

# Control No Lineal

Dr. Casimiro Gómez González  
Facultad de Electrónica, UPAEP  
correo: [casimiro.gomez@upaep.mx](mailto:casimiro.gomez@upaep.mx)  
Tel: 222 229 9428

Otoño de 2016



# Prólogo

El presente libro está diseñado para ser impartido en un semestre en las licenciatura en ingeniería Mecatrónica, Electrónica o Biónica. El material ha sido desarrollado a lo largo de varios años de experiencia impartiendo la materia en la Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla (UPAEP) en Puebla, México. El material está auto contenido, es decir, se ha procurado que leyendo secuencialmente el libro se podrán analizar sistemas dinámicos lineales y no lineales. Las secciones que tienen asterisco son lecturas recomendadas pero no obligatorias. En esta etapa del proyecto, el material aún no tiene bibliografía ni citas. Así que favor de considerar esta situación. El material aún esta en etapa de apuntes.

El autor  
Casimiro Gómez González  
Doctor en Ingeniería Mecatrónica



# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>III</b>
<b>1. Organización del curso</b>	<b>1</b>
1.1. Software Necesario . . . . .	1
1.2. Metodología de Calificación . . . . .	2
1.3. Proyecto Final: Robots SumoBOTS . . . . .	3
1.3.1. El ring . . . . .	3
1.3.2. El robot . . . . .	3
1.3.3. Metodología . . . . .	4
1.3.4. Criterios de calificación . . . . .	4
1.3.5. Puntuación . . . . .	5
1.3.6. Consideraciones Especiales . . . . .	5
1.3.7. Violaciones . . . . .	5
1.3.8. Penalización . . . . .	6
1.3.9. Accidentes durante la competencia . . . . .	6
<b>2. Introducción</b>	<b>9</b>
2.1. Mecatrónica y Micro Mecatrónica . . . . .	10
2.2. Los MEMS . . . . .	11
2.2.1. La ciencia de la miniaturización . . . . .	11
2.2.2. ¿Porque los MEMS? . . . . .	12
2.2.3. Disciplinas que componen la Mecatrónica . . . . .	13
2.3. El sistema Mecatrónico . . . . .	13
2.4. El sistema dinámico . . . . .	16
2.4.1. Característica de un sistema dinámico . . . . .	18
<b>3. Variables de estado</b>	<b>19</b>

<b>4. Modelado de sistemas dinámicos</b>	<b>23</b>
4.1. Mecánica Lagrangiana . . . . .	23
4.1.1. Ejemplo 1: Aplicación de la Método Lagrangiano al problema del péndulo con resorte . . . . .	24
4.1.2. Ejemplo 2 : Aplicación del Método de Lagrange al problema de la Rueda . . . . .	28
4.2. Fuerzas Restrictivas . . . . .	31
4.2.1. Ejemplo de fuerza restrictiva . . . . .	31
4.3. Cambio de coordenadas . . . . .	33
<b>5. Linealización</b>	<b>35</b>
5.1. Linealización . . . . .	35
5.2. Pasos para la linealización . . . . .	36
5.2.1. Ejemplo 1: Sistema de dos variables de estado . . . . .	37
<b>6. Modelado en el dominio del tiempo</b>	<b>39</b>
6.1. Sistema lineal desacoplado . . . . .	39
6.2. Problemas . . . . .	40
6.2.1. Problema 1 . . . . .	42
6.2.2. Problema 2 . . . . .	42
6.3. Diagonalización . . . . .	43
6.3.1. Caso 1: Los eigenvalores reales y diferentes de $A$ . . . . .	43
6.3.2. Caso 2: Los eigenvalores reales y repetidos . . . . .	45
<b>7. Modelado en el dominio de la frecuencia</b>	<b>47</b>
7.1. La transformada de Laplace . . . . .	47
7.2. Función transferencia . . . . .	48
7.3. Ejemplos de modelado en la frecuencia . . . . .	50
7.3.1. Ejemplo 1: Función transferencia de un circuito eléctrico . . . .	53
7.4. Ejemplo 2: Modelo lineal en frecuencia de un sistema mecánico . . . .	54
<b>8. Análisis de un sistema completo</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Organización del curso

Bienvenidos al curso de Control no lineal, en este curso se sentarán las bases matemáticas para el análisis de sistemas dinámicos, su control y su diseño. Para concluir satisfactoriamente este curso deben ustedes haber aprobado las siguientes materias:

- Ecuaciones Diferenciales
- Álgebra Lineal
- Mecánica

Que tengan un buen día. El curso está organizado en tres parciales

### 1.1. Software Necesario

Para acreditar adecuadamente el curso es necesario tener instalado el siguiente software:

- Maxima
- Scilab.- Se recomienda porque se pueden hacer los programas tanto en Máxima como en scilab
- Se recomienda tener instalado Linux ya sea la distribución Debian o Ubuntu

## 1.2. Metodología de Calificación

- Se realizarán 3 evaluaciones parciales (3 X 10 %) .....30 %
- Ejercicios.....15 %.  
Los simulaciones deben entregarse el día y fecha señalados, en caso contrario no se aceptaran. Deben de tener las siguientes características:
  - Diseño
  - Una simulación con los datos del diseño hecho (solo se aceptan cambios dentro del 10 % del valor establecido en el diseño)
  - Un reporte de acuerdo a la simulación y al diseño.
- Lecturas y programas..... 15 %. Las investigaciones y lecturas deberán entregarse con las siguientes características:
  - No se aceptan investigaciones o tareas con referencias bibliográficas de direcciones de Internet
  - Deben contener:
    - Portada
    - Introducción
    - Contenido
    - Conclusiones
    - Bibliografía

Las páginas deben estar numeradas y el trabajo debe estar en formato electrónico; no se aceptan trabajos impresos. Todos los trabajos deben de enviarse por correo electrónico en hora y fechas señaladas. Las conclusiones deben de ser comentarios personales, no se aceptan conclusiones con referencias.
- Proyecto Final .....40 %. El proyecto final se evalúa de la siguiente manera:
  - Proyecto funcionando.....20 %
  - Defensa Pública .....20 %



## 1.3. Proyecto Final: Robots SumoBOTS

El concurso consistirá en una lucha entre dos robots, con el objetivo de expulsar al contrincante del Ring, siendo el robot “sobreviviente” el máximo vencedor.

### 1.3.1. El ring

El campo de batalla será un Ring circular de madera, que se encontrará elevado a una altura de entre 3 y 4 cm, respecto del suelo. Para señalar el final del Ring, éste contará con una franja, llamada línea de seguridad, además en el centro del Ring se encontrarán dos líneas de posición, con el fin de marcar la posición y distancia iniciales a las que deben estar los robots entre sí en el inicio del combate, dichas líneas son paralelas y separadas 10cm entre sí.

#### Características

- Diámetro: 100 cm
- Color del ring: Negro
- Color de línea de seguridad: Blanco
- Ancho de línea de seguridad: 2.5 cm
- Color de las líneas de posición: Marrón
- Ancho de las líneas de posición: 2cm
- Longitud de las líneas de posición: 2cm

### 1.3.2. El robot

El robot luchador de sumo deberá ser de tipo autónomo, no pudiendo estar conectado a ningún aparato externo como ordenadores, fuentes de alimentación o algún otro dispositivo ni tampoco podrá disponer de comunicación con el exterior con aparatos como mandos de radiocontrol. Las dimensiones máximas del robot serán de 200 mm de largo, por 200 mm de ancho, sin haber restricciones en cuanto a altura y con un peso límite de 3 Kg.

### 1.3.3. Metodología

El concurso se realizará con la siguiente metodología:

- Una vez dadas las indicaciones de los jueces de pista, los responsables de equipo entrarán en el área de combate para situar su robot. Los robots se situarán inmediatamente detrás de las líneas de posición.
- Cuando el juez de pista lo indique, los responsables activarán el Sumo (Los robots deben tener un tiempo de seguridad de 5 segundos, en este periodo el robot debe permanecer inmóvil), y se situarán en el área exterior.
- Cuando los jueces de pista den por finalizado el combate, los responsables retirarán los robots del Ring

### 1.3.4. Criterios de calificación

Los encuentros consistirán en 2 asaltos de 3 minutos cada uno, más un tercer asalto en caso de empate. Entre asaltos consecutivos existirá 1 minuto de tiempo para poner a punto el robot. Nota: Los 5 segundos de seguridad establecidos para los robots no son considerados tiempo de combate. El ganador del combate será el que logre acumular primero dos puntos, en el transcurso de los tres asaltos. Si llegado el límite de tiempo para el combate solo hay un equipo con un único punto, éste será proclamado como vencedor. Si se produce una situación de empate, se disputará un nuevo asalto de 3 minutos de duración como máximo, donde el ganador será aquel robot que consiga el primer punto del asalto. Cuando se requiere la decisión de los Jueces para decidir al ganador, lo siguiente debe ser tomado en consideración:

- Mayor cantidad de Combates (anteriores) Ganados.
- Menor cantidad de Round Perdidos.
- Mayor cantidad de Round Ganados
- Menor cantidad de Puntos de multa (violaciones) durante el torneo.
- En caso de todavía estar empate se decidirá por un encuentro extra.

### 1.3.5. Puntuación

Se Otorgará un punto cuando:

- Un robot expulse a su oponente del ring.
- El robot opuesto ha tocado el área fuera del ring por sí mismo.
- Cualquier evento de los ya expuestos (1 y 2) sucede al mismo tiempo que el fin del encuentro es anunciado.
- Por consideraciones especiales.
- Se otorgará 1 punto al robot si el equipo contrario comete una violación.
- Se otorgarán 2 puntos directos al robot si el equipo contrario es penalizado.

### 1.3.6. Consideraciones Especiales

El encuentro debe ser detenido y empezar un nuevo round nunca excediendo los tres permitidos como máximo bajo las siguientes condiciones:

- Los Robots se enredan o rodean uno al otro sin ningún progreso perceptible durante cinco segundos. Si no se identifica claramente si hay progreso o no, el juez puede extender el tiempo límite hasta un máximo de 30 segundos.
- Ambos robots se mueven, sin hacer ningún progreso, o se detienen (al mismo tiempo exacto) y permanecen detenidos por cinco segundos sin tocarse el uno al otro. Sin embargo, si uno de los robots detiene su movimiento primero, después de cinco segundos será declarado como sin intenciones de pelear. En este caso el oponente recibirá un punto, incluso si el oponente también se detiene.
- Si ambos robots tocan el exterior del ring casi al mismo tiempo, y no se puede determinar cual toco primero, se realizara un reencuentro.

