

Motores Eléctricos

Dr. Casimiro Gómez González
Facultad de Electrónica, UPAEP
correo: casimiro.gomez@upaep.mx
Tel: 222 229 9428

Primavera 2010

Prólogo

El presente material es producto del estudio realizado para elegir el motor electrico para el proyecto Electratorón

El autor
Casimiro Gómez González
Doctor en Ingeniería Mecatrónica

Índice general

Prólogo	III
1. Introducción	1
1.1. Controladores de motor de Imanes Permanentes	1
1.2. Clasificación de los motores eléctricos de imanes permanentes	2
1.3. Fundamentos de Mecánica de máquinas	3
1.4. Tren de engranes simples	3
1.5. Eficiencia de un tren de engranes	4
1.6. Momento de inercia equivalente	4
1.7. Características mecánicas de máquinas	5
1.8. Ecuación de balance de torque	6
1.9. Ejemplo 1: Análisis del torque de maquinarias	6
1.9.1. Solución	7
1.10. Ejemplo 2	8
1.10.1. Solución	8
1.11. Ejemplo numérico 3	9
1.11.1. Solución	9
1.12. Ejemplo numérico 4	11
1.12.1. Solución	11
2. Imanes Permanentes y circuitos	13
3. Análisis de Energía	17

Capítulo 1

Introducción

El primer sistema de Imanes Permanentes fue aplicado a las máquinas eléctricas a principios del siglo XIX, e.g. J. Henry (1831), H. Pixii (1832), W. Ritchie (1833), F. Watkins (1835), T. Davenport (1837), M.H. Jacobi (1839). Por supuesto, el uso de materiales magnéticos de baja calidad (acero o tungsteno acero) provocó el desarrollo de sistemas de excitación electromagnética. La invención del Alnico en 1932 revivió los sistemas de excitación de Imanes Permanentes (IM), sin embargo su aplicación fue limitada a máquinas de conmutación de corriente directa de caballos de potencia pequeños y fraccionales. Actualmente los motores de conmutador de corriente directa de imanes permanentes con rotores ranurados usan magnetos de ferrita. Motores de conmutador baratos y simples de bario o ferrita de estroncio de imanes permanentes montados en el estator serán usados en un futuro en vehículos, juguetes y equipos caseros. El uso de los motores sin escobillas de Imanes Permanentes se han convertido en una opción más atractiva que los motores de inducción.

Los magnetos de tierras raras de alto rendimiento han reemplazado exitosamente a los magnetos de ferrita o Alnico en todas las aplicaciones donde se necesita una alta razón de potencia-masa, rendimiento dinámico mejorado o con la más alta eficiencia. Ejemplos típicos donde estos puntos son el criterio de selección fundamental son motores de pasos para aplicaciones de periféricos de computadoras y servo motores para herramientas y robótica.

1.1. Controladores de motor de Imanes Permanentes

En general, todos los controladores electromagnéticos se pueden dividir en controladores de velocidad constante, controladores de servo y controladores de velocidad variable.

Un controlador de velocidad constante generalmente emplea solo un motor síncrono el cual puede mantener la velocidad constante sin un convertidor electrónico y retroalimentación o cualquier otro motor cuando hay menos restricciones en la tolerancia de variación de velocidades.

Un sistema servo es un sistema que consiste de varios dispositivos los cuales monitorean continuamente la información actual (velocidad, posición) compara estos valores con los valores deseados y realiza las correcciones necesarias para minimizar las diferencias. Un controlador de servo motor es un controlador con una retroalimentación de velocidad o posición para el control preciso donde el tiempo de respuesta y la precisión con la cual el motor sigue los órdenes de velocidad y posición son extremadamente importantes.

En un controlador de velocidad variable la precisión y el tiempo de respuesta con el cual el motor sigue los órdenes de velocidad no son importantes, pero el principal requisito es que la velocidad cambie en un amplio rango.

