Rotación de Vectores, Caso $2D$ y $3D$

Juan Carlos Vergara Gallego - Grupo de Investigación en Mecánica Aplicada
Universidad EAFIT

25 de agosto de 2014

Palabras clave: Vectores, Rotación, Mecánica del Medio Continuo.

Resumen

En este documento se presenta la formulación mediante la cual se hace posible describir un vector que se encuentra descrito en un sistema de referencia $x-y-z$ en otro sistema de referencia $x'-y'-z'$.

1. Planteamiento del problema

En la figura 1 se presenta la descripción gráfica del problema, el cual corresponde en encontrar la relación matemática para expresar un vector que se encuentra descrito en el sistema de referencia $x-y$ al sistema de referencia $x'-y'$. En esta figura se presentan los ángulos entre cada uno de los ejes de los sistemas de referencia y los vectores unitarios base de cada sistema de referencia.

- $\theta_{x-x'}$: Ángulo entre el eje x y x'
- $\theta_{x-y'}$: Ángulo entre el eje x y y'
- $\theta_{y-x'}$: Ángulo entre el eje y y x'
- $\theta_{y-y'}$: Ángulo entre el eje y y y'
- $\hat{i}$, $\hat{j}$: Vectores unitarios bases del sistema de referencia $x-y$.
- $\hat{i}'$, $\hat{j}'$: Vectores unitarios bases del sistema de referencia $x'-y'$.

2. Desarrollo del problema $2D$

En la figura 2a y 2b se presenta el vector $\overrightarrow{V}$ en los sistemas de referencia $x-y$ y $x'-y'$ respectivamente.

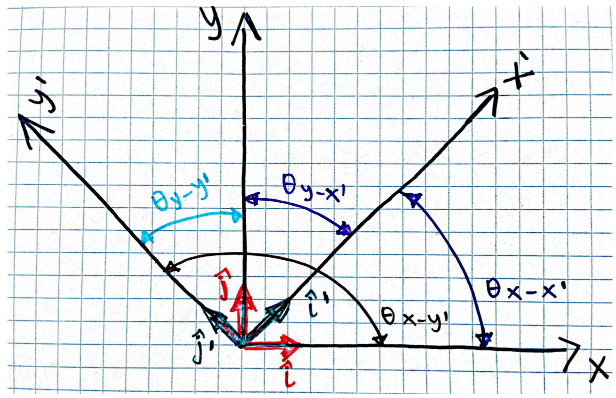


Figura 1: Ángulos entre los ejes de ambos sistemas de referencia.

El vector $\overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{V'}$ son el mismo en ambos sistemas de referencia, su magnitud y significado físico no varía por tener diferente sistema de referencia, lo único diferente entre estos es la forma de representarlos en terminos de sus componentes. Lo cual se puede escribir matemáticamente como:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V'} \tag{1}$$

Dónde:

$$\overrightarrow{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{V'} = V_{x'}\hat{i}' + V_{y'}\hat{j}' \tag{3}$$

Ahora, expresamos el vector unitario $\hat{i}$ en términos de los vectores unitarios $\hat{i}'$ y $\hat{j}'$, luego hacemos lo mismo con el vector unitario $\hat{j}$.

$$\hat{i} = \hat{i}' \cos\theta_{x-x'} + \hat{j}' \cos\theta_{x-y'} \tag{4}$$

$$\hat{j} = \hat{i}' \cos\theta_{y-x'} + \hat{j}' \cos\theta_{y-y'} \tag{5}$$

Reemplazando las ecuaciones 4 y 5 en la ecuación 2:

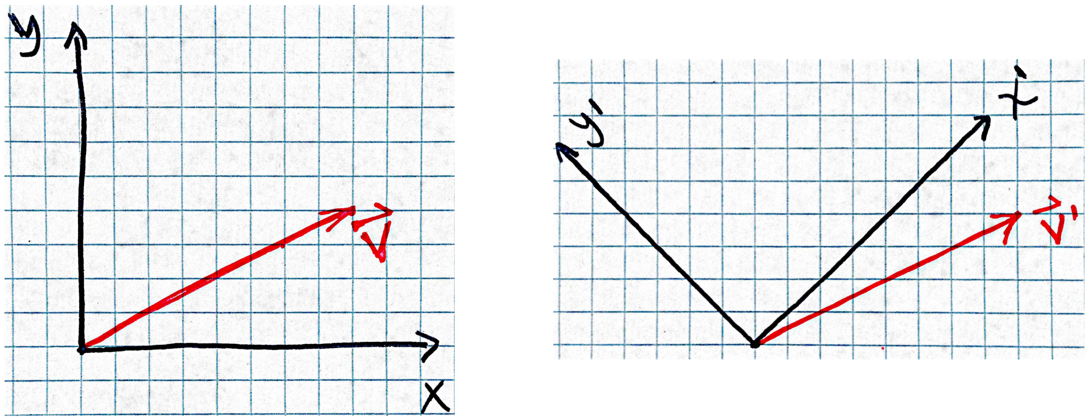
$$\overrightarrow{V} = V_x\left(\hat{i}' \cos\theta_{x-x'} + \hat{j}' \cos\theta_{x-y'}\right) + V_y\left(\hat{i}' \cos\theta_{y-x'} + \hat{j}' \cos\theta_{y-y'}\right)$$

Reorganizando los términos:

$$\overrightarrow{V} = \left(V_x \cos\theta_{x-x'} + V_y \cos\theta_{y-x'}\right)\hat{i}' + \left(V_x \cos\theta_{x-y'} + V_y \cos\theta_{y-y'}\right)\hat{j}' \tag{6}$$

Ahora reemplazamos las ecuaciones 6 y 3 en la ecuación 1:

$$\left(V_x \cos\theta_{x-x'} + V_y \cos\theta_{y-x'}\right)\hat{i}' + \left(V_x \cos\theta_{x-y'} + V_y \cos\theta_{y-y'}\right)\hat{j}' = V_{x'}\hat{i}' + V_{y'}\hat{j}' \tag{7}$$



(a) Vector $\vec{V}$ en el sistema de referencia $x - y$.

