

## Capítulo 5

# Comportamiento dinámico: Estabilidad

### 5.1. Introducción

En esta lección estudiaremos la estabilidad de los sistemas lineales desde dos puntos de vista: estabilidad externa o estabilidad BIBO (*Bounded-Input Bounded-Output*) y la estabilidad interna o estabilidad para entrada cero.

### 5.2. Estabilidad Entrada/Salida

Consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (5.1)$$

y recordemos que la siguiente fórmula expresa la relación entre las entradas y salidas de un sistema cuando el estado inicial del sistema en  $t_0 = 0$  es 0 (véase (4.47)):

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t H(t, s)u(s)ds = \\ &= \int_0^t C(t)\Phi(t, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

siendo  $H(t, s)$  la matriz de respuesta del sistema (5.1) a un impulso (véase (4.46))) y  $\Phi(t, t_0)$  la matriz de transición de estados. Recordemos también que la suposición general es que las funciones de entrada  $u(\cdot)$  y de salida  $y(\cdot)$  son funciones continuas a trozos; i.e.  $u(\cdot) \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ ,  $y(\cdot) \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ .

Para estudiar la estabilidad (externa o interna) tendremos que hacer uso de normas. En esta sección usaremos la norma  $\ell_\infty$  para vectores y matrices (en este caso la norma infinito inducida): Si  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &:= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Asimismo, para las funciones vectoriales (como  $u(\cdot)$  o  $y(\cdot)$ ) usaremos la norma  $L^\infty$ :

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \max_{1 \leq j \leq m} |u_j(t)| \right\} \\ \|y\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|y(t)\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \max_{1 \leq j \leq p} |y_j(t)| \right\}\end{aligned}\tag{5.4}$$

Recordemos que una función pertenece al espacio  $L^\infty$  si y sólo si su norma  $L^\infty$  es finita o, equivalentemente, la función es acotada<sup>1</sup>.

El concepto de estabilidad Entrada-Salida viene a significar que “cualquier entrada acotada  $u(\cdot)$  produce una salida acotada  $y(\cdot)$ ”. Más precisamente,

**Definición 5.1** Diremos que el sistema (5.1) es **Estable Entrada-Salida** (Estable E-S) si para cada número positivo  $M$  existe un número positivo  $N$  tal que para cada función de entrada  $u(\cdot)$  que cumpla  $\|u\|_\infty < M$ , la correspondiente salida  $y(t)$  con estado inicial 0 cumple  $\|y\|_\infty \leq N$ .

Nuestro primer resultado es el siguiente:

**Teorema 5.2** El sistema (5.1) es estable E-S si y sólo si

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^t \|H(t, s)\| ds < \infty\tag{5.5}$$

donde la norma de  $H(t, s)$  es la norma inducida (5.3).

La condición (5.5) es equivalente a que para cada  $(i, j)$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $\int_0^t |h_{ij}(t, s)| ds$  está acotada en  $\mathbb{R}$ . En efecto, basta tener en cuenta que para cada  $(i, j)$ , con las normas de (5.3),

$$|h_{ij}(t, s)| \leq \|H(t, s)\| \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m |h_{ij}(t, s)|.\tag{5.6}$$

---

<sup>1</sup>Rigurosamente hablando deberíamos decir “esencialmente acotada” y reemplazar sup por “supremo esencial”

**Demostración.-** Supongamos que se verifica (5.5) y pongamos

$$K := \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^t \|H(t, s)\| ds.$$

Sea  $M > 0$  es un número real positivo y supongamos que  $\|u\|_\infty \leq M$ . Haciendo uso de las propiedades elementales de las integrales de funciones continuas a trozos (consúltese el Apéndice A.6 de [5]) y de las normas definidas en (5.3), obtenemos (suprimimos el subíndice  $\infty$  en las normas de (5.3)) que para todo  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \left\| \int_0^t H(t, s)u(s)ds \right\| \leq \int_0^t \|H(t, s)u(s)\| ds \leq \int_0^t \|H(t, s)\| \|u(s)\| ds \leq \\ &\leq \left( \int_0^t \|H(t, s)\| ds \right) \|u\|_\infty \leq K \|u\|_\infty, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde hemos usado, además, que para una norma de matriz inducida:  $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$  para todo vector  $x$  y que para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|u(t)\| \leq \|u\|_\infty$ . En consecuencia

$$\|y\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|y(t)\| \leq KM,$$

lo que prueba que el sistema es estable E-S.

Supongamos ahora que el sistema (5.1) es estable E-S. Fijemos  $M = 1$ . Por la definición de estabilidad E-S, existe  $N > 0$  tal que si  $\|u\|_\infty \leq 1$  entonces  $\|y\|_\infty \leq N$ . Sea  $t \in \mathbb{R}$  y elijamos un par de índices  $(i, j)$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Definamos  $u(s) \in \mathbb{R}^m$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u_j(s) &= \begin{cases} \text{sign}(h_{ij}(t, s)) & s \in [0, t] \\ 0 & s > t \end{cases} \\ u_k(s) &= 0 \quad k \neq j, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Entonces  $\|u\|_\infty \leq 1$  y consecuentemente, la salida del sistema (5.1) a esta entrada cumple  $\|y\|_\infty \leq N$ . Pero, por (5.2), la  $i$ -ésima componente de la salida  $y(t)$  en  $t$  correspondiente a la entrada  $u(\cdot)$  (teniendo en cuenta la definición de  $u(\cdot)$  en (5.8)) es

$$y_i(t) = \int_0^t h_{ij}(t, s)u_j(s)ds = \int_0^t |h_{ij}(t, s)|ds.$$

Como  $\|y\|_\infty \leq N$ , de la definición de  $\|y\|_\infty$  en (5.4), concluimos que  $\int_0^t |h_{ij}(t, s)|ds$  está acotada. Como este razonamiento es válido para cualquier par de índices  $(i, j)$ , y teniendo en cuenta el comentario que hemos hecho tras el enunciado del Teorema 5.2, obtenemos  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^t \|H(t, s)\| ds < \infty$ , tal y como se deseaba demostrar. ■

Usando la expresión (5.2), tenemos el siguiente Corolario:

**Corolario 5.3** *Si en el sistema (5.1) la matriz  $D(\cdot)$  está acotada en  $\mathbb{R}$  entonces el sistema es estable E-S si y sólo si*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^t \|C(t)\Phi(t, s)B(s)\| ds < \infty. \quad (5.9)$$

**Demostración.-** Supongamos que se verifica (5.9). Recordando la expresión de la matriz de respuesta a un impulso (4.46)) y usando las desigualdades de (5.7) tenemos:

$$\begin{aligned}
 \|y(t)\| &= \left\| \int_0^t H(t,s)u(s)ds \right\| = \left\| \int_0^t (C(t)\Phi(t,s)B(s) + D(s)\delta(t-s))u(s)ds \right\| \\
 &\leq \left\| \int_0^t C(t)\Phi(t,s)B(s)u(s)ds \right\| + \left\| \int_0^t D(s)\delta(t-s)u(s)ds \right\| \\
 &= \left\| \int_0^t (C(t)\Phi(t,s)B(s)u(s)ds \right\| + \|D(t)u(t)\| \\
 &\leq \left( \int_0^t \|C(t)\Phi(t,s)B(s)\|ds + \|D(t)\| \right) \|u\|_\infty
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $D(t)$  y  $u(t)$  están acotada en  $\mathbb{R}$  y que se verifica (5.9), concluimos que  $y(t)$  está acotada y el sistema es estable E-S.

