento se quiere estudiar o predecir.

Se usan los modelos porque en general los sistemas resultan demasiado complejos. Un modelo puede no ser único: la elección del modelo depende de las preguntas que queremos contestar.

En la Figura 2.1 se presenta, a modo de ejemplo, un modelo del amortiguador de una rueda de un coche.

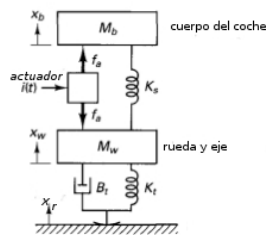


Figura 2.1: Modelo del amortiguador de una rueda de un coche

Un modelo debe ser completo y eficiente. Además, debe ser sencillo pero no simplista, es decir, no debe existir pérdida significativa de información.

Un **modelo matemático** es una representación mediante ecuaciones del sistema dinámico (físico, biológico, económico, ...) una vez modelizado.

Un modelo matemático correspondiente al modelo de la Figura 2.1 (más adelante en este capítulo se explicará cómo se obtiene) es:

$$\begin{aligned} M_b \ddot{x}_b + K_s(x_b - x_w) &= f_a(t) \\ M_w \ddot{x}_w + K_s(x_w - x_s) + K_t(x_w - x_r) + B_t(\dot{x}_w - \dot{x}_r) &= -f_a(t). \end{aligned}$$

Cuando se quiere resolver un problema complejo nuevo, puede ser conveniente comenzar a trabajar primero con un modelo simplificado. Este modelo simplificado puede que ignore ciertas propiedades inherentes al sistema, pero nos proporcionará una idea general de la solución. A continuación, deberemos desarrollar un modelo matemático más completo para poder realizar un análisis más exhaustivo de los resultados.

En un sistema de control se tienen variables que, en general, pueden cambiar con el tiempo. Estas variables se pueden clasificar como:

- **Variables de salida, salidas o medidas:** son las cantidades que se miden y se quieren controlar.
- **Variables de entrada, entradas, señales de control o controles:** son las cantidades que se pueden modificar con el fin de producir un determinado efecto sobre los valores de las variables de salida.
- **Perturbaciones, ruido:** son señales que tienden a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Tienen una componente aleatoria o son completamente aleatorias. Pueden ser internas, si se generan dentro del sistema; o externas, si se generan fuera de él. En este último caso son entradas al sistema.
- **Incertidumbre:** es falta de información en alguna parte del sistema modelado.

Además, se pueden definir las **variables de estado**, que son variables auxiliares que resumen toda la información pasada relevante para conocer el futuro del sistema.

En el resto del capítulo se presentan modelos matemáticos de sistemas dinámicos mecánicos, eléctricos, biológicos, económicos y térmicos.

## 2.2. Sistemas mecánicos de traslación

En esta sección vamos a describir algunos modelos matemáticos de sistemas mecánicos de traslación simples. El comportamiento dinámico de un sistema mecánico de traslación está descrito por vectores de desplazamientos, velocidades y fuerzas. Una técnica de modelado para dichos sistemas consiste en representarlos como una interconexión de un número

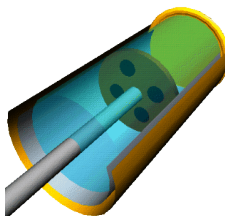


Figura 2.2: Realización física de un amortiguador lineal

finito de elementos idealizados (masas, muelles y amortiguadores). Los elementos se describen como pasivos porque pueden "disipar" o "almacenar" energía mecánica, pero no pueden introducirla en el sistema. El comportamiento de cada elemento está gobernado por una ley física simple, que se llama ecuación o ley constitutiva del elemento. La ley fundamental que controla los sistemas mecánicos es la segunda ley del movimiento de Newton: *La suma de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la razón del cambio del momento lineal respecto del tiempo*. Por lo tanto, recordando que el momento lineal de una partícula de masa  $M$  que se mueve con velocidad  $v(t)$  es  $p(t) = Mv(t)$ , la ley constitutiva de un elemento masa está dada por  $\frac{d}{dt}(Mv(t)) = F(t)$  donde  $F(t)$  es la fuerza aplicada a la masa. La masa es una cantidad escalar que se mide (en el sistema internacional de unidades, SI, que es el que se usará por defecto) en kilogramos, la velocidad y fuerza son vectores cuyos módulos se miden en metros/segundos y newtons respectivamente. Las masas almacenan energía cinética; es decir, conservan la energía mecánica del sistema aumentando la cinética. Las velocidades y aceleraciones se deben expresar en relación a un sistema de referencia inercial. Los sistemas de referencia inerciales son aquellos en los que se cumple la primera ley de Newton: *todo cuerpo permanecerá en reposo o en movimiento uniforme en una línea recta a menos que sea obligado a cambiar su estado por la acción de una fuerza externa*. Así pues, los sistemas de referencia inerciales son aquellos desde los que se observa que un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza neta se mueve con velocidad constante. En mecánica clásica se suele tomar como sistema de referencia inercial el fijado en el centro del sol.

La ley constitutiva de un muelle (también llamado resorte) lineal está dada por la ley de Hooke: *El alargamiento (estiramiento o elongación) que experimenta un muelle es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo*. Así,  $ky(t) = F(t)$  donde  $y(t)$  es la elongación,  $F(t)$  es la fuerza aplicada al muelle y  $k$  es la constante de elasticidad del



Figura 2.3: Realización física de un muelle- amortiguador

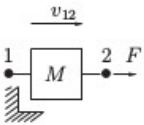
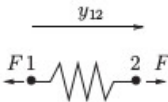
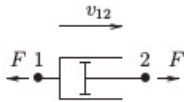
| Símbolo   | Ley Constitutiva             | Variables  |
|---|------------------------------|--|
|  | $\frac{d}{dt}(Mv(t)) = F(t)$ | $v(t) = v_{12}(t)$ velocidad de la masa<br>$F(t)$ fuerza aplicada a la masa                |
|  | $ky(t) = F(t)$               | $y(t) = y_{12}(t) - \bar{y}_{12}$ elongación neta<br>$F(t)$ fuerza aplicada al muelle      |
|  | $cv(t) = F(t)$               | $v(t) = v_{12}(t)$ velocidad relativa del pistón<br>$F(t)$ fuerza aplicada al amortiguador |

Tabla 2.1: Símbolos y leyes constitutivas de masas, muelles y amortiguadores

muelle. El desplazamiento se expresa en metros y la constante  $k$  en kilogramos/segundos<sup>2</sup> o, lo que es lo mismo, newtons/metros. Los muelles almacenan energía potencial; es decir, conservan la energía mecánica aumentando la energía potencial. En realidad la relación lineal entre la fuerza y el alargamiento es una aproximación válida para alargamientos no demasiado grandes (que dependen del material del que está hecho el muelle).

Una realización física de un amortiguador traslacional lineal se compone de un cilindro con un pistón móvil (Figura 2.2). El cilindro está lleno de un fluido viscoso y hay agujeros en la cara del pistón a través de los cuales el fluido pasa. Si la variación del flujo del líquido viscoso se mantiene acotado entre ciertos valores (que dependen del líquido), el amortiguamiento viscoso se puede modelizar como una relación lineal entre la fuerza y la velocidad relativa del pistón. Por lo tanto,  $cv(t) = F(t)$  donde  $v(t)$  es la velocidad relativa del pistón,  $F(t)$  es la fuerza aplicada al amortiguador y  $c$  es la constante de amortiguación. La constante  $c$  se expresa en kilogramos/segundos o, lo que es lo mismo, newtons-segundos/metros. Los amortiguadores disipan energía mecánica del sistema; es decir, la disminuyen transformándola en otros tipos de energía (térmica principalmente). En la Figura 2.3 se muestra una realización física de un muelle y amortiguador.

Suponemos que las fuerzas se transmiten sin cambios a través de los resortes y amortiguadores viscosos. Si se estira un extremo de un resorte o amortiguador se observa una fuerza igual en el otro extremo. El desplazamiento relativo de los extremos del resorte proporciona una medida de la fuerza que actúa sobre él y la velocidad relativa de los extremos del amortiguador una medida de la fuerza sobre el amortiguador. Por otra parte, la diferencia entre una fuerza aplicada a la masa y una fuerza ejercida por la masa (sobre otro elemento) proporciona una aceleración.

En la Tabla 2.1 se resumen las leyes constitutivas de las masas, muelles y amortiguadores. La dirección de las fuerzas son las marcadas por las flechas, aunque esto no significa

que las fuerzas sean en el sentido indicado porque la magnitud de  $F(t)$  puede ser negativa. Por ejemplo, en el muelle, si  $y_{12}(t) > \bar{y}_{12}$  entonces la fuerza requerida para la elongación es en el sentido que se muestra en la figura. Sin embargo, si  $y_{12}(t) < \bar{y}_{12}$  entonces se necesita comprimir el muelle de modo que  $F(t) < 0$  y la fuerza es en el sentido opuesto. La masa, muelle y amortiguador de la Tabla 2.1 son objetos idealizados desde otro punto de vista. Todos los muelle tienen alguna (comparativamente pequeña) inercia y amortiguamiento. Y todos los amortiguadores tienen alguna masa y pequeños efectos “muelle”. Podemos suponer, como es habitual, que las diferencias entre las inercias de los objetos reales e idealizados se añaden a la masa, todos los efectos “muelle” en los muelles y todas las fuerzas de fricción en los amortiguadores. Estos modelos se conocen con el nombre de *modelos de parámetros agrupados*.

Si describimos un sistema mecánico como una interconexión de un número finito de masas, muelles y amortiguadores, obtendremos un modelo del sistema global combinando las leyes constitutivas de cada elemento con las leyes de interconexión que gobiernan las interacciones entre ellos. Asumiremos que las fuerzas entre los elementos mecánicos obedecen la tercera ley de Newton de acción y reacción: *Toda fuerza de un elemento sobre otro va acompañada de una fuerza de reacción del segundo elemento sobre el primero de igual magnitud pero en dirección opuesta a lo largo de la línea que los une*.

Ponemos en práctica estos conceptos para obtener un modelo matemático de un oscilador lineal y una aplicación de éste en automoción.

**Ejemplo 2.1 (Oscilador lineal vertical)** Un sistema masa-resorte-amortiguador-fuerza externa vertical consiste de un resorte de masa despreciable que cuelga suspendido de un soporte rígido, una masa puntual  $M$  que se encuentra sujeta al extremo libre del resorte y a un mecanismo amortiguador. La masa se mueve a lo largo de un eje coordenado vertical. Definimos como dirección positiva la que apunta hacia abajo y definimos su origen en la posición de equilibrio de la masa bajo la influencia de la gravedad (así evitamos tener en cuenta la fuerza de la gravedad). La función  $y(t)$ , que describe la posición de la masa en el tiempo  $t$ , coincide entonces con su desplazamiento respecto a la posición de equilibrio.

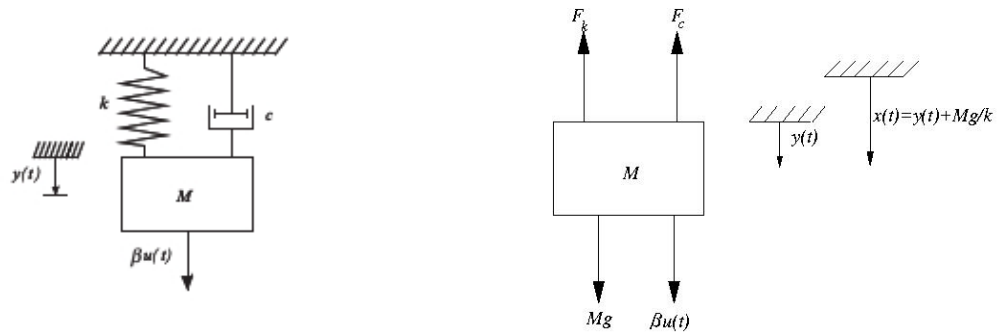


Figura 2.4: Oscilador lineal

Además de la fuerza exterior  $\beta u(t)$  hay dos tipos de fuerzas interiores que actúan sobre la masa. Éstas están modelizadas por el muelle y el amortiguador con coeficientes  $k$  y  $c$  respectivamente. Nótese además que están en dirección opuesta al desplazamiento y a la velocidad respectivamente. Por la segunda ley de Newton la suma de las fuerzas actuando sobre  $M$  debe ser igual a  $M\ddot{y}$ . La ecuación del movimiento que resulta es por lo tanto

$$M\ddot{y}(t) = -c\dot{y}(t) - ky(t) + \beta u(t)$$

O también,

$$M\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = \beta u(t),$$

donde  $\dot{y}(t)$  y  $\ddot{y}(t)$  denotan las derivadas primera y segunda de  $y(t)$  respectivamente.

