УДК 519.21

Б.В. Довгай, к.ф.-м.н.

Узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з Орлічевою правою частиною

Розглядається гіперболічне рівняння з Орлічевою правою частиною. Знайдені умови існування узагальненого розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: узагальнені розв'язки, строго Орлічевий випадковий процес, гіперболічне рівняння.

B.V.Dovgay, Ph.D.

Generalized solutions of the hyperbolic equation with Orlicz right part

A hyperbolic equation with Orlicz right side is considered. The conditions for existence of generalized solution of this problem are found.

Key Words: generalized solutions, strictly Orlicz random process, hyperbolic equation.

E-mail: bogdov@gmail.com
Статтю представив доктор фіз.-мат. наук Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Робота присвячена узагальненому розв'язку гіперболічного рівняння з нульовими початковими та граничними умовами та строго Орлічевою правою частиною. Досліджуються достатні умови існування узагальненого розв'язку цього рівняння.

2 Випадкові процеси з простору Орліча

Означення 2.1 *([4]).* Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається **C**-функцією, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ зростає при $x > 0$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.2 *([4]).* Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим **C**-функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $\mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.

Простір Орліча $L_U(\omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U} = \inf\left\{r > 0 : \ \mathsf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Означення 2.3 *([4]).* Випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.

Означення 2.4 *([4]).* **C**-функція $U(x)$ підпорядкована **C**-функції $V(x)$ $(U \prec V)$, якщо існують $x_0 \geqslant 0$ та $C > 0$ такі, що при $|x| > x_0$ має місце нерівність $U(x) \leqslant V(Cx)$.

Означення 2.5 *([5]).* Нехай $U(x)$ – така **C**-функція, що $V(x) = x^2$ підпорядкована функції $U(x)$. Сім'я Δ випадкових величин ξ, $\mathsf{E}\xi = 0$, з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевою, якщо існує стала C_Δ така, що для скінченої кількості випадкових величин $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$ виконується нерівність

$$\left\|\sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i\right\|_{L_U} \leqslant C_\Delta \left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

З а у в а ж е н н я. Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.

Теорема 1 ([5]). *Нехай Δ – строго Орлічева сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замикання сім'ї Δ в просторі $L_U(\Omega)$ є строго Орлічевою сім'єю з тою ж самою визначальною сталою.*

Означення 2.6 *([5]).* Випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$ з простору Орліча $L_U(\Omega)$ називається строго Орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t),\ t \in T\}$ є строго Орлічевою.

Теорема 2. *Нехай* (T_1, O_1, μ_1), (T_2, O_2, μ_2) *— вимірні простори з* σ*-скінченими мірами,* $T = T_1 \times T_2$, $O = O_1 \times O_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. *Нехай* $X = \{X(t_1, t_2),\ (t_1, t_2) \in T\}$ *— строго Орлічевий випадковий процес,* $f(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in T$ *— вимірна функція в* (T, O, μ). *Нехай для кожного* $t_1 \in T_1$ *існує інтеграл в середньому квадратичному*

$$\xi(t_1) = \int_T f(t_1, t_2) X(t_1, t_2) d\mu_2(t_2).$$

Тоді випадковий процес $\xi(t_1)$, $t_1 \in T_1$ *є строго Орлічевим випадковим процесом з тою ж самою визначальною сталою.*

Теорема 2 випливає з теореми 1.

Означення 2.7 *([4]).* Будемо говорити, що **C**-функція U задовольняє g-умові, якщо існують такі сталі $z_0 \geqslant 0$, $K > 0$, $A > 0$, що для всіх $x \geqslant z_0$, $y \geqslant z_0$ виконується нерівність

$$U(x)U(y) \leqslant AU(Kxy).$$

Теорема 3 ([6]). *Нехай* $\mathbb{R}^k$ *—* k*-вимірний простір,* $d(t,s) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |t_i - s_i|$, $T = \{0 \leqslant t_i \leqslant T_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$, $T_i > 0$, $X_n = \{X_n(t), t \in T\}$, $n \geqslant 1$ *– послідовність випадкових процесів, що належать простору Орліча* $L_U(\Omega)$, *де для функції* U *виконується* g*-умова. Нехай виконуються умови:*

1) $X_n(t) \to X(t)$ *при* $t \in T$ *та* $n \to \infty$ *за ймовірністю.*

2) $\sup\limits_{n=\overline{1,\infty}} \sup\limits_{d(t,s) \leqslant h} \|X_n(t) - X_n(s)\|_{L_U} \leqslant \sigma(h)$, *де* $\sigma = \{\sigma(h),\ h > 0\}$ *– така неперервна монотонно зростаюча функція, що* $\sigma(h) \to 0$ *при* $h \to 0$.