Recíprocamente, si el sistema es estable E-S y  $D(t)$  está acotada en  $\mathbb{R}$  entonces la función  $y(t) - D(t)u(t)$  está acotada para toda función  $u(t)$  acotada. Sustituyendo  $y(t)$  por  $z(t) = y(t) - D(t)u(t)$  en la segunda parte de la demostración del Teorema 5.2 obtenemos (5.9). ■

Cuando el sistema (5.1) es invariante en el tiempo; es decir,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (5.10)$$

la respuesta del sistema cuando el sistema en  $t = 0$  se encuentra en reposo ( $x(0) = 0$ ) viene dada por la expresión (ver (4.49))

$$y(t) = \int_0^t H(t-s)u(s)ds, \quad (5.11)$$

donde  $H(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ . Para los sistemas lineales invariantes en el tiempo (véase (4.48))

$$\int_0^t \|H(t,s)\|ds = \int_0^t \|H(t-s)\|ds = \int_0^t \|H(s)\|ds.$$

Y teniendo en cuenta que la función  $\|H(\cdot)\|$  es positiva en  $[0, \infty)$  tenemos que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^t \|H(s)\|ds = \int_0^\infty \|H(t)\|dt.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que  $D(t) = D$  es constante (y por lo tanto acotada en todo  $\mathbb{R}$ ) podemos aplicar el Corolario 5.12 para concluir:

**Corolario 5.4** *El sistema lineal invariante en el tiempo (5.10) es estable E-S si y sólo si*

$$\int_0^\infty \|Ce^{At}B\|dt < \infty$$

Hay una caracterización sencilla y útil de la estabilidad E-S de los sistemas lineales invariantes en el tiempo en términos de la matriz de transferencia del sistema introducida de manera informal en las Lecciones 3 y 4 como la matriz que relaciona las transformadas de Laplace de las entradas y salidas del sistema (5.10) cuando el estado inicial del sistema en  $t = 0$  es 0. Formalmente si tomamos transformadas de Laplace en dichos sistemas obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{cases} sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (sI_n - A)x(s) = Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(s) = (C(sI_n - A)^{-1}B + D)u(s). \end{aligned}$$

Así que la matriz de transferencia del sistema es

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D.$$

Por el Corolario 5.4 podemos suponer que  $D = 0$ . En este caso, la matriz de transferencia es  $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$  y la matriz de respuesta a un impulso es  $H(t) = Ce^{At}B$ . Veamos que la transformada de Laplace  $\mathcal{L}(H)(s) = G(s)$ . Sabemos que esto es cierto (véase (3.8)) para los sistemas de una entrada y una salida. Para verlo para los sistemas multivariables recurriremos a dicho resultado. En realidad, Si  $g_{ij}(s)$  y  $h_{ij}(t)$  son los elementos en la posición  $(i, j)$  de  $G(s)$  y  $H(t)$  respectivamente, entonces  $g_{ij}(s)$  y  $h_{ij}(t)$  son las funciones de transferencia y de respuesta a un impulso del sistema monovariable:

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = Ax_j(t) + b_j u_j(t) \\ y_{ij}(t) = c_i x_j(t), \end{cases}$$

donde  $c_i$  es la  $i$ -ésima fila de  $C$ ,  $b_j$  es la  $j$ -ésima columna de  $B$  y  $u_j(t)$  es la  $j$ -ésima componente del vector  $u(t)$ . Tal y como se ha dicho más arriba, se sigue de (3.8) que  $\mathcal{L}(h_{ij})(s) = g_{ij}(s)$  y, consecuentemente

$$\mathcal{L}(H)(s) = G(s),$$

tal y como se quería demostrar. Cuando  $B = C = I_n$  tenemos en particular que  $\mathcal{L}(e^{At})(s) = (sI_n - A)^{-1}$ . Este resultado generaliza a matrices la transformada de Laplace de la función exponencial escalar.

Veamos la forma que tienen las entradas  $g_{ij}(s)$  de  $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ . Calculemos primero

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{N(s)}{\det(sI_n - A)}.$$

Aquí  $N(s)$  es la matriz transpuesta de los menores de orden  $n - 1$  de  $sI_n - A$  con su correspondiente signo. Por lo tanto,  $N(s)$  es una matriz de polinomios de grado  $n - 1$  a lo más mientras que  $\det(sI - A)$  es un polinomio de grado  $n$ . Así pues, los elementos de  $(sI_n - A)^{-1}$  son cocientes de polinomios cuyos numeradores tiene grado menor que el de los correspondientes denominadores. Estos cocientes de polinomios se llaman *funciones racionales estrictamente propias*. Ahora bien, los elementos de la matriz  $G(s) = C(sI_n -$

$A)^{-1}B$  son sumas y productos de los elementos de  $C$ ,  $B$  y  $(sI_n - A)^{-1}$ . Como las sumas de funciones racionales estrictamente propias son funciones racionales estrictamente propias, concluimos que los elementos de  $G(s)$  son cocientes de polinomios cuyos numeradores tienen grado menor que el de los correspondientes denominadores. Una vez suprimidos en cada fracción estrictamente propia los factores comunes, se definen *los polos* de  $G(s)$  como *las raíces del mínimo común múltiplo de los denominadores* de  $G(s)$ . Este mínimo común múltiplo debe ser, necesariamente, un divisor de  $\det(sI_n - A)$  (polinomio característico de  $A$ ), pero no tiene por qué coincidir con él. En otras palabras, todos los polos de  $G(s)$  son valores propios de  $A$  (raíces de  $\det(sI_n - A)$ ) pero puede ser que haya valores propios de  $A$  que no sean polos de  $G(s)$ . Por ejemplo, si

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

y

$$H(t) = Ce^{At}B = (t+2)e^{\lambda_1 t}.$$

Como  $\mathfrak{L}(t^k e^{\lambda_0 t}) = \frac{k!}{(s - \lambda_0)^{k+1}},$

$$\mathfrak{L}(H)(s) = \mathfrak{L}(te^{\lambda_1 t}) + \mathfrak{L}(2e^{\lambda_1 t}) = \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{2}{s - \lambda_1} = \frac{2s - 2\lambda_1 + 1}{(s - \lambda_1)^2}.$$

También

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI_3 - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda_1} & \frac{1}{(s - \lambda_1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s - \lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s - \lambda_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda_1} & \frac{s - \lambda_1 + 1}{(s - \lambda_1)^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2s - 2\lambda_1 + 1}{(s - \lambda_1)^2}, \end{aligned}$$

obteniéndose el mismo resultado por ambos procedimientos. El sistema tiene un solo polo,  $\lambda_1$ , de multiplicidad 2 mientras que los valores propios de  $A$  son 1 y 2.

Ahora podemos dar el resultado anunciado para caracterizar los sistemas lineales invariantes en el tiempo que son estables E-S.

**Teorema 5.5** *El sistema (5.10) es estable E-S si y sólo si todos los polos de la matriz de transferencia del sistema,  $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$ , tiene parte real negativa.*

**Demostración.** Usando el Corolario 5.4, hay que demostrar que  $\int_0^\infty \|H(t)\| dt < \infty$  si y sólo si  $G(s)$  tiene todos sus polos con parte real negativa.

Supongamos en primer lugar que  $\int_0^\infty \|H(t)\| dt < \infty$  entonces  $\int_0^\infty H(t)e^{-st} dt$  converge para todo  $s$  tal que  $\Re s \geq 0$ . En efecto, teniendo en cuenta que para  $t \geq 0$  y  $\Re s \geq 0$  se tiene  $|e^{-st}| \leq 1$ ,

$$\left| \int_0^\infty h_{ij}(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |h_{ij}(t)| dt < \infty.$$

Pero  $g_{ij}(s) = \mathcal{L}(h_{ij}(t)) = \int_0^\infty h_{ij}(t)e^{-st} dt$ , de modo que  $G(s)$  está bien definida para todo  $s$  tal que  $\Re s \geq 0$ . En consecuencia, todos sus denominadores deben no anularse para todo  $s$  tal que  $\Re s \geq 0$ . Esto implica que sus polos tienen parte real negativa.