Nótese que si se hubiera elegido como referencia del desplazamiento la posición relajada del resorte y no la de la masa bajo la acción de la gravedad la ecuación del movimiento habría sido la misma. En efecto, sea  $x(t)$  la posición de la masa en el tiempo  $t$  con respecto a la posición relajada del resorte. La elongación inicial con el sistema en reposo debido a la fuerza gravitacional  $Mg$  es  $Mg/k$  (pues por la segunda ley de Newton  $0 = Mg - kx$ ). Por lo tanto,  $y(t) = x(t) - Mg/k$ . Ahora, por la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas actuando sobre  $M$  debe ser igual a  $M\ddot{x}$ .

$$M\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \beta u(t) + Mg.$$

Realizando el cambio de variable  $y(t) = x(t) - Mg/k$ , se obtiene la ecuación diferencial anterior en  $y$

$$M\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = \beta u(t).$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. La variable de entrada es  $\beta u(t)$  mientras que la variable de salida es el desplazamiento  $y(t)$ . Suponiendo que  $y(0) = 0$  y  $\dot{y}(0) = 0$  nuestro objetivo podría ser controlar el sistema de forma que pudiéramos conseguir una determinada elongación, devolver la masa a su posición de equilibrio, etc. ■

**Ejemplo 2.2 (Sistema de dos masas conectadas por un resorte y un amortiguador)** Consideremos ahora un sistema con dos masas y un resorte y un amortiguador conectándolas (Figura 2.5). Se supone que no hay rozamiento asociado con las superficies. La suma de fuerzas en ambas masas proporciona dos ecuaciones diferenciales en términos de dos variables. Si el muelle produce una fuerza sobre  $M_1$  entonces, por la tercera ley de

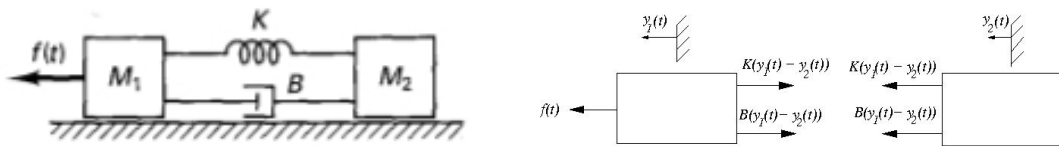


Figura 2.5: Un sistema mecánico de dos masas acopladas con su diagrama de fuerzas.

Newton, la masa  $M_1$  ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el muelle. Ésta se transmite a través del mismo para aparecer como una fuerza aplicada sobre  $M_2$  y la elongación del resorte es proporcional a la fuerza transmitida. La fuerza aplicada por  $M_1$  al amortiguador se transmite también a  $M_2$  y la velocidad relativa de las dos masas es proporcional a la fuerza transmitida. En el diagrama de fuerzas de la Figura 2.5 se muestran las fuerzas que actúan sobre  $M_1$  y  $M_2$ . Obsérvese que el movimiento de las dos masas es hacia la izquierda. Por lo tanto, el muelle y el amortiguador actúan sobre la primera masa oponiéndose al movimiento, mientras que en la segunda lo hacen a favor del movimiento. Aplicando la segunda ley de Newton para cada masa y la tercera ley de Newton para la interacción entre las masas se obtienen las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{y}_1(t) &= f(t) - B(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) - K(y_1(t) - y_2(t)) \\ M_2 \ddot{y}_2(t) &= B(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + K(y_1(t) - y_2(t)). \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{y}_1(t) + B(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) - K(y_1(t) - y_2(t)) &= f(t) \\ M_2 \ddot{y}_2(t) + B(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + K(y_2(t) - y_1(t)) &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Veamos ahora un ejemplo de aplicación del oscilador lineal.

### Ejemplo 2.3 (Suspensión de un coche)

El propósito de un sistema de suspensión para un coche es el de suavizar la respuesta del coche a las irregularidades de las carreteras. Solo consideraremos los movimientos verticales del coche e ignoraremos los posibles movimientos rotacionales. Para simplificar utilizamos un modelo de un cuarto de coche prestando atención a una sola rueda, la mitad de un eje y un cuarto de la masa del cuerpo del coche. El sistema incorpora un actuador que se conecta directamente entre el cuerpo y el eje (así se puede introducir una fuerza controlada  $f_a(t)$  en el sistema de suspensión). Véase la Figura 2.6. La rueda se modeliza como una combinación de un resorte y un amortiguador y se conecta un resorte

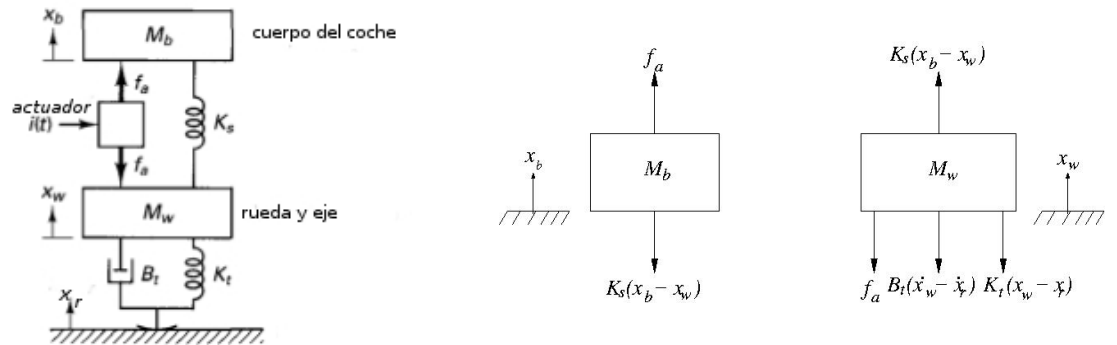


Figura 2.6: Suspensión de un cuarto de coche con el diagrama de fuerzas sobre el cuerpo y el eje.

en paralelo con el actuador entre el eje (masa  $M_w$ ) y el cuerpo (masa  $M_b$ ) para soportar el peso del cuerpo. Como el cuerpo del coche y el eje se pueden mover independientemente, necesitamos dos variables de posición  $x_b$  y  $x_w$ . Como puntos de referencia para estas posiciones elegimos las posiciones de descanso para el cuerpo del coche y el eje sobre el nivel de la carretera bajo la influencia de la gravedad. Sea  $x_r(t)$  el desplazamiento del punto de contacto de la rueda con la carretera. Este depende del perfil de la carretera y de la posición del coche. Para cada uno de los dos elementos (cuerpo del coche y rueda con eje) de masa hacemos el correspondiente diagrama de fuerzas: Figura 2.6. El actuador ejerce una fuerza sobre el cuerpo del coche en la dirección del desplazamiento mientras que sobre el eje la hace en la dirección opuesta. El muelle se opone al desplazamiento producido por  $f_a(t)$  en los dos elementos del coche  $M_b$  y  $M_w$ . El muelle  $K_t$  y el amortiguador  $B_t$  ejercen una fuerza sobre  $M_w$  en la dirección opuesta de  $x_w(t)$ .

Aplicando la segunda ley de Newton para cada masa y la tercera ley de Newton para la interacción entre las masas se obtienen las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} M_b \ddot{x}_b(t) &= -K_s(x_b(t) - x_w(t)) + f_a(t) \\ M_w \ddot{x}_w(t) &= K_s(x_b(t) - x_w(t)) - B_t(\dot{x}_w(t) - \dot{x}_r(t)) - K_t(x_w(t) - x_r(t)) - f_a(t). \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} M_b \ddot{x}_b(t) + K_s(x_b(t) - x_w(t)) &= f_a(t) \\ M_w \ddot{x}_w(t) + B_t(\dot{x}_w(t) - \dot{x}_r(t)) + K_s(x_w(t) - x_b(t)) + K_t(x_w(t) - x_r(t)) &= -f_a(t) \end{aligned}$$

La variable  $x_r(t)$  puede ser considerada como una perturbación del sistema. La variable de entrada de este sistema es  $f_a(t)$  y las variables de salida  $x_b(t)$  y  $\dot{x}_b(t)$ . El objetivo del diseño de este sistema de suspensión sería atenuar, mediante el actuador (o controlador)  $f_a(t)$ , las vibraciones del coche, es decir, los valores de  $x_b(t)$  y  $\dot{x}_b(t)$ , producidas por  $x_r(t)$  y  $\dot{x}_r(t)$  a fin de preservar el confort de los pasajeros (disturbance attenuation problem).■

Otras aplicaciones de los sistemas mecánicos de traslación lineal son el control automático de la velocidad (cruise control) (ver [1, Section 3.1]) y el microscopio de fuerza atómica (ver [1, Section 3.5]).

En los ejemplos de más arriba el movimiento de los sistemas mecánicos de traslación está restringido a una dirección. El movimiento de una masa en tres dimensiones está gobernado por una versión “vectorial” de la segunda ley de Newton. Aquí y en la próxima sección los vectores de  $\mathbb{R}^3$  se escribirán en negrita. Supondremos que las posiciones se calculan respecto de un sistema de coordenadas cartesiano fijo en un sistema de referencia inercial. Si  $\mathbf{r}(t)$  representa la posición de una partícula de masa  $m$  en el instante  $t$ ; i.e., el vector que une el origen del sistema de referencia inercial y el punto de  $\mathbb{R}^3$  donde está situada la masa, entonces  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$  es el *momento lineal* de la partícula puntual y la segunda ley de Newton es:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = (m\ddot{\mathbf{r}})(t) = \mathbf{F}(t). \quad (2.1)$$

Si consideramos ahora un sistema de  $N$  partículas puntuales, cada una con masa  $m_i$  en la posición  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , el momento lineal del sistema es, por definición, la suma de los



momentos lineales de cada una de las partículas:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i(t) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t). \quad (2.2)$$

Al aplicar la segunda ley de Newton a cada partícula debemos distinguir entre fuerzas externas  $\mathbf{F}_i^e(t)$  y las fuerzas de interacción entre las partículas  $\mathbf{F}_{ij}(t)$ . Teniendo en cuenta (2.1) para todas las partículas, la segunda ley de Newton sobre todo el sistema quedaría:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e(t) + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \mathbf{F}_{ij}(t). \quad (2.3)$$

Ahora bien, por la tercera ley de Newton, la suma de las fuerzas de acción y reacción para cada par de partículas  $\mathbf{F}_{ij}(t) + \mathbf{F}_{ji}(t)$  es cero para todo  $t$  y para todo  $i, j = 1, \dots, N$  con  $i \neq j$ . Por lo tanto, la suma en el segundo término de la derecha de (2.3) se anula. Si definimos la *fuerza externa total* y el *centro de masa* del sistema en el instante  $t$  como

$$\mathbf{F}^e(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e(t), \quad \bar{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \mathbf{r}_i(t)}{M} \text{ siendo } M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (2.4)$$

las ecuaciones (2.2) y (2.3) quedan, respectivamente:

$$\mathbf{p}(t) = M \dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = M \ddot{\bar{\mathbf{r}}}(t) = \mathbf{F}^e(t). \quad (2.5)$$

La interpretación de esta propiedad es que *el centro de masa del sistema se mueve como si la fuerza externa total actuara sobre la masa total del sistema concentrada en el centro de masa*.

Si en vez de una o más partículas puntuales tenemos que describir el movimiento de un cuerpo rígido en el espacio tridimensional, necesitamos especificar la posición de su centro de masa y su orientación respecto de un sistema de referencia inercial. Para ello se necesita la correspondiente segunda ley de Newton para movimientos rotacionales.

## 2.3. Sistemas mecánicos de rotación

El producto vectorial de vectores de  $\mathbb{R}^3$  juega un papel importante en la descripción de la dinámica de los sistemas mecánicos de rotación. Recordamos su definición y una propiedad importante que se usará con frecuencia. Sean  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  los vectores canónicos de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  son vectores de  $\mathbb{R}^3$ , su producto vectorial se define como

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k}. \quad (2.6)$$

Equivalentemente,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \sin \theta \mathbf{v}$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{x}$ ; y  $\mathbf{v}$  es un vector unitario perpendicular al plano determinado por dichos vectores y cuya dirección queda determinada por la “regla de la mano derecha”.

Usando (2.6) se prueba fácilmente que si  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  son funciones vectoriales con valores en  $\mathbb{R}^3$  entonces

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{y}}(t).$$

Considérese un punto fijo  $O$  en un sistema de referencia inercial con origen  $O^*$ . Sea  $\mathbf{r}(t)$  el vector de posición de una partícula de masa  $m$  respecto de  $O$  en el instante  $t$ ; es decir, el vector con origen en  $O$  y final en la posición que ocupa la partícula en el instante  $t$ . El *momento angular*,  $\mathbf{H}(t)$ , de dicha partícula en el instante  $t$  respecto de  $O$ , se define como

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t).$$

donde  $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)$  es el momento lineal de la partícula respecto del sistema inercial. Nótese que si  $\mathbf{r}^*$  es el vector que une el origen del sistema inercial de referencia  $O^*$  y el punto fijo  $O$ ,  $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}^*) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ . Por lo tanto, también  $\mathbf{H}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t)$ .

Sea  $\mathbf{F}(t)$  el vector suma de todas las fuerzas aplicadas a la partícula en el tiempo  $t$ . El correspondiente *par o momento de fuerza*,  $\mathbf{N}(t)$ , debido a la fuerza  $\mathbf{F}(t)$  se define como

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t). \quad (2.7)$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente relación entre el par de fuerza aplicado a la partícula y la razón de cambio de su momento angular

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t)) = \dot{\mathbf{r}}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}(t) \times m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t) = \mathbf{N}(t), \quad (2.8)$$

porque el producto vectorial de dos vectores con la misma dirección es cero. Así pues, el par de fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la razón del cambio del momento angular respecto del tiempo.

