

ロルの定理 ← 強える.

f は閉区間連続だから、最大値 M , 最小値 m を持つ.

$m = f(a) = f(b) = M$ のときは定数関数であるため明らか

$m \leq f(a) = f(b) < M$ と, $m < f(a) = f(b) \leq M$ について
証明する必要がある

$f(a) = f(b) < M$ の場合,

閉区間連続のとき、
最大値、最小値が存在
+
最大値、最小値の
微分係数が 0 である
↓
微分係数が 0 である
 $x=c$ が存在する。
 $f(c) = M$ とする $a < c < b$ が存在する。

$$f(c-h) \leq f(c) \quad (a \leq (c-h) \leq c) \text{ により}$$

f の微分可能性より

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

$$\therefore f'(c) = 0.$$