Rotación de Tensores $2D$

Juan Carlos Vergara Gallego, César Augusto Sierra Álvarez
Grupo de Investigación en Mecánica Aplicada
Universidad EAFIT

22 de febrero de 2015

Palabras clave: Vector, Tensor, Rotación, Matriz de transformación.

Resumen

Un procedimiento para expresar un tensor que se encuentra descrito en el sistema de referencia cartesiano $x - y$ en otro sistema de referencia cartesiano $x' - y'$ es presentado. Como base del procedimiento, se explica el proceso físico y matemático para encontrar la proyección del tensor (hallar el vector de tensiones) a lo largo de direcciones arbitrarias. El vector de tensiones es descompuesto en componentes normales y tangenciales a los planos que tienen por vector normal las direcciones arbitrarias. Por último, se encuentra el tensor de tensiones en un sistema de referencia primado en el cual la dirección de los vectores normales a los planos estudiados coinciden con los ejes del sistema primado.

1. Planteamiento del problema

El propósito de este documento es presentar el proceso mediante el cual es posible encontrar el tensor de tensiones $\left[\sigma'\right]$ si se conoce el tensor de tensiones $\left[\sigma\right]$. También, se presenta el caso inverso, en el cual se busca encontrar $\left[\sigma\right]$ si se conoce $\left[\sigma'\right]$. Por último, se presentan las expresiones matemáticas para lograr el propósito. En la fig. 1 se presenta la descripción gráfica del problema para el caso bidimensional. En ésta fig. 1 se presenta gráficamente el tensor de tensiones $\left[\sigma\right]$ en el sistema de referencia $x - y$ y el tensor de tensiones $\left[\sigma'\right]$ en el sistema de referencia $x' - y'$ para un mismo punto. Lo que se pretende encontrar es una relación matemática que permita expresar un tensor $\left[\sigma\right]$ que se encuentra descrito en el sistema de referencia cartesiano $x - y$ en otro sistema de referencia cartesiano $x' - y'$.

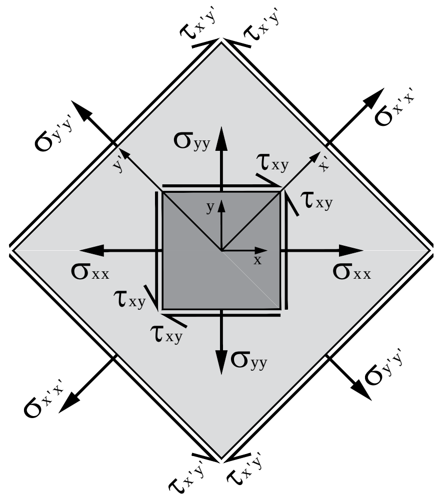
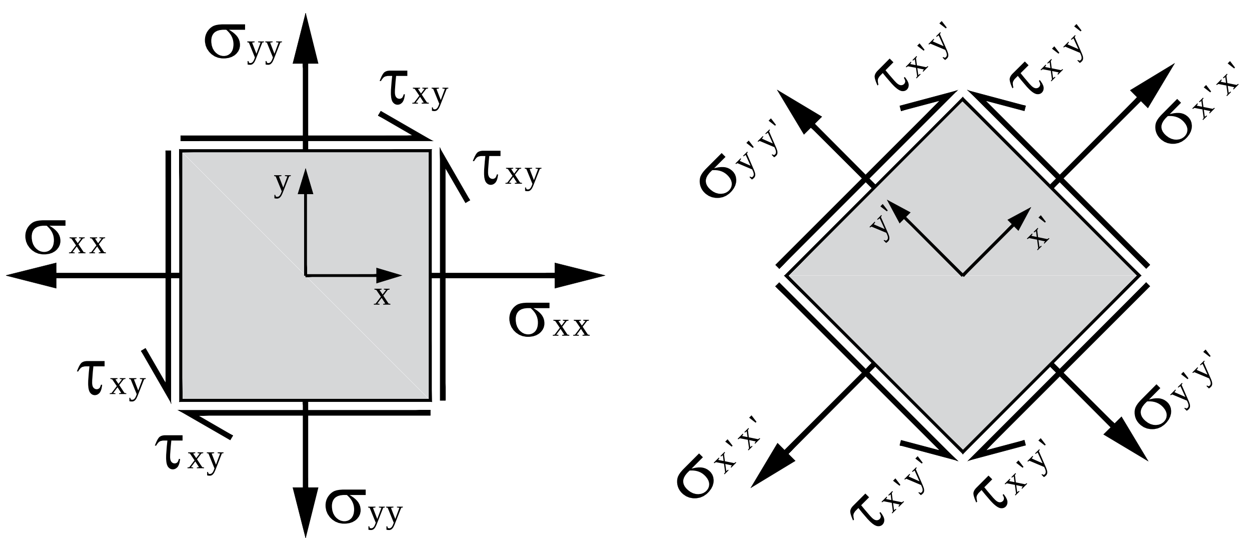


Figura 1: Problema 2D.

