Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2012, 1

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 519.21

Д.М. Городня, аспірант

# Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою

*Доведено існування та єдиність слабкого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, керованого загальною стохастичною мірою.*

*Ключові слова: стохастична міра, стохастичне рівняння теплопровідності, задача Коші, слабкий розв'язок.*

D.M. Gorodnya, PhD student

# Existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem for a heat equation with general stochastic measure

*Existence and uniqueness of the weak solution of Cauchy problem for a heat equation driven by the general stochastic measure is proved.*

*Key Words: stochastic measure, stochastic heat equation, Cauchy problem, weak solution.*

E-mail: gorodnyaya-darya@i.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Козаченко Ю.В.

**1. Вступ.** Для моделювання поведінки реальних фізичних і біологічних процесів при наявності випадкових впливів часто використовується рівняння теплопровідності, яке містить доданок, заданий стохастичним інтегралом [1,2]. У даній роботі випадковий вплив описується за допомогою інтеграла за стохастичною мірою, на яку накладається тільки умова $\sigma$-адитивності за ймовірністю.

Для випадку $d$ просторових змінних розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності ми визначаємо як деяку узагальнену випадкову функцію, визначену на просторі $D(\mathbb{R}^{d+1})$ основних функцій з $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ з компактним носієм. Це дозволяє довести існування та єдиність розв'язку при умовах, подібних до тих, при яких у [3] встановлено існування та єдиність узагальненого розв'язку для звичайного рівняння теплопровідності.

Інший підхід, при якому розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності визначається як деякий процес $V_t,\ t > 0$, такий, що при фіксованому $t > 0$ $V_t$ є узагальненою випадковою функцією, визначеною на просторі Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ швидко спадних основних функцій, запропоновано в [4].

**2. Попередні відомості.** Нехай $L_0$ – множина всіх випадкових величин, які задані на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, F, P)$ і розглядаються з точністю до $P$-еквівалентності. Під збіжністю в $L_0$ будемо розуміти збіжність за ймовірністю.

**Означення 1** *Узагальненою випадковою функцією (у.в.ф.) називається лінійне неперервне відображення $\xi : D(\mathbb{R}^{d+1}) \to L_0$.*

У подальшому через $D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$, $D'(\mathbb{R}^{d+1})$, $\langle F, \varphi\rangle$, $(f, \varphi)$ позначатимемо відповідно простір усіх у.в.ф., стандартний простір узагальнених функцій [3, § 5.3] та дії функцій $F \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ та $f \in D'(\mathbb{R}^{d+1})$ на основну функцію $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$. Властивості у.в.ф. досліджуються в [4,5]. Зокрема, справджується таке твердження.

Позначимо через $L(\mathbb{D})$ та $\mathcal{E}$ відповідно диференціальний оператор з постійними коефіцієнтами та його фундаментальний розв'язок (див., наприклад, [3, § 11.2]).

**Теорема 1** [5] *Нехай для функції $F \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ існує згортка $F * \mathcal{E}$. Тоді рівняння $L(\mathbb{D})U = F$ має розв'язок в $D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$. Цей розв'язок записується у вигляді $U = F * \mathcal{E}$ і є єдиним у класі всіх функцій із $D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$, для яких існує згортка з $\mathcal{E}$.*

Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbb{R}^{d+1})$ – $\sigma$-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^{d+1}$.

**Означення 2** *Стохастичною мірою називається $\sigma$-адитивне відображення $\mu : \mathbf{B} \to L_0$.*

У роботі [6] визначено $\int_A f d\mu$, де $A \in \mathbf{B}$, $f$ – дійсна вимірна функція, та досліджено його властивості. Зокрема, довільна обмежена вимірна функція є інтегровною, для цього інтеграла справджується аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність (див. наслідок 1.2 [6] або твердження 7.1.1 [7]) та теорема про диференціювання інтеграла по параметру [4], а також кожна стохастична міра $\mu$ визначає у.в.ф. $\dot{\mu}$ за правилом

$$(\dot{\mu}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x,t) d\mu(x,t), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Відзначимо, що похідна від випадкового процесу $\eta : (a; b) \to L_0$ розгляається у сенсі збіжності за ймовірністю.

**3. Основні результати.** Розглянемо задачу Коші для рівняння теплопровідності із стохастичною мірою, яка у символьному записі має вигляд

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \triangle_x V + \dot{\mu}, \ t > 0, \qquad V\mid_{t=0+} = \dot{\nu}, \quad (1)$$

відносно невідомої функції $V \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$. Тут $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\mu$ – стохастична міра на $\mathbf{B}(\mathbb{R}^{d+1})$, рівна нулю на усіх вимірних підмножинах множини $K := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} : t < 0\}$, $\nu$ – стохастична міра на $\mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$.

