コーシーの平均値の定理，

平均値の定理の拡張

f, g は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．

$g'(x) \neq 0 \quad (a < x < b)$ ならば，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (a < c, b)$$

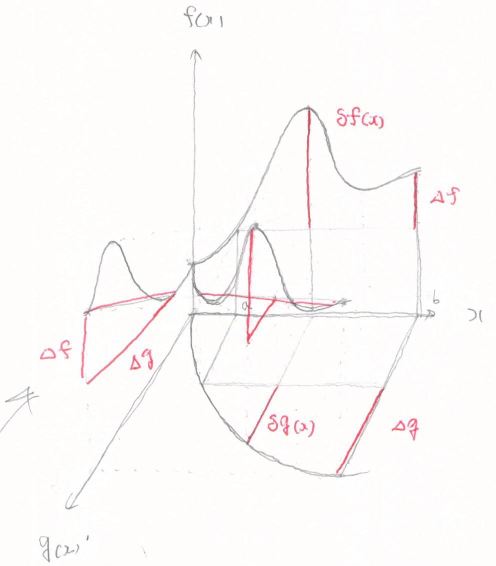
なる c が存在する．

$g(x) = x$ とおくと，ラグランジュの平均値の定理．

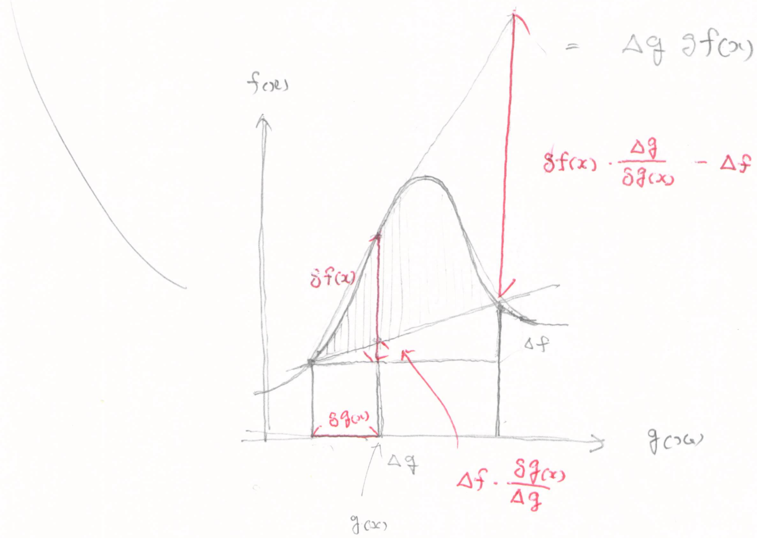
$g'(x) \neq 0 \quad (a < x < b)$ より，$g(b) \neq g(a)$

ラ　$\varphi(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$

コ　$\varphi(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$



$$\varphi(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$$
$$= \Delta g\, \delta f(x) - \Delta f\, \delta g(x)$$



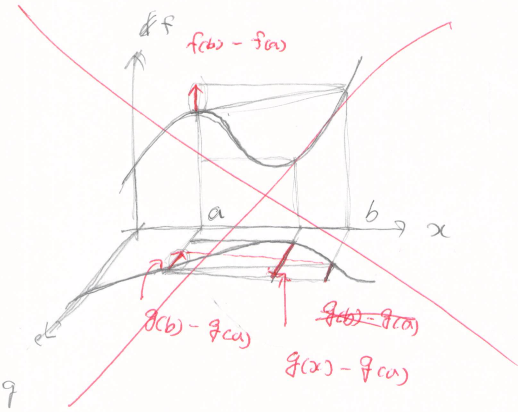
$\mu(x) = \delta f(x) - \Delta f \cdot \dfrac{\delta g(x)}{\Delta g}$ に対し、

$\varphi(x) = \Delta g\, \mu(x)$。

Δg は定数なので、平均値の定理より導かれる

cに影響しない

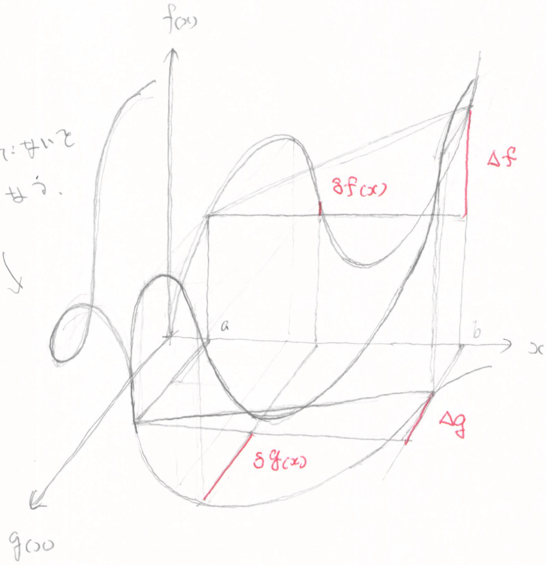
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{df}{dx} \Big/ \frac{dg}{dx} = \frac{df}{dg}$$



$$\varphi(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(\overset{x}{\cancel{b}}) - g(a))$$

$$= \Delta g\,(f(x) - f(a)) - \Delta f\,(g(\overset{x}{\cancel{b}}) - g(a))$$

$g'(x) \neq 0$ でないと おかしくなる.



$\varphi(x) = \Delta g\, \delta f(x) - \Delta f\, \delta g(x)$

$g(a)$ に対し、$g^{-1}(g(a)) = a$ ただ一つに定まる必要がある.

$f(a)$ にはない.