2. Desarrollo del problema $2D$

En la fig. 2 se muestra la representación gráfica del tensor de esfuerzos en dos sistemas de referencia, $x - y$ y $x' - y'$.



(a) Tensor de Esfuerzos $[\sigma]$ en el sistema de referencia $x - y$.

(b) Tensor de Esfuerzos $[\sigma']$ en el sistema de referencia $x' - y'$.

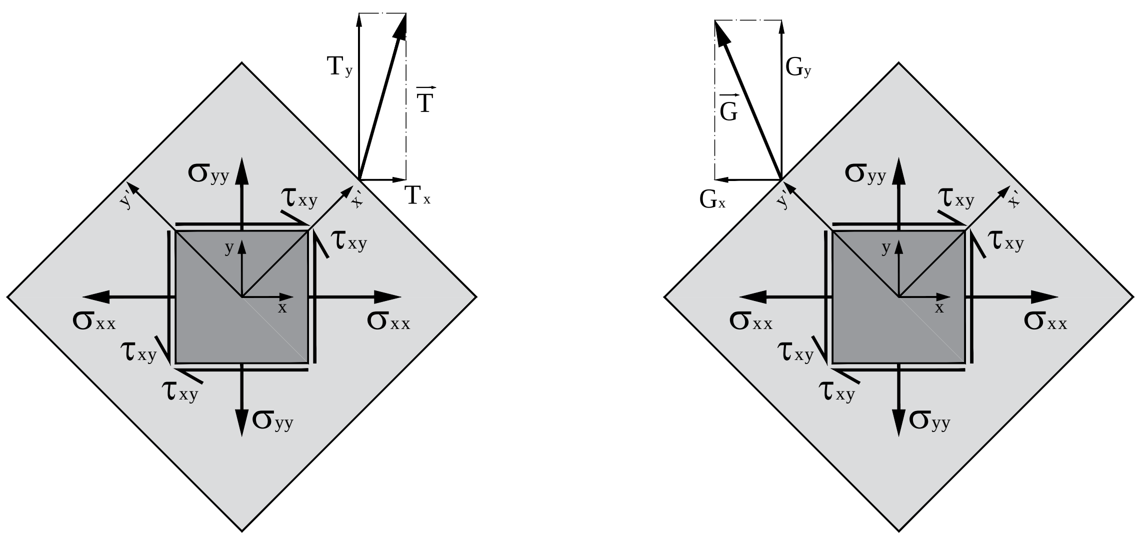
Figura 2: Representación gráfica de Tensor de Esfuerzos en dos sistemas de referencia diferentes.

La representación matricial del tensor de esfuerzos en el sistema de referencia $x - y$ y en el sistema de referencia $x' - y'$ está dado por la eq. (1) y la eq. (2), respectivamente.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Para poder escribir el tensor de esfuerzos en un sistema de referencia cartesiano rotado $x' - y'$ a partir del tensor en el sistema de referencia original $x - y$, es necesario inicialmente conocer el vector de tracciones (proyección del tensor de esfuerzos), en planos ortogonales a los ejes x' e y'. En las fig. 3a y fig. 3b se muestra la proyección del tensor de esfuerzos $[\sigma]$, sobre los planos cuyo vector normal está en dirección x' e y', respectivamente.



(a) Proyección de $[\sigma]$ sobre el plano con vector normal x'.

(b) Proyección de $[\sigma]$ sobre el plano con vector normal y'.

Figura 3: Vector de tracciones sobre los planos (caras) con vector normal x' e y'

Para realizar la proyección, utilizamos la ecuación de Cauchy, dada por la eq. (3):

$$\vec{t} = [\sigma]\,[n] \tag{3}$$

Donde $[n]$ corresponde al vector normal a la cara sobre la que estamos proyectando el tensor.

De esta forma el vector de tracciones sobre los planos con vector normal x' e y' de la fig. 3 están dados por la eq. (4) y eq. (5) , respectivamente. La eq. (5) corresponde al vector de tensiones sobre la cara con vector normal $[m]$. El vector $\vec{G}$, al igual que $[\sigma]$ y $[m]$, se encuentra descrito en el sistema de referencia $x - y$.