3) для деякого $\varepsilon > 0$:

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)} \left(\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ *— функція, обернена до* $\sigma(u)$.

Тоді процеси $X_n(t)$ *неперервні з імовірністю одиниця та збігаються за ймовірністю в просторі Банаха неперервних функцій з рівномірною нормою* $C(T)$.

3 Умови існування узагальненого розв'язку

Нехай $T > 0$ — деяка стала, функції $p(x)$ та $\rho(x)$, $x \in [0, \pi]$ —двічі неперервно диференційовні, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$; $q(x)$, $x \in [0, \pi]$ – неперервно диференційовна функція така, що $q(x) \geqslant 0$, $\xi(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ — вибірково неперервне з імовірністю 1 випадкове поле.

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho(x)\xi(x, t), \tag{1}$$

$$x \in [0, \pi],\ t \in [0, T]$$

$$u|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0. \tag{3}$$

Відповідна задача Штурма-Ліувілля матиме вигляд

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dX}{dx}\right) - qX + \lambda\rho X = 0, \tag{4}$$

$$X(0) = X(\pi) = 0. \tag{5}$$

Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n — відповідні власні значення. Будемо вважати, що λ_n занумеровані в порядку зростання. Завдяки обмеженням на p, q, ρ всі власні значення додатні і нуль не є власним значенням [3]. Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Означення 3.1 *([2]).* Випадкове поле $u(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \sin \mu_n (t - u) \zeta_n(u) du, \tag{6}$$

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^{\pi} \xi(x, t) X_n(x) \rho(x) dx \tag{7}$$

і ряд в правій частині (6) збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0, \pi] \times [0, T]$.

Лема 1 ([1]). *Існує стала* $L > 0$ *така, що*

$$|X_k(x_1) - X_k(x_2)| \leqslant L\mu_k^2 |x_1 - x_2|,\ x_1,\ x_2 \in [0, \pi].$$

Лема 2 ([6]). *Нехай функція* $Z_\lambda(u)$, $\lambda > 0$, $u \in [0, +\infty)$ *задовольняє умовам:*

1) Існує стала $B > 0$ *така, що* $\sup\limits_{u \in [0, +\infty)} |Z_\lambda(u)| \leqslant B$.

2) Існує стала $C > 0$ така, що для всіх $u, v \in [0, +\infty)$: $|Z_\lambda(u) - Z_\lambda(v)| \leqslant C\lambda|u-v|$.

Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, така, що функція $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geqslant 0$.

Тоді для всіх $v > 0$ та $u > 0$ виконується наступна нерівність

$$|Z_\lambda(u) - Z_\lambda(v)| \leqslant \max\{C, 2B\} \frac{\varphi(\lambda + v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|u-v|} + v_0\right)}.$$

Лема 3. *Нехай в (1)–(3) $\xi(x,t)$ – центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$, вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g-умові. Якщо*

$$C_{k,m} = \sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ 0\leqslant s\leqslant T}} |\mathsf{E}\zeta_k(t)\zeta_m(s)|,$$

де $\zeta_k(t)$ визначено в (7), та збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\varphi(\mu_k^2 + v_0)\varphi(\mu_m^2 + v_0) < \infty,$$

то

$$\sup_{n\geqslant 1} \sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ |x-y|\leqslant h\\ x,y\in[0,\pi]\\ t,s\in[0,T]}} \left(\mathsf{E}\,|u_n(x,t) - u_n(y,s)|^2\right)^{1/2} \leqslant F\left(\varphi\left(\frac{1}{h} + v_0\right)\right)^{-1},$$

де

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}X_k(x)\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du$$

є частковими сумами ряду (6),

$$F = T\max\{L, 2C_X\} \tag{8}$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}C_{k,m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\right)^{1/2}$$
$$+C_X\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}C_{k,m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0) \times\varphi(\mu_m+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\Bigg)^{1/2},$$

$$C_X = \sup_{k\geqslant 1}\sup_{0\leqslant x\leqslant \pi}|X_k(x)|,$$

L – стала з леми 1, $\varphi(x)$ – функція, для якої виконуються умови леми 2.