### 1.3.7. Violaciones

Será considerada una violación por parte de un equipo los siguientes supuestos:

- Que un miembro del equipo entre al área de combate sin la previa autorización del juez de pista.
- Una parada del combate que no se considere justificada.

- Activación del robot antes de que el juez de pista lo indique.
- No respetar el tiempo de 5 segundos considerado como tiempo de seguridad.
- Cualquier acción que remita contra la integridad de la organización así como a la de sus participantes

### 1.3.8. Penalización

Será considerado como penalización y, por lo tanto, supondrá la eliminación de la competencia por parte del equipo causante de la penalización los siguientes supuestos:

- Provocar desperfectos al área de juego.
- Causar desperfectos de manera intencionada y/o deliberada sobre el oponente.
- La separación en diferentes partes del robot antes o durante el combate.
- La utilización de dispositivos que lancen líquidos, sólidos o gases al oponente o contra el área de combate.
- El uso de dispositivos inflamables.
- Ocasionar daño al equipo contrario, jueces, público, o cualquier persona que esté cerca.
- Insultar o agredir a miembros de la organización, así como al resto de competidores.
- Manipular el robot de forma externa por cualquier medio una vez ha empezado el combate.

El juez de pista y la organización se reservan el derecho de expulsión de la competición de un equipo si así se cree oportuno, comunicando los motivos de la expulsión a las partes afectadas y su decisión será irrevocable.

### 1.3.9. Accidentes durante la competencia

1. Petición de parada de un combate.- El responsable de uno de los equipos contrincantes puede pedir la detención del juego cuando su robot haya tenido un accidente que le impida continuar el juego. Será responsabilidad del juez de pista aceptar la petición y decidir si la parada puede ser motivo de punto para alguno de los equipos implicados.

2. No es posible continuar el combate.- Si el combate debe ser detenido porque uno de los robots ha causado daños al otro de forma intencionada que impiden que el robot afectado pueda continuar, será motivo de sanción al robot causante de los daños y se otorgará un punto al equipo contrario. Cuando no quede claro quien ha sido el causante del daño, el equipo que no pueda continuar o el que haya pedido la detención del combate será declarado como perdedor.
3. Tiempo de reparaciones.- En caso de accidente grave, el juez de pista podrá decidir si el juego es reanudado o no. En caso afirmativo, los equipos implicados dispondrán de 5 minutos para efectuar las reparaciones pertinentes y una vez acabado este tiempo se reanudará el combate. Si uno de los equipos no ha presentado su robot operativo para el combate en este tiempo, éste será declarado como perdedor. En caso de que ninguno de los dos robots se presente después de los 5 minutos de reparaciones, el juez de pista anulará el combate o proclamará un vencedor.
4. Reclamos.- El responsable de uno de los equipos implicados en una competición puede alegar cualquier motivo de sospecha de incumplimiento de normativa por parte de su contrincante al juez de pista siempre que se haga antes de que haya dado comienzo la competición entre ellos. Si se produce una confirmación de dichas sospechas, el juez tendrá la facultad de declarar nula la competición entre los dos robots implicados o proclamar vencedor al equipo que haya respetado la normativa.



# Capítulo 2

## Introducción

Acuñada en 1969 por el ingeniero japonés Yakasawa, la palabra mecatrónica ha sido definida de varias maneras. Un consenso común es describir a la mecatrónica como **una disciplina integradora de las áreas de mecánica, electrónica e informática cuyo objetivo es proporcionar mejores productos, procesos y sistemas**. La mecatrónica no es, por tanto, una nueva rama de la ingeniería, sino un concepto recientemente desarrollado que enfatiza la necesidad de integración y de una interacción intensiva entre diferentes áreas de la ingeniería. Con base en lo anterior, se puede hacer referencia a la definición de mecatrónica propuesta por J.A. Rietdijk: "**Mecatrónica es la combinación sinérgica de la ingeniería mecánica de precisión, de la electrónica, del control automático y de los sistemas para el diseño de productos y procesos**". Existen, claro está, otras versiones de esta definición, pero ésta claramente enfatiza que la mecatrónica está dirigida a las aplicaciones y al diseño. Un sistema mecatrónico típico recoge señales, las procesa y, como salida, genera fuerzas y movimientos. Los sistemas mecánicos son entonces extendidos e integrados con sensores, microprocesadores y controladores. Los robots, las máquinas controladas digitalmente, los vehículos guiados automáticamente, las cámaras electrónicas, las máquinas de telefax y las fotocopadoras pueden considerarse como productos Mecatrónicos. Al aplicar una filosofía de integración en el diseño de productos y sistemas se obtienen ventajas importantes como son

- Mayor flexibilidad
- Mayor versatilidad
- Mayor nivel de “inteligencia” de los productos
- Mayor seguridad y confiabilidad

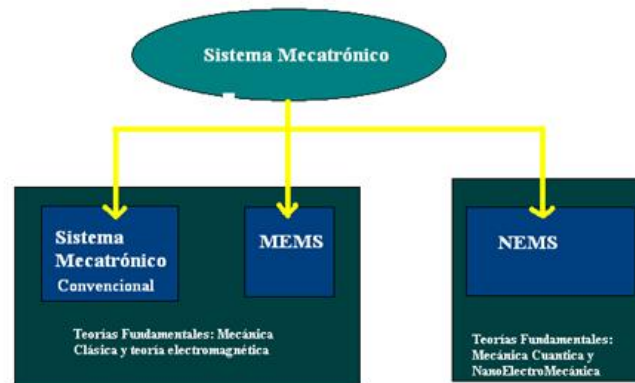


Figura 2.1: Áreas de conocimiento para desarrollar sistemas Mecatrónicos

- Bajo consumo de energía

Estas ventajas se traducen en un producto con más orientación hacia el usuario y que puede producirse rápidamente a un costo reducido.

## 2.1. Mecatrónica y Micro Mecatrónica

En la actualidad este nuevo enfoque propuesto por Mecatrónica se ha llevado al área de las micro tecnologías. Esto ha creado una nueva disciplina conocida como **micro mecatrónica que consiste en la aplicación sinergia de la micro electrónica, la mecánica y las tecnologías de información para la solución de problemas de manera sistemática**. La Micro mecatrónica incluye un conjunto de conocimientos necesarios, como se muestra en la figura 2.1.

Las áreas de conocimiento necesarios para el diseño y análisis de los sistemas mecatrónicos convencionales y los sistemas micro electro mecánicos (MEMS por sus siglas en inglés) son conocimientos de mecánica clásica y teoría electromagnética, por ello son de más “fácil” acceso para los ingenieros, sin embargo para el desarrollo de sistemas Mecatrónicos usando tecnología NEMS (Sistemas Nano Electro mecánicos) se necesita cambiar de paradigmas y estudiar Mecánica Cuántica y NanoElectroMecánica.



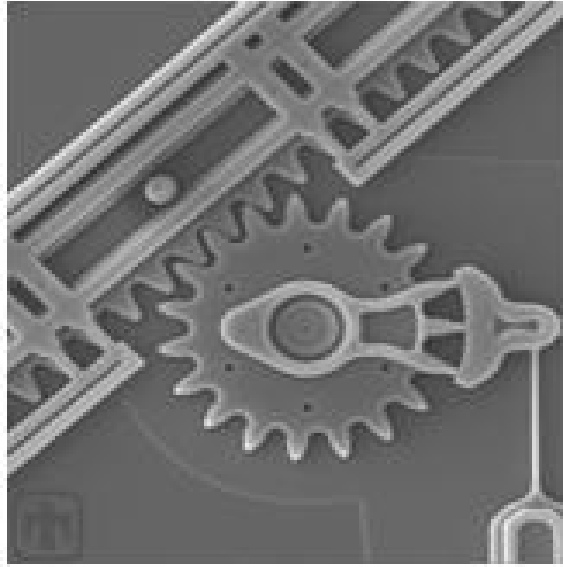


Figura 2.2: Ejemplo de un MEMS

## 2.2. Los MEMS

Los Sistemas Micro ElectroMecánicos (MEMS por Micro Electro-Mechanical Systems), también conocidos como Sistemas Micro Maquinados, Micro Maquinas o micro fabricados; se refieren a los sistemas en pequeña escala que utilizan componentes mecánicos, pueden incluir también componentes electrónicos. Aquellos sistemas MEMS que utilizan componentes biológicos o alteran una variable biológica se conocen como BIO-MEMS. **Los MEMS son dispositivos fabricados a micro escala en un proceso por lotes (IC y micro estructuras) que convierten una señal mecánica en eléctrica y viceversa.** En la Figura 2.2 se muestra el ejemplo de un MEMS.

Para poder diseñar MEMS es necesario conocer de la ciencia de miniaturización.

### 2.2.1. La ciencia de la miniaturización

La ciencia de la miniaturización se le denomina al conjunto de disciplinas que son necesarias para el diseño de los MEMS o Micro Máquinas, estas incluyen:

- Leyes de Escalamiento .- ¿Lo pequeño es lo mejor? Cuando y bajo que condiciones

- Procesos de Fabricación.- Estos incluyen Procesos de Manufactura (Superficial y de Volumen) así como el Encapsulado
- Materiales.- Conocimientos de ciencias de materiales, estructura de materiales y Mecánica de materiales
- Micro Mecatrónica.- Mas que hacer diseño mecánico es saber como la electrónica y la mecánica se funden para cumplir con una tarea de manera eficiente, haciendo sinergia con el control.