Recíprocamente, supongamos que los polos de todos los elementos  $g_{ij}(s)$  de  $G(s)$  tienen parte real negativa. Sea  $h_{ij}(t)$  el elemento en la posición  $(i, j)$  de  $H(t) = Ce^{At}B$ . Por (4.31),  $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$  siendo  $J$  la forma de Jordan de  $A$  y  $T$  una matriz no singular tal que  $T^{-1}AT = J$ . Pero teniendo en cuenta la forma de  $e^{Jt}$  de (4.32), se concluye sin dificultad que los elementos de  $H(t) = Ce^{At}B = CTe^{Jt}T^{-1}B$  son de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k(t)e^{\lambda_k t} \quad (5.12)$$

donde, para  $k = 1, \dots, \ell$ ,  $p_k(t)$  es un polinomio y  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$  son algunos (quizá no todos) valores propios de  $A$ . De hecho,  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$  son los polos de  $G(s)$ . Así,  $\Re \lambda_k < 0$ ,  $k = 1, \dots, \ell$ . Como los polinomios  $p_k(t)$  crecen, cuando  $t \rightarrow \infty$ , más lentamente que la exponencial tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ y } k = 1, \dots, \ell, \exists m_k(\varepsilon) \geq 0 \text{ tal que } |p_k(t)| \leq m_k(\varepsilon)e^{\varepsilon t} \quad \forall t \geq 0.$$

Tomando  $\mu = -\max_{1 \leq k \leq \ell} \Re \lambda_k > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, \mu)$  y  $m(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\ell} m_k(\varepsilon)$  tenemos

$$|h_{ij}(t)| = \left| \sum_{k=1}^{\ell} p_k(t)e^{\lambda_k t} \right| \leq m(\varepsilon)e^{-(\mu-\varepsilon)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

y  $\mu - \varepsilon > 0$ . En consecuencia  $\int_0^\infty |h_{ij}(t)| dt \leq m(\varepsilon)(\mu - \varepsilon)^{-1} < \infty$ . ■

El Teorema 5.5 confirma de manera rigurosa y generaliza los resultados vistos en la Lección 4 acerca de la respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo a los tres tipos de entradas clásicos. Vimos allí que cuando los valores propios de la matriz de estados tienen parte real negativa la respuesta de estado estacionario bien convergía a un valor que denotábamos como  $y_{ee}$  (en el caso de entradas impulso unidad o salto unidad) o era una salida sinusoidal (en el caso de entradas sinusoidales) con, posiblemente, distinta fase y amplitud que la entrada. En todos los casos se trata de entradas acotadas para las que la respuesta del sistema también es acotada. En las Figuras 5.1 y 5.2 se

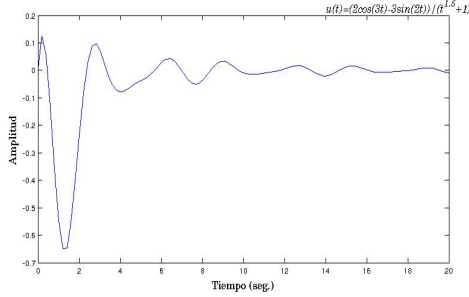


Figura 5.1: Respuesta de un sistema cuya matriz de transferencia tiene polos  $-0,5$ ,  $-1$  y  $-2$  a la entrada  $u(t) = \frac{2 \cos(3t) - 3 \operatorname{sen}(2t)}{t^{\frac{3}{2}} + 1}$ .

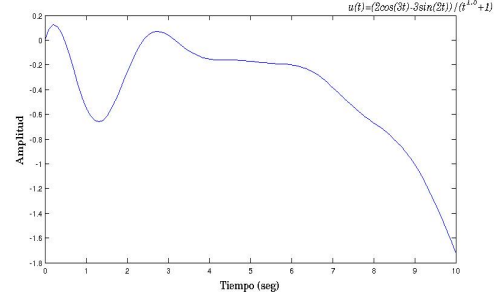


Figura 5.2: Respuesta de un sistema cuya matriz de transferencia tiene polos  $0,5$ ,  $-1$  y  $-2$  a la entrada  $u(t) = \frac{2 \cos(3t) - 3 \operatorname{sen}(2t)}{t^{\frac{3}{2}} + 1}$ .

muestran las respuestas de dos sistemas lineales a una misma función acotada:  $u(t) = \frac{2 \cos(3t) - 3 \operatorname{sen}(2t)}{t^{\frac{3}{2}} + 1}$ . En la primera, los polos de la matriz de transferencia tienen parte real negativa; en la segunda, uno de los polos tiene parte real positiva. Se puede apreciar que la respuesta del primer sistema se mantiene acotada (de hecho tiende a 0). En la segunda gráfica se ha centrado la atención en la respuesta transitoria por lo que se ha elegido un intervalo de tiempo pequeño. Un intervalo de tiempo mayor permite apreciar que la función decae rápidamente.

### 5.3. Estabilidad interna

En esta sección estudiaremos la estabilidad interna de los sistemas de control definidos por ecuaciones diferenciales. Por estabilidad interna debemos entender la estabilidad de los estados del sistema. Empezaremos definiendo lo que se entiende por estabilidad para sistemas no necesariamente lineales aunque posteriormente nos centraremos en los lineales que son los más sencillos y de los que se pueden dar más resultados generales. Dado que la estabilidad es un concepto local, en ciertas condiciones, la estabilidad de los sistemas no lineales a veces puede estudiarse a partir de los sistemas lineales que se obtienen al linealizar el sistema no lineal respecto de la trayectoria cuya estabilidad se quiere investigar. Debemos concretar, entonces, lo que se debe entender por linealización de un sistema no lineal en torno a una trayectoria.

Intuitivamente la estabilidad es un concepto fácil de entender: una trayectoria de un sistema es estable si todas las trayectorias que en un instante dado están próximas a ella se mantienen próximas en todo momento posterior. Para dar una definición formal consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t)), \quad (5.13)$$

en el que supondremos que el control  $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$  ha sido fijado de una vez por todas. En



realidad, entonces, los sistemas que estudiamos son de la forma  $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$ . Supongamos que se dan las condiciones de existencia y unicidad de soluciones para el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Sea  $x(t) = \psi(t; t_0, x_0)$  la única solución de este sistema y sea  $T_{t_0, x_0}$  el periodo de existencia de la misma (Sección 4.2) (recordemos que  $\tilde{u}(\cdot)$  es una función dada). Supondremos de aquí en adelante que  $[t_0, +\infty) \subseteq T_{t_0, x_0}$ . Los sistemas que cumplen esta condición se llaman *completos* ([11]). El Corolario 2.1.20 de [11] da condiciones suficientes para que un sistema sea completos.

**Observación:** Las normas que usaremos en esta sección para  $\mathbb{R}^n$  será la norma euclídea y la de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  la inducida por ella; es decir, la norma espectral.

**Definición 5.6** (i) La trayectoria  $x(t)$  es **estable** en  $t_0$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$  tal que si  $\|z_0 - x_0\| < \delta$  y  $z(t) = \psi(t; t_0, z_0)$  es la solución del P.C.I. (5.14) con la condición inicial  $z(t_0) = z_0$  entonces  $\|x(t) - z(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

(ii)  $x(t)$  es **asintóticamente estable** en  $t_0$  si es estable en  $t_0$  y existe  $\gamma = \gamma(t_0, \varepsilon) > 0$  tal que si  $\|x_0 - z_0\| < \gamma$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - z(t)\| = 0$

(iii) Si  $x(t)$  no es estable se dice que es **inestable**.