Доведення. Для $|t-s| \leqslant h$, $|x-y| \leqslant h$, $n \geqslant 1$ виконується наступна нерівність

$$\left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}X_k(x)\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}X_k(y)\int_0^s\zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right|^2\right)^{1/2}$$
$$\leqslant A_1 + A_2, \quad \text{де}$$

$$A_1 = \left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}(X_k(x)-X_k(y)) \times\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du\right|^2\right)^{1/2},$$

$$A_2 = \left(\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}X_k(y)\left(\int_0^t\zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du - \int_0^s\zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Позначимо

$$R_{k,m}(t,s) = \int_0^t\int_0^s \sin\mu_k(t-u)\sin\mu_m(s-v) \times\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)dvdu.$$

Тоді

$$A_1^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\mu_k\mu_m}|X_k(x)-X_k(y)| \times|X_m(x)-X_m(y)||R_{k,m}(t,t)|.$$

З лем 1, 2 випливає, що

$$|X_k(x)-X_k(y)| \leqslant \max\{L, 2C_X\}\frac{\varphi(\mu_k^2+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|x-y|}+v_0\right)}.$$

Крім того,

$$|R_{k,m}(t,s)| \leqslant C_{k,m}\int_0^t\int_0^s|\sin\mu_k(t-u)$$

$$\times \sin\mu_m(s-v)|dvdu \leqslant T^2 C_{k,m}.$$

Отже,

$$A_1^2 \leqslant T^2\left(\max\{L, 2C_X\}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\mu_m}C_{k,m}$$
$$\times\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0)\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-2}.$$

$$A_2^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\mu_k\mu_m}|X_k(y)||X_m(y)|$$
$$\times\Bigg|\mathsf{E}\bigg(\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du$$
$$-\int_0^s \zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du\bigg)$$
$$\times\bigg(\int_0^t \zeta_m(v)\sin\mu_m(t-v)dv$$
$$-\int_0^s \zeta_m(v)\sin\mu_m(s-v)dv\bigg)\Bigg|.$$

Нехай для визначеності $s \leqslant t$. Тоді

$$\int_0^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du$$
$$-\int_0^s \zeta_k(u)\sin\mu_k(s-u)du$$
$$=\int_0^s \zeta_k(u)\left(\sin\mu_k(t-u)-\sin\mu_k(s-u)\right)du$$
$$+\int_s^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du.$$

Отже,

$$A_2^2 \leqslant C_X^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\mu_k\mu_m}d_{k,m}(s,t),$$

де

$$d_{k,m}(s,t) = \Bigg|\mathsf{E}\bigg(\int_0^s \zeta_k(u)(\sin\mu_k(t-u)$$
$$-\sin\mu_k(s-u))du + \int_s^t \zeta_k(u)\sin\mu_k(t-u)du\bigg)$$
$$\times\bigg(\int_0^s \zeta_m(v)(\sin\mu_m(t-v)-\sin\mu_m(s-v))dv$$
$$+\int_s^t \zeta_m(v)\sin\mu_m(t-v)dv\bigg)\Bigg|$$
$$\leqslant \int_0^s\int_0^s |\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)||\sin\mu_k(t-u)-\sin\mu_k(s$$
$$-u)||\sin\mu_m(t-v)-\sin\mu_m(s-v)|dvdu$$
$$+\int_0^s\int_s^t |\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)||\sin\mu_k(t-u)$$
$$-\sin\mu_k(s-u)||\sin\mu_m(t-v)|dvdu$$
$$+\int_s^t\int_0^s |\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)||\sin\mu_k(t-u)|$$
$$\times|\sin\mu_m(t-v)-\sin\mu_m(s-v)|dvdu$$
$$+\int_s^t\int_s^t |\mathsf{E}\zeta_k(u)\zeta_m(v)||\sin\mu_k(t-u)|$$
$$\times|\sin\mu_m(t-v)|dvdu.$$

За лемою 2

$$\int_s^t |\sin\mu_k(t-u)|du \leqslant \max\{1,2T\}\frac{\varphi(1+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Крім того, за лемою 2

$$\int_0^s |\sin\mu_k(t-u)-\sin\mu_k(s-u)|du$$
$$\leqslant 2T\frac{\varphi(\mu_k+v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Тоді

$$d_{k,m}(s,t) \leqslant C_{k,m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{|t-s|}+v_0\right)}.$$