### 2.2.2. ¿Porque los MEMS?

- Porque se utiliza menos energía y material para su manufactura
- Se puede tener redundancia
- Se puede integrar con la electrónica
- Los dispositivos pueden ser más rápidos
- Incremento de la selectividad y la sensibilidad
- Mayor Rango dinámico
- Mayores Costo/Rendimiento
- Mejor repetibilidad (Proceso por lotes)
- Mejor exactitud y confiabilidad
- Mínimamente Invasivo

Cuando pensemos en desarrollar un MEMS debemos tener presente los siguientes puntos principales:

- El problema.- ¿Desarrollar un MEMS o un sistema integrado MEMS?
- El proceso.- Con cual tipo de compañía MEMS involucrarse de las siete que existe, y que proceso de fabricación utilizar
- El empaquetado: El costo del empaquetado esta entre el 10 % y el 45 % del costo final del MEMS
- La evaluación: Pruebas y certificación

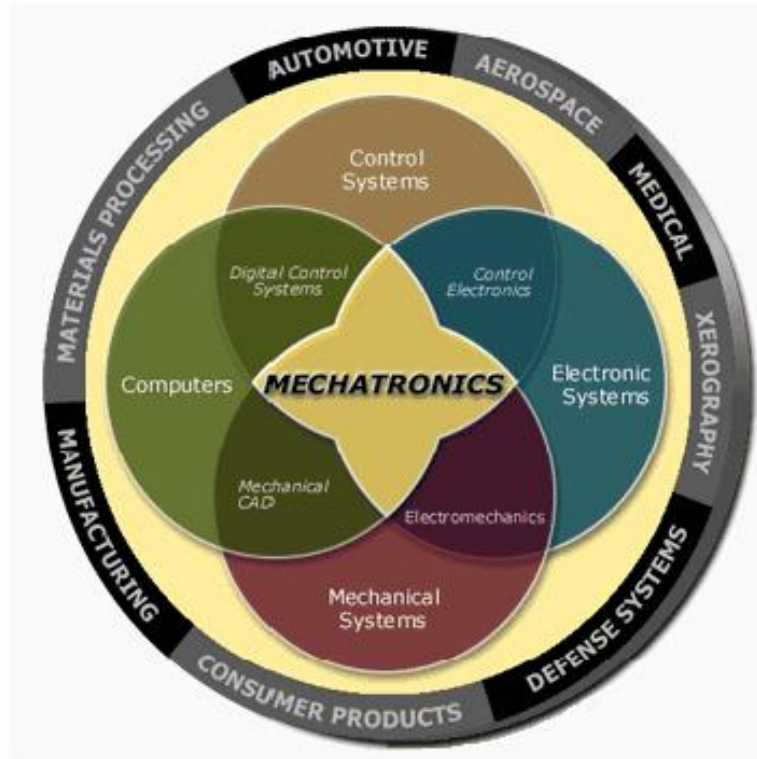


Figura 2.3: Disciplinas que conforman Mecatrónica

### 2.2.3. Disciplinas que componen la Mecatrónica

El Dr. Kevin Craig del Rensselaer Polytechnic Institute en Nueva York, describe las disciplinas que conforman la mecatrónica a través de un diagrama de Venn (Figura 2.3)

De estas disciplinas se desprenden varios elementos que forman un sistema mecatrónico, ver Figura 4.

## 2.3. El sistema Mecatrónico

Como se ha estado mencionando, la mecatrónica como disciplina integradora cuyo fin último es la solución de un problema a través de un producto, con una filosofía sistémica; trabaja con sistemas a los cuales por sus características particulares se les denomina Sistemas Mecatrónicos. Estos sistemas mecatrónicos están formados por dos subsistemas principales:

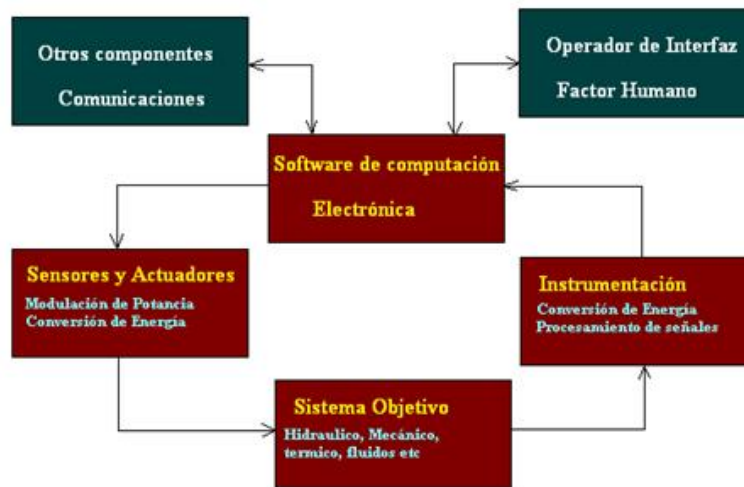


Figura 2.4: Elementos de un sistema Mecatrónico

- El subsistema controlado
- El subsistema controlador

Estos dos subsistemas a su vez están formados por otros elementos, ver Figura 2.5. El subsistema controlado formado por elementos físicos como sensores, actuadores, el sistema objetivo (sea mecánico, hidráulico, neumático etc.). El sistema controlador, que incluye el software y la electrónica de control (instrumentación en la Figura 2.4). El software es una forma de representar el conocimiento y de percibir el mundo real que se detecta a través de los sensores y se encarga de procesar la información y de tomar las decisiones necesarias para un desempeño eficiente del sistema completo. Es importante puntualizar varios aspectos fundamentales de un sistema mecatrónico:

- La relación entre el mundo real y el sistema mecatrónico se realiza a través del sistema objetivo (Figura 2.4). El cual determina el proceso del mundo real que deseamos controlar, pudiendo ser este: Mecánico, Hidráulico, Neumático, Fluidos etc. En la Figura 2.5 se muestra solo el proceso mecánico como ejemplo de los procesos reales a controlar
- Los sensores de un sistema mecatrónico son el conjunto de dispositivos que nos convierten las señales de un proceso de nuestro sistema objetivo en señales procesables por el sistema controlador, obviamente si el sistema controlador es

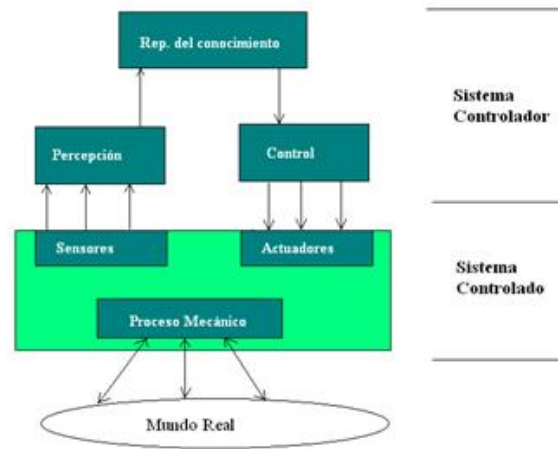


Figura 2.5: El sistema Mecatrónico

un micro controlador o una PC, los sensores deben de convertir a señal eléctrica digital.

- Los actuadores de un sistema mecatrónico son el conjunto de dispositivos que convierten señales procesadas en el sistema mecatrónico (por lo regular una señal eléctrica digital) en procesos del sistema objetivo del mundo real, de tal forma que un actuador nos permite alterar la realidad para poder controlarla de acuerdo con los criterios que se establezcan.
- La percepción y la representación de conocimientos se realiza a través del software, el conjunto de programas y procesamiento de la información para que se realice la toma de decisiones de acuerdo a criterios y una heurística pre establecida.
- El control es el conjunto de algoritmos y técnicas que permiten ir decidiendo el punto de operación del sistema mecatrónico, de tal forma que pueda comportarse de acuerdo a los requerimientos que se tienen, esto es, con estabilidad, con rango de error, con cierto tiempo de respuesta, insensible a las perturbaciones etc.

Desde el punto de vista físico un sistema mecatrónico equivale a un sistema dinámico es por ello que se estudian las bases matemáticas para el estudio de los sistemas dinámicos.

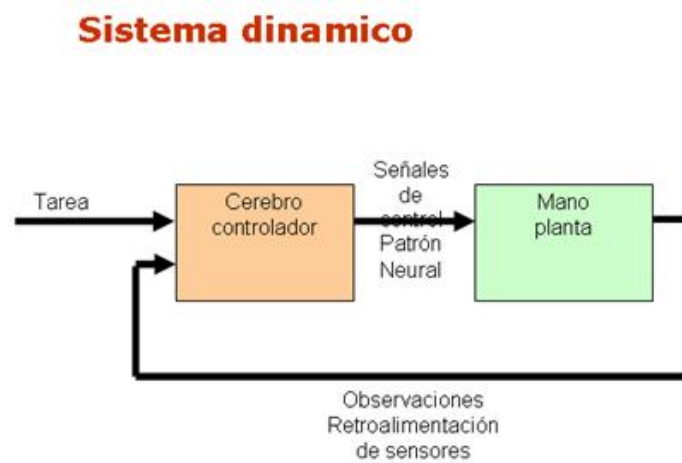


Figura 2.6: El sistema Dinámico

## 2.4. El sistema dinámico

Los elementos que forman un sistema mecatrónico son: Los sistemas dinámicos. Los sistemas dinámicos son sistemas físicos con estados que evolucionan en el tiempo. En la Figura 2.6 se muestra el ejemplo típico de un sistema dinámico, allí se puede notar las partes fundamentales que lo forman: La planta, el controlador, y la retroalimentación. La planta es el sistema en lazo abierto que se desea trabajar, el controlador es el sistema que coloca a la planta en el punto de operación deseado y la retroalimentación es la conexión que se realiza con el fin de automatizar el sistema.

Un sistema mecatrónico es un sistema dinámico, y para modelar matemáticamente sistemas mecatrónicos se utilizan las técnicas de los sistemas dinámicos, en pocas palabras, el sistema dinámico es el nombre físico matemático de un sistema mecatrónico. Y sus definiciones y clasificaciones se aplican por igual.

