ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理

実数列 $\{a_n\}$ が有界であるとき.

$\{a_n\}$ は収束する部分列をもつ.

単調収束定理.

有界な数列 $\{a_n\}$ は広義単調増加 もしくは 広義単調減少な数列とする. このとき, $\{a_n\}$ は収束する.

証明:

上限の性質　M が A の上限であるとは.

1. 任意の $x \in A$ に対して $M \geq x$.
2. $\varepsilon > 0$ を任意に取ったとき, ある $x \in A$ が存在し

   $M - x < \varepsilon$

   M に対し, x をいくらでも近づけることができる.

$\{a_n\}$ が単調増加であるとする.

$a = \sup\{a_n\}$ とおき. $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ を示す.

a は上限であるため. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある N が存在して.

$a - a_n < \varepsilon$ となる.