Si la constante  $\delta$  no depende de  $t_0$ ,  $x(t)$  se dice que es **uniformemente estable**. Y si  $\gamma$  no depende de  $t_0$ , entonces  $x(t)$  se dice que es **uniformemente asintóticamente estable**.

En realidad el estudio de la estabilidad o estabilidad asintótica de una trayectoria de un sistema se puede reducir al estudio de los mismos conceptos para los **estados de equilibrio** de un sistema íntimamente relacionado. Para ver cómo se puede hacer, consideremos el P.C.I. (5.14) y sea  $\tilde{x}(t) = \psi(t; t_0, x_0)$  la trayectoria en estudio. Hagamos el cambio de variable  $z(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ , que sustituido en (5.14) nos da:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = f(t, z(t) + \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) - f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \\ z(t_0) = x(t_0) - \tilde{x}(t_0). \end{cases} \quad (5.15)$$

Si definimos

$$g(t, z(t)) = f(t, z(t) + \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) - f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \text{ y } z_0 = x(t_0) - \tilde{x}(t_0), \quad (5.16)$$

entonces el sistema (5.15) queda

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = g(t, z(t)) \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Ahora bien,  $g(t, 0) = 0$ . Esto quiere decir que  $z_e(t) = 0$  es una solución de equilibrio del sistema  $\dot{z}(t) = g(t, z(t))$ . Además,  $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| = \|z(t) - z_e(t)\|$ . Es decir, las desviaciones

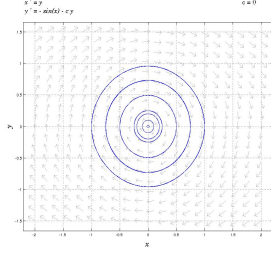


Figura 5.3: Plano de fase de las soluciones. Las soluciones que en  $t = 0$  está suficientemente próximas a la solución de equilibrio  $x_e(t) = 0$  se mantiene a la misma distancia para todo  $t \geq 0$ .

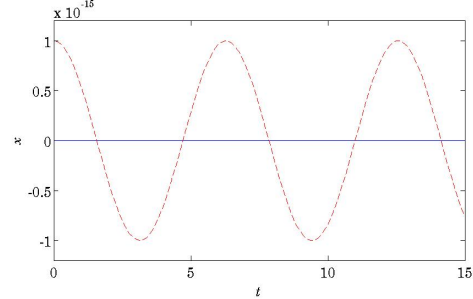


Figura 5.4: Gráfica de la solución de equilibrio (línea continua) y de la solución que en  $t = 0$  vale  $x_0 = 10^{-15}$  (línea discontinua). Para todo  $t > 0$  los valores de la función se encuentran a una distancia a lo más  $10^{-15}$  de  $x_e$ .

de las soluciones del sistema (5.14) de la trayectoria en estudio  $\tilde{x}(t)$  son las mismas que las desviaciones de las soluciones del sistema (5.17) del estado de equilibrio  $z_e(t) = 0$ . Por lo tanto, la trayectoria  $\tilde{x}(t)$  es estable (asintóticamente estable) si y sólo si el estado de equilibrio  $z_e(t)$  es estable (asintóticamente estable). En conclusión basta estudiar la estabilidad de los estados de equilibrio.

El siguiente ejemplo trata de ilustrar los conceptos de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad de las soluciones de equilibrio de un sistema no lineal.

**Ejemplo 5.7** 1. Sistema estable pero no asintóticamente estable: Péndulo no lineal sin amortiguamiento ( $c = 0$ ). Solución de equilibrio  $x_e(t) = 0$ .

$$\ddot{x}(t) + \sin x(t) + c\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\sin x_1(t) - cx_2(t) \end{cases} \quad (5.18)$$

La Figura 5.3 muestra el plano de fase de las soluciones del sistema. Se observa que para todo  $t_0$  y  $\varepsilon > 0$  las soluciones que en  $t_0$  están a una distancia de  $x_e = 0$  menos que  $\varepsilon$  se mantienen a la misma distancia para todo  $t \geq t_0$ . En la Figura 5.4 se muestra la solución de equilibrio  $x_e = 0$  y en trazo discontinuo la solución del sistema con la condición inicial  $x_1(0) = 10^{-15}$ ,  $x_2(0) = 0$ . Las dos soluciones son muy distintas mientras que la de equilibrio es constantemente 0 la otra es una sinusoidal que se corresponde con el balanceo del péndulo en ausencia de amortiguamiento. Si miramos con detenimiento el intervalo de variación de la sinusoidal observaremos que los valores que toma la función están en el intervalo  $[-10^{-15}, 10^{-15}]$ . Es decir,  $|x(t) - x_e| \leq 10^{-15}$ . En realidad esto les pasa a todas las funciones suficientemente próximas a  $x_e$  tal y como se ha dicho antes y se pone de manifiesto en la Figura 5.3. La solución  $x_e(t) = 0$  es estable. Sin embargo no es asintóticamente estable porque las soluciones próximas no convergen a 0: se mantienen acotadas y próximas, pero oscilan permanentemente.

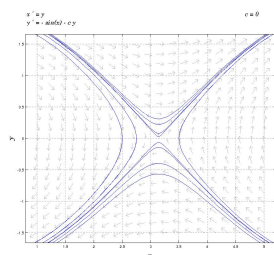


Figura 5.5: Plano de fase de las soluciones. Hay soluciones que en  $t = 0$  están muy próximas a la solución de equilibrio  $x_e = \pi$  y para algún  $t > 0$  se alejan mucho de la solución de equilibrio.

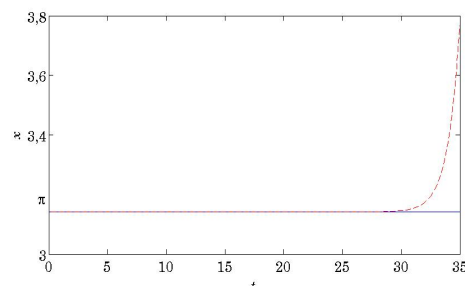


Figura 5.6: Gráfica de la solución de equilibrio (línea continua) y de la solución que en  $t = 0$  vale  $x_0 = \pi + 10^{-15}$  (línea discontinua). Para  $t > 0$  suficientemente grande la función se aleja mucho de  $x_e$ .

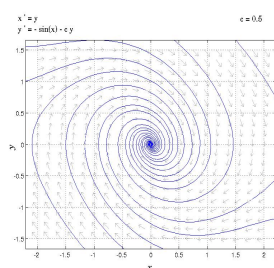


Figura 5.7: Plano de fase de las soluciones. Las soluciones que en  $t = 0$  está suficientemente próximas a la solución de equilibrio  $x_e = 0$  convergen a 0.

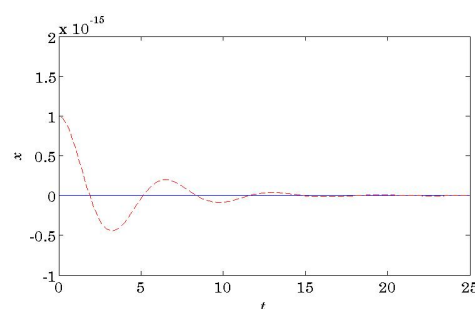


Figura 5.8: Gráfica de la solución de equilibrio (línea continua) y de la solución que en  $t = 0$  vale  $x_0 = 10^{-15}$  (línea discontinua). Converge a la solución de equilibrio.