En todo sistema dinámico nosotros trabajaremos con tres tipos de variables:

- Variables de entrada
- Variables de salida
- Perturbaciones

Las variables de entrada también conocida como variables controlables son aquellas que entran al sistema dinámico con la finalidad de que realice la tarea deseada de acuerdo a los criterios establecidos. Las variables de salida son aquellas variables que

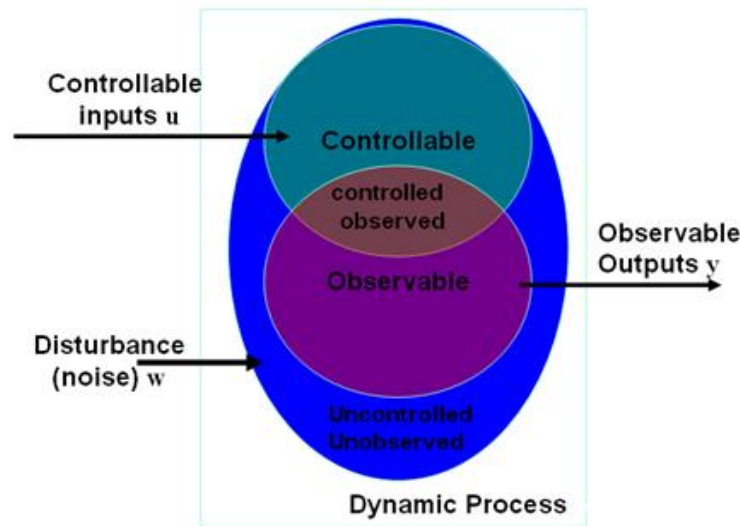


Figura 2.7: Variables controlables y observables

el usuario del sistema dinámico desea en una condición o margen determinado, también se denominan variables observables. Ahora bien, dentro de todas las variables que hay en un sistema dinámico no todas son controlables (de entrada) ni observables (de salida); pero si hay variables controlables y observables como se muestra en la Figura 2.7.

Los sistemas dinámicos se clasifican en dos tipos principales:

- Sistemas dinámicos Lineales
- Sistemas dinámicos no lineales

Los sistemas dinámicos lineales están formados por los siguientes procesos:

- El proceso dinámico.- Que es la descripción matemática en variables de estado del sistema, esta descripción generalmente se plantea como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, allí se tiene de entrada las variables de entrada y de salida las variables observables.
- El proceso de observación.- En el se describe matemáticamente la relación entre la observación propiamente y las variables observables del sistema dinámico

Adicionalmente se tienen dos fuentes de ruido o perturbaciones para nuestro sistemas, el ruido del proceso dinámico y el ruido del proceso de observación.

Para que un sistema dinámico se considere un sistema mecatrónico, este debe tener una retroalimentación y un controlador. Es decir un sistema dinámico de lazo abierto NO se considera un sistema mecatrónico.

### 2.4.1. Característica de un sistema dinámico

Un sistema dinámico se dice que es lineal si y solo si cumple con el principio de superposición.

**Definición 2.4.1.** Si  $u_1(t)$  es una señal de entrada a un sistema y su señal de salida es  $y_1(t)$  y si además  $u_2(t)$  entra al mismo sistema y su salida es  $y_2(t)$  entonces sea  $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$  la entrada al sistema, la salida será  $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .



## Capítulo 3

# Variables de estado

Las variables de estado es un método muy común de análisis y control de sistemas. Una manera de pensar en los estados es que son formas de energía existente en un sistema. Otra forma de pensar es que son un conjunto de valores y condiciones determinados que predicen como el sistema se comportará en el tiempo...en otras palabras tener un modelo del sistema predice su comportamiento, es generalmente necesario especificar condiciones iniciales. Este conjunto de condiciones iniciales son generalmente los estados.

Se define la velocidad de un cohete  $v$  y la aceleración  $a$  como positiva cuando van hacia arriba al igual a como se define la altura  $h$ .

Supongamos que la entrada a nuestro sistema es el empuje del cohete, una fuerza sobre el cohete que proviene de algún dispositivo de combustión. Cambiando el enfoque, la señales de control relaciona directamente la aceleración usando la siguiente ecuación:

$$a[n] = \frac{1}{m}f[n] \quad (3.1)$$

la cual proviene de la ecuación clásica  $f = ma$  donde  $f$  es la fuerza en newtons,  $m$  es la masa en kilogramos, y  $a$  es la aceleración en  $ms^2$ .

Podemos obtener la ecuación que relaciona la velocidad y la aceleración usando la integración en tiempo discreto. Esto es:

$$v[n] = v[n-1] + \Delta T a[n-1] \quad (3.2)$$

Esta ecuación se deriva haciendo una aproximación discreta en el tiempo hacia adelante de una derivada continua

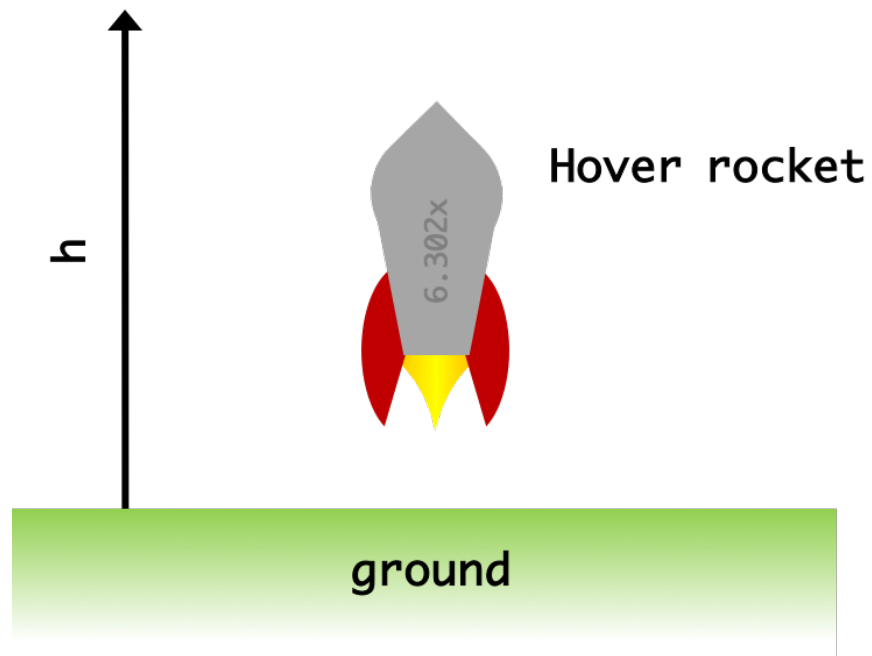


Figura 3.1: Cohete

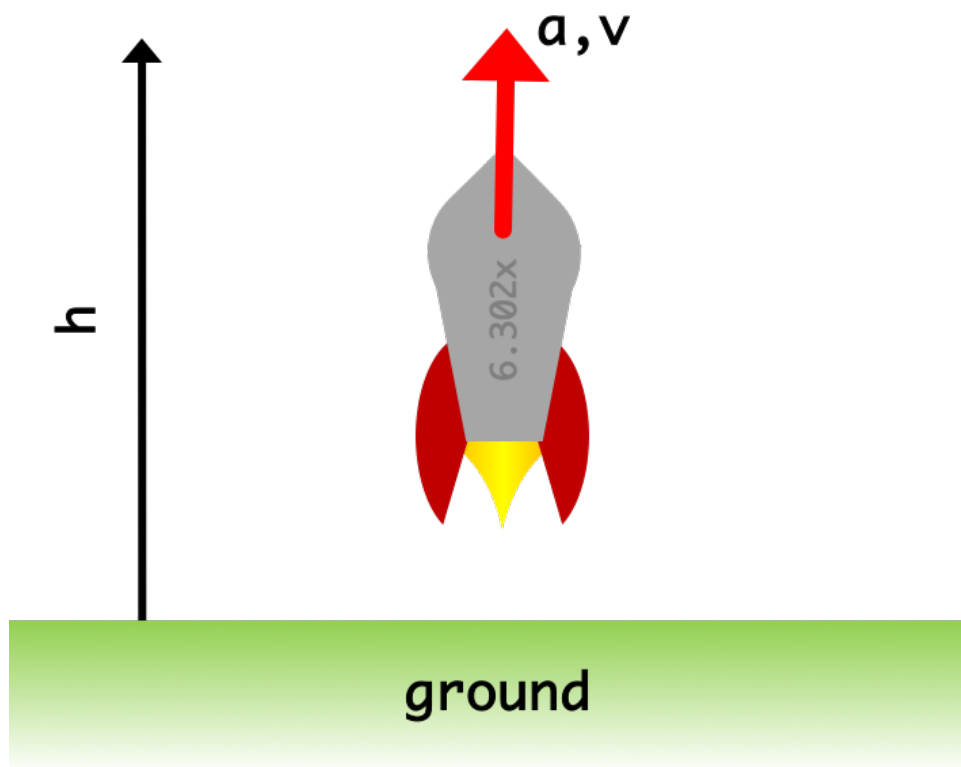


Figura 3.2: Convención de signos del Cohete

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) \approx \Delta \frac{v(T(t+1)) - v(Tt)}{T} \quad (3.3)$$

donde  $T$  es la duración de los pasos de tiempo de nuestro sistema en segundos. Convirtiendo la ecuación anterior a notación discreta donde  $n$  es el número del paso del tiempo, obtenemos:

$$a[n] = \frac{v[n+1] - v[n]}{T} \quad (3.4)$$

después de algunos arreglos:

$$a[n] = \frac{v[n+1] - v[n]}{T} \quad (3.5)$$

# Capítulo 4

## Modelado de sistemas dinámicos

El modelado de los sistemas dinámico se puede realizar utilizando el dominio del tiempo o el dominio de la frecuencia, a pesar de ser dos técnicas diferentes, ambas convergen del hecho de tener definida la ecuación de comportamiento del sistema a analizar. En mecánica clásica una herramienta muy poderosa para la creación de modelos matemáticos de sistemas es la mecánica Lagrangiana y el cálculo variacional. Aún cuando no pertenezca a este curso daremos una pequeña introducción en este campo, con la finalidad de aumentar la habilidades en cuanto al modelado de sistemas eléctrico y mecánicos reales. Posteriormente a este modelado, por lo regular las ecuaciones obtenidas son ecuaciones no lineales, por lo que será necesario linealizarlas. Es en el punto de la linealización donde ambos métodos son iguales posterior a ella empiezan a ser diferentes. Por lo que en esta unidad nos enfocaremos hasta este punto común a ambos métodos.

