テイラーの定理

証明1

$$g(x) = f(x) + (b-x) f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$
$$+ A(b-x)^n$$

ただし、A は $g(a) = f(b)$ となるような定数。

ロルの定理から $g'(c) = 0$ となる $c\ (a<c<b)$ が存在する。

$$g'(x) = f'(x) + \left\{-f'(x) + (b-x) f''(x)\right\} + \left\{-\frac{(b-x)}{1!} f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x)\right\} +$$
$$\cdots + \left\{-\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\right. - nA(b-x)^{n-1}$$

$$= \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - nA(b-x)^{n-1}$$

$$g'(c) = \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) - nA(b-c)^{n-1} = 0.$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} - nA = 0. \qquad A = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

また、$g(a) = g(b) = f(b)$ より、

$$f(a) + (b-a) f'(x) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + A(b-x)^n = f(b)$$

$A = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ を上の式に代入して定理を得る。

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と定め，$g(x)$が剰余項と等しくなることを示す．

両辺をxで微分し，

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right.$$

$$= f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!}(x-a) \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$$

$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}$$

$$g'(a) = f'(a) - \frac{f'(a)}{0!}(a-a)^0$$ ← 0^0を経由せずに証明できるか？

$$= 0$$

$$g^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-m)!}(x-a)^{k-m} \quad (m \leq n-1)$$

$$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0.$$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$$

$h(x) = (x-a)^n$ とおくと，コーシーの定理より

$$\frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g(x)}{(x-a)^n} = \frac{g'(x_1)}{n(x_1-a)^{n-1}}$$

となる $x_1\ (a < x_1 < x)$ が存在する．同様に $g'(a) = h'(a) = 0$ より，

$$\frac{g'(x_1) - g'(a)}{h'(x_1) - h'(a)} = \frac{g'(x_1)}{n(x_1-a)^{n-1}} = \frac{g''(x_2)}{n(n-1)(x_2-a)^{n-2}}$$

となる $x_2\ (a < x_2 < x_1)$ が存在する．右辺に $g^{(n)}$ が出てくるまで繰り返し．