2. Sistema inestable: Péndulo no lineal sin amortiguamiento ( $c = 0$ ). Solución de equilibrio  $x_e(t) = \pi$ . La Figura 5.6 muestra la solución de equilibrio  $x_e(t) = \pi$  y la solución del sistema (5.18) con la condición inicial  $x_1(0) = \pi + 10^{-15}$  y  $x_2(0) = 0$ . Debido a que la velocidad inicial del péndulo es 0, éste se aleja de la solución de equilibrio muy poco a poco. A medida que aumenta la velocidad, la solución se aleja más y más rápidamente de la solución de equilibrio. En la Figura 5.5 se aprecia que en realidad todas las soluciones próximas a  $x_e(t) = \pi$  se alejan de ella aunque no se puede apreciar cuán rápidamente porque en el plano de fase sólo se pone de manifiesto la evolución de  $x_1$  respecto a  $x_2$  (y viceversa) pero no las de éstas con el tiempo.
3. Sistema asintóticamente estable: Péndulo no lineal con amortiguamiento ( $c = 0,5$ ). La Figura 5.8 muestra la solución de equilibrio  $x_e(t) = 0$  y la solución del sistema (5.18) con la condición inicial  $x_1(0) = 10^{-15}$  y  $x_2(0) = 0$ . La solución no sólo permanece próxima a la solución de equilibrio (nótese que el intervalo de variación de la función es menor que  $[-10^{-15}, 10^{-15}]$ ) sino que, debido al amortiguamiento, después

de un tiempo de oscilaciones con amplitudes cada vez menores, termina convergiendo a la solución de equilibrio. En la Figura 5.7 se expone el plano de fase con algunas curvas. Se aprecia que todas las funciones suficientemente próximas convergen a  $x_e(t) = 0$ . ■

### 5.3.1. Estabilidad de los sistemas lineales

La técnica empleada para reducir el estudio de la estabilidad de una trayectoria a la de los estados de equilibrio es especialmente ilustrativa en el caso de los sistemas lineales. Supongamos que tenemos el sistema lineal  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ . En este caso  $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$  y la función  $g(t, z(t))$  de (5.16) quedaría  $g(t, z(t)) = A(t)z(t)$ . Es decir; la estabilidad (asintótica) de cualquier trayectoria de cualquier sistema  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\tilde{u}(t)$  se puede estudiar a partir de la estabilidad del estado de equilibrio  $z_e(t) = 0$  del sistema lineal sin control  $\dot{z}(t) = A(t)z(t)$ . Por ello, abusando del lenguaje, se suele hablar de *sistemas lineales (asintóticamente) estables* para referirse a que la solución cero lo es.

Así pues, en lo sucesivo consideraremos el siguiente sistema lineal libre de control:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (5.19)$$

Recordemos (véase (4.21)) que la solución de este sistema con la condición inicial  $x(t_0) = x^0$  es

$$x(t) = \psi(t; t_0, x^0) = \Phi(t, t_0)x^0$$

donde  $\Phi(t, t_0)$  es la matriz de transición de estados. La estabilidad de (5.19) se puede expresar en términos de esta matriz.

**Teorema 5.8** Sea  $\{z^1, z^2, \dots, z^n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) El sistema (5.19) es estable en  $t_0$  (uniformemente estable).
- (ii) Existe una constante  $M$  que puede depender de  $t_0$  (independiente de  $t_0$ , respectivamente) tal que  $\|\Phi(t, t_0)\| \leq M$  para todo  $t \geq t_0$ .
- (iii) Existe una constante  $M$  que puede depender de  $t_0$  (independiente de  $t_0$ , respectivamente) tal que  $\|\Phi(t, t_0)z^i\| \leq M$  para todo  $t \geq t_0$  y para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Demostración.-**  $(i) \Rightarrow (ii)$ . Supongamos que (5.19) es estable en  $t_0$  (respectivamente, uniformemente estable), y sea  $\varepsilon = 1$ . De la definición de estabilidad (Definición 5.6 (i)) se sigue que existe  $\delta > 0$  (independiente de  $t_0$  en el caso de estabilidad uniforme) tal que para todo  $x^0$  que cumpla  $\|x^0\| < \delta$  se sigue que  $\|\Phi(t, t_0)x^0\| \leq 1$ , para todo  $t \geq t_0$ .

Dado  $t \geq t_0$ , por definición de norma inducida, existe un vector  $x^1 \neq 0$  tal que  $\|\Phi(t, t_0)x^1\| = \|\Phi(t, t_0)\|\|x^1\|$ . Este vector se puede escoger de norma tan pequeña como se

quiera sin más que dividir sus componentes por un número suficientemente grande. Por lo tanto, tomando  $M^{-1} := \|x^1\| < \delta$  tenemos

$$1 \geq \|\Phi(t, t_0)x^1\| = \|\Phi(t, t_0)\| \|x^1\| \Rightarrow \|\Phi(t, t_0)\| \leq M.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Es una simple consecuencia de la siguiente propiedad de las normas inducidas:

$$\|\Phi(t, t_0)z^i\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|z^i\|.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Supongamos que se cumple la condición (iii) y fijemos  $\varepsilon > 0$ . Sea  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  un vector arbitrario. Como  $\{z^1, z^2, \dots, z^n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$ , podemos escribir  $x^0 = \sum_{i=1}^n \zeta_i z^i$  y haciendo uso de las propiedades de las normas y la condición (iii)

$$\|\Phi(t, t_0)x^0\| = \left\| \Phi(t, t_0) \sum_{i=1}^n \zeta_i z^i \right\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\zeta_i| \sum_{i=1}^n \|\Phi(t, t_0)z^i\| \leq nM \max_{1 \leq i \leq n} |\zeta_i|.$$

Ahora bien, si  $|\zeta_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |\zeta_i|$  existe un número real  $a > 0$  tal que  $\|x^0\| \geq a|\zeta_k|$  y así

$$\|\Phi(t, t_0)x^0\| \leq nMa^{-1} \|x^0\|.$$

Tomando  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{a^{-1}nM}$  concluimos que si  $\|x^0\| < \delta$  entonces  $\|\Phi(t, t_0)x^0\| < \varepsilon$ . Esto demuestra (i). ■

Para la estabilidad asintótica tenemos un resultado similar.

**Teorema 5.9** Sea  $\{z^1, z^2, \dots, z^n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) El sistema (5.19) es asintóticamente estable en  $t_0$  (uniformemente asintóticamente estable).
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0$  (respectivamente, uniformemente en  $t_0$ )
- (iii) Para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)z^i\| = 0$  (respectivamente, uniformemente en  $t_0$ ).

**Demostración.** Si (5.19) es asintóticamente estable en  $t_0$  (uniformemente asintóticamente estable) existe  $\gamma$  tal que  $\|x^0\| < \gamma \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)x^0\| = 0$ . Como en la demostración del Teorema 5.8, sea  $x^1 \neq 0$  tal que  $\|x^1\| < \gamma$  y  $\|\Phi(t, t_0)x^1\| = \|\Phi(t, t_0)\| \|x^1\|$ . Entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)x^0\| = 0$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0$ .