### 4.1. Mecánica Lagrangiana

Presentaré en principio el método lagrangiano y como a través de este método es posible obtener la solución de problemas de mecánica Newtoniana de una manera mas fácil y elegante. Empezaremos con una definición

**Definición 4.1.1.** Se define al Lagrangiano como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de un sistema

$$L = T - V$$

donde  $T$  es la energía cinética,  $V$  es la energía potencial del sistema y  $L$  será el símbolo que utilizaremos para representar al Lagrangiano

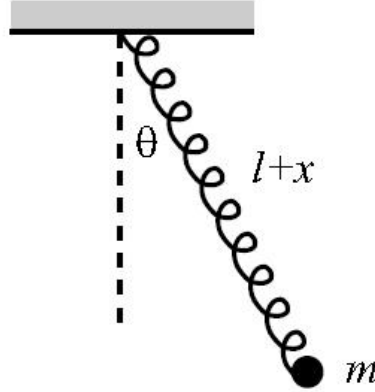


Figura 4.1: Masa con un resorte

Una vez calculado el Lagrangiano aplicaremos la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema bajo análisis. Aplicaremos el método siguiendo los siguientes pasos:

1. Definir un sistema de referencia
2. Obtener las coordenadas del sistema a analizar respecto del sistema de referencia previamente definido
3. Derivar las componentes con respecto al tiempo para obtener las componentes de velocidad. Y posteriormente obtener la velocidad total
4. Con las velocidades obtenidas calcular la energía cinética y con las posiciones obtener la energía potencial
5. Calcular el Lagrangiano
6. Sustituir el Lagrangiano en la ecuación de Euler-Lagrange para cada una de las variables que tenga el sistema

#### 4.1.1. Ejemplo 1: Aplicación de la Método Lagrangiano al problema del péndulo con resorte

En la figura 4.1 se muestra el sistema a analizar.

**Paso 1.- Definir el sistema de referencia**

Como podrá observarse en la figura 4.1 el sistema de referencia se coloca en la base del resorte con las componentes  $x$  positivas hacia el lado derecho y las componentes en  $y$  positivas hacia arriba.

**Paso 2.- Obtener las coordenadas del sistema**

En este caso el sistema a analizar es una partícula de masa  $m$  cuyas componentes son las siguiente:

$$C_x = (l + x) \sen \theta \quad (4.1)$$

la cual es la componente  $x$ , la componente  $y$  se obtiene:

$$C_y = -(l + x) \cos \theta \quad (4.2)$$

**Paso3.- Derivar las componentes con respecto al tiempo**

Si derivamos la ecuación 4.1 con respecto del tiempo obtenemos la componente de la velocidad respectiva

$$V_x(t) = \frac{dC_x}{dt} = \frac{\partial C_x}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial C_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (4.3)$$

Sustituyendo la ecuación 4.1 en la ecuación 4.3 obtenemos

$$V_x(t) = (l + x) \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x} \sen \theta \quad (4.4)$$

en donde  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  y  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

y ahora sustituyendo la ecuación 4.2 en la ecuación 4.3

$$V_y(t) = (l + x) \dot{\theta} \sen \theta - \dot{x} \cos \theta \quad (4.5)$$

considerando que

$$V_t^2 = V_x^2 + V_y^2 \quad (4.6)$$

y sustituyendo la ecuación 4.4 y la ecuación 4.5 en la ecuación 4.6 y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} V_t^2 &= ((l + x) \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x} \sen \theta)^2 + ((l + x) \dot{\theta} \sen \theta - \dot{x} \cos \theta)^2 \\ &= (l + x)^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{x}^2 \sen^2 \theta + (l + x)^2 \dot{\theta}^2 \sen^2 \theta - 2 \dot{x} \dot{\theta} (l + x) \cos \theta \sen \theta + \dot{x}^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$= (l+x)^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \dot{x}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$V_t^2 = (l+x)^2 \dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 \quad (4.7)$$

#### Paso 4.- calcular la energía cinética y la energía potencial

La energía cinética se calcula utilizando la ecuación

$$T = \frac{1}{2} m V_t^2 \quad (4.8)$$

Si sustituimos la ecuación 4.7 en la ecuación 4.8 obtenemos la energía cinética para este sistema

$$T = \frac{1}{2} m ((l+x)^2 \dot{\theta}^2 + \dot{x}^2) \quad (4.9)$$

Para el cálculo de la energía potencial consideramos

$$V = mgC_y + \frac{1}{2} kx^2 \quad (4.10)$$

Sustituyendo la ecuación 4.2 en la ecuación 4.10 obtenemos la energía potencial del sistema. Además debemos considerar la energía potencial que tiene el resorte la cual es  $\frac{1}{2} kx^2$  obtenemos.

$$V = -mg(l+x) \cos \theta + \frac{1}{2} kx^2 \quad (4.11)$$

#### paso 5.- Calcular el Lagrangiano

Sustituyendo las ecuaciones 4.9 y 4.11 en la ecuación de la definición 4.1.1, obtenemos

$$L = \frac{1}{2} m ((l+x)^2 \dot{\theta}^2 + \dot{x}^2) + mg(l+x) \cos \theta - \frac{1}{2} kx^2 \quad (4.12)$$

#### Paso 6.- Sustituir el Lagrangiano en la ecuación de Euler-Lagrange

Del análisis anterior podemos concluir que el sistema tiene dos variables que cambian con el tiempo, el ángulo  $\theta$  y la deformación del resorte  $x$ . Por ello, se generan dos ecuaciones de Euler-Lagrange, una por cada variable.



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.14)$$

Considerando que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l+x)^2 \dot{\theta} \quad (4.15)$$

derivando la ecuación 4.15 respecto del tiempo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2m(l+x)\dot{\theta}\dot{x} + m(l+x)^2 \ddot{\theta} \quad (4.16)$$

ahora obteniendo

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(l+x) \sin \theta \quad (4.17)$$

substituyendo 4.16 y 4.17 en la ecuación de Euler-Lagrange 4.13 obtenemos

$$2m(l+x)\dot{\theta}\dot{x} + m(l+x)^2 \ddot{\theta} + mg(l+x) \sin \theta = 0 \quad (4.18)$$

Que es la ecuación de movimiento para la variable  $\theta$ . Considerando que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (4.19)$$

derivando la ecuación 4.19 respecto del tiempo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad (4.20)$$

ahora obteniendo

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - kx \quad (4.21)$$

substituyendo 4.20 y 4.21 en la ecuación de Euler-Lagrange 4.14 obtenemos

$$m\ddot{x} - m(l+x)\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + kx = 0 \quad (4.22)$$

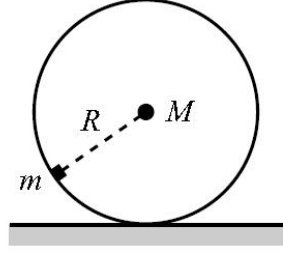


Figura 4.2: Masa en una rueda

#### 4.1.2. Ejemplo 2 : Aplicación del Método de Lagrange al problema de la Rueda

Una masa  $m$  está fija en un punto en el borde de una rueda de radio  $R$ . La rueda no tiene masa excepto por la masa  $M$  en el centro (Fig. 4.2). La rueda gira sin deslizarle en una mesa horizontal. Encontrar la ecuación de movimiento para el Angulo en que la rueda se mueve. Para el caso en el que la rueda experimenta pequeñas oscilaciones, encontrar la frecuencia. Para resolver el problema aplicaremos de nuevo los pasos indicados en la sección anterior

##### Paso 1.- Definir el sistema de referencia

El sistema de referencia para este problema se establecerá en el punto donde la rueda hará contacto, suponiendo que la rueda gira sin deslizarse el punto de contacto será en  $R\theta$  (es decir el arco de la rueda se convierte en desplazamiento lineal sobre la mesa).

##### Paso 2.- Obtener las coordenadas del sistema

Tomando en cuenta lo anterior las coordenadas para la masa  $m$  serán

$$\begin{aligned} C_{x,m} &= R\theta - R \sin \theta \\ C_{y,m} &= R - R \cos \theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

Las coordenadas para la  $M$  son

$$\begin{aligned} C_{x,M} &= R\theta \\ C_{y,M} &= R \end{aligned} \quad (4.24)$$

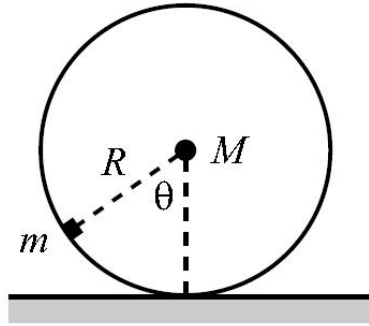


Figura 4.3: Ángulo para el cálculo de la ecuación de movimiento

### Paso3.- Derivar las componentes con respecto al tiempo

Derivando con respecto del tiempo las componentes de la masa  $m$

$$\begin{aligned} V_{x,m} &= R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos \theta \\ V_{y,m} &= R\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

Derivando con respecto del tiempo las componentes de la masa  $M$

$$\begin{aligned} V_{x,M} &= R\dot{\theta} \\ V_{y,M} &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

La velocidad total para la masa  $m$  es:

$$\begin{aligned} V_m^2 &= (R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (R\dot{\theta} \sin \theta)^2 \\ &= R^2\dot{\theta}^2 - 2R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta + R^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + R^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \\ &= 2R^2\dot{\theta}^2 - 2R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta \end{aligned} \quad (4.27)$$

En el caso de la masa  $M$  la velocidad total es

$$V_M^2 = R^2\dot{\theta}^2 \quad (4.28)$$

### Paso 4.- calcular la energía cinética y la energía potencial

Dadas las ecuaciones 4.27 y 4.28 calculamos la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m(2R^2\dot{\theta}^2 - 2R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta) + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 \quad (4.29)$$

$$V = mg(R - R \cos \theta) + MgR \quad (4.30)$$

**paso 5.- Calcular el Lagrangiano**

El Lagrangiano se calcula considerando que  $L = T - V$  por lo tanto

$$L = \frac{1}{2}m(2R^2\dot{\theta}^2 - 2R^2\dot{\theta}^2 \cos \theta) + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 - mg(R - R \cos \theta) - MgR \quad (4.31)$$

**Paso 6.- Sustituir el Lagrangiano en la ecuación de Euler-Lagrange**

Derivando respecto de  $\dot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mR^2\dot{\theta} - 2mR^2\dot{\theta} \cos \theta + MR^2\dot{\theta} \quad (4.32)$$

Ahora derivando respecto de  $\theta$  obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\dot{\theta}^2 \sin \theta - mgR \sin \theta \quad (4.33)$$

Derivando la ecuación 4.33 respecto del tiempo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2mR^2\ddot{\theta} - 2mR^2\ddot{\theta} \cos \theta + 2mR^2\dot{\theta}^2 \sin \theta + MR^2\ddot{\theta} \quad (4.34)$$