En todos los controladores electromagnéticos en donde la posición y la velocidad son controlados, un circuito electrónico de potencia une la fuente de poder y el motor. Hay tres tipos de controladores electromagnéticos para motores de imanes permanentes;

- Controladores de motores de colector de corriente directa
- Controladores de motores sin escobillas
- Controladores de motores de pasos

1.2. Clasificación de los motores eléctricos de imanes permanentes

En general, los motores de imanes permanentes se clasifican en:

- Motores de colector de corriente directa
- Motores sin escobillas de corriente directa
- Motores síncronos de corriente alterna

La construcción de un motor de colector de imanes permanentes es similar a la de un motor de corriente directa con el sistema de excitación electromagnética reemplazada por imanes permanentes. Los motores de imanes permanentes de corriente

directa sin escaobillas y los motores sincronicos de corriente alterna son practicamente el mismo: con un estator polifásico y un rotor de de imanes permanentes localizado en el rotor. La única diferencia es en el control y la forma de la exitación del voltaje: un motor síncrono de corriente alterna es alimentado con mas o menos una forma de onda senoidal la cual produce un campo magnético rotatorio. En motores de imanes permanentes sin escobilla la corriente de armadura tiene una forma cuadrada (o trapezoidal), solamente dos arrollamientos de fase (para la conexión Y) conducen la corriente al mismo tiempo y el patrón de interrupción es sincronizado con la velocidad angular del rotor (conmutación electrónica).

1.3. Fundamentos de Mecánica de máquinas

El torque T de la flecha como una función de la potencia mecánica se expresa como

$$T = F \frac{D}{2} = \frac{P}{\Omega} = \frac{P}{2\pi n} \quad (1.1)$$

donde $\Omega = 2\pi n$ es la velocidad angular y n es la velocidad de rotación en rev/seg, D es el diametro del engrane, y P la potencia del engrane.

1.4. Tren de engranes simples

En el tren de engranes mostrado en la figura 1.1, sean n_1, n_2 igual a las velocidades angulares del engrane 1 y 2 respectivamente y z_1 y z_2 en número de dientes de esos engranes, D_1, D_2 el diametro del circulo de los engranes 1 y 2

- El tren de engranes de acuerdo con la figura 1.1a

$$\gamma = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{D_2}{D_1} \quad (1.2)$$

- El tren de engranes de acuerdo con la figura 1.1b

$$\gamma = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{D_2}{D_1} \quad (1.3)$$

El signo negativo indica que los engranes 1 y 2 giran en dirección contraria. El engrane 3 no afecta la relación de engranes pero si determina la dirección en la que gira el engrane 2. El cociente $\gamma = z_2/z_1$ se le llama relación de engranes.

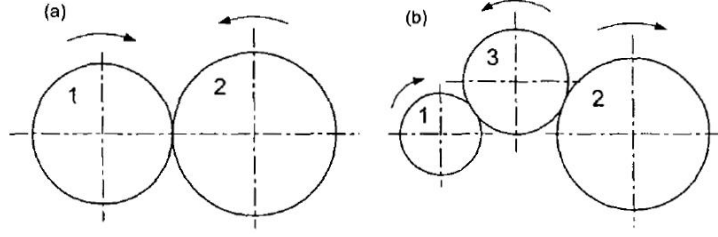


Figura 1.1: Tren de engranes simples

1.5. Eficiencia de un tren de engranes

Teniendo en cuenta la fricción, la eficiencia de un tren de engranes es

$$\eta = \frac{\text{Potencia de Salida}}{\text{Potencia de entrada}} = \frac{P_2}{P_1} \quad (1.4)$$

Así,

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2(2\pi n_2)}{T_1(2\pi n_1)} = \frac{T_2 n_2}{T_1 n_1} \quad (1.5)$$

De acuerdo a la ecuación 1.2 $n_1/n_2 = |N_1/N_2|$ de tal forma que la ecuación 1.5 queda

$$\frac{T_2 n_2}{T_1 n_1} = \frac{T_2 z_1}{T_1 z_2} \quad (1.6)$$

El torque en el engrane 1

$$T_1 = T_2 \frac{z_1}{z_2} \frac{1}{\eta} \quad (1.7)$$

1.6. Momento de inercia equivalente

En el tren simple mostrado en la figura 1.1a, sean J_1 , J_2 igual a los momentos de inercia de las masas rotativas de los engranes 1 y 2, Ω_1 y Ω_2 es igual a la velocidad angular de los engranes 1 y 2, D_1 y D_2 es igual al diametro del círculo del engrane 1 y 2, $0,5J_1\Omega_1^2$, $0,5J_2\Omega_2^2$ es igual a la energía cinética de los engranes 1 y 2, respectivamente. La energia neta suministrada a el sistema por unidad de tiempo es igual a la velocidad de cambio de la energía cinética E_k , i.e.