Supongamos ahora que, como al final de la sección anterior, tenemos  $N$  partículas puntuales de masas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . El *momento angular total* de tal sistema respecto de  $O$  se obtiene sumando los momentos angulares de todas las partículas:

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t).$$

Teniendo en cuenta que, como en (2.8),  $\dot{\mathbf{H}}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t)$ , por (2.3) obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times \left( \mathbf{F}_i^e(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij}(t) \right).$$

Ahora bien, por la tercera ley de Newton,  $\mathbf{F}_{ij}(t) = -\mathbf{F}_{ji}(t)$ . Por lo tanto

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i^e(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)) \times \mathbf{F}_{ij}(t).$$

Pero la tercera ley de Newton también dice que la dirección de estas fuerzas de acción-reacción es la del vector que une las partículas de masas  $m_i$  y  $m_j$ . Es decir, la dirección del vector  $\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)$ . En consecuencia  $(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)) \times \mathbf{F}_{ij}(t) = 0$ . Y si definimos el *par de fuerza externo total* como

$$\mathbf{N}^e(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i^e(t) \quad (2.9)$$

entonces

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{N}^e(t) \quad (2.10)$$

que es la expresión equivalente a (2.8) para un sistema de  $N$  partículas puntuales. En definitiva, *la razón de cambio en el tiempo del momento angular total de un sistema de partículas respecto de un punto fijo  $O$  es igual a la suma de los pares de fuerza respecto a  $O$  de todas las fuerzas externas.*

Vimos en (2.5) que el momento lineal de un sistema de  $N$  partículas es el mismo que si la masa total estuviera concentrada en el centro de masa moviéndose con él. Desarrollamos ahora el resultado correspondiente para el momento angular. Incluiremos la posibilidad de que el punto respecto al que se toman los momentos varíe con el tiempo. Sea  $O_t$  este punto móvil y denotemos por:  $\mathbf{r}^*(t)$  el vector del origen  $O^*$  a  $O_t$ ,  $\bar{\mathbf{r}}(t)$  el vector que une  $O_t$  con el centro de masa,  $\mathbf{r}'_i(t)$  el vector que une el centro de masa con la partícula de masa  $m_i$  y  $\mathbf{v}^*(t) = \dot{\mathbf{r}}^*(t)$ ,  $\bar{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}^*(t) + \dot{\bar{\mathbf{r}}}(t)$ ,  $\mathbf{v}_i(t) = \bar{\mathbf{v}}(t) + \dot{\mathbf{r}}'_i(t)$  son las velocidades de los puntos  $O_t$ , del centro de masa y de la partícula  $i$  con respecto, todo ello, al sistema de referencia inercial.

Con esta notación y para los cálculos que vienen a continuación es útil tener presente que

$$M\bar{\mathbf{v}}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t), \quad \text{para todo } t \quad (2.11)$$

En efecto

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) = \sum_{i=1}^N m_i \bar{\mathbf{v}}(t) + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i(t) = M\bar{\mathbf{v}}(t) + \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i(t) \right).$$

Ahora bien, el vector de posición de la partícula  $m_i$  (respecto del origen del sistema inercial) es  $\mathbf{r}^* + \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}'_i$  y el centro de masa  $\mathbf{r}^* + \bar{\mathbf{r}}$ . Como, por definición de centro de masa, (2.4),  $(\mathbf{r}^* + \bar{\mathbf{r}}) \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}^* + \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}'_i)$ , deducimos que  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0$ . Por lo tanto,

$$M\bar{\mathbf{v}}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) \text{ tal y como se quería mostrar.}$$

Calculemos ahora el momento angular respecto  $O_t$ . Éste toma la siguiente forma donde se omite la variable  $t$  para hacer la notación más compacta:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N (\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\bar{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{r}} \times m_i \bar{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{r}} \times \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i\end{aligned}\quad (2.12)$$

Tal y como se ha visto más arriba,  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = 0$ , por lo que los dos últimos sumandos de la ecuación (2.12) se anulan y así

$$\mathbf{H}(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) \times M \bar{\mathbf{v}}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i(t) \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i(t). \quad (2.13)$$

Pero teniendo en cuenta que  $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i(t) = 0$ , el momento angular del sistema **respecto del centro de masa** es

$$\begin{aligned}\mathbf{H}'(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i(t) \times m_i \mathbf{v}_i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i(t) \times m_i (\bar{\mathbf{v}}(t) + \dot{\mathbf{r}}'_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i(t) \times \bar{\mathbf{v}}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i(t) \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i(t) \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i(t).\end{aligned}$$

Por lo tanto, *el momento angular total del sistema respecto a  $O_t$  es el momento angular (respecto a  $O_t$ ) de la masa total concentrada en el centro de masa, más el momento angular del sistema respecto al centro de masa*. Además, si el centro de masa se encuentra en reposo (i.e.,  $\bar{\mathbf{v}}(t) = 0$ ), el momento angular será independiente de la posición del punto de referencia  $O_t$  y de su velocidad. En este caso,  $\mathbf{H}(t)$  se reduce al momento angular del sistema tomado respecto del centro de masa. Diferenciando  $\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}'(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) \times M \bar{\mathbf{v}}(t)$  obtenemos  $\dot{\mathbf{H}}(t) - \dot{\mathbf{H}}'(t) = \dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) \times M \bar{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{r}}(t) \times M \dot{\bar{\mathbf{v}}}(t)$ . En particular, si  $O_t$  es el centro de masa móvil (i.e.,  $\bar{\mathbf{r}}(t) = 0$ ) entonces  $\dot{\mathbf{H}}(t) = \dot{\mathbf{H}}'(t)$ . Esto significa que *para calcular la razón del cambio del momento angular de un sistema respecto a su centro de masa, podemos pensar en el centro de masa como si estuviera en reposo*.

Finalmente, sean  $\mathbf{F}_i^e(t)$  las fuerzas externas actuando sobre la partícula de masa  $m_i$ ,  $\mathbf{F}^e(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e(t)$  la fuerza externa total y definamos el par de fuerza total respecto de  $O_t$  como en (2.9) (recordemos que  $\bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}'_i(t)$  es el vector que une  $O_t$  con  $m_i$ ):

$$\mathbf{N}^e(t) = \sum_{i=1}^N (\bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}'_i(t)) \times \mathbf{F}_i^e(t).$$

Si  $\mathbf{N}^{e*}(t)$  es el par total respecto al origen del sistema inercial  $O^*$  entonces, teniendo en cuenta que, por (2.5),  $\mathbf{F}_i^e(t) = M \dot{\bar{\mathbf{v}}}(t)$  llegamos a

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^{e*}(t) &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}^*(t) + \bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}'_i(t)) \times \mathbf{F}_i^e(t) = \mathbf{r}^*(t) \times \mathbf{F}_i^e(t) + \mathbf{N}^e(t) \\ &= \mathbf{r}^*(t) \times M \dot{\bar{\mathbf{v}}}(t) + \mathbf{N}^e(t).\end{aligned}\quad (2.14)$$

Por otra parte, el momento angular total respecto a  $O^*$  es

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^*(t) &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}^*(t) + \mathbf{r}_i(t)) \times m_i \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{r}^*(t) \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i(t) \times m_i \mathbf{v}_i(t) \\ &= \mathbf{r}^*(t) \times M \bar{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{H}(t),\end{aligned}\quad (2.15)$$

donde hemos usado (2.11) y (2.12). Ahora, por (2.10) y (2.14) tenemos que  $\dot{\mathbf{H}}^*(t) = \mathbf{N}^{e*}(t) = \mathbf{N}^e(t) + \mathbf{r}^*(t) \times M \dot{\bar{\mathbf{v}}}(t)$ . Diferenciando en (2.15) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}(t) &= \dot{\mathbf{H}}^*(t) - \dot{\mathbf{r}}^*(t) \times M \bar{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{r}^*(t) \times M \dot{\bar{\mathbf{v}}}(t) \\ &= \mathbf{N}^e(t) + \mathbf{r}^*(t) \times M \dot{\bar{\mathbf{v}}}(t) - \dot{\mathbf{r}}^*(t) \times M \bar{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{r}^*(t) \times M \dot{\bar{\mathbf{v}}}(t) \\ &= \mathbf{N}^e(t) - \mathbf{v}^*(t) \times M \bar{\mathbf{v}}(t).\end{aligned}\quad (2.16)$$

En particular, si  $O_t$  es el centro de masa móvil (i.e.,  $\bar{\mathbf{r}}(t) = 0$  y, en consecuencia  $\bar{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}^*(t)$ ), se tiene  $\dot{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{N}^e(t)$ . Por lo tanto, *la razón del cambio respecto del tiempo del momento angular de una sistema de partículas respecto de su centro de masa es la suma de las pares de fuerza respecto del centro de masa de todas las fuerzas externas, y ello, independientemente de si el centro de masa se está moviendo (2.16) o permanece en reposo (2.10).*

Hay una *ley del momento angular* para cuerpos rígidos que complementa la segunda ley de Newton. Dado que en los ejemplos sólo vamos a considerar rotaciones en el plano, no la vamos a desarrollar en total generalidad para movimientos de rotación en  $\mathbb{R}^3$ . A partir de ahora consideramos sistemas rotacionales planos. Esto significa que todos los elementos considerados rotan alrededor de ejes que son paralelos entre sí y que todas las fuerzas se restringen al plano. Considérese una partícula de masa  $m$  rotando alrededor de un eje paralelo al eje  $z$  a través de un punto fijo  $O = (x_0, y_0, 0)$  en el plano  $x, y$ . Sea  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$  el vector de posición de la partícula respecto a  $O$  en el instante  $t$  y  $(x_0, y_0, 0) + \mathbf{r}(t) = (x_0, y_0, 0) + (x(t), y(t), 0)$  las coordenadas de la partícula en el instante  $t$ . Puesto que la partícula se mueve en una circunferencia en torno a  $O$ , la distancia de la partícula a  $O$ ,  $\|\mathbf{r}(t)\| = \|(x(t), y(t), 0)\| = (x(t)^2 + y(t)^2)^{1/2}$ , es constante. Llamamos  $r = \|\mathbf{r}(t)\|$ . Derivando  $r = (x(t)^2 + y(t)^2)^{1/2}$  respecto de  $t$ ,

$$x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) = 0.$$

Por lo tanto,  $\frac{\dot{y}(t)}{x(t)} = -\frac{\dot{x}(t)}{y(t)}$ . Así, existe un número real  $w(t) = \frac{\dot{y}(t)}{x(t)} = -\frac{\dot{x}(t)}{y(t)}$  tal que

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0) = w(t)(-y(t), x(t), 0). \quad (2.17)$$

Definimos  $\mathbf{w}(t) = (0, 0, w(t))$ , que llamaremos **velocidad angular** de la partícula alrededor de  $O$  en el instante  $t$ . Con  $\mathbf{w}$  así definida y usando la definición del producto vectorial, se ve fácilmente que

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}(t). \quad (2.18)$$

Obsérvese que si se utilizan coordenadas polares tomando como origen de giro la dirección positiva del eje de abscisas (el resultado es independiente del origen y sentido de giro

que se elija, pero las expresiones matemáticas cambian), se tiene  $x(t) = r \cos \theta(t)$ ,  $y(t) = r \sin \theta(t)$  siendo  $\theta(t)$  el ángulo que forma  $\mathbf{r}(t)$  con el origen de giro elegido. Así,  $\mathbf{r}(t) = r(\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0)$  y

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\theta}(t)(-r \sin \theta(t), r \cos \theta(t), 0) = \dot{\theta}(t)(-y(t), x(t), 0).$$

Comparando esta expresión con (2.17) concluimos que

$$w(t) = \dot{\theta}(t). \quad (2.19)$$

Sea ahora  $\mathbf{N}(t)$  el par generado por una fuerza dada  $\mathbf{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), 0)$  aplicada a la partícula. Por (2.7) se tiene que

$$\mathbf{N}(t) = (x(t)F_2(t) - y(t)F_1(t))\mathbf{k}. \quad (2.20)$$

Pongamos  $N(t) = x(t)F_2(t) - y(t)F_1(t)$  de modo que  $\mathbf{N}(t) = N(t)\mathbf{k}$ . Ahora, el momento angular de la partícula alrededor de  $O$  en el instante  $t$  es

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) \times m(\mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}(t)) = m(0, 0, w(t)r^2) \quad (2.21)$$

y de (2.8) se deduce que la ecuación del movimiento es

$$mr^2\dot{w}(t) = N(t). \quad (2.22)$$

De (2.20) y (2.22) se tiene que

$$x(t)F_2(t) - y(t)F_1(t) = N(t) = mr^2\dot{w}(t). \quad (2.23)$$

Y sustituyendo  $w(t) = \frac{\dot{y}(t)}{x(t)} = -\frac{\dot{x}(t)}{y(t)}$  en (2.21), se obtiene, en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{H}(t) = m(x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\mathbf{k}. \quad (2.24)$$

Se define el **momento de inercia** de la partícula alrededor de  $O$  como

$$J = mr^2.$$

Por lo tanto,

$$N(t) = J\dot{w}(t) = \frac{d}{dt}(Jw(t)). \quad (2.25)$$

Esta fórmula es el equivalente de la segunda ley de Newton para los cuerpos que rotan en el plano.

Hay una relación muy estrecha entre las rotaciones en el plano y los movimientos traslacionales en una dimensión. Los equivalentes rotacionales de masa, desplazamiento, velocidad y fuerza son momento de inercia, ángulo o desplazamiento angular, velocidad angular y par de fuerza, respectivamente. La Tabla 2.2 presenta los símbolos y leyes constitutivas de dichos elementos.