Sustituyendo la ecuación 4.33 y 4.34 en la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos las ecuaciones de movimiento respecto de  $\theta$

$$2mR^2\ddot{\theta} - 2mR^2\ddot{\theta} \cos \theta + 2mR^2\dot{\theta}^2 \sin \theta + MR^2\ddot{\theta} - mR^2\dot{\theta}^2 \sin \theta + mgR \sin \theta = 0$$

Simplificando y agrupando término, obtenemos

$$MR^2\ddot{\theta} + 2mR^2\ddot{\theta}(1 - \cos \theta) + mR^2\dot{\theta}^2 \sin \theta + mgR \sin \theta = 0 \quad (4.35)$$

Suponiendo que tenemos pequeñas oscilaciones, podemos considerar que  $\sin \theta \approx 0$  y  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  por lo que sustituyendo obtenemos

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{mg}{MR} \right) \theta = 0 \quad (4.36)$$

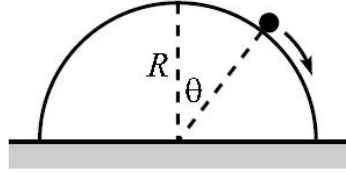


Figura 4.4: SemiHemisferio con una partícula deslizando

## 4.2. Fuerzas Restrictivas

Algo agradable del método Lagrangiano es que tenemos libertad de imponer cualquier restricción al sistema desde el inicio de la solución del problema con el fin de reducir el número de variables. Esto siempre se hace (probablemente sin pensar) cuando una partícula está restringida a moverse en un alambre, una superficie, etc. Normalmente nosotros no sabemos la naturaleza de las fuerzas restrictivas, pero si el resultado del movimiento que las restricciones permiten. Estableciendo las restricciones podemos encontrar el movimiento, pero no podemos decir nada sobre la naturaleza de las fuerzas de restricción.

### 4.2.1. Ejemplo de fuerza restrictiva

Considere una partícula deslizando sobre una esfera fija sin fricción de radio  $R$  (ver la figura 4.4). Estableceremos que nos interesa encontrar la ecuación del movimiento para  $\theta$  y no la fuerza restrictiva. Entonces podemos escribir las ecuaciones en términos de  $\theta$ , ya que sabemos que la distancia radial,  $r$ , está limitada a ser  $R$ . La energía cinética es  $T = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$  y la energía potencial (respecto al sistema de referencia que está en el centro de la parte inferior) es  $V = mgR \cos \theta$ . El Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 - mgR \cos \theta \quad (4.37)$$

Sustituyendo el Lagrangiano de la ecuación 4.37 en la ecuación de Euler- Lagrange obtenemos la ecuación del movimiento de la partícula

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{g}{R}\right) \sin \theta \quad (4.38)$$

la cual es simplemente la aceleración tangencial.

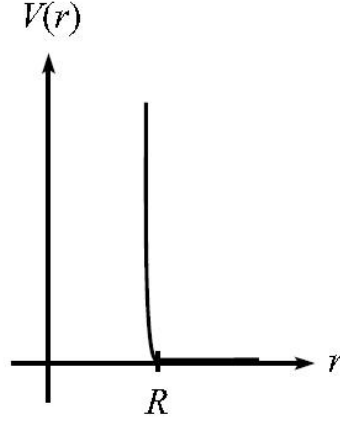


Figura 4.5: Potencial debido al hemisferio

### Cálculo de las fuerzas restructivas

Ahora supongamos que deseamos encontrar la fuerza de restricción que el hemisferio ejerce sobre la partícula. Para encontrar esta fuerza es necesario resolver el problema de una manera distinta y escribir las ecuaciones en términos de  $r$  y  $\theta$ . También (y este es un paso crítico), afirmaremos que  $r$  no está exactamente limitada a ser  $R$ , porque en la realidad la partícula se hunde un poco en el hemisferio. Esto es un ligero cambio pero sumamente importante. La partícula empuja y se hunde un poco en la superficie del hemisferio, se hunde hasta que el hemisferio empuja nuevamente a la partícula evitando que se hunda más (esto es como considerar al hemisferio como formada por múltiples resortes). La partícula está sujeta, entonces, a un potencial debido al hemisferio. El potencial restrictivo  $V(r)$  se comporta como en la figura 4.5. Por lo tanto, el Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta - V(r) \quad (4.39)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange al Lagrangiano de la ecuación 4.39 obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$mr^2\ddot{\theta} = mgr \sin \theta \quad (4.40)$$

$$m\ddot{r} = mgr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - V'(r) \quad (4.41)$$

Teniendo las ecuaciones de movimiento, aplicamos ahora las condiciones de restricción  $r = R$ . Esta condición implica  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$  (Por supuesto,  $r$  no es realmente

igual a  $R$ , pero cualquier diferencia no es realmente importante). Despejando de la ecuación 4.41 obtenemos

$$-\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=R} = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 \quad (4.42)$$

pero  $F = dV/dr$  es la fuerza de restricción aplicada en la dirección  $r$  la cual es la fuerza que se estaba buscando. La fuerza normal restrictiva es entonces

$$F(\theta, \dot{\theta}) = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 \quad (4.43)$$

### 4.3. Cambio de coordenadas

Cuando  $L$  es escrito en términos de las coordenadas cartesianas  $x, y, z$  se ha demostrado que las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las ecuaciones de Newton  $F = ma$ . Pero que sucede si en los otros sistemas de coordenadas





# Capítulo 5

## Linealización

En el capítulo anterior se obtuvieron modelos de sistemas que nos conducían a modelos no lineales, realizar la linealización de estos problemas es una tarea que implica el manejo de un concepto fundamental como lo es la linealización. Aunque casi todo sistema real tiene características no lineales, muchos sistemas pueden describirse razonablemente por modelos lineales—al menos dentro de ciertos rangos de operación.

Como normalmente un sistema de control opera en las cercanías de un equilibrio, se hace una linealización alrededor de este equilibrio. El resultado es un modelo lineal, mucho más simple, pero adecuado para el diseño de control.

### 5.1. Linealización

Para un mismo sistema no lineal, la linealización alrededor de distintos puntos de equilibrio dará, en general, distintos modelos linealizados.

Consideramos la linealización del modelo general en ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}\tag{5.1}$$

en donde  $x(t)$  son las variables de estado del sistema y  $u(t)$  son las señales de entrada. A la primera ecuación de 5.1 se le denomina ecuación de estado y a la segunda se le denomina ecuación del observador.

El modelo general en ecuaciones de estado se linealiza alrededor de un punto de equilibrio o punto de operación, si consideramos que las funciones  $f$  y  $g$  son suficientemente regulares, las ecuaciones 5.1 pueden aproximarse por medio de la serie de Taylor de varias variables

$$\dot{x}(t) \approx f(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x^*, y^*)} \Delta u(t) \quad (5.2)$$

$$y(t) \approx g(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \Delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x^*, y^*)} \Delta u(t) \quad (5.3)$$

donde  $\Delta x(t) = x(t) - x^*$  y  $\Delta u(t) = u(t) - u^*$ . Es importante puntualizar que el punto  $(x^*, u^*)$  se considera un punto de equilibrio o punto de operación si y solo si  $f(x^*, u^*) = 0$ . Por lo tanto la ecuación 5.2 y 5.3 se pueden representar

$$\dot{x}(t) \approx Ax(t) + Bu(t) + E \quad (5.4)$$

$$y(t) \approx Cx(t) + Du(t) + F \quad (5.5)$$

en donde

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} & B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x^*, y^*)} & E &= - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} x^* - \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x^*, y^*)} u^* \\ C &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} & D &= \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x^*, y^*)} & F &= g(x^*, u^*) - \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} x^* - \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x^*, y^*)} u^* \end{aligned} \quad (5.6)$$

## 5.2. Pasos para la linealización

Para realizar el proceso de linealización es necesario seguir los siguientes pasos

1. Plantear ecuaciones diferenciales
2. Encontrar las funciones  $f$  y funciones  $g$ . Las funciones  $f$  son el conjunto de funciones que determinan las ecuaciones que describen la dinámica del sistema. Las funciones  $g$  son el conjunto de funciones que determinan las ecuaciones que describen el proceso de observación.
3. Encontrar los puntos de equilibrio. Estos puntos se encuentran cuando las funciones  $f$  se hacen igual al cero y se resuelve el sistema de ecuaciones, que por lo general es un sistema no lineal.
4. calcular el jacobiano de las funciones  $f$  y  $g$  respecto de las variables de estado y las señales de entrada.
5. Sustituir en el modelo lineal.

El proceso de linealización implica varios pasos y va unido con el del modelado, a continuación presento varios ejemplos que implican solo la linealización

### 5.2.1. Ejemplo 1: Sistema de dos variables de estado

Linealizar el siguiente sistema, representado en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

#### Paso 1.- Encontrar las funciones $f$ y $g$

Las funciones se obtienen del sistema

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 - x_1x_2 \\ f_2 &= x_2 - x_1^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

en estas ecuaciones no hay funciones  $g$  debido a que no hay ecuaciones del observador.

#### Paso 2.- Encontrar los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio se encuentran igualando a cero las funciones  $f$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_1 - x_1x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Resolviendo el sistema de la ecuación 5.9 obtenemos los siguientes puntos de equilibrio  $P1(0, 0)$ ,  $P2(1, 1)$  y  $P3(-1, 1)$ .

#### Paso 3.- Calcular el Jacobiano

El jacobiano de una función de dos variables se calcula utilizando la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

sustituyendo  $f_1$  y  $f_2$  obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

sustituyendo los puntos de operación obtenemos el sistema lineal. Para el punto  $P1(0,0)$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Por lo tanto el sistema lineal queda

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Para el punto  $P2(1,1)$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Por lo tanto el sistema lineal queda

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el punto  $P3(-1,1)$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(-1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Por lo tanto el sistema lineal queda

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Capítulo 6

## Modelado en el dominio del tiempo

Este capítulo presenta un estudio de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (6.1)$$

en donde  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $A$  es una matriz de  $n \times n$  y

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Se demuestra que la solución de un sistema lineal de la forma 6.1 junto con la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  está dada por

$$\mathbf{x} = e^{At}\mathbf{x}_0$$

donde  $e^{At}$  es una matriz de  $n \times n$  definida por sus funciones de serie de Taylor. Gran parte de este capítulo se dedicará a la solución de la matriz  $e^{At}$  en términos de los valores y vectores propios de la matriz  $A$ .