$$P = \frac{dE_k}{dt} = T\Omega_1 \quad (1.8)$$

Si sustituimos las energías cinéticas de los engranes y la igualamos a la energía mecánica suministrada por el motor obtenemos,

$$\begin{aligned} T\Omega_1 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_2^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(J_1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} J_2 \right) \frac{d}{dt} \Omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(J_1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} J_2 \right) 2\Omega_1 \frac{d\Omega_1}{dt} \end{aligned} \quad (1.9)$$

La cantidad $J_1 + (\Omega_2/\Omega_1)^2 J_2$ se puede denominar como el momento de inercia equivalente de los engranes respecto de la rueda 1 (o engrane 1). Los momentos de inercia de varios engranes pueden ser reducidos a un momento de inercia equivalente en la flecha del motor, i.e.

$$T = \left(J_1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} J_2 \right) \frac{d\Omega_1}{dt} = \left(J_1 + \frac{z_1^2}{z_2^2} J_2 \right) \frac{d\Omega_1}{dt} \quad (1.10)$$

El momento de inercia equivalente es igual a el momento de inercia de cada rueda en el tren multiplicada por el cuadrado de su razón de engranes respecto de la rueda de referencia.

1.7. Características mecánicas de máquinas

En general, las características mecánicas de una maquina $T = f(\Omega)$ manejada por un motor eléctrico se puede describir por la siguiente ecuación:

$$T = T_r \left(\frac{\Omega}{\Omega_r} \right)^\beta \quad (1.11)$$

donde T_r es el torque de resistencia de la maquina a la velocidad angular Ω_r , $\beta = 0$ para montacargas, cintas transportadoras, máquinas rotativas, y vehículos (máquina de torque constante), $\beta = 1$ para molinos, máquinas de papel, máquinas textiles, $\beta = 2$ para bombas rotatorias, ventiladores, turbocompresores y sopladores.

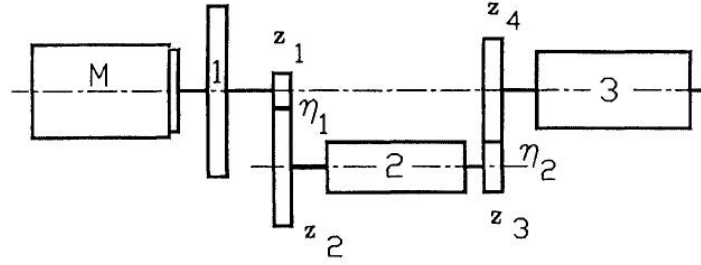


Figura 1.2: Motor Eléctrico manejando un tren de laminado

1.8. Ecuación de balance de torque

Un sistema electromecánico se puede describir con la ayuda de la siguiente ecuación de balance de torque

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + K\theta = T_d \mp T_{sh} \quad (1.12)$$

donde J es el momento de inercia del sistema en kgm^2 la cual se supone constante ($dJ/dt = 0$), D es el coeficiente de amortiguamiento en Ns/m , K es el coeficiente de rigidez o constante del resorte en N/m , T_d es el torque electromagnetico instantaneo del motor, T_{sh} es el torque de carga instantaneo (flecha), θ es el ángulo de desplazamiento, el signo " $-$.^{es} para aceleración (modo motor), y el signo " $+$.^{es} para la desaceleración (modo frenado).

Suponiendo $D = 0$ y $K = 0$ la ecuación de balance de torque queda

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx T_d \mp T_{sh} \quad (1.13)$$

1.9. Ejemplo 1: Análisis del torque de maquinarias

Encontrar el torque de estado estable, potencia de salida, y momento de inercia de un motor eléctrico impulsando un tren de laminado como se muestra en la figura 1.2. La velocidad del motor es $n = 730rpm$. El volante de inercia y los rodillos estan hechos de acero con densidad de masa específica $\rho = 7800kg/m^3$.

