Rotación de Vectores, Caso $2D$ y $3D$

Juan Carlos Vergara Gallego - Grupo de Investigación en Mecánica Aplicada
Universidad EAFIT

24 de enero de 2015

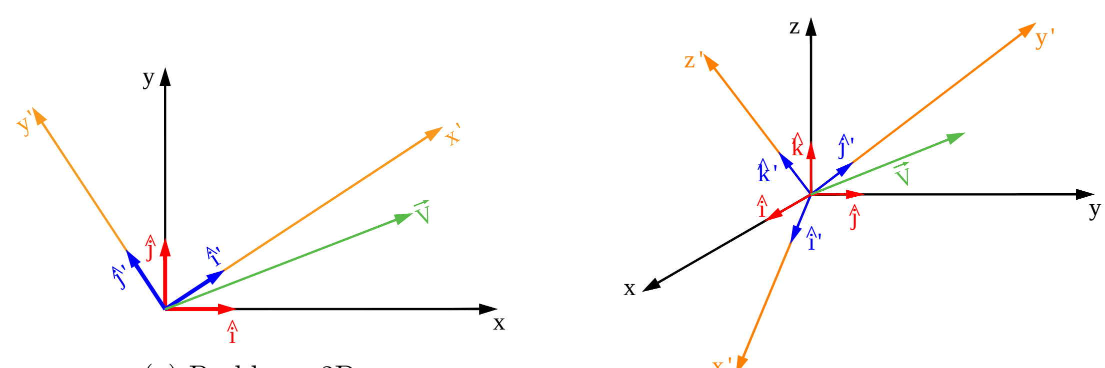
Palabras clave: Vectores, Rotación, Mecánica del Medio Continuo.

Resumen

En este documento se presenta la matriz de transfomación para expresar un vector que se encuentra descrito en el sistema de referencia cartesiano $x - y - z$ en otro sistema de referencia cartesiano $x' - y' - z'$.

1. Planteamiento del problema

En las figuras 1a y 1b se presenta la descripción gráfica del problema, en el cual se pretende encontrar la relación matemática para expresar un vector que se encuentra descrito en el sistema de referencia cartesiano $x - y - z$ al sistema de referencia $x' - y' - z'$. La figura 1a corresponde al caso bidimensional y la figura 1b al caso tridimensional.



(a) Problema 2D.

(b) Problema 3D.

Figura 1

2. Desarrollo del problema $2D$

En la figura 2 se muestran los cosenos directores entre el sistema de referencia $x-y$ y el sistema de referencia $x'-y'$ junto con los vectores unitarios de cada base ortogonal $\left(\hat{i},\hat{j}\right)$ y $\left(\hat{i}',\hat{j}'\right)$.

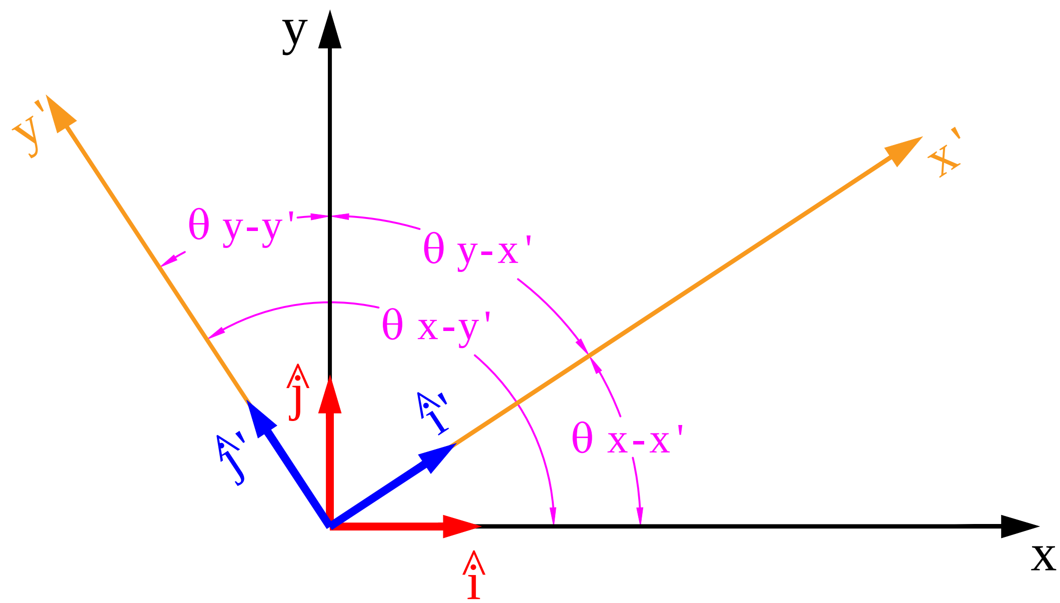


Figura 2: Ángulos entre los ejes de ambos sistemas de referencia.