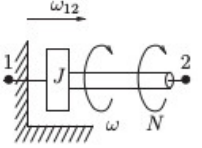
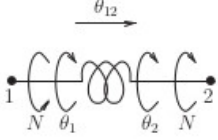
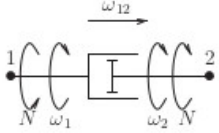
| Símbolo   | Ley Constitutiva             | Variables   |
|---|------------------------------|---|
|  | $\frac{d}{dt}(Jw(t)) = N(t)$ | $w(t) = w_{12}(t)$ velocidad angular<br>$N(t)$ par aplicado respecto del eje  |
|  | $k\theta(t) = N(t)$          | $\theta(t) = \theta_{12}(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$ desplazamiento angular relativo del muelle de torsión<br>$N(t)$ par aplicado al muelle |
|  | $cw(t) = N(t)$               | $w(t) = w_{12}(t) = w_2(t) - w_1(t)$ velocidad angular relativa<br>$N(t)$ par aplicado al amortiguador  |

Tabla 2.2: Símbolos y leyes constitutivas de masas, muelles y amortiguadores

La inercia es una propiedad de un elemento que almacena la energía cinética del movimiento rotacional. Cuando un par de fuerza se aplica a un cuerpo de inercia  $J$ , como se ha visto en (2.25),  $N(t) = \frac{d}{dt}(Jw(t))$  donde  $w(t)$  está medida en radianes/segundos,  $N(t)$  en newtons-metros y  $J$  en kilogramos-metros<sup>2</sup>.

Un muelle o resorte de torsión es un mecanismo que se opone a ser girado, desarrollando un par de fuerza proporcional al ángulo de giro. Por lo tanto,  $N(t) = k\theta(t)$  donde  $\theta(t)$  es el ángulo de giro, medido en radianes y  $k$  es la constante del resorte torsional, medida en newtons-metros/radianes. Ejemplos cotidianos de muelles de torsión son una pinza de colgar la ropa o una trampa para ratones (Figura 2.7).

Los amortiguadores viscosos rotacionales producen un par de fuerza que varía en proporción directa con la velocidad angular,  $N(t) = cw(t)$ , donde la constante de amortiguación  $c$  está medida en newtons-metros-segundos/radianes.

Las leyes de interconexión para los elementos rotacionales son totalmente análogas a las de los sistemas lineales si los elementos que interaccionan rotan alrededor del mismo eje (no sirve para ejes paralelos, en general). Así, el par de fuerza que realiza un elemento



Figura 2.7: Realizaciones físicas de muelles de torsión

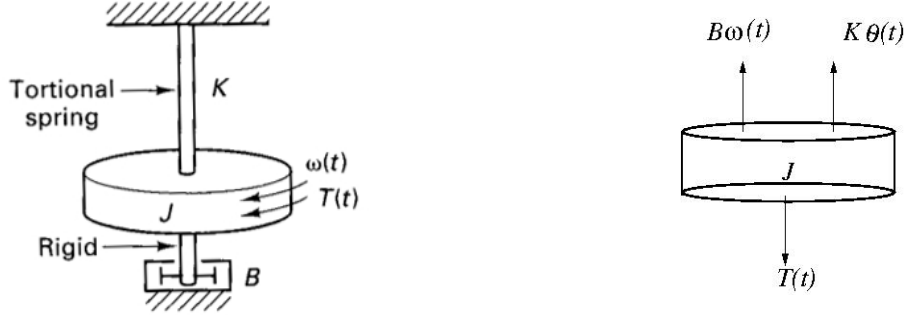


Figura 2.8: Disco en giro sobre su eje y diagrama de pares de fuerza

sobre otro es de la misma magnitud pero de sentido contrario al que ejerce el segundo sobre el primero.

**Ejemplo 2.4** Sea un disco con momento de inercia  $J$  alrededor de su eje de rotación. Está suspendido de un soporte mediante un resorte de torsión de constante  $K$  y amortiguado rotacionalmente como en la Figura 2.8. Sea  $\theta(t)$  el desplazamiento angular respecto de la posición de reposo,  $w(t) = \dot{\theta}(t)$  la velocidad angular y  $T(t)$  el par de fuerza ejercido. La barra que hace de eje de giro se modeliza como un resorte rotacional de constante  $K$  y el giro se ve amortiguado por un amortiguador rotacional de constante  $B$ . Como estos se oponen al giro, el diagrama de pares de fuerzas es el que se muestra en la Figura 2.8. Así pues, la segunda ley de Newton produce:

$$J\ddot{\theta}(t) = -B\dot{\theta}(t) - K\theta(t) + T(t).$$

O, equivalentemente,

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = T(t).$$

**Ejemplo 2.5** En la Figura 2.9 se representa un sistema mecánico de rotación. Este describe el comportamiento de un eje de transmisión. El sistema consta de un motor cuyo momento de inercia es  $J_3$  y su ángulo de giro es  $\theta_3$ . Además el motor efectúa una fuerza  $u(t)$  sobre el eje. El eje tiene dos engranajes con momentos de inercia  $J_1$  y  $J_2$ , y ángulos de giro  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Los cojinetes que sostienen los engranajes se consideran amortiguadores rotacionales con constante de mortiguación  $c$ . Finalmente los diferentes tramos de eje se toman como resortes rotacionales con constantes de rigidez de torsión  $k_1$  y  $k_2$ . El diagrama de pares de las fuerzas que actúan se puede ver también en la Figura 2.9. Aplicando la segunda ley de Newton rotacional obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} J_3\ddot{\theta}_3(t) &= -c(\dot{\theta}_3(t) - \dot{\theta}_2(t)) - k_2(\theta_3(t) - \theta_2(t)) + u(t) \\ J_2\ddot{\theta}_2(t) &= c(\dot{\theta}_3(t) - \dot{\theta}_2(t)) + k_2(\theta_3(t) - \theta_2(t)) - c(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)) - k_2(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \\ J_1\ddot{\theta}_1(t) &= c(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)) + k_1(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \end{aligned}$$



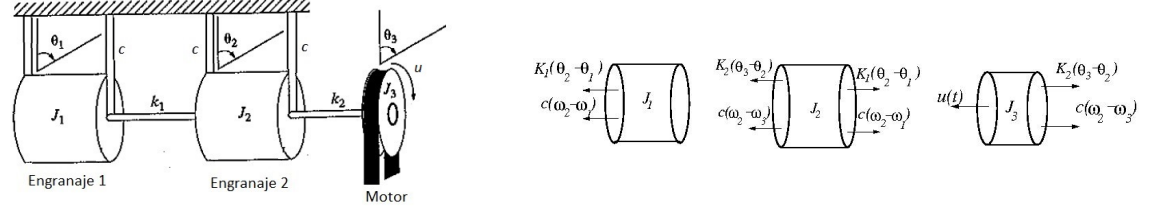


Figura 2.9: Sistema de dos cuerpos en rotación y su diagrama de pares de fuerzas

O también

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{\theta}_1(t) + c(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) + k_1(\theta_1(t) - \theta_2(t)) &= 0 \\
 J_2 \ddot{\theta}_2(t) - c(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)) - k_1(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + c(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_3(t)) + k_2(\theta_2(t) - \theta_3(t)) &= 0 \\
 J_3 \ddot{\theta}_3(t) - c(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_3(t)) - k_2(\theta_2(t) - \theta_3(t)) &= u(t)
 \end{aligned}$$

Se puede usar notación matricial para escribir el sistema como una ecuación diferencial matricial de segundo orden de la forma  $M\ddot{q}(t) + C\dot{q} + Kq(t) = f(t)$ . En este caso concreto,

$$M = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad q(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$  reciben los nombres de matrices masa o inercia, amortiguamiento y rigidez, respectivamente.

**Ejemplo 2.6 (Péndulo)** Considérese un péndulo de longitud  $l$  y masa  $m$  suspendido de un punto fijo  $O$  como en la Figura 2.10. Vamos a modelizar el péndulo como una masa puntual  $m$  sujeta a una barra rígida sin masa de longitud  $l$  que rota en el plano alrededor de  $O$  sin fricción. Supongamos que el ángulo desde la vertical hacia abajo hasta la barra es  $\theta$ . Se considera positivo en la dirección dibujada en la Figura 2.10; es decir, la opuesta al movimiento (habitual) de las agujas de un reloj. Puesto que pensamos en el

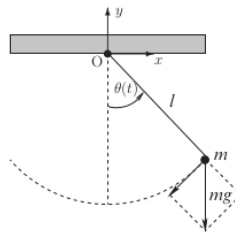


Figura 2.10: Péndulo modelizado como masa puntual

péndulo como una masa puntual en rotación en el plano respecto al punto 0, su momento de inercia es  $J = ml^2$ . Por otra parte, la única fuerza que actúa sobre el péndulo es la de la gravedad  $mg$ , y lo hace en la dirección del eje  $y$  pero con sentido negativo. Por (2.20)  $N(t) = x(t)(-mg) = l \sin \theta(t)(-mg) = -mgl \sin \theta(t)$  es el par de la fuerza de gravedad sobre el péndulo. Usando la segunda ley de Newton de los sistemas rotacionales,  $J\ddot{\theta}(t) = N(t)$ , obtenemos la siguiente ecuación

$$ml^2\ddot{\theta}(t) = -mgl \sin \theta(t).$$

Simplificando,

$$l\ddot{\theta}(t) + g \sin \theta(t) = 0. \quad (2.26)$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal de orden 2.

**Ejemplo 2.7 (Sistema carro-péndulo)** Considérese un péndulo que rota alrededor de un pivote situado en un carro. El carro tiene masa  $M$  y circula en un raíl horizontal empujado por una fuerza  $\beta u(t)$ . Existe fricción viscosa entre el carro y el raíl. El centro de masa del péndulo está a una distancia  $l$  del pivote y el momento de inercia del péndulo alrededor de su centro de masa es  $J$ . También existe fricción viscosa en el pivote. La posición del carro se mide por el desplazamiento horizontal  $r$  de su centro de masa (que suponemos que coincide con la localización del pivote) al origen de un sistema de coordenadas. La posición del péndulo se mide por el desplazamiento angular  $\theta$  de la línea que une su centro de masa con el pivote desde la vertical hacia abajo, es decir, medida en la dirección contraria a las agujas del reloj. Suponemos que el movimiento del carro es unidimensional (los pares de fuerza generados por todas las fuerzas que actúan en el carro están en equilibrio).

Las fuerzas verticales que actúan sobre el carro son las fuerzas de contacto  $w_1(t), w_2(t)$  a través de las ruedas del carro, la fuerza gravitacional  $G(t)$  y la componente vertical de la fuerza de contacto (desconocida)  $F_2(t)$  en el pivote. Como hemos supuesto que el carro solo tiene movimiento unidimensional, éstas están en equilibrio.

Las fuerzas horizontales sobre el carro son  $\beta u(t)$ , la fricción viscosa  $-c\dot{r}(t)$  y la componente horizontal de la fuerza de contacto (desconocida)  $F_1(t)$  en el pivote. Así,

$$M\ddot{r}(t) = \beta u(t) - c\dot{r}(t) + F_1(t). \quad (2.27)$$

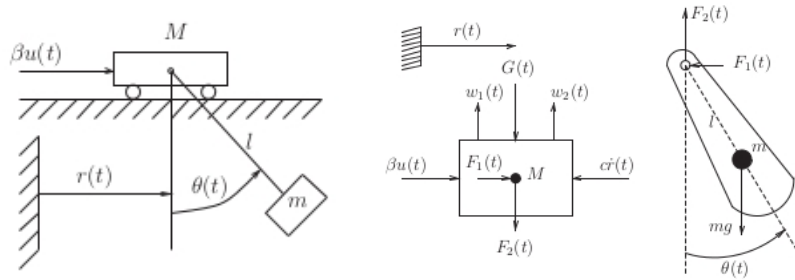


Figura 2.11: Sistema carro-péndulo con su diagrama de fuerzas

Para describir el movimiento en el plano del péndulo, sean  $(x(t), y(t))$  las coordenadas de la masa puntual del péndulo en el momento  $t$ . Por lo tanto,  $x(t) = r(t) + l \sin \theta(t)$  y  $y(t) = -l \cos \theta(t)$ . Las ecuaciones de los movimientos horizontales y verticales del péndulo son

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -F_1(t) \Leftrightarrow m \frac{d^2}{dt^2}(r(t) + l \sin \theta(t)) = -F_1(t) \\ m\ddot{y}(t) &= -mg + F_2(t) \Leftrightarrow m \frac{d^2}{dt^2}(-l \cos \theta(t)) = -mg + F_2(t) \end{aligned}$$

Calculando las derivadas segundas se obtiene

$$\begin{aligned} m(\ddot{r}(t) + l\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - l\dot{\theta}(t)^2 \sin \theta(t)) &= -F_1(t) \\ ml(l\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}(t)^2 \cos \theta(t)) &= -mg + F_2(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dado que un dato del problema es el momento de inercia del péndulo respecto del centro de masa, quedan por determinar las ecuaciones del movimiento de rotación del péndulo alrededor de su centro de masa. La fuerza gravitacional no produce par en el péndulo alrededor de  $(x(t), y(t))$  (la distancia es 0). Así que la rotación del péndulo está determinada por el par de la fuerza  $\mathbf{F}(t) = (-F_1(t), F_2(t))$  alrededor de  $(x(t), y(t))$ . El vector desde  $(x(t), y(t))$  al pivote en el que se aplica la fuerza  $\mathbf{F}(t)$  está dado por  $(-l \sin \theta(t), l \cos \theta(t))$ , así que el par de  $\mathbf{F}(t)$  alrededor de  $(x(t), y(t))$  es  $-F_2(t)l \sin \theta(t) + F_1(t)l \cos \theta(t)$  (ver (2.20)). Suponiendo una fricción rotacional en el eje de giro del péndulo de constante  $c_P$ , la ecuación del movimiento rotacional es

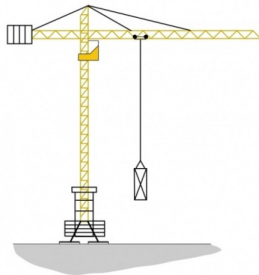
$$J\ddot{\theta}(t) = -F_2(t)l \sin \theta(t) + F_1(t)l \cos \theta(t) - c_P \dot{\theta}(t). \quad (2.29)$$

Despejando  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$  en (2.28) y sustituyendo en (2.27) y (2.29) el comportamiento dinámico del sistema carro-péndulo queda descrito por las ecuaciones

$$\begin{cases} M(\theta)\ddot{r} = (J + ml^2)(\beta u - c\dot{r} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta) + ml \cos \theta(mgl \sin \theta + c_P \dot{\theta}) \\ M(\theta)\ddot{\theta} = -ml \cos \theta(\beta u - c\dot{r} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta) - (M + m)(c_P \dot{\theta} + mgl \sin \theta) \end{cases} \quad (2.30)$$

donde  $M(\theta) = (M + m)J + ml^2M + m^2l^2 \sin^2 \theta$ .