$$\vec{T} = [\sigma]\,[\hat{n}] \tag{4}$$

$$\vec{G} = [\sigma]\,[\hat{m}] \tag{5}$$

Donde $[n]$ y $[m]$ son los vectores normales, los cuales son obtenidos a partir de los cosenos directores entre el sistema de referencia $x - y$ y $x' - y'$, de acuerdo a lo mostrado en la fig. 4. se muestran los cosenos directores entre el sistema de referencia $x - y$ y $x' - y'$. Los vectores $[n]$ y $[m]$ están dados por:

$$\hat{n}^T = [\cos\left(\theta_{x-x'}\right) \;\; \cos\left(\theta_{y-x'}\right)] \tag{6}$$

$$\hat{m}^T = [\cos\left(\theta_{x-y'}\right) \;\; \cos\left(\theta_{y-y'}\right)] \tag{7}$$

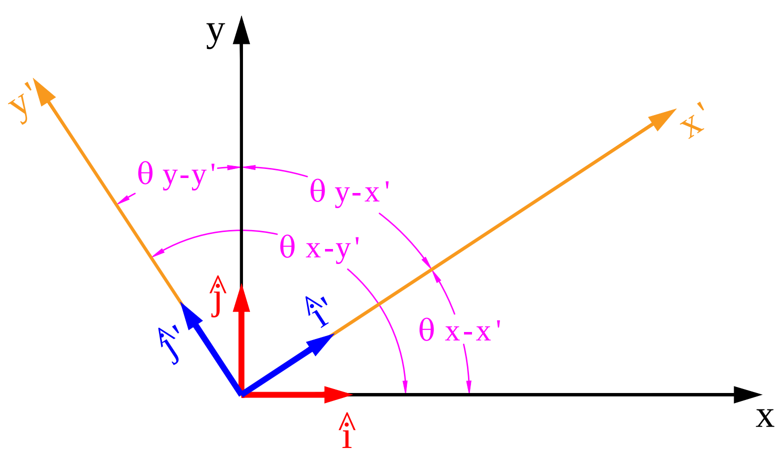
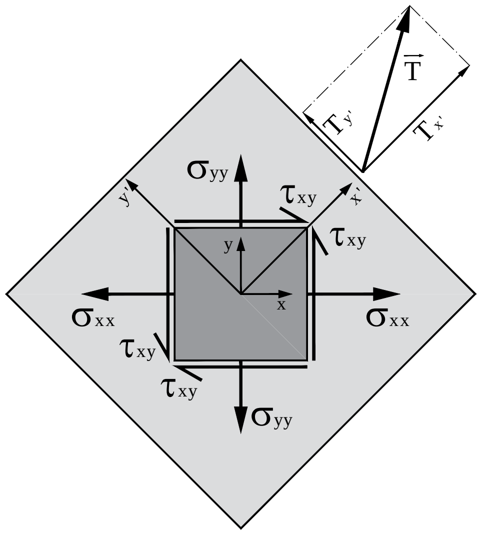
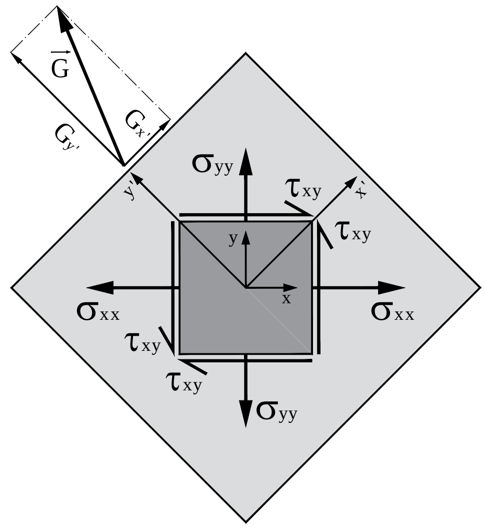


Figura 4: Cosenos directores.

Hasta este momento el vector $\vec{T}$ y el vector $\vec{G}$, al igual que $[\sigma]$, $\hat{n}$ y $\hat{m}$, se encuentran descrito en el sistema de referencia $x - y$. Lo que se debe hacer ahora es describir el vector $\vec{T}$ y el vector $\vec{G}$ en el sistema de referencia $x' - y'$, conforme a como se representa en la fig. 5.



(a) Vector $\vec{T}$ en el sistema de referencia $x' - y'$



(b) Vector $\vec{G}$ en el sistema de referencia $x' - y'$.

Figura 5: Vector de tracciones sobre los planos (caras) con vector normal x' e y' proyectados en el sistema de referencia $x'y'$

Para realizar esa descripción, debemos encontrar la matriz de transformación, $[A]$, del sistema de referencia $x - y$ al sistema de referencia $x' - y'$. Ésta la encontramos con referencia a la fig. 4.

