単調収束定理　（ルベーグじゃない方）

https://manabitimes.jp/math/2681　を参考

定理　有界な数列 $\{a_n\}$ は広義単調増加，もしくは広義単調減少な数列とする．このとき，$\{a_n\}$ は収束する．

上限の性質　M が A の上限であるとは，次の２つを満たすことと同値

1. 任意の $x \in A$ に対し，$M \geq x$　　＞でないことに注意
2. $\varepsilon > 0$ を任意に取ったとき，ある $x \in A$ が存在し，$M - x < \varepsilon$

   x を M に対していくらでも近づけることができる．

定理の証明　単調増加するときのみを考える．

$a = \sup\{a_n\}$ とおく．　実数の連続性より．

a は上限であるため，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が存在し，

$$a - a_N < \varepsilon$$　上限の性質２より．

加えて，$a \geq a_N$ より，

$$0 \leq a - a_N$$

$\{a_n\}$ は単調増加であるため，$n > N$ において，

$$0 \leq a - a_{\cancel{N}\,n} \leq a - a_{\cancel{n}\,N} < \varepsilon$$

つまり $|a_n - a| < \varepsilon$ となるため $\lim_{n\to\infty} a_n = a$．

※ $n = N$ を許して，

$\forall \varepsilon, \exists N, n \geq N \Rightarrow 0 \leq a - a_n < \varepsilon$

にもできる．

むしろ，$a - a_n = a - a_N$ が分からない