La demostración de (ii)  $\Rightarrow$  (iii) y (iii)  $\Rightarrow$  (ii) es como en el Teorema 5.8. ■

El siguiente resultado nos da una estimación de la norma espectral de la matriz de transición de estados. En su demostración necesitaremos hacer uso del famoso Lema de Gronwall:

**Lema 5.10 (Lema de Gronwall)** Sea  $T$  un intervalo de la recta real,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta(\cdot)$  una función no negativa localmente integrable en  $T$  y  $\xi(\cdot)$  una función continua en  $T$  tal que

$$\xi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\xi(s)ds, \quad t \in T, t \geq a.$$

Entonces

$$\xi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right), \quad t \in T, t \geq a. \quad (5.20)$$

**Lema 5.11** Si  $\Phi(t, t_0)$  es la matriz de transición de estados del sistema (5.19) entonces

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq e^{\int_{t_0}^t \|A(s)\|ds}, \quad \|\Phi(t_0, t)\| \leq e^{\int_{t_0}^t \|A(s)\|ds}, \quad t \geq t_0. \quad (5.21)$$

**Demostración.-** Utilizaremos en la demostración de este lema las propiedades de la matriz de transición de estados de los sistemas lineales vistas en la relación de problemas de la Lección 4. Dado que  $\Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) &= A(t)\Phi(t, t_0), \text{ y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t_0, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0)^{-1} = -\Phi(t, t_0)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) \Phi(t, t_0)^{-1} = \\ &= -\Phi(t, t_0)^{-1} A(t) \Phi(t, t_0) \Phi(t, t_0)^{-1} = -\Phi(t, t_0)^{-1} A(t) = -\Phi(t_0, t) A(t) \end{aligned}$$

para casi todo  $t > t_0$ . Integrando entre  $t_0$  y  $t$ :

$$\Phi(t, t_0) - I = \int_{t_0}^t A(s)\Phi(s, t_0)ds, \quad \Phi(t_0, t) - I = - \int_{t_0}^t \Phi(t_0, s)A(s)ds, \quad t \geq t_0.$$

Por lo tanto, para  $t \geq t_0$

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq 1 + \int_{t_0}^t \|A(s)\|\Phi(s, t_0)\|ds, \quad \|\Phi(t_0, t)\| = 1 + \int_{t_0}^t \|\Phi(t_0, s)\|\|A(s)\|ds.$$

Usando el Lema de Gronwall 5.10 tenemos

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq e^{\int_{t_0}^t \|A(s)\|ds}, \quad \|\Phi(t_0, t)\| \leq e^{\int_{t_0}^t \|A(s)\|ds}, \quad t \geq t_0.$$

Así quedan probadas las desigualdades de (5.21) ■

Como consecuencia de los resultados previos tenemos:

**Corolario 5.12** Supongamos que el sistema (5.19) está definido en  $[t_0, +\infty)$ . Si  $\int_{t_0}^{\infty} \|A(s)\|_2 ds < \infty$  entonces es uniformemente estable. Además es (asintóticamente) estable en  $t_1 \geq t_0$  si y sólo si es (asintóticamente) estable en  $t_0$ .

**Demostración.**- Si  $\int_{t_0}^{\infty} \|A(s)\| ds$  converge entonces por (5.21) y la condición (ii) del Teorema 5.8, el sistema es uniformemente estable.

Para la segunda parte calculamos

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_1)\| \|\Phi(t_1, t_0)\|, \quad \|\Phi(t, t_1)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|\Phi(t_0, t_1)\|, \quad t \geq t_1 \geq t_0 \quad (5.22)$$

Teniendo en cuenta que, por (5.21), ambos  $\|\Phi(t_1, t_0)\|$  y  $\|\Phi(t_0, t_1)\|$  son menores o iguales que  $e^{\int_{t_0}^{t_1} \|A(s)\| ds}$ , resulta que  $\Phi(t, t_0)$  está acotado ( $\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0$ ) si y sólo si  $\Phi(t, t_1)$  está acotado (respectivamente,  $\|\Phi(t, t_1)\| \rightarrow 0$ ). ■

Hay un concepto más fuerte de estabilidad: la estabilidad exponencial. El sistema (5.19) es (*uniformemente*) *exponencial estable* si para cada  $t_0$  existe una constante  $M > 0$  y una tasa de decaimiento  $\omega < 0$  que depende de  $t_0$  (respectivamente, independiente de  $t_0$ ) tal que

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M e^{\omega(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (5.23)$$

El siguiente resultado dice que para los sistemas lineales ser exponencialmente estable o asintóticamente estable es lo mismo. Esta propiedad no es verdad, en general, para los sistemas no lineales.

**Teorema 5.13** *El sistema (5.19) es uniformemente exponencialmente estable si y sólo si es uniformemente asintóticamente estable.*

Notemos que no se especifica el instante en el que el sistema es uniformemente estable porque hemos visto en el Corolario 5.12 que si un sistema es uniformemente estable en un instante  $t$  lo es para todo  $\tau \geq t$ .

**Demostración.**- Si es exponencialmente estable entonces, por (5.23),  $\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El recíproco es más difícil de probar. Supongamos que el sistema es uniformemente asintóticamente estable. Por el Teorema 5.9, para todo  $t \geq t_0$  existe  $\tau$  tal que  $\|\Phi(t + \tau, t)\| \leq 1/2$  (se deduce de que el sistema es asintóticamente estable para todo  $t \geq t_0$  y por lo tanto  $\|\Phi(t + \tau, t)\|$  es tan pequeño como se quiera para  $\tau$  suficientemente grande). Entonces, usando la propiedad de concatenación de la matriz de transición de estados ( $\Phi(t_1, t_3) = \Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_3)$ ) y la desigualdad triangular para la norma espectral del producto de matrices ( $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ):

$$\begin{aligned} \|\Phi(t_0 + k\tau, t_0)\| &\leq \|\Phi(t_0 + k\tau, t_0 + (k-1)\tau)\| \|\Phi(t_0 + (k-1)\tau, t_0 + (k-2)\tau)\| \cdots \\ &\quad \cdots \|\Phi(t_0 + \tau, t_0)\| \leq 2^{-k} \end{aligned}$$

Supongamos ahora  $t \geq t_0$  y sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $t_0 + k\tau \leq t < t_0 + (k+1)\tau$ . Entonces

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0 + k\tau)\| \|\Phi(t_0 + k\tau, t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0 + k\tau)\| 2^{-k}.$$

Por el Teorema 5.8 existe  $M' > 0$  tal que  $\|\Phi(t, t_0 + k\tau)\| \leq M'$  para todo  $t \geq t_0 + k\tau$ . Por lo tanto,

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M' 2^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \quad t \geq t_0.$$

Si ponemos  $M = M'$  y  $\omega = -\frac{\ln 2}{\tau}$  obtenemos (5.23) demostrando que el sistema es exponencialmente estable. ■

Pasamos ahora a estudiar finalmente la estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (5.24)$$

De manera obvia, todo lo dicho anteriormente para los sistemas lineales se mantiene válido, pero la forma especial de la matriz de transición de estados de estos sistemas hace que la estabilidad pueda caracterizarse en términos de los valores propios de  $A$ . Recordemos que para estos sistemas

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

La forma de Jordan de  $A$  va a jugar un papel importante: Si  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  (en lo que sigue  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) existe una matriz no singular  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que  $J = T^{-1}AT$  es la forma de Jordan de  $A$ ; una matriz con la forma (4.30). Cada bloque se puede escribir en la forma  $J_k = \lambda_k I_{n_k} + N_k$  donde  $\lambda_k \in \Lambda(A)$ ,  $n_k$  es una multiplicidad parcial de  $\lambda_k$  (un mismo valor propio puede tener varias multiplicidades parciales) y

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}.$$

Con esta notación, la matriz  $e^{J_k t}$  de (4.33) se puede escribir como sigue:

$$e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \left( I_{n_k} + tN_k + \frac{t^2}{2!} N_k^2 + \cdots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} N_k^{n_k-1} \right). \quad (5.25)$$

