Universidad de los Andes
Programación científica
Secciones 01 y 02 - Ejercicios
Fecha: jueves 2 de abril de 2020

Ejercicios:

1. Realice una función en Python que permita obtener la raíz de una ecuación no lineal de una variable usando el método de la *bisección*. La función debe recibir como parámetros la función objetivo $f(x)$, el intervalo inicial, las tolerancias en X y Y, y debe retornar un arreglo con los valores estimados de la raíz para cada iteración.

2. Realice una función en Python que permita obtener la raíz de una ecuación no lineal de una variable usando el método de la *falsa posición*. La función debe recibir como parámetros la función objetivo $f(x)$, el intervalo inicial, las tolerancias en X y Y, y debe retornar un arreglo con los valores estimados de la raíz para cada iteración.

3. Realice una función en Python que permita obtener la raíz de una ecuación no lineal de una variable usando el método del *punto fijo*. La función debe recibir como parámetros la función objetivo $f(x)$, la función $g(x)$, el punto inicial, las tolerancias en X y Y, y debe retornar un arreglo con los valores estimados de la raíz para cada iteración.

4. Realice una función en Python que permita obtener la raíz de una ecuación no lineal de una variable usando el método del *Newton*. La función debe recibir como parámetros la función objetivo $f(x)$, el punto inicial, las tolerancias en X y Y, y debe retornar un arreglo con los valores estimados de la raíz para cada iteración.

5. Realice una función en Python que permita obtener la raíz de una ecuación no lineal de una variable usando el método de la *Secante*. La función debe recibir como parámetros la función objetivo $f(x)$, los puntos iniciales, las tolerancias en X y Y, y debe retornar un arreglo con los valores estimados de la raíz para cada iteración.

6. Realice una función en Python que permita calcular la tasa de convergencia de un método dado. La función debe recibir como parámetros un arreglo con los valores estimados de la raíz para cada iteración y retornar los valores estimados de la tasa de convergencia para las iteraciones de la 2 hasta la última menos 1.

7. Completar la siguiente tabla a partir de las funciones desarrolladas en los puntos del 1,2,4 y 5 para una tolerancia tanto en X como en Y de 10^{-5}:

Función	Método	Intervalo o puntos iniciales	Número total iteraciones	Raíz x_r	$f(x_r)$
i. $e^{-5x^2} - x^{3/4} + \sin(4x) = 1$	Bisección	[0.2, 0.6]			
	Falsa Pos.	[0.2, 0.6]			
	Newton	0.6			
	Secante	0.55, 0.6			
ii. $\sin(4x)\sqrt{(x^2)} + x^5 + 6x = 4$	Bisección	[0.0, 1.0]			
	Falsa Pos.	[0.0, 1.0]			
	Newton	1.0			
	Secante	0.95			
iii. $6.67h = -3.65\ln(x/5.33) + \sqrt{(2)}\,e^{(-c^2-4.25)} + 10.54\cos(x-2.2)$; $h = \frac{\pi}{2}$ y $c = \frac{\pi}{2}$					
	Bisección	[0.01, 0.1]			
	Falsa Pos.	[0.01, 0.1]			
	Newton	0.01			
	Secante	0.01, 0.015			

8. Con el fin de estudiar la propagación de la luz a través de tejidos biológicos se ha propuesto de forma empírica la siguiente ecuación:

$$\frac{R-1}{R+1}=-1.440\,n_r^{-2}+0.710\,n_r^{-1}+0.688+0.0636\,n_r$$ donde R es el factor interno de reflectancia para un tejido, y n_r es el radio entre el índice refractivo del tejido y el médium.	Se requiere hallar el valor de n_r para el cual el valor del factor interno de reflectancia es igual a 4 (R=4). Para hallar el valor de n_r solicitado se requiere utilizar el ***método de iteración de punto fijo***. Para ello se ha considerado usar las siguientes expresiones de la forma $x=g(x)$, en este caso $n_r=g(n_r)$:

i. $$n_r=\left[\frac{1}{1.440}\left(0.710\,n_r^{-1}+0.0636\,n_r+0.088\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

ii. $$n_r=\frac{1}{0.0636}\left(1.440\,n_r^{-2}-0.710\,n_r^{-1}-0.088\right)$$

iii. $$n_r=1.440\,n_r^{-2}-0.710\,n_r^{-1}-0.0636\,n_r-0.088+n_r$$

a.) Proponga una nueva expresión (diferente a las tres anteriores) que pueda ser considerada como base para hallar el valor de n_r solicitado.

Ahora, se desea conocer si cada una de las tres expresiones presentadas arriba (***i***, ***ii***, ***iii***) podría ser usada para encontrar el valor de n_r solicitado. Para ello siga los siguientes pasos:

b.) Determine primero cuál es el intervalo adecuado para buscar una solución. Para ello realice una gráfica en Python del sistema a resolver y determine por inspección cuál de los siguientes intervalos es el adecuado:

aa. [0, 1] bb. [1, 1.5] cc. [1.5, 2] dd. [2, 2.5] ee. [2.5, 3]

c.) Tomando como base las expresiones ***i, ii y iii*** de arriba, utilice la función realizada en el punto 3 para completar cada una de las tablas presentadas a continuación. Tome como punto de partida x_0 = 2. Utilice una tolerancia tanto en X como en Y de 10^{-5}. (***Nota***: utilice una precisión de mínimo 10 cifras decimales para poder estimar los valores correctos):

Expresión ***i***

Iter	n_r	$g(n_r)$	$\|n_{r\_(i)}-n_{r\_(i-1)}\|$
0	2		
1			
5			
10			
13			

Expresión ***ii***

Iter	n_r	$g(n_r)$	$\|n_{r\_(i)}-n_{r\_(i-1)}\|$
0	2		
1			
5			
10			
13			

Expresión ***iii***

Iter	n_r	$g(n_r)$	$\|n_{r\_i+1}-n_{r\_i}\|$
0	2		
1			
5			
10			
13			

9. Considere la misma ecuación presentada en el punto 8 en donde se requiere hallar el valor de n_r para el cual el valor del factor interno de reflectancia es igual a 4 (R=4).

Se requiere ahora probar el ***método de Newton*** para determinar si este método podría ser usado para hallar el valor de n_r deseado y en caso afirmativo saber si convergería más rápido que el método del punto fijo.

a.) Escriba y/o deduzca ***todas*** las expresiones matemáticas ***necesarias*** para la solución del problema a través de ***método de Newton*** (incluya la expresión para la actualización de x en cada iteración).

b.) Utilice la función desarrollada en el punto 4 para completar la tabla presentada a continuación hasta un máximo de 10 iteraciones o menos si el método converge antes. Tome como punto de partida $x_0 = 2$. Utilice una tolerancia tanto en X como en Y de 10^{-5}. (***Nota***: utilice una precisión de mínimo 10 cifras decimales para poder estimar los valores correctos):

Método de Newton			
Iter	n_r	$f(n_r)$	$\lvert n_{r\_i+1}-n_{r\_i}\rvert$
0	2		
1			
3			
6			
10			

c.) A partir de la función desarrollada en el punto 6, realice una gráfica del valor estimado de la tasa de convergencia para cada iteración y deduzca un valor aproximado de esta tasa para el método de Newton.