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Aplicando esta transformación sobre los vectores $\vec{T}$ y $\vec{G}$ se tiene:

$$\vec{T'} = [A]\,[T] \tag{9}$$

$$\vec{G'} = [A]\,[G] \tag{10}$$

Que escrito en términos del tensor $[\sigma]$ y los vectores normales $\hat{n}$ y $\hat{m}$ se obtiene:

$$\vec{T'} = [A]\,[\sigma]\,[n] \tag{11}$$

$$\vec{G'} = [A]\,[\sigma]\,[m] \tag{12}$$

Ahora, como los ejes x' y' son normales al planos donde se proyectó $[\sigma]$, las componentes del vector $\vec{T'}$ y del vector $\vec{G'}$ son normales y tangenciales a dichos planos, respectivamente.

De esta forma, si se escribe por extensión los vectores se tiene:

$$\vec{T'} = T_{x'}\hat{i'} + T_{y'}\hat{j'} \tag{13}$$

$$\vec{G'} = G_{x'}\hat{i'} + G_{y'}\hat{j'} \tag{14}$$

Donde para el vector $\vec{T'}$, $T_{x'}$ es la componente normal y $T_{y'}$ es la componente tangencial al plano con vector normal en dirección de x' , ver fig. 5a. Para el vector $\vec{G'}$, $G_{x'}$ es la componente tangencial y $G_{y'}$ es la componente normal al plano con vector normal en dirección de y' ver fig. 5b.

Superponiendo las figuras 5a y 5b y en que los planos de corte son perpendiculares entre si, concluimos que los vectores $\vec{T'}$ y $\vec{G'}$, descritos en el sistema de referencia $x' - y'$, corresponden al tensor $[\sigma']$, ver fig. 6.

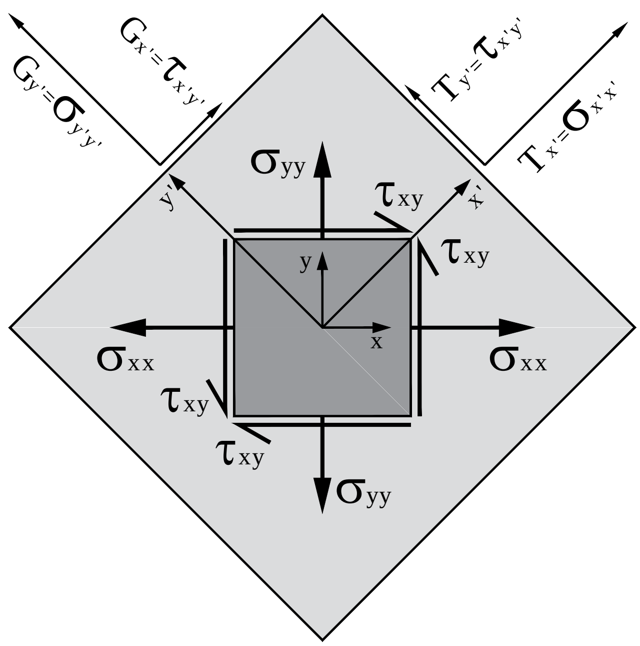


Figura 6: Representación tensor en sistema de referencia $x' - y'$

Por tanto:

$$T_{y'} = G_{x'} = \tau_{x'y'} \tag{15}$$

$$T_{x'} = \sigma_{x'x'} \tag{16}$$

$$G_{y'} = \sigma_{y'y'} \tag{17}$$

$$[\sigma'] = \left[\begin{array}{cc} T_{x'} & G_{x'} \\ T_{y'} & G_{y'} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \sigma_{x'x'} & \tau_{y'x'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'y'} \end{array} \right] \tag{18}$$

Luego de varias manipulaciones algebraicas sobre las ecuaciones 11 y 12, es posible llegar a la ecuación que nos permite transformar un tensor de tensiones descrito en un sistema de referencia $x - y$ a un sistema de referencia $x' - y'$ [1].

$$[\sigma'] = [A] [\sigma] [A]^T \tag{19}$$

[1]Este procedimiento es igualmente válido para el caso $3D$

3. Manipulaciones Algebraicas para hallar la Ecuación 19

El tensor $[\sigma']$, eq. (2), es posible reescribirlo de la siguiente, eq. (20):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{y'x'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{y'x'} \\ 0 & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \tag{20}$$

La parte derecha de la eq. (20) la podemos reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & 0 \\ \cos\theta_{y-x'} & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{x'y'} \\ 0 & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-y'} & 0 \\ \cos\theta_{y-y'} & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Por tanto, la eq. (20) es posible reescribirla agrupando términos:

$$\begin{aligned} [\sigma] = & \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \\ & \left(\begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & 0 \\ \cos\theta_{y-x'} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta_{x-y'} \\ 0 & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{23}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y'y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{x-y'} \\ \cos\theta_{y-x'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Donde:

$$[A]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{x-y'} \\ \cos\theta_{y-x'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Reescribiendo la eq. (19).

$$[\sigma'] = [A]\,[\sigma]\,[A]^T \tag{26}$$