La variable de entrada de este sistema es  $\beta u(t)$  y las variables de salida  $r(t)$  y  $\theta(t)$ . Si  $\dot{r}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  ó  $\pi$  y  $u(t) = 0$  el sistema permanecerá en reposo.



Una aplicación de este sistema es una grúa con un gancho suspendido de un carro desplazándose a lo largo de un raíl horizontal. Estas grúas operan alrededor de la posición vertical del péndulo y requieren estar cerca de esta dirección antes de depositar la carga. Un problema de control sería llevar el péndulo en posición de equilibrio ( $\theta = 0$ ) a cualquier punto  $r_0$  en un tiempo finito (controllability problem).

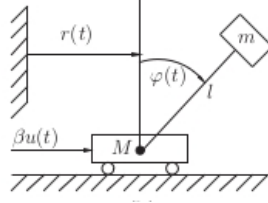


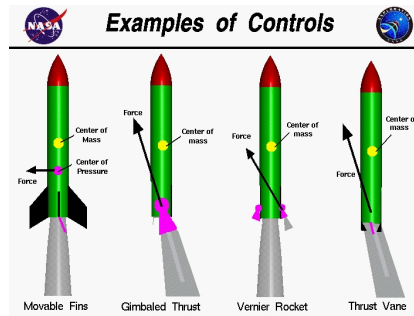
Figura 2.12: Carro-péndulo invertido sobre carro

**Ejemplo 2.8 (Carro-péndulo invertido)** Considérese un carro-péndulo invertido de la Figura 2.12. Vamos a escribir las ecuaciones del movimiento en función del ángulo  $\varphi(t)$ . En vez de hacer todo el desarrollo como en el ejemplo anterior, observamos que si permitimos que el péndulo pueda girar  $2\pi$  radianes entonces se trata del mismo sistema. La única diferencia es la forma en que se miden los ángulos en cada caso. Ahora bien, si  $(x, y)$  son las coordenadas de un punto arbitrario en el que el péndulo se pueda encontrar en algún momento; es decir, un punto de la circunferencia de centro en el pivote y radio  $l$ , entonces en función de  $\varphi$ ,  $x = l \sin \varphi$ ,  $y = l \cos \varphi$ . Y en función de  $\theta$ :  $x = l \sin \theta$ ,  $y = -l \cos \theta$ . En consecuencia, basta hacer el cambio de variable  $\theta(t) = \pi - \varphi(t)$  en (2.30).

$$\begin{cases} M(\varphi)\ddot{r} = (J + ml^2)(\beta u - \dot{r} + ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) - ml \cos \varphi (mgl \sin \varphi - c_P \dot{\varphi}) \\ M(\varphi)\ddot{\varphi} = -ml \cos \varphi (\beta u - \dot{r} + ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + (M + m)(-c_P \dot{\varphi} + mgl \sin \varphi). \end{cases} \quad (2.31)$$

La variable de entrada es  $\beta u(t)$  y las variables de salida  $r(t)$  y  $\varphi(t)$ . Un problema de control sería diseñar un regulador que mantenga el péndulo en posición vertical ( $\varphi = 0$ ) en cualquier punto ( $r_0$ ). El regulador o controlador acepta como entradas las salidas del sistema ( $r(t)$  y  $\varphi(t)$ ) y devuelve como salida la entrada  $u(t)$  que estabiliza el péndulo (stabilization problem). ■

Una aplicación de este modelo es controlar un cohete en posición vertical.



Otros sistemas mecánicos de rotación son la bicicleta en giro (ver [1, Section 3.2]), el segway y el despegue de un cohete espacial (ver [1, Section 2.1]).

Si se desea consultar información sobre sistemas mecánicos de traslación y rotación en 3 dimensiones se recomienda el enlace [24]. Un ejemplo de ello es un satélite en órbita geostacionaria.

### 2.3.1. El método variacional

Los ejemplos previos ilustran que, incluso para sistemas mecánicos aparentemente sencillos, no es en absoluto trivial encontrar las ecuaciones del movimiento a partir del análisis de los sistemas como interconexiones de masas, muelles y amortiguadores. La interconexión de los elementos traslacionales y rotacionales suele plantear problemas difíciles de resolver, o, al menos, trabajosos. La dificultad principal del modelado es que la interacción entre los elementos debe describirse mediante fuerzas de contacto que no se conocen a priori y que representan restricciones entre las variables del sistema. Es el caso de las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  del Ejemplo 2.7. Son incógnitas del problema que deben ser eliminadas para conseguir las ecuaciones que rigen el movimiento. A menudo estas restricciones son bastante complicadas y si hay muchas que hay que tomar en consideración, el proceso de modelización resulta terriblemente engorroso. En tales casos, una posible alternativa es usar consideraciones de energía. Esta alternativa se basa en el *principio de mínima acción* de Hamilton que hace uso del cálculo de variaciones y la famosa fórmula de Euler-Lagrange. Una introducción a todo ello se puede encontrar en el Apéndice A. Para poder aplicar correctamente el principio de mínima acción, repasamos primero las nociones de energías cinética y potencial.

La energía cinética de una masa puntual que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}(t)$  en el instante  $t$  es

$$\mathcal{T}(t) = \frac{m}{2} \|\mathbf{v}(t)\|^2 = \frac{m}{2} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t), \quad (2.32)$$

donde, recordemos,  $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$  representa el producto escalar de  $\mathbf{v}(t)$  por sí mismo.

Para movimientos arbitrarios de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional el cálculo de la energía cinética es más complicado. Consideremos en primer lugar un cuerpo rígido compuesto por  $n$  masas puntuales  $m_i$ . Con la misma notación de la Sección 2.3, sea  $\bar{\mathbf{r}}(t)$  la posición del centro de masa del cuerpo en el instante  $t$  respecto de algún sistema inercial de coordenadas. Fijemos un sistema de coordenadas en el cuerpo (que se mueve con el cuerpo) cuyo origen es el centro de masa. Supongamos que el cuerpo rota alrededor de un eje que pasa por el centro de masa con velocidad angular  $\mathbf{w}(t)$ . Por consiguiente,  $\mathbf{w}(t)$  apunta en la dirección del eje de rotación en cada instante  $t$  (cambiante con el centro de masa) y en el sentido determinado por la “regla de la mano derecha”. Si  $\mathbf{r}'_i$  es el vector (constante) de posición de la masa puntual  $m_i$  con respecto al sistema de coordenadas con origen en el centro de masa del cuerpo, entonces el vector de posición de dicha masa puntual respecto al sistema de coordenadas del sistema inercial será

$$\mathbf{r}_i(t) = \bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}'_i.$$

Además, tal y como vimos en la Sección 2.3 (véase la demostración de la expresión (2.11)),  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$ . Ahora, el vector velocidad de la  $i$ -ésima masa puntual respecto del sistema inercial es, véase (2.18),

$$\mathbf{v}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{w}(t) \times \bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i = \dot{\bar{\mathbf{r}}}(t) + \mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|v_i(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i) \cdot (\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i) = \\
&= \frac{1}{2} M \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 + \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \left( \mathbf{w}(t) \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i\|^2 = \\
&= \frac{1}{2} M \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i\|^2,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

donde, en la última igualdad hemos usado que  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = 0$ , tal y como hemos visto más arriba. Finalmente, un simple cálculo permite ver que

$$\|\mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i\|^2 = (\mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i) \cdot (\mathbf{w}(t) \times \mathbf{r}'_i) = \mathbf{w}(t)^T J_i \mathbf{w}(t),$$

interpretando  $\mathbf{w}(t) = [w_x(t) \ w_y(t) \ w_z(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  como un vector columna y  $J_i$  una matriz simétrica ( $J_i^T = J_i$ )<sup>1</sup>. Poniendo  $J = \sum_{i=1}^n J_i$  concluimos que  $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es simétrica y

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} M \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w}(t)^T J \mathbf{w}(t). \tag{2.34}$$

La matriz  $J$  recibe el nombre de *matriz del momento de inercia* del cuerpo rígido.

Este análisis puede extenderse a cuerpos rígidos continuos “sustituyendo los sumatorios por integrales” de modo que la fórmula (2.34) conserva su validez para cuerpos rígidos arbitrarios. En definitiva, la energía cinética de un cuerpo rígido en traslación y rotación en el espacio tridimensional es la energía cinética del centro de masa como si toda la masa del cuerpo estuviera allí concentrada ( $(1/2)M\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2$ ) más la energía cinética del movimiento rotacional del cuerpo rígido en torno al centro de masa ( $(1/2)\mathbf{w}(t)^T J \mathbf{w}(t)$ ).

Consideramos ahora la *energía potencial*. La energía potencial almacenada en un muelle de traslación o rotación desplazado de su posición de equilibrio es igual al trabajo realizado para alcanzar dicho desplazamiento. Si el muelle es de traslación y lineal, su energía potencial cuando el desplazamiento es  $y$  es  $(k/2)y^2$  siendo  $k$  la constante de elongación del muelle. De la misma forma, la energía potencial de un muelle de torsión con par de fuerzas  $k\theta$  a un desplazamiento angular  $\theta$  es  $(k/2)\theta^2$ . Observemos que un muelle ideal no tiene energía cinética porque no tiene masa.

La energía potencial de una masa puntual se define respecto de un *campo conservativo* de fuerzas al que está sujeta. Un campo de fuerzas  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice que es conservativo

<sup>1</sup>La expresión explícita de  $J_i$  es

$$J_i = \begin{bmatrix} r_{iy}^2 + r_{iz}^2 & -r'_{ix} r'_{iy} & -r'_{ix} r'_{iz} \\ -r'_{ix} r'_{iy} & r_{ix}^2 + r_{iz}^2 & -r'_{iy} r'_{iz} \\ -r'_{ix} r'_{iz} & -r'_{iy} r'_{iz} & r_{ix}^2 + r_{iy}^2 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{r}'_i = (r'_{ix}, r'_{iy}, r'_{iz})$ .

si el trabajo realizado para mover una masa puntual de  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  sólo depende de los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  y no de la trayectoria a lo largo de la que se ha movido la masa. Una caracterización de los campos conservativos es que son el negativo del gradiente de un potencial. Un ejemplo de campo conservativo es el campo gravitacional de la Tierra. Fijando un punto de referencia  $O$  la energía potencial de una partícula posicionada en un punto  $P$  es, por definición, igual al trabajo necesario para mover la partícula de  $O$  a  $P$  en el interior del campo de fuerzas. La energía potencial de un sistema de  $N$  masas puntuales en posiciones  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  es simplemente la suma de las energías potenciales de cada masa. Aproximando un cuerpo rígido por un sistema de  $N$  masas puntuales, y suponiendo que está a una altura  $h$  (no demasiado grande), su energía potencial respecto al campo gravitacional de la Tierra es  $Mgh$ . Nótese que la energía potencial de un cuerpo en un campo conservativo está determinada salvo por una constante que depende del punto  $O$  tomado como referencia. Es una consecuencia del principio de mínima acción (Sección A.2.3) que en un campo conservativo, si no hay disipación de energía, la suma de las energías cinética y potencial es constante en el tiempo. Disipación de energía, sin embargo, es un fenómeno muy frecuente porque la energía cinética se transforma en energía térmica debido al rozamiento, y éste aparece siempre que dos cuerpos en contacto mantienen una velocidad relativa (no se mueven a la misma velocidad y misma dirección y sentido). Un disipador puro (amortiguador) es un objeto ideal en el que no se almacena ni energía cinética ni potencial. Sirve para modelizar la disipación de energía en un sistema. Por ejemplo, la potencia absorbida en el instante  $t$  por un amortiguador traslacional lineal (en el que la fuerza es, recordamos,  $cv$ ) es  $cv(t)^2$ . De la misma forma, la potencia absorbida por un amortiguador rotacional, cuyo par es  $cw$ , es  $cw(t)^2$ . Más en general, si tenemos un sistema de  $N$  partículas que se mueven con velocidades  $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, \dots, N$ , y que están sujetas a fuerzas amortiguadoras que dependen linealmente de la velocidad,  $\mathbf{F}_i(t) = c_i \mathbf{v}_i(t)$ , entonces el total de energía disipada es  $\sum_{i=1}^N c_i \|\mathbf{v}_i(t)\|^2$ .