(b) Vector $\vec{V'}$ en el sistema de referencia $x' - y'$.

Figura 2

Ambos lados de la ecuación 7 contiene términos que dependen de $\hat{i}'$ y $\hat{j}'$. Igualando los términos que dependen de $\hat{i}'$ y los que dependen de $\hat{j}'$, llegamos a:

$$V_x \cos\theta_{x-x'} + V_y \cos\theta_{y-x'} = V_{x'} \tag{8}$$

$$V_x \cos\theta_{x-y'} + V_y \cos\theta_{y-y'} = V_{y'} \tag{9}$$

Las ecuaciones 8 y 9 las expresamos matricialmente:

$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \tag{10}$$

En la ecuación 10 se identifican los siguientes elementos:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} : \text{Componentes del vector } \vec{V} \text{ en el sistema de referencia } x - y$$

$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{bmatrix} : \text{Componentes del vector } \vec{V'} \text{ en el sistema de referencia } x' - y'$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \tag{11}$$

La ecuación 11 corresponde a la matriz de transformación, la cual nos permite representar entidades físico-matemáticas, descritas en el sistema de referencia $x - y$, en el sistema de referencia $x' - y'$.

¿Cómo leer y/o hallar la matriz de transformación $[T]$?.

Lectura de columnas:

- Columna 1: $\begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} \end{bmatrix}$, vector que contiene los cosenos de los ángulos entre el eje x del sistema de referencia original y los ejes x' y y' (ver figura 1).
- Columna 2: $\begin{bmatrix} \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix}$, vector que contiene los cosenos de los ángulos entre el eje y del sistema de referencia original y los ejes x' y y' (ver figura 1).

Lectura de filas:

- Fila 1: $\begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \end{bmatrix}$, vector que contiene los cosenos de los ángulos entre los ejes x y x' y entre los ejes y y x' (ver figura 1).
- Fila 2: $\begin{bmatrix} \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix}$, vector que contiene los cosenos de los ángulos entre los ejes x y y' y entre los ejes y y y' (ver figura 1).

Si lo que conocemos es el vector en el sistema de referencia $x' - y'$ y lo queremos expresar en el sistema de referencia $x-y$, solo es necesario realizar manipulaciones matemáticas simples sobre la ecuación 10.
Reescribiendo la ecuación 10:

$$[V'] = [T]\,[V]$$

Premultiplicamos la ecuación 10 por la inversa de la matriz de transformación:

$$[T]^{-1}\,[V'] = [T]^{-1}\,[T]\,[V]$$

Ya que $[T]$ es una matriz de transformación entre dos sistemas de referencia ortogonales, se tiene que $[T]^{-1} = [T]^T$. Además, se tiene que $[T]\,[T]^T = [I]$ y que $[I]\,[V] = [V]$.

$$[V] = [T]^T\,[V'] \tag{12}$$

La ecuación 12 nos permite expresar el vector $\vec{V'}$ del sistema de referencia $x' - y'$ en el sistema de referencia $x - y$.

Nota importante: Se utiliza la función trigonométrica *Coseno* pues esta es una función par y por ende no importa el signo del ángulo entre los ejes.
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

3. Desarrollo del problema $3D$

El caso tridimensional ($3D$) no es nada más que una extensión del caso bidimensional ($2D$), por lo cual en este documento solo se muestra que se le debe adicionar a las ecuaciones descritas en el caso ($2D$).

- $\theta_{x-x'}$: Ángulo entre el eje x y x'
- $\theta_{x-y'}$: Ángulo entre el eje x y y'

- $\theta_{x-z'}$: Ángulo entre el eje x y z'
- $\theta_{y-x'}$: Ángulo entre el eje y y x'
- $\theta_{y-y'}$: Ángulo entre el eje y y y'
- $\theta_{y-z'}$: Ángulo entre el eje y y z'
- $\theta_{z-x'}$: Ángulo entre el eje z y x'
- $\theta_{z-y'}$: Ángulo entre el eje z y y'
- $\theta_{z-z'}$: Ángulo entre el eje z y z'
- $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$: Vectores unitarios bases del sistema de referencia $x-y-z$.
- $\hat{\imath}'$, $\hat{\jmath}'$, $\hat{k}'$: Vectores unitarios bases del sistema de referencia $x'-y'-z'$.

Reescribimos la ecuación 10:

$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} & \cos\theta_{z-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} & \cos\theta_{z-y'} \\ \cos\theta_{x-z'} & \cos\theta_{y-z'} & \cos\theta_{z-z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{13}$$

Donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} & \cos\theta_{z-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} & \cos\theta_{z-y'} \\ \cos\theta_{x-z'} & \cos\theta_{y-z'} & \cos\theta_{z-z'} \end{bmatrix} \tag{14}$$

El significado de las columnas y filas de la matriz de transformación $[T]$ de la ecuación 14 es el mismo al que se le dio para el caso de la matriz de transformación presentada en la ecuación 11.

Reescribiendo la ecuación 13 en forma compacta y la ecuación de transformación de $x'-y'-z'$ a $x-y-z$.

$$\left[V'\right] = [T]\,[V]$$
$$[V] = [T]^T \left[V'\right]$$