**Означення 3** *У.в.ф. $V \in D'_r(\mathbb{R}^{d+1})$ називається розв'язком задачі Коші (1), якщо $V = 0$ при $t < 0$ і для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$*

$$-\left(V, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right) = a^2 (V, \triangle_x \varphi(x,t)) + \quad (2)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x,t) d\mu(x,t) + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) d\nu(x).$$

Аналогічно до [3, §5.5] $V = 0$ при $t < 0$, якщо $(V, \varphi) = 0$ для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$, такої, що $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathrm{K}$.

Розв'язок задачі Коші (1) будується з урахуванням формули Пуассона [3, §16.3] таким чином. Нехай

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

– фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності і при $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$

$$v_1(x,t,\varphi) := \int_t^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(y-x, s-t) \varphi(y,s) dy;$$

$$v_2(x,\varphi) := v_1(x, 0, \varphi).$$

**Теорема 2** *Розв'язком задачі Коші (1) є у.в.ф.*

$$(V, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d \times [0;\infty)} v_1(x,t,\varphi) d\mu(x,t) + \quad (3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_2(x,\varphi) d\nu(x), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1}).$$

**Доведення.** Зафіксуємо $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+1})$ та $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0;\infty)$. З фінітності $\varphi$ випливає, що $supp\ \varphi \subset (-L; L)^{d+1}$ для деякого $L > 0$, а отже

$$v_1(x,t,\varphi) =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^p} \int_0^L d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x + 2a\sqrt{\tau}\xi, t+\tau) e^{-|\xi|^2} d\xi.$$

Тому при фіксованому $\varphi$ функція $v_1$ неперервна і обмежена по сукупності змінних $x, t$ на $\mathbb{R}^d \times [0;\infty)$, а отже, вона інтегровна по стохастичній мірі $\mu$. Також, позначивши $\delta$-функцію Дірака через $\delta$, при фіксованій $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0;\infty)$ дістанемо (див. [3,§11.6]):

$$\varphi(x,t) = (\delta(y-x, s-t), \varphi(y,s)) =$$

$$\left(\mathcal{E}(y-x, s-t), -\frac{\partial \varphi(y,s)}{\partial s} - a^2 \triangle_y \varphi(y,s)\right) =$$

$$\int_t^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(y-x, s-t) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial s} - a^2 \triangle_y \varphi\right) dy.$$

Тому

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [0;\infty)} \varphi(x,t) d\mu(x,t) =$$

$$-\int_{\mathbb{R}^d\times[0;\infty)} v_1\left(x,t,\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) d\mu(x,t)- \quad (4)$$

$$a^2\int_{\mathbb{R}^d\times[0;\infty)} v_1\left(x,t,\triangle_y\varphi\right) d\mu(x,t),$$

а отже, у.в.ф.

$$\int_{\mathbb{R}^d\times[0;\infty)} v_1(x,t,\varphi)d\mu(x,t),\ \varphi\in D(\mathbb{R}^{d+1}),$$

є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\triangle_x V+\dot{\mu},\ t>0,\quad V\,|_{t=0+}=0. \quad (5)$$

З урахуванням рівностей (4) при $t=0$ аналогічно до (5) можна переконатися, що у.в.ф.

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_2(x,\varphi)d\nu,\ \varphi\in D(\mathbb{R}^{d+1}),$$

є розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\triangle_x V,\ t>0,\quad V\,|_{t=0+}=\dot{\nu}. \quad (6)$$

Тому для закінчення доведення досить зауважити, що сума розв'язків задач (5, 6) є розв'язком задачі Коші (1). Теорему 2 доведено.

Зафіксуємо стохастичні міри $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$, які задані на $\mathbf{B}(\mathbb{R}^{d+1})$ та $\mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$ відповідно, і покладемо при $\varphi\in D(\mathbb{R}^{d+1})$

$$\langle F_{\overline{\mu}},\varphi\rangle:=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\varphi(x,t)d\overline{\mu}(x,t), \quad (7)$$

$$\langle F_{\overline{\nu}},\varphi\rangle:=\int_{\mathbb{R}^{d}}\varphi(x,0)d\overline{\nu}(x). \quad (8)$$

У подальшому використовується така лема.

**Лема 1** *Існують згортки $F_{\overline{\mu}}*\mathcal{E}$ та $F_{\overline{\nu}}*\mathcal{E}$.*

Доведення. Зафіксуємо $\varphi\in D(\mathbb{R}^{d+1})$ і збіжну до 1 в $\mathbb{R}^{2(d+1)}$ послідовність $\{\eta_k\}\subset\mathbb{R}^{2(d+1)}$ [3, §7.4]. Для існування згортки $F_{\overline{\mu}}*\mathcal{E}$ досить довести [5], що границя за імовірністю при $k\to\infty$ послідовності

$$\langle F_{\overline{\mu}},(\mathcal{E}(y,s),\eta_k((x,t),(y,s))\varphi(x+y,t+s))\rangle= \quad (9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}}d\overline{\mu}(x,t)\int_{\mathbb{R}}ds\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_k(x,t,y,s)dy,\ k\geq 1,$$