Una vez repasados los conceptos de energías cinética y potencial, debemos tener en cuenta que para poder aplicar el método de mínima acción de Hamilton, los vectores de posición de las masas puntuales de los sistemas mecánicos suelen estar sometidos a ciertas restricciones. Tal es el caso de la masa de un péndulo (véase el Ejemplo A.9) en el que el vector de posición tiene módulo, o norma, fijo (la longitud del mismo). O el del carro en el sistema carro-péndulo que se mueve en una sola dirección y, por lo tanto, la segunda componente del vector posición es nula. En los sistemas mecánicos las restricciones son, frecuentemente, *holonómicas* (véase la Sección A.3.2); es decir, de la forma

$$f_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.35)$$

donde  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$  es el vector de posición del  $i$ -ésima partícula en el espacio tridimensional y las funciones  $f_j$  son funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  con valores reales definidas en  $(\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R}$ . El conjunto  $\mathfrak{M}(t)$  de todos los vectores  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \in (\mathbb{R}^3)^N$  que cumplen las restricciones  $f_1(\mathbf{r}, t) = 0, \dots, f_m(\mathbf{r}, t) = 0$  se conoce como *espacio de configuración* del sistema mecánico restringido en el instante  $t$ .

Vamos a fijar  $t$  por un momento y veamos que, en condiciones favorables, el conjun-

to  $\mathfrak{M}(t)$  tiene propiedades interesantes. En particular, si los gradientes de las funciones  $f_j(\cdot, t)$  son linealmente independientes en cada punto de  $\mathfrak{M}(t)$  entonces, en virtud del teorema de la función implícita, el espacio de configuración  $\mathfrak{M}(t)$  tiene, en el instante  $t$ , una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $\ell = 3N - m$ . Es decir, cada punto  $\mathbf{q} \in \mathfrak{M}(t)$  admite un entorno  $V \in \mathfrak{M}(t)$  que es difeomorfo a un entorno  $U \subset \mathbb{R}^\ell$ : existe una aplicación diferenciable  $\phi : U \rightarrow V$  (con derivadas parciales continuas) que es biyectiva y su inversa es también diferenciable. De hecho  $\mathfrak{M}(t)$  puede ser recubierto por un número finito o numerable de tales entornos, digamos  $\{(U_i, \phi_i)\}$ . En tal caso, se dice que cada par  $(U_i, \phi_i)$  es una *carta coordenada* para  $\mathfrak{M}(t)$ . Así pues

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^\ell &\longrightarrow \mathfrak{M}(t) \\ \mathbf{q} &\rightsquigarrow \mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{r}_1(\mathbf{q}, t), \dots, \mathbf{r}_N(\mathbf{q}, t)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde  $\mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_\ell, t)$ . Las coordenadas  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ , de  $\mathbf{q}$  se llaman *coordenadas generalizadas* del vector  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$  (en el instante  $t$ ) en el espacio de configuración. La aplicación inversa  $\phi_i^{-1} : V_i \rightarrow U_i$  lleva cualquier configuración  $\mathbf{r} \in V_i$  a su vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  (en el instante  $t$ ).

Las coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_\ell$  proporcionan una parametrización local del espacio de configuración (i.e., de  $V$ ) y pueden variar independientemente las unas de las otras (siempre que  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$  no “se salga” de  $U$ ) mientras que las coordenadas  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  del vector de posición  $\mathbf{r} \in V$  no pueden variar independientemente unas de otras sin violar algunas de las restricciones holonómicas (2.35). Es como si hubiéramos “eliminado las variables dependientes” del espacio de configuración. Podemos pensar en  $\mathfrak{M}(t)$  (para  $t$  fijo) como si fuera una “superficie” de  $(\mathbb{R}^3)^N$  que la parametrizamos (localmente) eliminando “variables dependientes”. La ventaja de este proceso de “eliminar restricciones” tiene su precio. En primer lugar, la parametrización es local de modo que las cartas de coordenadas solo describen una parte del espacio de configuración. Y segundo, las coordenadas generalizadas no tienen por qué tener un significado físico similar a los vectores de posición de las masas puntuales.

Todo este proceso es una presentación más precisa y formal de lo que se explica sucintamente en la Sección A.3.2 del Apéndice A.

Ahora, una vez obtenidas las coordenadas generalizadas para cada punto del espacio de configuración, podemos aplicar el principio de mínima acción presentado en la Sección A.2.3 y las ecuaciones de Euler-Lagrange sin restricciones usando dichas coordenadas. En concreto, para campos de fuerza conservativos, definimos la lagrangiana como la diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema en coordenadas generalizadas:

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(t, \mathbf{q}), \quad (2.37)$$

y aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones del movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell. \quad (2.38)$$



En la práctica, muchos sistemas mecánicos no son conservativos porque suelen incluir rozamientos internos significativos o fuerzas externas que no se derivan de un potencial. Si  $F_j$  son fuerzas que no se toman en cuenta en la energía potencial y  $\mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{D}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_\ell)$  es el total de la energía disipada por amortiguadores lineales, entonces las ecuaciones del movimiento toman la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j}(\dot{\mathbf{q}}(t)) = F_j(\mathbf{q}(t)), \quad j = 1, \dots, \ell. \quad (2.39)$$

Además, si las fuerzas externas  $F_j$  no dependen de las coordenadas generalizadas, entonces se pueden eliminar de la parte derecha de la ecuación (2.39) incluyéndolas en la energía potencial:

$$U \rightsquigarrow U - \sum_{j=1}^{\ell} F_j q_j. \quad (2.40)$$

Modificando la lagrangiana de forma apropiada es posible incluir también otras fuerzas generalizadas en las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.38).

### Ejemplo 2.9 (Carro-péndulo invertido revisitado)

Si, dado un sistema, se pueden calcular las coordenadas generalizadas, el método de Lagrange es una forma muy apropiada de eliminar las fuerzas intrínsecas que aparecen en la modelización de los sistemas mediante los diagramas de fuerzas. Como ilustración de este método vamos obtener las ecuaciones (2.31) que rigen la dinámica del carro-péndulo invertido del Ejemplo 2.8. Usaremos la Figura 2.12 como referencia

En primer lugar, el espacio de configuración es un subconjunto de  $\mathbb{R}^4$ :  $(x_1, y_1)$  son las coordenadas de la masa puntual representada por el carro y  $(x_2, y_2)$  las del péndulo. Las restricciones holonómicas son:

$$y_1 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = l^2$$

porque el carro se mueve a lo largo del eje de abscisas y la masa del péndulo describe una circunferencia de radio  $l$  y centro  $(x_1, 0)$ . Podemos tomar como parámetros la distancia recorrida por el carro y el ángulo del péndulo (en realidad, el espacio de configuración es una variedad diferenciable de dimensión 2). De esta forma las coordenadas generalizadas serían  $(r, \varphi)$  y tendríamos  $x_1 = r$ ,  $x_2 = r + l \sin \varphi$ ,  $y_2 = l \cos \varphi$ .

Ahora, de acuerdo con (2.34), denotando por  $J$  el momento de inercia,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2,$$

que en coordenadas generalizadas es

$$\mathcal{T}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m [(\dot{r} + l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (l \dot{\varphi} \sin \varphi)^2] + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

De la misma forma, el sistema se mueve en el campo gravitacional que es conservativo y la fuerza en cada punto es de magnitud  $mg$ , siendo  $m$  la masa “adherida” a dicho punto, y

de dirección la del eje de ordenadas en el sentido negativo. Como el carro está modelizado por un punto que permanece en todo instante a distancia vertical 0, la energía potencial del carro es  $Mg0 = 0$  y la del péndulo  $U = mgy_2$ . En coordenadas generalizadas

$$U(r, \varphi) = mgl \cos \varphi.$$

Por otra parte, la energía disipada por rozamiento es, de acuerdo con el enunciado,  $\mathcal{D}(\dot{r}, \dot{\varphi}) = c\dot{r}^2 + c_P\dot{\varphi}^2$  y la fuerza externa sólo actúa sobre el carro en la dirección de su desplazamiento:  $\mathbf{F} = (\beta u, 0)$ . Así,

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \mathcal{T} - U = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{r} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2] + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L_r &= 0, \\ L_{\dot{r}} &= (M + m)\dot{r} + ml\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ L_{\varphi} &= -ml\dot{r} \sin \varphi + mgl \sin \varphi, \\ L_{\dot{\varphi}} &= J\dot{\varphi} + ml^2\ddot{\varphi} + ml\dot{r} \cos \varphi, \end{aligned}$$

y

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{r}} = (M + m)\ddot{r} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi,$$

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{\varphi}} = (J + ml^2)\ddot{\varphi} + ml\ddot{r} \cos \varphi - ml\dot{r} \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Planteando las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada coordenada generalizada:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{r}} - L_r + \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\dot{r}} = F_r \Leftrightarrow (M + m)\ddot{r} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + c\dot{r} = \beta u$$

y

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{\varphi}} - L_{\varphi} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\dot{\varphi}} = F_{\varphi} \Leftrightarrow (J + ml^2)\ddot{\varphi} + ml\ddot{r} \cos \varphi - mgl \sin \varphi + c_P\dot{\varphi} = 0.$$

Reorganizándolas obtenemos:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{r} + ml \cos \varphi \ddot{\varphi} = ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - c\dot{r} + \beta u \\ ml \cos \varphi \ddot{r} + (J + ml^2)\ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi - c_P\dot{\varphi} \end{cases} \quad (2.41)$$

Poniendo

$$A = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \varphi \\ ml \cos \varphi & J + ml^2 \end{bmatrix},$$

un cálculo sencillo muestra que  $M(\varphi) = \det A = (M + m)J + ml^2 M + m^2 l^2 \sin^2 \varphi$ . Además,

$$A^{-1} = \frac{1}{M(\varphi)} \begin{bmatrix} J + ml^2 & -ml \cos \varphi \\ -ml \cos \varphi & M + m \end{bmatrix}.$$

Pero (2.41) puede escribirse como

$$A \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - c\dot{r} + \beta u \\ mgl \sin \varphi - c_P\dot{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando ambas partes de esta identidad por  $M(\varphi)A^{-1}$  obtenemos (2.31), tal y como se deseaba mostrar. ■

## 2.4. Circuitos eléctricos

Un circuito eléctrico es un recorrido preestablecido por el que se desplazan cargas eléctricas. Las cargas eléctricas,  $Q$ , que constituyen una corriente eléctrica, pasan de un punto que tiene mayor potencial eléctrico a otro que tiene un potencial inferior. Para mantener permanentemente esa diferencia de potencial, llamada también voltaje o tensión,  $V$ , entre los extremos de un conductor, se necesita un dispositivo llamado generador (pila, batería, dinamo, alternador, ...) que tome las cargas que llegan a un extremo y las impulse hasta el otro. El flujo de cargas eléctricas por un conductor constituye una corriente eléctrica. Se define la intensidad de corriente eléctrica,  $I$ , como la cantidad de carga eléctrica que circula por una sección de un conductor en la unidad de tiempo. Por lo tanto,

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

En el sistema métrico internacional las cargas se miden en culombios, las diferencias de potencial o voltaje se miden en voltios y las intensidades de corriente en amperios.

Un circuito eléctrico está formado por un cable conductor que conecta elementos. Los elementos clásicos de un circuito son resistores, inductores y condensadores. El comportamiento de cada elemento está gobernado por una ley física simple, que se llama ecuación o ley constitutiva del elemento.

Los resistores o resistencias son conductores hechos de un material homogéneo en forma de cilindro que resisten el (se oponen al) flujo de la corriente, así que crean una diferencia de voltaje a través de ellos. La resistencia del resistor  $R$  depende de la conductividad del material  $\sigma$ , de la longitud del cilindro  $l$  y del área de la sección transversal al mismo  $S$ , es decir,  $R = \frac{l}{\sigma S}$ . La ley de Ohm establece que la caída de voltaje  $V$  a través de un resistor de resistencia  $R$  es proporcional a la corriente  $I$ , es decir,  $V = IR$ . La resistencia se mide en ohmios ( $\Omega$ ). Ejemplos de resistores son las planchas, las bombillas, etc.

Un condensador es un dispositivo formado por dos superficies o placas conductoras paralelas sometidas a una diferencia de potencial  $V$ , que adquieren una determinada carga eléctrica  $Q$ , positiva en una de ellas y negativa en la otra, siendo nula la variación de carga total. Sirven para almacenar energía eléctrica. La carga almacenada en una de las placas es proporcional a la diferencia de potencial entre esta placa y la otra, siendo la constante de proporcionalidad la llamada capacitancia  $C$ , es decir,  $Q = CV$ . En el sistema internacional de unidades la capacitancia se mide en faradios ( $F$ ).

Un inductor es un conductor, por ejemplo un cable, enrollado en una bobina. Cuando una corriente fluye a través de él, la energía se almacena temporalmente en un campo magnético en la bobina. Cuando la corriente a través del inductor cambia el campo magnético, que varía en el tiempo, induce un voltaje en el conductor de acuerdo con la ley de Faraday. El voltaje  $V$  a través de un inductor de inductancia  $L$  es proporcional a la tasa de cambio con respecto al tiempo de la corriente  $I$  que pasa a través de él, es decir,  $V = L \frac{dI}{dt}$ . La inductancia se mide en henrios ( $H$ ). Así como la resistencia mide la oposición

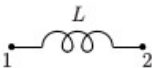
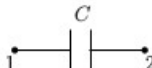

| Símbolo   | Ley Constitutiva          | Variables  |
|---|---------------------------|--|
|  | $V_1 - V_2 = L\dot{I}$    | Diferencia de voltaje a través de una bobina o inductor de inductancia $L$ con una intensidad de corriente $I$             |
|  | $V_1 - V_2 = \frac{Q}{C}$ | Diferencia de voltaje a través de un condensador de capacitancia $C$ con carga $Q$ en una de las placas y $-Q$ en la otra. |
|  | $V_1 - V_2 = IR$          | Diferencia de voltaje a través de un reóstato de resistencia $R$ con una intensidad de corriente $I$                       |

Tabla 2.3: Símbolos y leyes constitutivas de reóstatos, condensadores y bobinas

a la corriente, la inductancia es una medida de la oposición al cambio en la corriente.