Зрозуміло, що для $t \geqslant s$ така нерівність теж виконується. Отже,

$$A_2^2 \leqslant C_X^2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\big(4T^2\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(\mu_m$$
$$+v_0)+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_k+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+2T\max\{1,2T\}\varphi(\mu_m+v_0)\varphi(1+v_0)$$
$$+(\max\{1,2T\})^2\varphi^2(1+v_0)\big)\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{1}{h}+v_0\right)}.$$

□

Теорема 4. *Нехай $\xi(x,t)$ – центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ з визначальною сталою C_Δ, вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g-умові. Припустимо $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$ – неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$,*

$\varphi(\lambda) \to \infty$, $\lambda \to \infty$, така, що функція $\dfrac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geqslant 0$. Для того, щоб ряд (6) був узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} C_{k,m}\frac{1}{\mu_k\mu_m}\varphi(\mu_k^2+v_0)\varphi(\mu_m^2+v_0) < \infty \tag{9}$$

і для довільного $\varepsilon > 0$ виконувалась умова:

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\Bigg(\left(\frac{\pi}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F}{v}\right)-v_0\right)+1\right) \times\left(\frac{T}{2}\left(\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F}{v}\right)-v_0\right)+1\right)\Bigg)dv < \infty, \tag{10}$$

де F задана (8).

Доведення. Згідно з теоремами 1, 2 всі суми $u_n(x,t)$ є строго Орлічевими випадковими полями з тою ж визначальною сталою C_Δ, тому

$$\|u_n(x,t)-u_n(y,s)\|_{L_U} \leqslant C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(u_n(x,t)-u_n(y,s)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Розглянемо ряд

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n\mu_k}X_n(x)X_k(x)\int_0^t\int_0^t \sin\mu_n(t-u) \times\sin\mu_k(t-v)\mathsf{E}\zeta_n(u)\zeta_k(v)dvdu\right|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n\mu_k}|X_n(x)||X_k(x)|\int_0^t\int_0^t|\sin\mu_n(t-u)\sin\mu_k(t-v)||\mathsf{E}\zeta_n(u)\zeta_k(v)|dvdu$$
$$\leqslant C_X^2T^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n\mu_k}C_{n,k} < \infty$$

за умовою (9).

Із збіжності цього ряду випливає збіжність ряду (6), тобто збіжність послідовності $\{u_n(x,t)\}$ в середньому квадратичному, а значить, і за ймовірністю при всіх $(x,t) \in [0,\pi]\times[0,T]$. Отже, виконується умова 1 теореми 3.

З леми 3 випливає виконання умови 2 теореми 3 для

$$\sigma(h) = C_\Delta F\left(\varphi\left(\frac{1}{h}+v_0\right)\right)^{-1}.$$

І, нарешті, умова (10) забезпечує виконання умови 3 теореми 3, оскільки

$$\sigma^{(-1)}(t) = \frac{1}{\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta F}{t}\right)-v_0}.$$

Тому твердження теореми 4 випливає з теореми 3. $\square$

4 Висновки

У даній роботі розглянуті узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з нульовими початковими та граничними умовами та строго Орлічевою правою частиною. Встановлені умови існування узагальненого розв'язку такого рівняння.

Список використаних джерел

1. *Довгай Б.В.* Гіперболічне рівняння з Орлічевою правою частиною / Б.В. Довгай // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011. – Вип. № 22.

2. *Довгай Б.В.* Узагальнені розв'язки гіперболічного рівняння з φ-субгауссовою правою частиною / Б.В. Довгай // Теорія ймовір. та матем. стат. – 2009. – № 81. – С. 25 – 30.

3. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики / Г.Н. Положий. – Москва: Высшая школа, 1964. – 559 с.

4. *Buldygin V.V.* Metric characterization of random variables and random processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko. – Kiev: "TBiMC"; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, – 2000. – 257 p.

5. *Barrasa de la Krus E.* Boundary-value problem for equations of mathematical physics with strictly Orlicz random initial conditions / E. Barrasa de la Krus and Yu. V. Kozachenko // Random operators and stochastic equations. – 1995. – Vol. 3, No. 3. – P. 201 – 220.

6. *Kozachenko Yu.V.* Boundary-value problems for equations of mathematical phisics with Orlicz random initial conditions / Yu.V. Kozachenko and K.I. Veresh // Theory of Probability and Math. Statistics. – 2009. – No. 80. – P. 63 – 75.

Надійшла до редколегії 12.06.2011