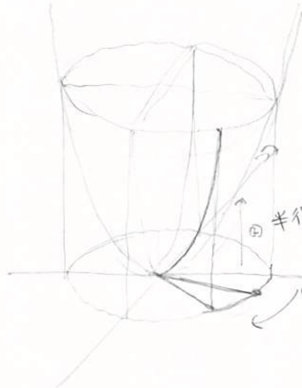
複素数 n乗根の解

241007



$$a+bi = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$(a+bi)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$z^n = 1$$

$$r^n(\cos \underline{n\theta} + i\sin n\theta) = \cos\underline{\theta} + i\sin\theta$$

$r^n = 1$, $n\theta = 2k\pi$ より $r = 1$ $(r>0)$, $\theta = \frac{2}{n}k\pi$

複素平面Sとそれをn乗した平面S'を比べるとき

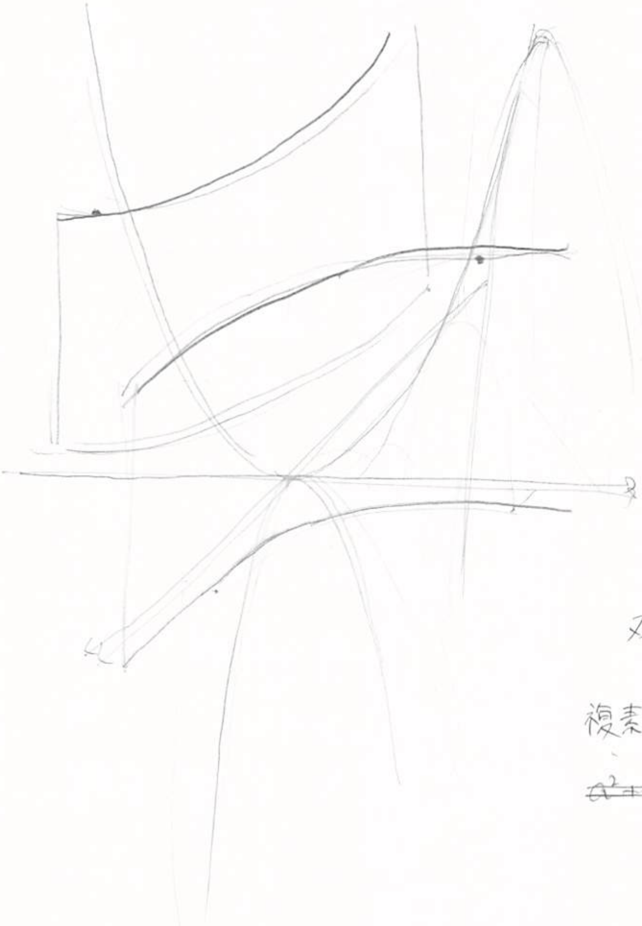
S上の点 $a+bi = \cos\theta + i\sin\theta$ はまず半径がn乗され、角がn倍される。

このとき、角は虚部が0である軸との偏角である。

ある角 θ がn倍で θ' となるとき、$\theta + \frac{2\pi}{n}$ は1周余分に回転し、

同じく θ' となる。$\theta + \frac{2\pi}{n}k$ はk周余分に回転し、同じく θ' となる。

θ をとりうる最小の角とすると、$\theta = \frac{\theta'}{n}$ であるから、$\theta = \frac{\theta'}{n} + \frac{2\pi}{n}k$ が成り立つ。

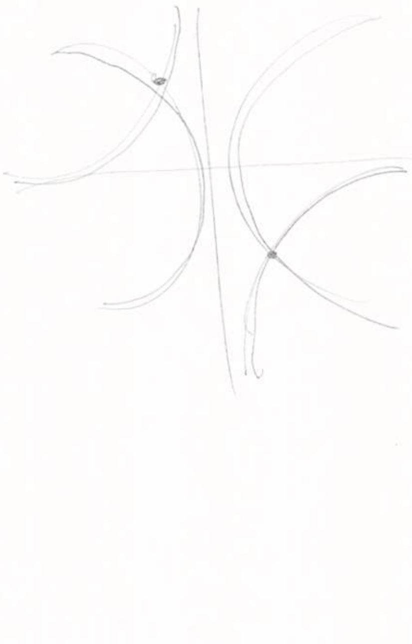


双曲線じゃねーか

複素平面 2乗のプロット.