Por lo tanto, suponiendo  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|e^{J_k t}\| &= |e^{\lambda_k t}| \left\| I_{n_k} + tN_k + \frac{t^2}{2!} N_k^2 + \cdots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} N_k^{n_k-1} \right\| \leq \\ &\leq e^{\Re \lambda_k t} \left( 1 + \|N_k\|t + \frac{\|N_k\|^2 t^2}{2!} + \cdots + \|N_k\|^{n_k-1} \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \right) \leq \\ &\leq e^{\alpha(A)t} p(t) \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde  $p(t)$  es un polinomio de grado  $m = \max(n_1, \dots, n_r)$ , siendo  $r$  el número de bloques de Jordan en  $J$ , y  $\alpha(A) = \max\{\Re \lambda : \lambda \in \Lambda(A)\}$ , siendo  $\Lambda(A)$  el conjunto de valores propios no repetidos de  $A$ . Como  $\|e^{Jt}\| = \max_{1 \leq k \leq r} \|e^{J_k t}\|$  concluimos que

$$\|e^{Jt}\| \leq e^{\alpha(A)t} p(t). \quad (5.27)$$

**Lema 5.14** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\omega \in \mathbb{R}$ . Si  $\alpha(A) < \omega$  entonces existe  $M \in \mathbb{R}$ , dependiente de  $\omega$ , tal que

$$\|e^{At}\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0. \quad (5.28)$$



**Demostración.-** Sea  $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$  la forma normal de Jordan de  $A$  y sea  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz invertible tal que  $A = TJT^{-1}$ . Entonces

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

y, usando (5.27),

$$\|e^{At}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|e^{\alpha(A)t}p(t);$$

y también

$$\|e^{(A-\omega I_n)t}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|e^{(\alpha(A)-\omega)t}p(t).$$

Por hipótesis  $\alpha(A) - \omega < 0$  y, consecuentemente  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha(A)-\omega)t}p(t) = 0$ . Por lo tanto,  $\|e^{(A-\omega I_n)t}\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y así existe un número real  $M > 0$  tal que  $\|e^{At}e^{-\omega t}\| \leq M$  para todo  $t \geq 0$ . Esto demuestra (5.28). ■

La caracterización de la estabilidad asintótica de los sistemas lineales invariantes en el tiempo se sigue del Lema anterior:

**Teorema 5.15** *El sistema (5.24) es asintóticamente (o, equivalentemente, exponencialmente) estable si y sólo si  $\Re \lambda < 0$  para todo  $\lambda \in \Lambda(A)$ .*

**Demostración.-** Por el Lema 5.14, si  $\Re \lambda < 0$  entonces existe  $\omega < 0$  y  $M > 0$  tales que

$$\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Esto implica que el sistema es exponencialmente estable. Recíprocamente, si existiera  $\lambda \in \Lambda(A)$  tal que  $\Re \lambda > 0$ , tomando un vector propio,  $z$ , de  $A$  asociado a  $\lambda$  tendríamos

$$\|e^{At}z\| = \|e^{\lambda t}z\| = |e^{\lambda t}|\|z\| = e^{\Re \lambda t}\|z\|, \quad t \geq 0,$$

y el sistema, por el Teorema 5.9, no sería asintóticamente estable. ■

Finalmente, el siguiente resultado caracteriza la estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo.

**Teorema 5.16** *El sistema (5.24) es estable si y sólo si las dos siguientes condiciones se verifican simultáneamente:*

- (i)  $\Re \lambda \leq 0$  para todo  $\lambda \in \Lambda(A)$ , y
- (ii) Si  $\Re \lambda = 0$  entonces las multiplicidades parciales de  $\lambda$  son todas iguales a 1 (i.e.;  $A$  es diagonalizable).

**Demostración.-** Ya se ha visto que si  $\Re \lambda < 0$  para todo  $\lambda \in \Lambda(A)$  entonces el sistema es asintóticamente estable y, en consecuencia estable. Supongamos que  $\lambda \in \Lambda(A)$  tiene parte real nula. De acuerdo con (5.26) si  $n_k > 1$  entonces  $\|e^{J_k t}\| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $\|e^{At}\| = \|Te^{Jt}T^{-1}\| \leq \|T\|\|T^{-1}\|\|e^{Jt}\|$  el sistema no sería estable. ■

A modo de conclusión para esta sección es destacable el siguiente resultado

**Corolario 5.17** *Consideremos el sistema lineal invariante en el tiempo con control*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (5.29)$$

*Si el sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  es asintóticamente estable entonces el sistema (5.29) es estable E-S.*

**Demostración.-** Por el Teorema 5.5 el sistema es estable si y sólo si todos los polos de la matriz de transferencia  $T(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$  tienen parte real negativa. Ahora bien, los polos de  $T(s)$  son algunas (quizá todas) las raíces de  $\det(sI_n - A)$ ; y éstas son los valores propios de  $A$ . Por lo tanto, si el sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  es asintóticamente estable entonces todos los valores propios de  $A$  tienen parte real negativa y, consecuentemente, el sistema (5.29) es estable E-S. ■

El recíproco del Corolario 5.17 no es cierto en general. Veremos en la próxima lección que para que lo sea hay que imponer ciertas restricciones al sistema (5.29).

## 5.4. Linealización y estabilidad de sistemas no lineales

Para estudiar la estabilidad de los estados de equilibrio  $x_e$  de los sistemas no lineales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = \eta(t, x(t), u(t)), \quad t \in \mathcal{T} \end{cases} \quad (5.30)$$

hay que analizar el comportamiento de los estados  $x(t)$  “próximos” a  $x_e$ . La noción de diferencial de una función responde precisamente al objetivo de “aproximar localmente” una función no lineal por una lineal.

Comenzaremos dando sentido al concepto de *linealización* del sistema no lineal (5.30) para centrarnos posteriormente en la estabilidad de los estados de equilibrio de los sistemas de la forma  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  (estabilidad interna) a partir de su linealización. Para ello, supondremos que el conjunto tiempo  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$  es un intervalo abierto, que los espacios de estados y entradas son  $X \subset \mathbb{R}^n$  y  $U \subset \mathbb{R}^m$  son abiertos y que el espacios de salidas  $Y = \mathbb{R}^p$ . Supondremos también que el conjunto de funciones de control  $\mathcal{U} = \mathcal{C}(\mathcal{T}, U)$  es el de las funciones continuas y que  $f : \mathcal{T} \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\eta : \mathcal{T} \times X \times U \rightarrow Y$  son continuas y continuamente diferenciables con respecto a  $x$  y  $u$  en  $\mathcal{T} \times X \times U$ .

Sea  $\tilde{x}(\cdot)$  una trayectoria correspondiente a un control  $\tilde{u}(\cdot)$  y supongamos dada una condición inicial  $(t_0, x^0) \in \mathcal{T} \times X$ . Por las hipótesis de diferenciabilidad de  $f$  y  $\eta$ , sus derivadas parciales existen y son continuas en  $\mathcal{T} \times X \times U$ ; así que podemos considerar las

matrices Jacobianas de ambas funciones respecto de  $x$  y  $u$  en  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{u}(t)$  para  $t \in \mathcal{T}$ :

$$\begin{aligned} A(t) &= D_x f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \right]_{n \times n} \\ B(t) &= D_u f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \right]_{n \times m} \\ C(t) &= D_x \eta(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \left[ \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \right]_{p \times n} \\ D(t) &= D_u \eta(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \left[ \frac{\partial \eta_i}{\partial u_j}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \right]_{p \times m} \end{aligned} \quad (5.31)$$

El sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (5.32)$$

es la *linealización* de (5.30) en torno a la trayectoria  $\tilde{x}(\cdot)$  respecto a  $\tilde{u}(\cdot)$ .

**Ejemplo 5.18** (Órbita geoestacionaria) Recordemos que las ecuaciones, en el modelo de espacio estado, que rigen el movimiento de un satélite orbitando alrededor de la Tierra son (Ejemplo 4.4):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t)(x_4(t) + \Omega)^2 - \frac{GM_T}{x_1(t)^2} + F_r(t) \\ x_4(t) \\ -\frac{2x_2(t)(x_4(t) + \Omega)}{x_1(t)} + \frac{F_\theta(t)}{x_1(t)} \end{bmatrix}.$$

Y que un estado estacionario es  $x_e = (R_0, 0, 0, 0)$  que corresponde a la órbita geoestacionaria a distancia  $R_0 = \left(\frac{GM_T}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 42164$  km del centro de la Tierra y girando con la misma velocidad angular que la Tierra:  $\Omega = 7,27 \times 10^{-5}$  rad/seg.

