数理情報科学研究2

1415048　城山賢人

> 何かあれば学籍番号のアドレスまで.
> p.433 上部の資料

Exercise.

Let $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \in M_n$ be positive semidefinite. If either $A_{11} = 0$ or $A_{22} = 0$, explain why $A_{12} = 0$.

方針

Observation 7.1.10を使う．証明が参考になる．

Proof.
$A_{11} \in M_k {}^\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$として良い． $A_{11} = 0$のとき，Aの対角成分は全て$(a_{kk} =)0$であるから，Observation 7.1.10. より，このとき$A_{12} = 0$. 同様に$A_{22} = 0$のときについても$A_{12} = 0$． ▫

補題

Let $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \in M_n$ be positive semidefinite.　Then for each diagonal components in the block matrix, A_{11} and A_{22} is also positive semidefinite.

Proof.
$A_{11} \in M_k$とする ${}^\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$． ${}^\forall \xi \in C^k, \xi \neq 0$をとる．このとき$x = \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} \in C^n$に対して，$x^* A x = x^* \begin{bmatrix} A_{11}\xi \\ A_{12}\xi \end{bmatrix} = \xi^* A_{11} \xi \geq 0$．$\xi(\neq 0)$は任意だったから，$A_{11}$は半正定置行列である．同様に，$A_{22}$に対しては$x' = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi' \end{bmatrix} \in C^n, {}^\forall \xi' \in C^{(n-k)}, \xi' \neq 0$を取れば良い． ▫

> 帰納的に，$A_{kk} \in M_k$， ${}^\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$なるブロック行列の各成分は$A$に関する正定値性が保存される．（証明は略）

Exercise.

Let $A \in M_n$ be positive semidefinite. Partition $A = [a_1 \dots a_n]$ according to its columns, let $\alpha \subset \{1, 2, \dots, n\}$ be any nonempty index set, and let $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ be column index. Explain why $a_j[\alpha]$ is in the column space of $A[\alpha]$.
Hint: Permutation similarity preserves positive definiteness; see (7.1.8).

方針

1. $A' = C^*AC$ でブロック行列に分割し$A'_{11} = A[\alpha]$となるように基本変形を施す.
2. Observation 7.1.10. とp.432中段のExerciseを用いて$a_j[\alpha]$がA'_{11} の線形結合で表せることを示す.

Proof.
$A' = \begin{bmatrix} A'_{11}(= A[\alpha]) & A'_{12} \\ A'^*_{12} & A'_{22} \end{bmatrix} = C^*AC$となる基本行列のまとまり，$C$，$C^*(= C)$をかける．このとき$A'(= C^*AC)$は，Observation 7.1.10.と，Observation 7.1.8. (a) より正定置性は保たれる.

> **Exercise.**
> Partition $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in M_n$, in which $A_{11} \in M_k$and $k \in \{1, 2, .., n-1\}$.Following statements are equivalent.
>
> (a) A has the column inclusion property.
> (c) For each $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, every column of A_{12} is a linear combination of the columns of A_{11} .

これより，A_{12} の列はA_{11} の列の線形結合で表せる．つまりA_{12} の列はそれぞれ，A_{11} の列空間に属する.
$a_j[\alpha]$はこのときA_{11} またはA_{12} の列である．A_{11} の列はA_{11} の列空間に属するので，$a_j[\alpha] \in Im(A[\alpha])$.
□

Exercise.

Write $A \in M_n$ as $A = H + iK$, in which H and K are Hermitian. If $x \in M_n$, explain why the following statements are equivalent:

- (a) $x^*Ax = O$
- (b) $x^*A^*x = O$
- (c) $x^*Hx = O,\ x^*Kx = O$

補題

Each $A \in M_n$ can be written uniquely as $A = H + iK$, in which both H and K are Hermitian.It can be also be written uniquely as $A = H + S$, in which H is Hermitian and S is skew Hermitian.

> **歪エルミート行列**
> $A \in M_n$ に対し，その随伴行列をA^*で表すとき，Aが歪エルミート行列ならば，$A^* = -A$.

Proof. Aを$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i[\frac{i}{2}(A - A^*)]$で表す．このとき$H = \frac{1}{2}(A + A^*), K = \frac{1}{2}(A - A^*)$とおく．一意性について，あるエルミート行列，$E$，$F$を用いて$A = E + iF$と表せるとすると，
$A + A^* = (E + iF) + (E + iF)^* = E + iF + E - iF = 2E$
よって，$E = \frac{1}{2}(A + A^*) = H$このとき$F = K$．□

方針

1. 任意の正方行列がエルミート行列と歪エルミート行列の和で一意に書けることを示す.
2. (a) ⇔ (b) を示す.
3. (a) ⇔ (c) を示す.

Proof.
1.は補題参照.

(a) ⇔ (b)
$x^*Ax = O$
$\Rightarrow (x^*Ax)^* = (Ax)^*x^{**} = x^*A * x = O$.逆も同様.

(a) ⇔ (c)

1. (a) ⇒ (c)
   $x^*Ax = O, x^*A^*x = O$
   $\Rightarrow x^*(H + iK)x = x^*(Hx + iKx) = x^*Hx + ix^*Kx$．ここ で,
   $H = \frac{1}{2}(A + A^*), K = \frac{1}{2}(A - A^*)$であるから,
   $x^*Hx = \frac{1}{2}x^*(A + A^*)x = \frac{1}{2}x^*Ax + \frac{1}{2}x^*A^*x = O$
   同様に，$x^*Kx = O$

2. (c) ⇒ (a)
   $x^*Hx = O$，$x^*Kx = O$のとき，$\frac{1}{2}x^*Hx + \frac{i}{2}x^*Kx = O$，よって,
   $\frac{1}{2}x^*Hx + \frac{i}{2}x^*Kx = x^*(H + iK)x^* = x^*Ax = O$．□

> $A = H + S$の場合も同様に示される.