El volante de inercia sólido 1: diametro $D_1 = 1,5m$, grosor $l_1 = 0,2m$

Primer rodillo 2: diametro $D_2 = 0,4m$, longitud $l_2 = 0,8m$, fuerza periférica $F_2 = 20kN$, número de dientes del primer engrane $z_1 = 15$, $z_2 = 35$, eficiencia del primer engrane $\eta_1 = 0,87$.

Segundo rodillo 3: diametro $D_3 = 0,5m$, longitud $l_3 = 1,2m$, fuerza periférica $F_3 = 14kN$, número de dientes del primer engrane $z_3 = 20$, $z_4 = 45$, eficiencia del primer engrane $\eta_1 = 0,9$.

1.9.1. Solución

El torque de la flecha (carga) en base a la ecuación 1.7

$$T_{sh} = F_2 \frac{D_2}{2} \frac{z_1}{z_2} \frac{1}{\eta_1} + F_3 \frac{D_3}{2} \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} \frac{1}{\eta_1} \frac{1}{\eta_2} = 2,82kNm \quad (1.14)$$

en donde la relación de engranes es z_2/z_1 .

La salida de potencia del motor

$$P_{out} = 2\pi n T_{sh} = 2\pi \left(\frac{730}{60}\right) 2820 = 216kW \quad (1.15)$$

La masa del volante de inercia

$$m_1 = \rho \frac{\pi D_1^2}{4} l_1 = 2757kg \quad (1.16)$$

La masa del primer rodillo

$$m_2 = \rho \frac{\pi D_2^2}{4} l_2 = 785kg \quad (1.17)$$

La masa del segundo rodillo

$$m_3 = \rho \frac{\pi D_3^2}{4} l_3 = 1840kg \quad (1.18)$$

El momento de inercia del volante de inercia

$$J_1 = m_1 \frac{D_1^2}{8} = 776kgm^2 \quad (1.19)$$

El momento de inercia del primer rodillo

$$J_2 = m_2 \frac{D_2^2}{8} = 15,7kgm^2 \quad (1.20)$$

El momento de inercia del segundo rodillo

$$J_3 = m_3 \frac{D_3^2}{8} = 57,5kgm^2 \quad (1.21)$$

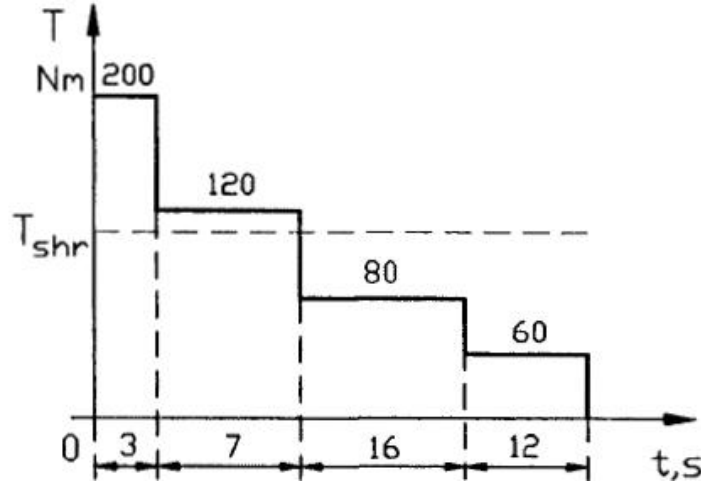


Figura 1.3: Perfiles de torque para el ejemplo 2

El momento de inercia total del sistema respecto a la flecha del motor se obtiene

$$J = J_1 + J_2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + J_3\left(\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}\right) = 781 \text{ kgm}^2 \quad (1.22)$$

1.10. Ejemplo 2

Un motor eléctrico de 12 kW, 1000 rpm trabaja a velocidad casi constante de acuerdo con el perfil de torque dado en la figura 1.3. La capacidad de sobrecarga tiene un factor $k_{ocf} = T_{max}/T_{shr} = 2$. Encontrar el coeficiente de utilización térmica del motor.