La Tabla 2.3 resume los elementos de un circuito eléctrico junto con sus leyes constitutivas.

Además de las leyes constitutivas de los elementos idealizados de un circuito eléctrico, hay que tener en cuenta las leyes de interconexión entre estos elementos. Estas se llaman las leyes de Kirchhoff:

- Ley de corrientes de Kirchhoff, ley de nodos de Kirchhoff o primera ley de Kirchhoff: “La suma de las corrientes que concurren en un nodo es cero”, donde un nodo es un punto de un circuito donde concurren más de dos conductores (cables).
- Ley de tensiones o voltajes de Kirchhoff, ley de lazos de Kirchhoff o segunda ley de Kirchhoff: “La suma de las diferencias de potencial en cualquier lazo o ciclo es cero”, donde un lazo o ciclo es cualquier camino cerrado en un circuito eléctrico.

**Ejemplo 2.10 (Circuito RLC)** Considérese un circuito como en la Figura 2.13. La ley de voltajes de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje a través de cada elemento es igual al voltaje suministrado  $e(t)$ . Si las caídas de voltaje en el tiempo  $t$  a través del resistor, condensador y bobina son  $V_R(t)$ ,  $V_C(t)$  y  $V_L(t)$  respectivamente, entonces

$$e(t) - V_R(t) - V_C(t) - V_L(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Ahora bien, si la corriente en el tiempo  $t$  es  $I(t)$  y la carga en el condensador es  $Q(t)$  entonces

$$V_R(t) = I(t)R, \quad V_C(t) = Q(t)/C, \quad V_L(t) = L\dot{I}(t), \quad I(t) = \dot{Q}(t), \quad t \geq 0.$$

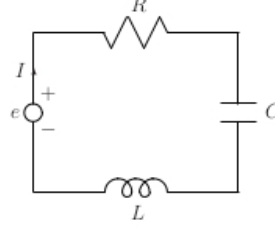


Figura 2.13: Circuito RLC

Por lo tanto,

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = e(t), \quad t \geq 0.$$

La variable de entrada de este sistema es el voltaje suministrado  $e(t)$  mientras que la variable o variables de salida dependen de lo que se quiera observar o controlar. Por ejemplo, podríamos tener interés en mantener la corriente  $I(t) = \dot{Q}(t)$  constante en el circuito.

Si se escriben las leyes constitutivas de los elementos de un circuito eléctrico en términos de la carga, se obtiene  $V_1 - V_2 = L\ddot{Q}$  para el caso del inductor,  $V_1 - V_2 = R\dot{Q}$  para el caso del resistor y  $V_1 - V_2 = \frac{1}{C}Q$  para el caso del condensador. Nótese la analogía que existe entre estas leyes y las de los sistemas mecánicos. Éstas se presentan en la Tabla 2.4. Es

| masa                     | bobina                 | muelle                   | condensador       | amortiguador         | resistor         |
|--------------------------|------------------------|--------------------------|-------------------|----------------------|------------------|
| $M$                      | $L$                    | $k$                      | $1/C$             | $c$                  | $R$              |
| $F$                      | $V_1 - V_2$            | $F$                      | $V_1 - V_2$       | $F$                  | $V_1 - V_2$      |
| $v$                      | $I$                    | $y$                      | $Q$               | $v$                  | $I$              |
| $F = M\dot{v}$           | $V_1 - V_2 = L\dot{I}$ | $F = ky$                 | $V_1 - V_2 = Q/C$ | $F = cv$             | $V_1 - V_2 = IR$ |
| $\mathcal{T} = (M/2)v^2$ | $W = (L/2)I^2$         | $\mathcal{W} = (k/2)y^2$ | $W = Q^2/(2C)$    | $\mathcal{D} = cv^2$ | $W = RI^2$       |

Tabla 2.4: Tabla de equivalencias entre sistemas mecánicos y circuitos eléctricos

decir, los inductores, condensadores y resistores son los equivalentes a las masas, muelles y amortiguadores en los sistemas mecánicos traslacionales. La tabla anterior es la tabla de analogía fuerza-voltaje. En ella  $W = VI$  representa la potencia eléctrica; es decir, la energía eléctrica entregada o absorbida por un elemento eléctrico en cada instante.

**Ejemplo 2.11** Recuérdesse que el sistema mecánico de la izquierda en la Figura 2.14 se estudió en la Sección 2.2. Vimos que las ecuaciones del movimiento de este sistema son

$$\begin{aligned} M_1\ddot{y}_1(t) + B(\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) + K(y_1(t) - y_2(t)) &= f(t) \\ M_2\ddot{y}_2(t) + B(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + K(y_2(t) - y_1(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Utilizando la analogía fuerza-voltaje de la Tabla 2.4, el circuito eléctrico de la derecha en la Figura 2.14 es el análogo del sistema mecánico de la izquierda. Efectivamente, consideremos los dos lazos especificados en la figura y sean  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  e  $I_3(t)$  las corrientes que circular en el instante  $t$  por la bobina  $M_1$ , la bobina  $M_2$  y la resistencia  $B$  y el condensador  $1/K$ , respectivamente. Entonces, por la 1ª ley de Kirchoff,  $I_3(t) = I_1(t) - I_2(t)$ . Y por la 2ª ley aplicada a los lazos con caídas de potencial  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ :

$$\begin{aligned} f(t) - M_1 \frac{dI_1}{dt} - B I_3(t) - \frac{Q_3(t)}{1/K} &= 0 \\ -M_2 \frac{dI_2}{dt} + B I_3(t) + \frac{Q_3(t)}{1/K} &= 0 \end{aligned}$$

Para la elección de los signos recuérdese que las caídas de potencial son positivas en la dirección opuesta a la dirección de la corriente. Como la corriente en el primer lazo circula en la dirección especificada por la flecha, la diferencia de potencial en  $M_1$ ,  $B$  y  $1/K$  es negativa. Sin embargo, en el segundo lazo, la dirección de la corriente en  $M_2$  es la misma que la de la flecha, pero opuesta a ella en  $B$  y  $1/K$ . Teniendo ahora en cuenta que  $Q_3(t) = Q_1(t) - Q_2(t)$  y que  $I(t) = \dot{Q}(t)$ , obtenemos fácilmente las ecuaciones que determinan la carga en cada uno de los dos lazos en cada instante de tiempo:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{Q}_1(t) + B(\dot{Q}_1(t) - \dot{Q}_2(t)) + K(Q_1(t) - Q_2(t)) &= f(t) \\ M_2 \ddot{Q}_2(t) + B(\dot{Q}_2(t) - \dot{Q}_1(t)) + K(Q_2(t) - Q_1(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son, de acuerdo a la Tabla 2.4, análogas a las de (2.42). ■

### 2.4.1. Modelo basado en circuitos eléctricos: Amplificadores operacionales

Un amplificador operacional (op-amp) es un dispositivo electrónico diseñado para amplificar señales, es decir, para elevar el valor de la tensión o corriente de una señal variable en el tiempo. Está diseñado para ser usado con componentes externos (resistores y condensadores) conectados entre sus terminales de entrada y salida. Puede realizar diferentes tareas según los componentes que se conecten y su disposición. Así, originalmente se empleaban para realizar operaciones matemáticas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, derivadas, integrales, ...) en calculadoras analógicas (de ahí su nombre). Veremos enseguida cómo. Primero estudiemos su composición. En [25] se puede obtener más información sobre los amplificadores operacionales.



Figure 2.8 A force-voltage analogy.

Figura 2.14: Un sistema mecánico y un circuito eléctrico análogos

Los op-amp disponen de 4 puertos (véanse las Figuras 2.15 y 2.16):

- El puerto de entrada con 2 terminales para los voltajes  $v_-$  y  $v_+$  ( $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente, en la Figura 2.16) llamadas entrada *invertida* y *no invertida*, respectivamente. Son los terminales por los que entran las señales que se quieren amplificar.
- El puerto que suministra el voltaje negativo de entrada  $e_- = -V_{\text{supply}}$ . Es el puerto conectado al polo negativo de la fuente de alimentación
- El puerto que suministra el voltaje positivo de entrada  $e_+ = +V_{\text{supply}}$ . Conectado al polo positivo de la fuente de alimentación
- El puerto de salida  $V_{\text{out}}$ : el terminal por el que sale la señal amplificada.

Los cinco terminales se conectan a través de un (complicado) circuito eléctrico que debe cumplir la ley de corrientes de Kirchoff: La suma  $I_- + I_+ + I_{e_+} + I_{e_-} + I_o = 0$  siendo  $I_-$  e  $I_+$  las corrientes en las entradas invertida y no invertida,  $I_{e_-}$  e  $I_{e_+}$  las corrientes en los terminales  $e_-$  y  $e_+$ , e  $I_o$  la corriente en el terminal  $V_{\text{out}}$ .

La Figura 2.16 representa un modelo ideal de un amplificador operacional en la forma de un circuito equivalente. Refiriéndonos a ella e introduciendo símbolos que se usarán más adelante, el voltaje de entrada en el amplificador es  $v = V_{\text{DIFF}} = v_+ - v_-$  y  $Z_{\text{in}}$  y  $Z_{\text{out}}$  son las resistencias de entrada y salida del amplificador, respectivamente. A este modelo ideal se le suponen las siguientes características:

- $I_- + I_+ = 0$ : no hay corriente en los terminales de entrada. Equivalentemente, debido a la ley de Ohm ( $R = \frac{V}{I}$ ), la resistencia de entrada  $Z_{\text{in}}$  es “infinita”. En los amplificadores reales la intensidad de la corriente en la entrada varía entre unos pocos picoamperios ( $10^{-12}$  amperios) y unos pocos miliamperios.
- La resistencia de salida  $Z_{\text{out}} = 0$  de forma que puede proporcionar tanta intensidad como sea necesario en el puerto de salida. En los op-amp reales  $Z_{\text{out}}$  está en el rango  $100 - 20K\Omega$ .

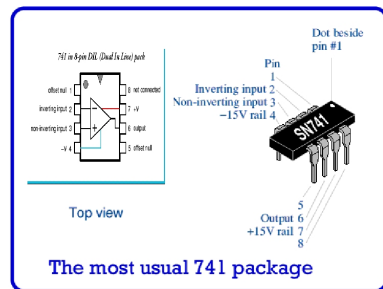


Figura 2.15: El op-amp SN741

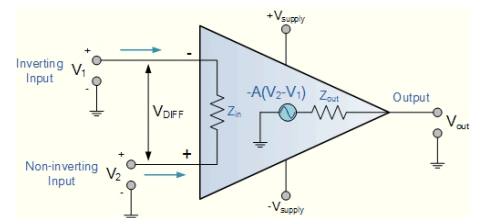


Figura 2.16: Esquema típico de los componentes de un op-amp

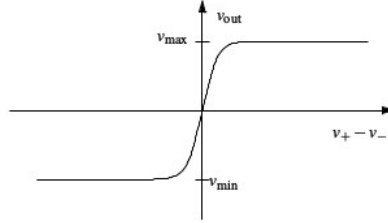


Figura 2.17: Ganancia no lineal de un amplificador operacional

Los modelos más simples son los amplificadores operacionales lineales. En éstos, además de las suposiciones anteriores, se considera que la relación entre los voltajes de entrada y salida es lineal para valores pequeños de los voltajes de suministro  $e_-$  y  $e_+$ . Concretamente,

$$v_{\text{out}} = \text{sat}_{(v_{\text{mín}}, v_{\text{máx}})}(k(v_+ - v_-)), \quad (2.43)$$

donde  $\text{sat}$  es la función de saturación:

$$\text{sat}_{(a,b)} = \begin{cases} a & \text{si } x < a \\ x & \text{si } a \leq x \leq b \\ b & \text{si } x > b. \end{cases}$$

La constante  $k$  se conoce como *ganancia en lazo abierto* o, simplemente, *ganancia*. Su valor es “infinito” en los amplificadores ideales. En la práctica su rango de valor es 20000 – –200000 (es una constante sin unidades). En el caso del amplificador de la Figura 2.15 la ganancia es 200000. Los valores  $v_{\text{mín}}$  y  $v_{\text{máx}}$  en (2.43) cumplen

$$e_- \leq v_{\text{mín}} < v_{\text{máx}} \leq e_+,$$

y, por lo tanto, están en el rango de los voltajes de la fuente externa de suministro. Modelos más exactos se obtienen reemplazando la función de saturación (que es una función escalonada y lineal que pasa por el origen de coordenadas y de pendiente  $k$  en el intervalo  $[v_{\text{mín}}, v_{\text{máx}}]$ ) por una función diferenciable como la de la Figura 2.17. Para valores de las señales de entrada la función de (2.43) es lineal

$$v_{\text{out}} = k(v_+ - v_-). \quad (2.44)$$

Conectando el terminal de salida con el terminal de entrada invertida por medio de resistores y condensadores se construyen configuraciones que, en conjunto, se denominan configuraciones de *feedback* o *realimentación negativa* tal y como la que aparece en la parte izquierda de la Figura 2.18. Esta conexión es un lazo cerrado (parte de la derecha de la Figura 2.18) que hace que la diferencia de potencial en la entrada tienda a cero de la siguiente forma: cuando la tensión en la salida se eleva, la tensión en la terminal negativa también se eleva, por lo que  $v_+ - v_-$  disminuye y la salida disminuye. Este proceso se estabiliza y  $v_+ - v_-$  va disminuyendo y tendiendo a cero. En los amplificadores operacionales inversores ideales supondremos que  $v_+ - v_- = 0$  y que, como ya se ha dicho, no entra corriente en los terminales de entrada.