El sistema linealizado en torno al estado de equilibrio  $x_e$  respecto al control cero ( $u_e(t) = (F_r(t), F_\theta(t)) = (0, 0)$ ) se obtendría calculando las matrices Jacobianas de  $f$  respecto de  $x$  y  $u$  en  $(x_e, u_e)$ :

$$\begin{aligned} D_x f(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (x_4 + \Omega)^2 + \frac{2GM_T}{x_1^3} & 0 & 0 & 2x_1(x_4 + \Omega) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2x_2(x_4 + \Omega)}{x_1^2} - \frac{F_\theta}{x_1^2} & -\frac{2(x_4 + \Omega)}{x_1} & 0 & -\frac{2x_2}{x_1} \end{bmatrix} \\ D_u f(x, u) \frac{\partial f}{\partial u} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que particularizando en  $x = (R_0, 0, 0, 0)$  y  $u = 0$  produce el sistema  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega^2 & 0 & 0 & 2R_0\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\Omega}{R_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_0} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

La ecuación de salidas depende de lo que se quiera medir. Si suponemos que el satélite se mantiene siempre en la órbita estacionaria ( $r(t) = R_0$  para todo  $t$  en el intervalo de tiempo en el que se hace la observación) entonces la posición del satélite quedaría determinada por el ángulo respecto de una posición de referencia. En tal caso, la ecuación de salidas sería:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

Ahora bien, puede suceder que el satélite se desvíe de la órbita estacionaria por la acción de fuerzas externas, y se quiera tener una medida tanto de su posición angular como radial para corregir la trayectoria en caso de necesidad. En tal caso la ecuación de salidas sería

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

■

Para ver la relación entre las soluciones de los dos sistemas (5.30) y (5.31), sea  $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  y para todo  $\varepsilon > 0$  pequeño denotemos por  $\tilde{x}(t) = x(t, \varepsilon)$  la solución de la ecuación diferencial de (5.30) correspondiente al control  $u(t, \varepsilon) = \tilde{u}(t) + \varepsilon u(t)$  y la condición inicial  $x(t_0, \varepsilon) = \tilde{x}^0 + \varepsilon \xi^0$ . Utilizando resultados sobre la dependencia de las soluciones de ecuaciones diferenciales respecto de parámetros y condiciones iniciales, se puede ver que  $x(t, \varepsilon)$  es diferenciable respecto de  $\varepsilon$  en  $\varepsilon = 0$  y la derivada  $\xi(t) = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, 0)$  satisface la ecuación

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathcal{T}, t \geq t_0.$$

Por lo tanto, si  $\xi(\cdot)$  es la solución de la ecuación diferencial lineal en (5.32) correspondiente al control  $u(\cdot)$  y la condición inicial  $\xi^0$  entonces, para  $\varepsilon > 0$  pequeño,  $\tilde{x}(t) + \varepsilon \xi(t)$  es una aproximación de primer orden a la solución de la ecuación diferencial en (5.13) correspondiente al control  $\tilde{u}(t) + \varepsilon u(t)$  y a la condición inicial  $\tilde{x}^0 + \varepsilon \xi^0$ . Así pues el comportamiento del sistema lineal (5.32) cerca del origen proporciona una imagen aproximada del comportamiento del sistema no lineal (5.30) en un entorno suficientemente pequeño de la trayectoria  $\tilde{x}(t)$ . En la Figura 5.9 se muestra el plano de fase del sistema no lineal libre e invariante en el tiempo del Ejemplo 5.7

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin(x - \pi) - 0,5y \end{aligned}$$

y de su linealización

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - 0,5y \end{aligned}$$

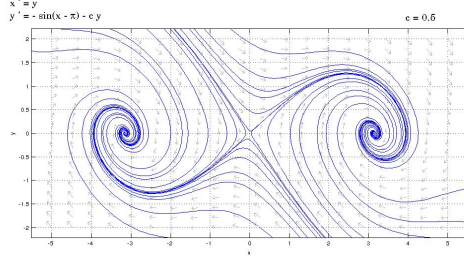


Figura 5.9: Plano de fase de un sistema no lineal.

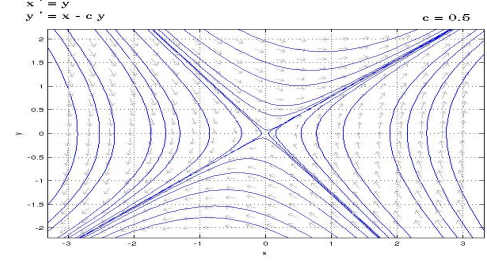


Figura 5.10: Plano de fase del sistema linealizado.

Las trayectorias próximas a la solución de equilibrio  $x_e = 0$  (punto de silla) se comportan de forma similar. Sin embargo, a medida que nos alejamos del estado de equilibrio las trayectorias de ambos sistemas son muy diferentes. Experimentos de este tipo hacen razonable conjeturar que esto, en realidad, es un fenómeno general. Es decir, que en general el comportamiento de las soluciones de los sistemas lineales próximas a las soluciones de equilibrio es análogo al de las soluciones del sistema linealizado en las proximidades de la solución  $x_e = 0$ . Antes de enunciar formalmente el correspondiente resultado, conviene hacer otra observación: las ecuaciones (5.32) muestran que el modelo linealizado, en general, varía con el tiempo (no es invariante en el tiempo) incluso cuando el sistema no lineal sea invariante en el tiempo. Esta es una de las razones principales del estudio que hemos realizado en la sección anterior -y que continuaremos en la siguiente lección- de los sistemas lineales generales. No obstante, si se linealiza un sistema no lineal invariante en el tiempo en torno a un estado de equilibrio respecto de un control constante, el modelo linealizado es, de nuevo, invariante en el tiempo.

Para finalizar esta lección enunciamos dos resultados sobre la estabilidad de las soluciones de equilibrio de sistemas no lineales de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.34)$$

(invariantes en el tiempo) a partir de la estabilidad del correspondiente sistema linealizado en torno a dicha solución de equilibrio. Las demostraciones de estos dos resultados no son sencillas y se omiten. Pueden encontrarse en [11, Sec 3.3], y la primera de ellas también en [9, Sec 7.4]. Esta última es más fácil de seguir.

**Teorema 5.19** *Supongamos que la función  $f$  (como función de  $x \in \mathbb{R}^n$ ) del sistema (5.34) es continuamente diferenciable en un conjunto abierto  $X \in \mathbb{R}^n$  y sea  $x_e \in X$  un punto de equilibrio. Sea  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  el sistema linealizado del sistema (5.34) respecto de  $x_e$ . Entonces:*

- (i) *si  $\Re \lambda < 0$  para todo  $\lambda \in \Lambda(A)$ , el estado de equilibrio  $x_e$  es asintóticamente estable respecto del sistema no lineal (5.34).*

(ii) si  $\Re \lambda > 0$  para algún  $\lambda \in \Lambda(A)$ , el estado de equilibrio  $x_e$  es inestable respecto del sistema no lineal (5.34).

**Teorema 5.20** *En las mismas condiciones que en el Teorema 5.19, el estado de equilibrio  $x_e$  es exponencialmente estable para el sistema (5.34) si y sólo si el sistema linealizado en  $x_e$  es exponencialmente estable.*

Un estudio pormenorizado de la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales está más allá de los objetivos de este curso. Suele ser tema central en los cursos sobre sistemas dinámicos. El Tema 7 de [9] es muy recomendable para quien esté interesado en su estudio; la aproximación es muy intuitiva y llena de detalles y ejemplos.