1.10.1. Solución

El torque requerido en la flecha se calcula

$$T_{shr} = \frac{P_{out}}{2\pi n} = \frac{12000}{2\pi(1000/60)} = 114,6 \text{ Nm} \quad (1.23)$$

El torque *rms* basado en el ciclo de trabajo

$$T_{rms}^2(t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n) = (T_1^2 t_1 + T_2^2 t_2 + T_3^2 t_3 + \dots + T_n^2 t_n)$$

$$T_{rms} \sum_{l=1}^n t_l = \sum_{i=1}^n T_i t_i$$

$$T_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n T_i t_i}{\sum_{l=1}^n t_l}} \quad (1.24)$$

Tomando en cuenta los valores de la figura 1.3 obtenemos

$$T_{rms} = \sqrt{\frac{(200^2)3 + (120^2)7 + (80^2)16 + (60^2)12}{3 + 7 + 16 + 12}} = 95,5 Nm$$

El máximo torque en la figura 1.3 no puede exceder el número de veces el factor de la sobre carga del torque nominal de la flecha $k_{ocf} T_{shr}$. Tambien, el torque T_{shr} debe ser mayor o igual que T_{rms} .

El coeficiente de utilización térmica del motor

$$\frac{T_{rms}}{T_{sh}} 100 \% = \frac{95,5}{114,6} 100 = 83,3 \%$$

1.11. Ejemplo numérico 3

El torque requerido y el perfil de velocidad de un controlador de un servo estan mostrados en la figura. A velocidad constante 2500 rpm, el torque de la carga en la flecha es $T_{sh} = 1,5 Nm$. La inercia de la carga sometida a el eje del motor es $J_L = 0,004 kgm^2$. Suponiendo la inercia del servomotor $J_M = 0,5 J_L$, elegir un servomotor de imanes permanentes sin escobillas.

1.11.1. Solución

El balance mecánico es expresado como

$$2\pi J \frac{\Delta n}{\Delta t} = T_d \pm T_{sh}$$

en donde T_d es el torque electromagnético desarrollado por el motor para acelerar o frenar, el signo '−' es para la aceleración, y el signo '+' es para desaceleración.

El torque del motor necesario para la aceleración

$$T_d = 2\pi(J_M + J_L) \frac{\Delta n}{\Delta t} + T_{sh} = \frac{2\pi}{60} (0,004 + 0,002) \frac{2500 - 0}{0,3 - 0} + 1,5 \approx 6,74 Nm$$

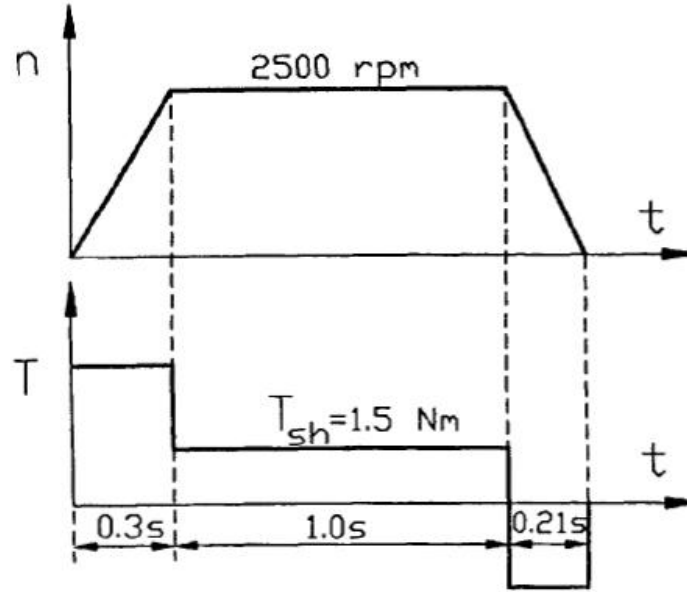


Figura 1.4: Perfiles de carga para el ejemplo 3

El torque del motor requerido para frenado

$$T_d = 2\pi(J_M + J_L) \frac{\Delta n}{\Delta t} - T_{sh} = \frac{2\pi}{60}(0,004 + 0,002) \frac{2500 - 0}{0,21 - 0} - 1,5 \approx 5,98 Nm$$