### 6.1. Sistema lineal desacoplado

El método de separación de variables puede ser usado para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x} = ax$$

La solución general esta dada por

$$x(t) = ce^{at}$$

donde la constante  $c = x(0)$ , el valor de la función  $x(t)$  en el tiempo  $t = 0$ .

Ahora considere el sistema lineal desacoplado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2\end{aligned}$$

Los sistemas pueden ser escritos en forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es importante puntualizar que en este caso  $A$  es una matriz diagonal,  $A = \text{diag}[-1, 2]$ , y en general donde  $A$  es una matriz diagonal el sistema 6.1 es un sistema desacoplado. La solución general de un sistema lineal desacoplado puede ser encontrado por el método de separación de variables. Esta dado por

$$\begin{aligned}x_1 &= c_1 e^{-t} \\ x_2 &= c_2 e^{2t}\end{aligned}$$

o equivalentemente por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \mathbf{c} \quad (6.3)$$

La ecuación 6.3 representa la solución del sistema 6.2, de este sistema podemos graficar su **diagrama de fase**, como se muestra en la figura 6.1.

## 6.2. Problemas

Resolver los siguientes problemas. Encontrar la solución general y el diagrama de fase de los siguientes sistemas lineales tridimensionales

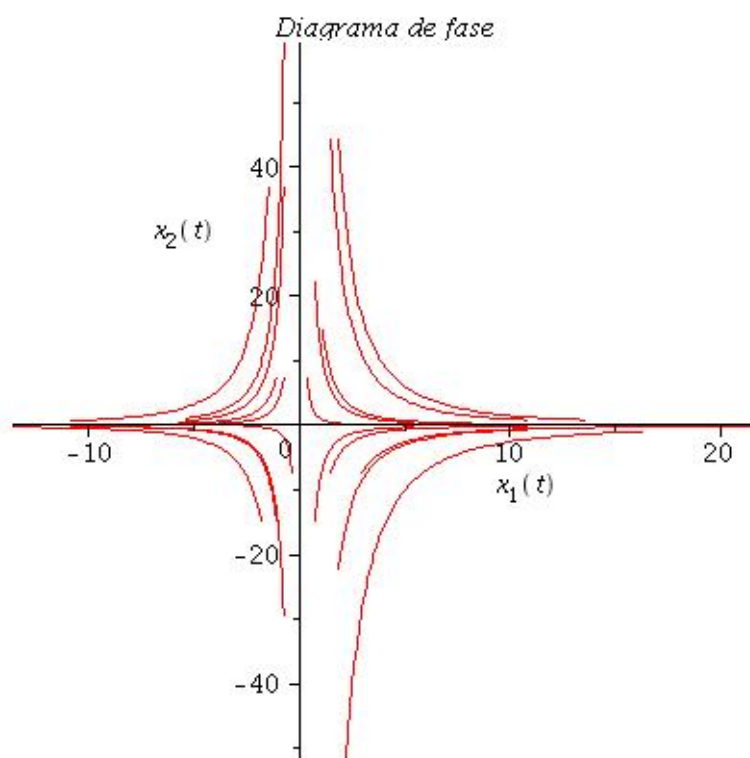


Figura 6.1: Diagrama de fase del sistema 6.3

**6.2.1. Problema 1**

(a)

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_3$$

(b)

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_3$$

(c)

$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$\dot{x}_3 = -x_3$$

**6.2.2. Problema 2**

Encontrar la solución general y dibujar el diagrama de fase de los siguientes sistemas lineales

(a)

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = 2x_2$$

(b)

$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

(c)

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2$$



## 6.3. Diagonalización

La técnica algebraica de diagonalización de una matriz cuadrada  $A$  puede ser usada para reducir un sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

a un sistema lineal desacoplado.

### 6.3.1. Caso 1: Los eigenvalores reales y diferentes de $A$

El siguiente teorema del algebra lineal se utiliza para resolver sistemas de la forma 6.1

**Teorema 6.3.1.** *Si los eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de una matriz  $A$  de  $n \times n$  son reales y distintos, entonces cualquier conjunto de eigenvectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  forma una base para  $\mathbf{R}^n$ , la matriz  $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$  es invertible y  $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$*

Bajo la hipótesis del teorema anterior, la solución del sistema lineal 6.1 esta dada por la función  $\mathbf{x}(t)$  definido por

$$\mathbf{x}(t) = PE(t)P^{-1}\mathbf{x}(0) \quad (6.4)$$

### Ejemplo

Resolver el sistema lineal representado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

### Solución

El sistema se puede representar de la forma 6.1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Comparando la ecuación 6.1 con la ecuación anterior podemos concluir que la matriz  $A$  es igual a

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si utilizamos MAPLE para el cálculo de los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz  $A$  obtenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1 & \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 &= 2 & \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Con los eigenvectores es posible obtener la matriz  $P$ , la cual es

$$P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando MAPLE calculamos la inversa de la matriz  $P$  y obtenemos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para comprobar, multiplicamos  $P^{-1}AP$  y debemos obtener la matriz diagonal de eigenvalores

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación 6.4 obtenemos

$$\mathbf{x}(t) = PE(t)P^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{c}$$

donde

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1e^{-t} + c_2(e^{-t} - e^{2t}) \\ x_2(t) &= c_2e^{2t}\end{aligned}$$

**6.3.2. Caso 2: Los eigenvalores reales y repetidos**

Si en el sistema lineal de la forma 6.1, la matriz  $A$  presenta valores propios repetidos entonces el método del caso 1 no puede ser aplicado, es por ello necesario considerar algunas definiciones

**Definición 6.3.1.** Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ . Entonces para  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

De la definición 6.3.1 podemos concluir el siguiente teorema

**Teorema 6.3.2.** Si  $P$  y  $T$  son transformaciones lineales en  $\mathbf{R}^n$  y  $S = PTP^{-1}$ , entonces  $e^S = Pe^T P^{-1}$



# Capítulo 7

## Modelado en el dominio de la frecuencia

### 7.1. La transformada de Laplace

La herramienta mas importante en el análisis y diseño de sistemas de control es la transformada de laplace. La cual tienes una amplia variedad de aplicaciones debido a que transforma ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, las cuales son mucho más fáciles de manipular. En la ecuación 7.1 se muestra la ecuación diferencial de un sistema lineal

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) \quad (7.1)$$

Como se puede observar los coeficientes de esta ecuación diferencial son constantes. Es a los sistemas lineales representados por la ecuación 7.1 a los cuales se le aplicará la transformada de Laplace, es importante señalar que se condidera que las condiciones iniciales de la variable de salida del sistema es cero, y que las condiciones iniciales de sus derivadas tambien son cero, esto no es cierto para todos los sistemas pero se puede aplicar un cambio de variable para que esta condición sea válida. Considerando lo anterior empezaremos definiendo la transformada de laplace. La transformada de Laplace de  $x(t)$  esta definida como

**Definición 7.1.1.** La transformada de Laplace de la función  $x(t)$  se define como:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (7.2)$$

donde  $s$  es una variable compleja de la forma  $s = \sigma + j\omega$

La señal  $x(t)$  puede ser recuperada desde  $X(s)$  aplicando la transformada inversa de Laplace que esta dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-\infty}^{C+\infty} X(s)e^{st} dt \quad (7.3)$$

Donde  $C$  es una constante positiva. Una notación corta de la transformada de Laplace y su inversa es

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] \quad y \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

Una práctica común para escoger símbolos de la transformada de Laplace y su inversa es utilizar mayúsculas para las funciones en el dominio  $s$  y minúsculas para las funciones en el dominio del tiempo.

Ahora, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencia de orden  $n$ , ecuación 7.1, con coeficientes constantes, obtenemos

$$(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0)Y(s) + \Psi_y(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)X(s) + \Psi_x(s) \quad (7.4)$$

donde  $X(s)$  y  $Y(s)$  son la transformada de Laplace de la señal de entrada y salida respectivamente.  $\Psi_x(s)$  y  $\Psi_y(s)$  son funciones que combinan todos los términos de las condiciones iniciales que dependen de  $x(t)$  y  $y(t)$ , respectivamente.

## 7.2. Función transferencia

Una caracterización importante de los sistemas de control es la función transferencia. La cual se define de la siguiente manera

**Definición 7.2.1.** Una función transferencia es el cociente entre la transformada de Laplace de la señal de salida entre la transformada de Laplace de la señal de entrada, o bien, tambien puede definirse como la transformada de Laplace de la respuesta entre la transformada de Laplace de la excitación.

Un sistema de control, invariante en el tiempo, el cual puede o no ser causal, puede ser representado por una integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (7.5)$$

donde  $h(t)$  es la respuesta al impulso del filtro. La transformada de Laplace

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \right] e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-st}x(\tau)d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-st}e^{s\tau}e^{-s\tau}x(\tau)d\tau dt \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración, obtenemos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}x(\tau)e^{-s\tau}dtd\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dtx(\tau)e^{-s\tau}d\tau \end{aligned}$$

Ahora, realizando el siguiente cambio de variable  $t = t' + \tau$ , considerando que  $dt/dt' = 1$  y  $t - \tau = t'$ ; entonces,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t')e^{-s(t')}dt'x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t')e^{-s(t')}dt' \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= H(s)X(s) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función transferencia esta dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mathcal{L}[h(t)] \quad (7.6)$$

En efecto, la función transferencia es igual a la transformada de Laplace de una respuesta al impulso. Algunos autores definen la función transferencia como la transformada de laplace de la respuesta al impulso. Entonces a través de la integral de convolución, muestran que la función transferencia es igual al cociente de la transformada de Laplace de la respuesta entre la transformada de Laplace de la excitación. Ambas definiciones son, por supuesto, equivalentes.

En la tabla 7.1 se muestran las transformada de laplace de la funciones más comunes. En la tabla 7.2 se muestran los principales teoremas y propiedades de la transformada de laplace.