$\cancel{a^2+}$ a^2-b^2 が実部

$2ab$ が虚部



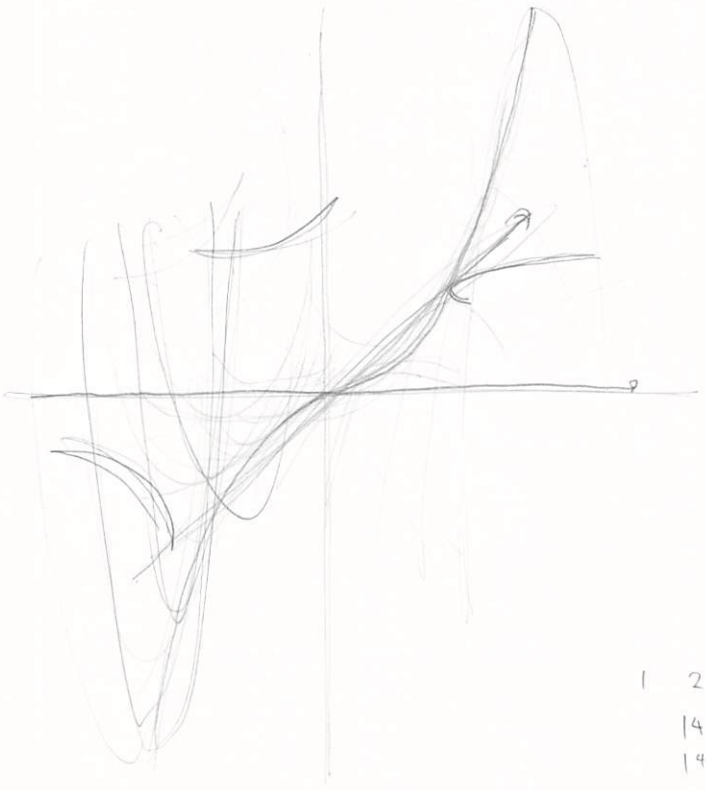
3乗プロット？

$$(a+bi)^3 = a^3 + a^2bi + ab^2i^2 + b^3i^3$$

$$= a^3 + a^2bi \cancel{+} - ab^2 - b^3i$$

$$= \cancel{(a^3+} \ (a^3 - ab^2) + (a^2b - b^3)i$$

$$= a(a^2-b^2) + b(a^2-b^2)i$$



双曲線？

1　2:30

14:30

14:40〜

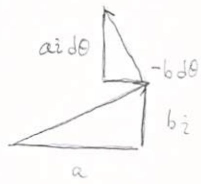
$$\cancel{a^2+} \quad a^3 - ab^2 \Rightarrow -2ab$$

$$z = a^3 - ab^2$$

$$\frac{z}{a} = a^2 - b^2$$

ある関数は少なくともいくつの連続な区間を持つか？

$(e^{i\theta})' = ie^{i\theta}$



$e^{i\theta_0} = a + bi$

$e^{i(\theta + d\theta)} = a + bi + d\theta(ie^{i\theta}) = a + bi + d\theta(ia - b)$

$e^{i\theta}$ と $de^{i\theta}$ は複素平面上で直交.

$\theta = 0$ のとき $e^{i\theta} = 1$ だから半径は1.

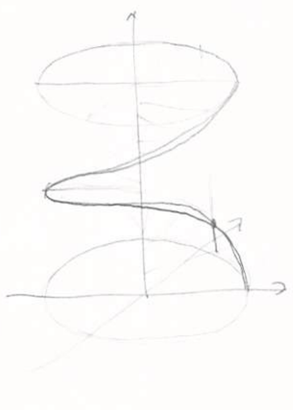
即ち, $e^{i\theta}$ は複素平面上の半径1、原点を中心とした円運動の関数である.