El torque *rms*

$$T_{rms} = \sqrt{\frac{(6,74^2)0,3 + (1,5^2)1,0 + (5,98^2)0,21}{0,3 + 1,0 + 0,21}} = 3,93 Nm$$

La potencia de salida calculada para el torque *rms*

$$P_{out} = T_{rms}(2\pi n) = (3,93)(2\pi) \frac{2500}{60} = 1030 W$$

El factor de sobrecarga para $T_{dmax} = 6,74 Nm$

$$\frac{T_{dmax}}{T_{rms}} = \frac{6,74}{3,93} = 1,715$$

Un motor de Imanes permanentes sin escobillas de 1.1 kW con un factor de capacidad de sobrecarga mínima de 1.8 es recomendada.

1.12. Ejemplo numérico 4

Un motor eléctrico de 10 kW, de 1450 rpm esta siendo usado para manejar las siguientes máquinas: (a) una grúa ($\beta = 0$), (b) Un molino ($\beta = 1$) (c) un ventilador ($\beta = 2$). El torque de carga en cada caso es de 60 Nm. Encontrar la pérdida en la potencia mecánica si la velocidad es reducida a $n = 1200rpm$.

1.12.1. Solución

La salida de potencia entregada por el motor a $T_r = 60Nm$ y $n_r = 1450rpm$

$$P_{out} = T_r \Omega_r = T_r (2\pi n_r) = 60(2\pi \frac{1450}{60}) = 9111kW$$

(a) para una grúa

$$T = 60(\frac{1200}{1450})^0 = 60Nm$$

$$P_{out} = T(2\pi n) = 60(2\pi \frac{1200}{60}) = 7540W$$

(b) para el molino

$$T = 60(\frac{1200}{1450})^1 = 49,7Nm$$

$$P_{out} = T(2\pi n) = 49,7(2\pi \frac{1200}{60}) = 6245W$$

(c) para el ventilador

$$T = 60(\frac{1200}{1450})^2 = 41,1Nm$$

$$P_{out} = T(2\pi n) = 41,1(2\pi \frac{1200}{60}) = 5165W$$

La potencia mecánica a velocidad reducida y referenciada a la potencia nominal es

(a) para la grúa

$$\frac{7540}{9111}100 = 82,7\%$$

(b) para el molino

$$\frac{6245}{9111}100 = 68,5 \%$$

(c) para el ventilador

$$\frac{5165}{9111}100 = 56,7 \%$$

Capítulo 2

Imanes Permanentes y circuitos

Un imán permanente puede producir un campo magnético en el entrehierro sin necesidad de un campo de excitación y sin disipar potencia eléctrica. La energía externa es necesaria solamente para cargar la energía del campo magnético. no para mantenerlo. Como otro material ferromagnético, un imán permanente puede ser descrito por su ciclo de histéresis B-H. Los imanes permanentes son tambien llamados Materiales magnéticos duros, lo cual significa que son materiales ferromagnéticos con un ciclo de histéresis ancho.

La base para la evaluación de un imán permanente es la porción de el ciclo de histéresis localizado en la parte superior del segundo cuadrante, llamado curva de demagnetización (2.1). Si la intensidad de un campo magnético inverso es aplicado a uno previamente magnetizado, por decir, un espécimen toroidal, la densidad de flujo magnético cae a una magnitud determinado por el punto K . Cuando la densidad de flujo magnético se quita, la densidad de flujo regresa a el punto L de acuerdo a el lazo de histéresis menor. Así, la aplicación de un campo inverso reduce el remanente, o magnetismo remanente. Reaplicando la intensidad de un campo magnético nuevamente reduce la densidad de flujo, completando el lazo menor de histéresis regresando el material al mismo valor de la densidad de flujo al punto K como antes. El lazo de histéresis menor puede generalmente ser reemplazado con un pequeño error por una linea llamada línea de retroceso. Esta linea tiene un pendiente llamada la permeabilidad de retroceso μ_{rec} .