Transformada de Laplace de funciones comunes		
Número	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6	$\text{sen}(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$\text{cos}(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Cuadro 7.1: Transformada de Laplace de funciones comunes

Teoremas de la Transformada de Laplace		
Número	Teorema	Nombre
1	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definición
2	$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$	Teorema de linealidad
3	$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	Teorema de linealidad
4	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	Teorema de desplazamiento de frecuencia
5	$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$	Teorema de desplazamiento del tiempo
6	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$	Teorema de escalamiento
7	$\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = sF(s) - f(0-)$	Teorema de la derivada
8	$\mathcal{L}[\frac{d^2f}{dt^2}] = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Teorema de la derivada
9	$\mathcal{L}[\frac{d^nf}{dt^n}] = \sum_{k=1}^n n s^{n-k} f^{k-1}(0-)$	Teorema de la derivada
10	$\mathcal{L}[\int_{0-}^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}$	Teorema de la integral
11	$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	Teorema del valor final
12	$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	Teorema del valor inicial




Cuadro 7.2: Teoremas de la transformada de Laplace

### 7.3. Ejemplos de modelado en la frecuencia

Para obtener el modelo matemático de sistemas eléctricos o mecánicos lineales se utiliza la transformada de Laplace. En la figura 7.1 se muestran las transformadas de Laplace de los elementos básicos de circuitos eléctricos.

Para obtener el modelo matemático de redes eléctricas se puede utilizar el método de mallas o el método de nodos. En el método de mallas se aplica la ley de voltajes



	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	$Cs$
Capacitor					
	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$v(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$	$R$	$\frac{1}{R} = G$
Resistor					
	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$	$v(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$	$Ls$	$\frac{1}{Ls}$
Inductor					

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book:  $v(t)$  = V (volts),  $i(t)$  = A (amps),  $q(t)$  = Q (coulombs),  $C$  = F (farads),  $R$  =  $\Omega$  (ohms),  $G$  = S (mhos),  $L$  = H (henries).

Figura 7.1: Transformada de laplace de componentes electrónicos

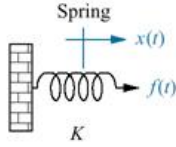
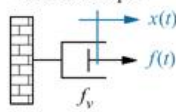
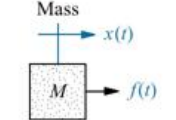
de Kirchhoff y en el método de nodos se aplica la ley de corrientes.

Es posible también resolver algunos circuitos por inspección, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Sustituimos los valores de los elementos pasivos con sus impedancias
2. Sustituimos todas las fuentes y variables del tiempo con su transformada de laplace
3. Suponemos una corriente de transformada y una dirección de corriente en cada malla
4. Sumamos todas las impedancias que pertenezcan a la malla que analicemos y las multiplicamos por la corriente de esa malla
5. Checamos los componentes comunes entre la malla que estamos analizando y alguna malla vecina y restamos el producto de todos esos componenetes comunes por la corriente de malla vecina de la suma obtenida del paso anterior
6. Se realiza esta resta por cada elemento común de las otras mallas vecinas
7. Al final se iguala el resultado a la sumatoria de las fuentes de voltaje conectadas a la malla
8. Se repite estos pasos para cada una de las mallas del circuito.

En la figura 7.2 se muestra la transformada de laplace de algunos componentes mecánicos. En el caso de sistemas mecánicos los pasos para obtener la transformada de laplace del sistema son parecidos al caso eléctrico.

Los pasos para obtener las ecuaciones de un sistema mecánico lineal, son las siguientes:

Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedance $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
	$f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	$K$
	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
	$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$	$Ms^2$

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book:  $f(t)$  = N (newtons),  $x(t)$  = m (meters),  $v(t)$  = m/s (meters/second),  $K$  = N/m (newtons/meter),  $f_v$  = N-s/m (newton-seconds/meter),  $M$  = kg (kilograms = newton-seconds<sup>2</sup>/meter).

Figura 7.2: Transformada de laplace de componentes mecánicos

1. Sustituimos los valores de los elementos mecánicos con sus impedancias
2. Sustituimos todas las fuerza externas y variables del tiempo con su transformada de laplace
3. Sumamos todas las impedancias que pertenezcan a la masa que analicemos y las multiplicamos por la transformada de laplace de la variable de desplazamiento de esa masa
4. Checamos los componentes comunes entre la masa que estamos analizando y alguna masa vecina y restamos el producto de todos esos componenetes comunes por la transformada de laplace del desplazamiento de la masa vecina de la suma obtenida del paso anterior
5. Se realiza esta resta por cada elemento común de las otras masas vecinas
6. Al final se iguala el resultado a la sumatoria de las fuerzas externas aplicadas a la masa
7. Se repite estos pasos para cada una de las masas del sistema

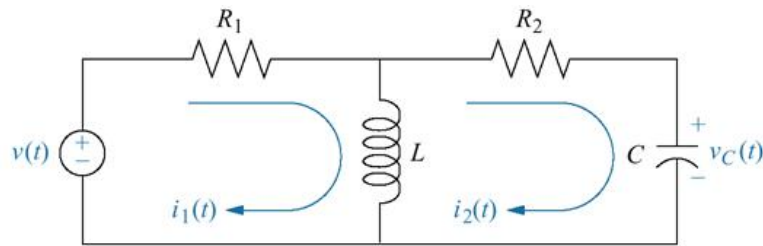
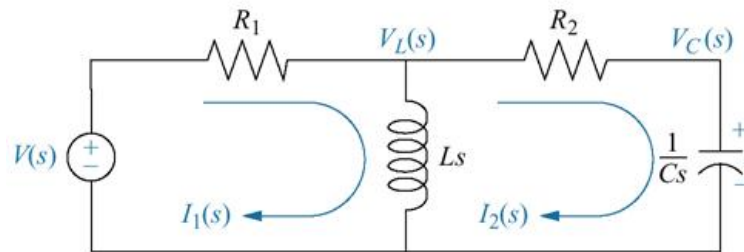


Figura 7.3: Circuito para ejemplo 1

Figura 7.4: Modelo de impedancia en el plano  $s$  de la figura 4.3

### 7.3.1. Ejemplo 1: Función transferencia de un circuito eléctrico

Encontrar la función transferencia del circuito de la figura 7.3, considerando que la señal de entrada es  $V(s)$  y la señal de salida es  $V_C(s)$ .

La solución se realizará utilizando los pasos indicados anteriormente

**Paso 1, 2 y 3:** Sustituimos los valores de los elementos con sus impedancias, las fuentes y asignamos corrientes

En la figura 7.4 se muestra el circuito con la transformada de laplace aplicada a cada uno de los elementos del circuito y las fuentes. También se pueden observar los sentidos asignados a las corrientes de malla.

**Paso 4, 5 y 7**

Las ecuaciones pueden escribirse por inspección:

$$(R_1 + sL)I_1(s) - sLI_2(s) = V(s) \quad (7.7)$$

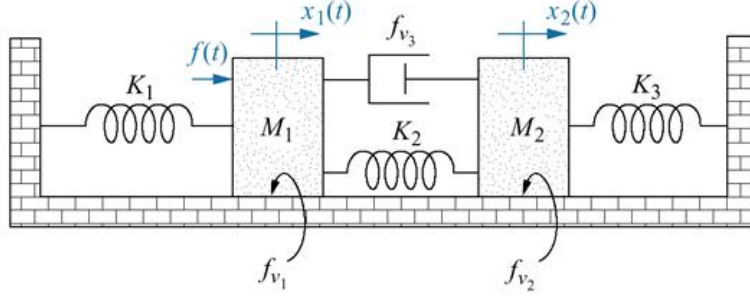


Figura 7.5: Sistema mecánico para el ejemplo 2

La ecuación de la segunda malla queda

$$(sL + R_2 + \frac{1}{sC})I_2(s) - sLI_1(s) = 0 \quad (7.8)$$

Si resolvemos el sistema obtenemos, para la corriente  $I_1(s)$  la función transferencia

$$\frac{I_1(s)}{V(s)} = \frac{LCs^2 + R_2Cs + 1}{(R_2CL + LCR_1)s^2 + (R_2CR_1 + L)s + R_1} \quad (7.9)$$

Si resolvemos el sistema obtenemos, para la corriente  $I_2(s)$  la función transferencia

$$\frac{I_2(s)}{V(s)} = \frac{LCs^2}{(R_2CL + LCR_1)s^2 + (R_2CR_1 + L)s + R_1} \quad (7.10)$$

## 7.4. Ejemplo 2: Modelo lineal en frecuencia de un sistema mecánico

En la figura 7.5 se muestra un sistema mecánico para analizar. Como podrá observarse el sistema tiene dos grados de libertad, cada masa tiene asociada una variable de desplazamiento,  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ .

Se plantea una ecuación para cada masa, de esta forma la ecuación para la masa  $M_1$  se obtiene

$$(K_1 + f_{v1}s + K_2 + f_{v3}s + M_1s^2)x_1(s) - (f_{v3}s + K_2)x_2(s) = F(s) \quad (7.11)$$

Planteando la ecuación para la masa  $M_2$ ,

$$(f_{v3}s + K_2 + K_3 + f_{v2}s + M_2s^2)x_2(s) - (f_{v3}s + K_2)x_1(s) = 0 \quad (7.12)$$

Resolviendo el sistema obtenemos la siguiente función transferencia para  $X_1(s)$ , si consideramos que las variables de salida son  $X_1(s)$  y  $X_2(s)$

$$H(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad (7.13)$$

de donde

$$N_1(s) = M_2s^2 + (f_{v3} + f_{v2})s + K_2 + K_3$$

$$\begin{aligned} D(s) = & M_1M_2s^4 + (f_{v3}M_2 + M_1f_{v3} + f_{v2}M_1 + M_2f_{v1})s^3 \\ & + (f_{v1}F_{v3} + k_2M_2 + f_{v3}f_{v2} + M_2K_1 + K_3M_1 + M_1K_2 + f_{v1}f_{v2})s^2 \\ & + (K_1f_{v3} + f_{v1}K_2 + f_{v2}K_1 + f_{v3}K_3 + K_2f_{v2} + K_3f_{v1})s \\ & + K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Si calculamos la función transferencia para  $X_2(s)$  obtenemos

$$H(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{N_2(s)}{D(s)} \quad (7.15)$$

de donde

$$N_2(s) = f_{v3}s + K_2$$

y el denominador de la función transferencia  $D(s)$  es el mismo que el de la ecuación 7.15



## Capítulo 8

### Análisis de un sistema completo