де

$$\Phi_k(x,t,y,s)=\mathcal{E}(y,s)\eta_k((x,t),(y,s))\varphi(x+y,t+s),$$

існує і дорівнює

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}}d\overline{\mu}(x,t)\int_{\mathbb{R}}ds\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{E}(y,s)\varphi(x+y,t+s)dy. \quad (10)$$

Зауважимо, що послідовність $\{\eta_k\}$ рівномірно обмежена на $\mathbb{R}^{2(d+1)}$ деякою сталою $C>0$, а також на кожному компакті в $\mathbb{R}^{2(d+1)}$ дорівнює 1 починаючи з деякого номера. Також із фінітності $\varphi$ випливає, що

$$\exists L>0\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}^d\ \forall s\in\mathbb{R},\ |s|>L:\ \ \varphi(\xi,s)=0. \quad (11)$$

Зафіксуємо $(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}$. Внаслідок теореми Лебега про мажоровану збіжність

$$\int_{-L-t}^{L-t}ds\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_k(x,t,y,s)dy\to$$

$$\int_{-L-t}^{L-t}ds\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{E}(y,s)\varphi(x+y,t+s)dy,\quad k\to\infty,$$

тобто, з урахуванням (11), послідовність підінтегральних функцій, які інтегруються в (9) по стохастичній мірі $\mu$ , поточково збігається до підінтегральної функції з (10).

Легко переконатися, що вказана послідовність підінтегральних функцій рівномірно по $(x,t)\in\mathbb{R}^{d+1}$ обмежена сталою $2CL\|\varphi\|_\infty$. Тому границя (7) існує і рівна випадковій величині, що задається інтегралом (10), за теоремою Лебега про мажоровану збіжність для інтеграла за стохастичною мірою.

Аналогічно перевіряється, що існує за імовірністю

$$\lim_{k\to\infty}\langle F_{\overline{\nu}},(\mathcal{E}(y,s),\eta_k((x,t),(y,s))\varphi(x+y,t+s))\rangle \quad (12)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}d\overline{\nu}(x,t)\int_{\mathbb{R}}ds\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{E}(y,s)\varphi(x+y,s)dy,$$

а отже, і згортка $F_{\overline{\nu}}*\mathcal{E}$. Лему 1 доведено.

Позначимо через $\mathcal{G}$ набір усіх у.в.ф., які зображуються у вигляді лінійних комбінацій у.в.ф. виду (7) та (8).

**Теорема 3** *Задача Коші (1) має єдиний розв'язок у множині усіх у.в.ф., для яких існує згортка з $\mathcal{E}$. Цей розв'язок зображується у вигляді (3).*

**Доведення.** Внаслідок означення 3 у.в.ф. $V$ є розв'язком задачі Коші (1) тоді і тільки тоді, коли $V$ є розв'язком в $D_r'(\mathbb{R}^{d+1})$ рівняння

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a^2 \triangle_x V = F_\mu + F_\nu, \tag{13}$$

а також $V = 0$ при $t < 0$. Тут у.в.ф. $F_\mu$, $F_\nu$ будуються за допомогою стохастичних мір $\mu$, $\nu$ за правилами (7) та (8) відповідно. Зауважимо, що $(F_\mu + F_\nu) \in \mathcal{G}$, а також із лінійності згортки та леми 1 випливає що згортка $F * \mathcal{E}$ існує для кожної $F \in \mathcal{G}$.

Оскільки стохастична міра $\mu$ рівна нулю на вимірних підмножинах множини $K$, то, внаслідок (3, 10, 12) для розв'язку $V$ задачі Коші (1), який отриманий в теоремі 2 і задається формулою (3), виконується рівність $V = F_\mu * \mathcal{E} + F_\nu * \mathcal{E}$. Як і при доведенні леми 1 встановлюється, що існує згортка $V * \mathcal{E}$. Тому внаслідок теореми 1 рівняння (13) має єдиний розв'язок у класі всіх у.в.ф., для яких існує згортка з $\mathcal{E}$. Цей розв'язок задається формулою (3). Теорему 3 доведено.

## Список використаних джерел


1. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения глазами физика. - М.: Физматлит, 2001. – 528 с.
2. *Sturm A.* On convergence of population processes in random environments to the stochastic heat equation with colored noise // Electron. J. Probab. – 2003. – 8, N 6. – P.1–39.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
4. *Радченко В. Н.* Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами //Укр. мат. журнал. – 2008. – 60, №12. – с. 1675–1685.
5. *Городня Д. М.* Про існування та єдиність розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь із загальними стохастичними мірами // Теорія ймовір та матем.статист. – 2011. – Вип. 85. – с. 50 –55.
6. *Радченко В. Н.* Интегралы по общим случайным мерам// Труды института математики НАН Украины, 1999. - 196 с.
7. *Kwapień S., Woycziński W. A.* Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple. – Boston: Birkhäuser,1992. – 360 p.


Надійшла до редколегії 23.03.2011