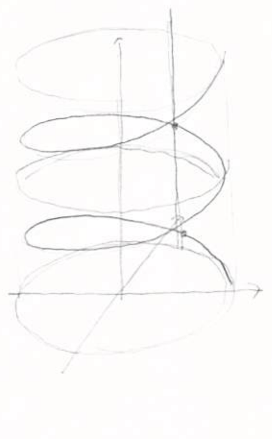
$\cancel{(a+bi)^n} =$

$\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, $(a + bi)^n = (e^{i\theta_0})^n = e^{i\theta_0 n}$

$f(\theta)$ を n 乗すると, 回転速度が n 倍になる.

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ までに $(a + bi)^n = e^{i\theta_0 n}$ となるような θ_0 が n 個存在する.





$\sqrt[n]{a+bi}$ について考える.

$\sqrt[n]{a+bi} = c+di$ とすると. $a+bi = (c+di)^n$ が成り立つ.

$a+bi = e^{i\theta_0}$ である θ_0　$c+di = e^{i\theta_1}$ である θ_1 を定める.

θ_0, θ_1 は共に一意で $2m\pi$ を無視する.

いま. $e^{i\theta_0} = (e^{i\theta_1})^n$ が成り立つ.

$e^{i\theta_0} = e^{i\theta_1 n}$, $\theta_0 = \theta_1 n$ が成り立つ.

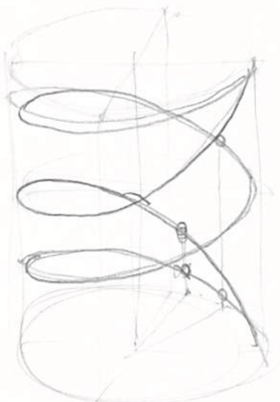
このとき. $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ に $\theta_0 = \theta_1 n$ であるような θ_1 は n 個存在する.

$e^{i\theta_0}$ に対し. $e^{i\theta_1 n}$ の回転速度は n 倍である.

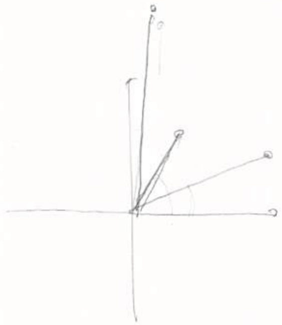
まとめる.

$$a+bi = (c+di)^n. \quad e^{i\theta_0} = e^{i\theta_1 n}$$

において. θ_1 を求めるとは n 倍回転して θ_0 となるような θ を求めるに等しく. その数は n 個である.

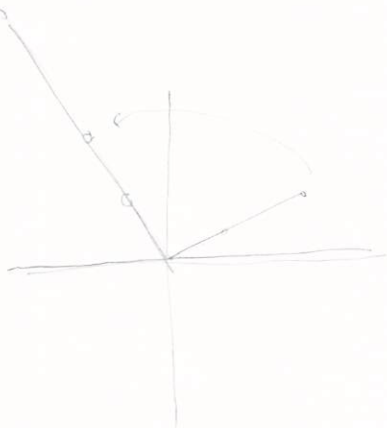


$(a+bi)(c+di) = r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$



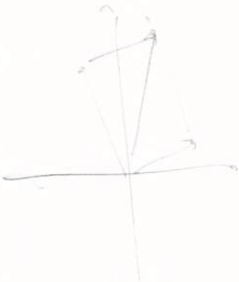
全ての点を θ_2 だけ回転して r_2 倍

$(a+bi)^n = (r_1 e^{i\theta_1})^n = r_1^n e^{i\theta n}$

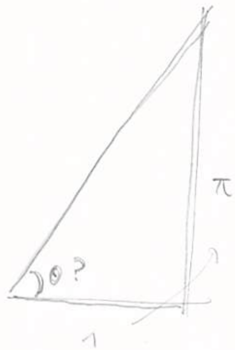


全体が n 倍巻かれて r_1^n 倍

$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$



ベクトルの和



$\tan\theta = \pi$