Con una realimentación negativa podemos construir un circuito cuya ganancia sea la deseada y no necesariamente la nominal del amplificador. Veamos cómo hacerlo. Con la notación de la Figura 2.18, estamos suponiendo  $i_0 = 0$  y  $v = v_- - v_+ = 0$ . Utilizando la primera ley de Kirchoff, se cumple que  $I_{R_1} - I_{R_2} = 0$ , lo que es equivalente a  $\frac{v_1 - 0}{R_1} = \frac{0 - v_2}{R_2}$ .

Por lo tanto,  $v_2 = \frac{R_2}{R_1}(-v_1)$ . Así, la ganancia del amplificador inversor es

$$k_{inv} = \frac{v_2}{-v_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Ahora bien, si seguimos suponiendo  $i_0 = 0$  pero  $v \neq 0$  aunque pequeña se cumple que  $\frac{v_1 - v}{R_1} = \frac{v - v_2}{R_2}$ . Por lo tanto

$$v = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_2}{R_1} v_1 + v_2 \right).$$

Por (2.44),  $v_2 = -kv$  donde  $k$  es la ganancia en lazo abierto. Entonces,

$$v_2 = -k \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( \frac{R_2}{R_1} v_1 + v_2 \right).$$

Esto es lo que está representado en el diagrama de bloques de la parte derecha de la Figura 2.18). Manipulando la ecuación anterior se obtiene que la ganancia del lazo cerrado es

$$k_{cl} = -\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_2}{R_1} \frac{kR_1}{R_1 + R_2 + kR_1}.$$

Nótese que si  $k$ , la ganancia en lazo abierto, es grande entonces la ganancia en lazo cerrado  $k_{cl}$  es la misma que  $k_{inv}$ , es decir, “ $\lim_{k \rightarrow \infty} k_{cl} = k_{inv}$ ”. Además, si  $\frac{R_2}{R_1} = 100$  y  $k = 10^6$  una variación en la ganancia en lazo abierto grande, por ejemplo pasar a  $k' = 2 \cdot 10^6$ , produce una variación en la ganancia en lazo cerrado pequeña:  $k_{cl} = 99,989901$  a  $k'_{cl} = 99,99495$ . Esto es un ejemplo de cómo se puede usar la realimentación para hacer precisos los sistemas con componentes con incertidumbre. Aquí, a través de la realimentación, se pasa de ganancia alta y poca robustez a disminuir la ganancia pero aumentar la robustez.

El amplificador aditivo sirve para combinar el voltaje presente en varias entradas en una única salida.

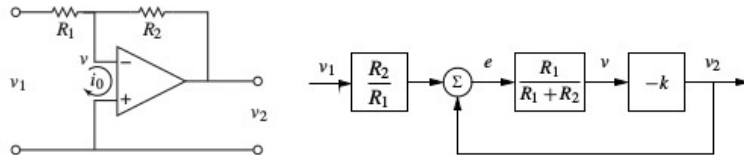
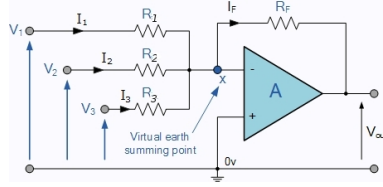


Figura 2.18: Feedback o realimentación negativa en un op-amp y el correspondiente diagrama de bloques

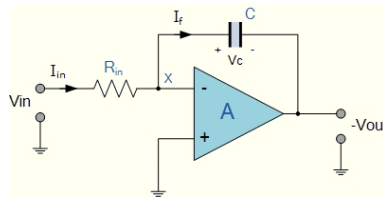


Por la primera ley de Kirchoff,  $I_1 + I_2 + I_3 = I_F$ . Suponiendo que el voltaje en  $x$  es cero, tenemos que  $I_1 = \frac{v_1}{R_1}$ ,  $I_2 = \frac{v_2}{R_2}$ ,  $I_3 = \frac{v_3}{R_3}$  e  $I_F = \frac{-v_{out}}{R_F}$ . Así

$$v_{out} = -R_F I_F = -R_F(I_1 + I_2 + I_3) = -R_F \left( \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right) = - \left( \frac{R_F}{R_1} v_1 + \frac{R_F}{R_2} v_2 + \frac{R_F}{R_3} v_3 \right).$$

Aplicaciones del amplificador aditivo son un mezclador de sonidos, un conversor digital analógico, etc.

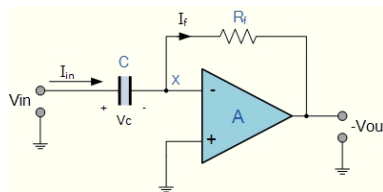
El amplificador integrador tiene la siguiente estructura



Suponemos que el voltaje en  $x$  es cero. Por la primera ley de Kirchoff se cumple que  $I_{in} = I_f$ . Por otra parte,  $I_{in} = \frac{v_{in}}{R_{in}}$  y  $0 - v_{out} = \frac{Q}{C} = \int \frac{I_f}{C} dt = \int \frac{I_{in}}{C} dt = \int \frac{v_{in}}{R_{in}C} dt$ . Así,

$$v_{out} = -\frac{1}{R_{in}C} \int v_{in} dt$$

La estructura del amplificador diferenciador es



Suponemos que el voltaje en  $x$  es cero. Por la primera ley de Kirchoff se cumple que  $I_{in} = I_f$ . Además,  $v_{in} - 0 = \frac{Q}{C} = \int \frac{I_f}{C} dt$  y  $0 - v_{out} = I_f R_f$ . Por lo tanto, derivando en la primera expresión se obtiene  $I_f = C \frac{dv_{in}}{dt}$  y sustituyendo este resultado en la segunda expresión  $v_{out} = -R_f C \frac{dv_{in}}{dt}$ . Así,

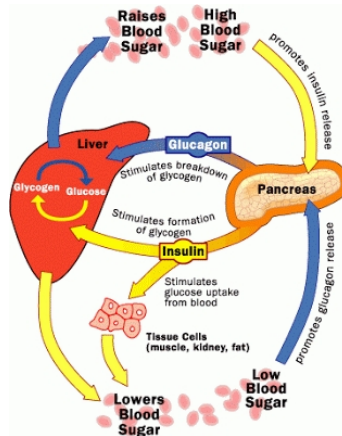
$$v_{out} = -R_f C \frac{dv_{in}}{dt}.$$

Ya vemos que los amplificadores operacionales son muy versátiles y que se pueden construir diferentes mediante distintas combinaciones de resistores y condensadores.

## 2.5. Otros sistemas

### 2.5.1. Dinámica del sistema insulina-glucosa

Es esencial que la concentración de glucosa en sangre se mantenga entre 0.7 y 1.1 gramos/litro. La concentración de glucosa está influenciada por muchos factores como la ingestión de comida, la digestión y el ejercicio. El cuerpo humano tiene un mecanismo sofisticado que regula la concentración de glucosa en sangre. El páncreas se encarga de ello, segregando las hormonas insulina y glucagón.



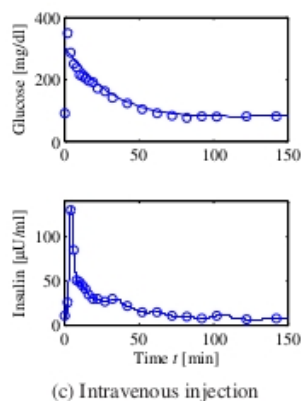
La insulina hace que el nivel de glucosa en sangre baje. Se han desarrollado múltiples modelos de diferente grado de complejidad. Uno relativamente simple es el minimal model (ver [4] o [26])

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -(p_1 + x_2)x_1 + p_1g_e \\ \frac{dx_2}{dt} &= -p_2x_2 + p_3(u - i_e)\end{aligned}$$

- $u(t)$  = insulina en la sangre
- $i_e, g_e$  valores de equilibrio de insulina y glucosa
- $x_1$  = concentración de glucosa en sangre
- $x_2$  = proporcional a la concentración de insulina en el líquido intersticial
- $p_1, p_2, p_3$  = parámetros.

La insulina en sangre está considerada como una variable de entrada (se puede inyectar de forma intravenosa). El término  $-x_1x_2$  es una interacción entre la concentración de glucosa e insulina de signo negativo pues la insulina baja la concentración de glucosa en sangre. Los parámetros se determinan experimentalmente, dependiendo de la población que se quiera modelizar: diabéticos o no, personas mayores o jóvenes, etc.

Las siguientes gráficas muestran la respuesta del cuerpo a una inyección intravenosa de glucosa en el tiempo  $t = 0$ . La concentración de glucosa en ese instante es alta pero va descendiendo pues el páncreas reacciona rápidamente segregando insulina. Los niveles de glucosa e insulina van disminuyendo hacia sus puntos de equilibrio.



### 2.5.2. Producto Interior Bruto

En esta sección vamos a presentar un modelo dinámico en tiempo discreto. Generalmente los datos económicos no son continuos sino que suelen estar acumulados en periodos de tiempo (años, meses, días, ...).

El producto interior bruto (PIB) es una magnitud macroeconómica que expresa el valor monetario de la producción de bienes y servicios de demanda final de un país (o una región) durante un período determinado de tiempo (normalmente un año).

Veamos el modelo Samuelson-Hicks multiplier-accelerator (consultar por ejemplo [10]). Las variables básicas que utiliza son:

- $P(t)$ : PIB en el año  $t$
- $C(t)$ : consumo en el año  $t$
- $I(t)$ : inversión en el año  $t$
- $G(t)$ : gasto público en el año  $t$ .

Este modelo no tiene en cuenta las importaciones y exportaciones. Hace las siguientes suposiciones:

1. El PIB es la suma del consumo, la inversión y el gasto público, es decir,

$$P(t) = C(t) + I(t) + G(t), \quad t \in \mathbb{N}.$$

2. El consumo del año  $t + 1$  depende solo del PIB de los dos años previos, es decir,

$$C(t + 1) = f(P(t), P(t - 1)).$$

3. La inversión en el año  $t + 1$  solo depende del incremento del PIB desde el año  $t - 1$  al  $t$ , es decir,

$$I(t + 1) = h(P(t) - P(t - 1)).$$

Sutituyendo las dos últimas ecuaciones en la primera se obtiene

$$P(t + 1) = f(P(t), P(t - 1)) + h(P(t) - P(t - 1)) + G(t + 1).$$

Esta es una ecuación en diferencias de orden 2 que puede ser no lineal. Conocidos  $G(t)$  para  $t = 2, 3, \dots$ ,  $P(0)$  y  $P(1)$  se puede resolver recursivamente, de tal forma que se puede obtener  $P(t)$  para  $t = 2, 3, \dots$ . Así,  $G(t)$  es una variable de entrada y  $P(t)$  de salida. Un posible objetivo del gobierno puede ser regular el PIB, el consumo y la inversión manteniendo estas variables tan próximas como se pueda a unos valores previamente fijados denotados por  $P^*(t)$ ,  $C^*(t)$  y  $I^*(t)$ . Si  $N$  denota el horizonte temporal que nos hemos fijado, se trataría de minimizar la siguiente función de coste de las desviaciones respecto de los objetivos

$$J = \sum_{t=1}^N [g_1(P(t) - P^*(t))^2 + g_2(C(t) - C^*(t))^2 + g_3(I(t) - I^*(t))^2]$$

donde los coeficientes  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  reflejan la importancia relativa de cada objetivo. Este es un ejemplo de un “quadratic control optimization problem”.

### 2.5.3. Calentamiento de una barra metálica

Una barra metálica se calienta mediante chorros de calor a lo largo de ella, cuya intensidad puede ser controlada. Supóngase que  $(r, \varphi, x)$  son sus coordenadas cilíndricas y

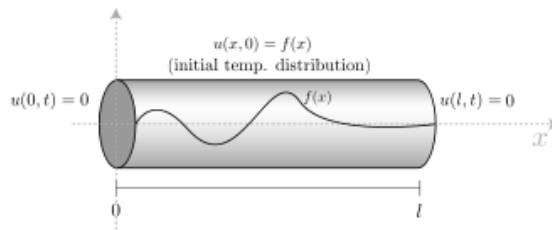


Figura 2.19: Barra metálica calentada

que podemos pensar en la intensidad de los chorros como una función  $v(x, t)$  (no depende de  $\varphi$ ). Suponemos también que la conductividad termométrica de la barra  $\alpha$  es constante y que la distribución inicial de la temperatura en el tiempo  $t = 0$  es independiente de  $\varphi$ . Sea  $\bar{\Theta}(x, t)$  la temperatura media en el corte transversal de la barra,  $C$  la temperatura de referencia y  $u(x, t) = \bar{\Theta}(x, t) - C$ .

Supongamos que se satisfacen las condiciones de la Figura 2.19. Este sistema físico se puede modelizar matemáticamente usando la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + v(x, t),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0 = u(l, t)$$

Esta es una ecuación diferencial en derivadas parciales. La variable de entrada es la intensidad del calor aplicado  $v(x, t)$  y la variable de salida es la temperatura  $u(x, t)$ . Un problema de control es controlar la temperatura de la barra en cada punto en un intervalo de tiempo determinado.