Siempre que el valor negativo de la intensidad de campo magnético aplicado no exceda el valor máximo correspondiente a el punto K , el imán permanente puede ser considerado razonablemente permanente. Si una intensidad de campo magnetico H negativo mucho mayor es aplicado, la densidad de flujo magnético se reducirá a un valor inferior que el punto K . En la eliminación de H , un nuevo y menor linea de

e.g. el toroide, la intensidad de campo magnético resultante desde la magnetización intrínseca $H_d = 0$. Si el imán permanente es removido del circuito magnético

$$H_d = -\frac{M_b B_i}{\mu_0} \quad (2.3)$$

donde M_b es el coeficiente de demagnetización que depende de la geometría del material. Usualmente $M_b < 1$. Estableciendo $B_i = B_d - \mu_0 H_d$ en la ecuación 2.3 relacionando la densidad de flujo magnético B_d y el campo de autodemagnetización H_d con la geometría del imán.

$$\frac{B_d}{\mu_0 H_d} = 1 - \frac{1}{M_b} \quad (2.4)$$

El coeficiente $(1 - 1/M_b)$ es proporcional a la permeabilidad del circuito magnético externo.

Los imanes permanentes se caracterizan por los siguientes parámetros:

- Densidad de flujo magnético de saturación B_{sat} y la intensidad de campo magnético de saturación H_{sat} . En este punto el alineamiento de todos los dominios de momentos magnéticos en la dirección del campo externo aplicado.
- Densidad de flujo magnético remanente B_r , o remanencia, es la densidad de flujo magnético correspondiente a la intensidad de campo magnético de cero. Una alta remanencia significa que el imán puede soportar una densidad de flujo magnético más alta en el entrehierro del circuito magnético.
- Intensidad de campo coercitivas H_c o coercitividad, es el valor de la intensidad de campo de demagnetización necesario para llevar la densidad de flujo magnético a cero en un material previamente magnetizado (en condiciones de magnetización cíclica y simétrica). Una alta coercitividad significa que, un imán más delgado puede ser usado para resistir el campo de demagnetización.
- Curva de demagnetización intrínseca (fig 2.1) es una porción del lazo de histéresis $B_i = f(H)$ localizado en la parte superior del segundo cuadrante, en donde $B_i = B - \mu_0 H$ de acuerdo a la ecuación 2.1. Para $H = 0$ la densidad de flujo intrínseco es $B_i = B_r$.
- Coercitividad Intrínseca, H_{ci} es la intensidad de campo magnético necesaria para traer a cero la densidad de flujo magnético intrínseco B_i de un material magnético descrito por la curva $B_i = f(H)$. para materiales $H_{ci} > H_c$.

- Permeabilidad magnética de retroceso, μ_{rec} es la razón de la densidad de flujo magnético sobre la intensidad de campo magnético en cualquier punto de la curva de demagnetización, i.e.,

$$\mu_{rec} = \mu_0 \mu_{rrec} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (2.5)$$

donde la permeabilidad relativa de retroceso es $\mu_{rrec} = 1..,3,5$.

- Energía magnética máxima por unidad producida por el imán permanente en el espacio externo es igual a la densidad de energía magnética máxima por volumen, i.e.

Capítulo 3

Análisis de Energía

Un análisis de potencia se utiliza para verificar la factibilidad de las especificaciones. La potencia necesaria para elevar un grado a una velocidad constante se analizará en primer lugar. La fuerza de arrastre es definido por la ecuación:

$$F_{arr} = \frac{1}{2}\rho C_d A v^2 \quad (3.1)$$

donde:

- $\rho = 2,33 \times 10^{-3} \text{ slug/ft}^3$ (densidad del aire al nivel del mar)
- $C_d = 0,5$ (coeficiente de arrastre)
- $A = 4 \times 5$ pies (área frontal del carro)

Ahora, la fuerza debido a la pendiente se determina usando

$$F_{pendiente} = mg S_l \quad (3.2)$$

donde S_l es la pendiente. Y la fuerza debido a la resistencia de rodamiento es

$$F_{rod} = mg C_r \quad (3.3)$$

donde: $C_r = 0,01 - 0,015$ (coeficiente de rodamiento para llantas sobre concreto). Ahora, la fuerza total se determina adicionando la fuerzas

$$F_{total} = F_{pendiente} + F_{rod} + F_{arr} \quad (3.4)$$

Usando la fuerza calculada, la potencia se puede calcular usando la siguiente ecuación:

$$P = F_{total}v \quad (3.5)$$