Donde:

→ $\theta_{x-x'}$: Ángulo entre el eje x y el eje x'.

→ $\theta_{x-y'}$: Ángulo entre el eje x y el eje y'.

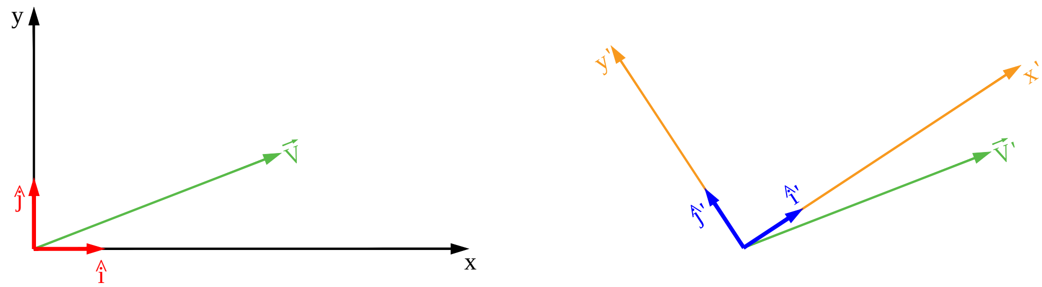
→ $\theta_{y-x'}$: Ángulo entre el eje y y el eje x'.

→ $\theta_{y-y'}$: Ángulo entre el eje y y el eje y'.

→ $\hat{i}$, $\hat{j}$: Vectores unitarios bases del sistema de referencia $x-y$.

→ $\hat{i}'$, $\hat{j}'$: Vectores unitarios bases del sistema de referencia $x'-y'$.

El vector a transformar de sistema de referencia cartesiano lo denominaremos $\vec{V}$ en el sistema de referencia $x-y$, figura 3a y $\vec{V}'$ en el sistema de referencia $x'-y'$, figura 3b.

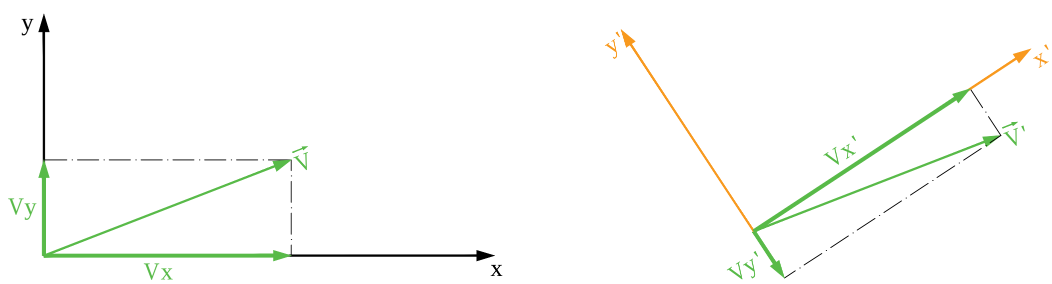


(a) Vector $\vec{V}$ en el sistema de referencia $x - y$.

(b) Vector $\vec{V'}$ en el sistema de referencia $x' - y'$.

Figura 3

En la figura 3a se presenta el vector $\vec{V}$ en el sistema de referencia cartesiano $x - y$ y en la figura 3b se presenta el vector $\vec{V'}$ en el sistema de referencia $x' - y'$. Adicionalmente, en la figuras 4a y 4b se presenta el vector a transformar junto con su proyección sobre cada uno de los ejes del sistema de referencia.



(a) Vector $\vec{V}$ en el sistema de referencia $x - y$.

(b) Vector $\vec{V'}$ en el sistema de referencia $x' - y'$.

Figura 4

El vector $\vec{V}$ y el vector $\vec{V'}$ son equivalentes, iguales, en ambos sistemas de referencia, su magnitud y significado físico no varía por tener diferente sistema de referencia, lo único diferente entre estos es la forma de representarlos en terminos de sus componentes. Lo cual se puede escribir matemáticamente como:

$$\vec{V} = \vec{V'} \tag{1}$$

Es posible expresar el vector en cada base ortogonal a partir de sus componentes escalares (figura 4a y 4b), como se muestra en las ecuaciones 2 y 3.

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} \tag{2}$$

$$\vec{V'} = V_{x'}\hat{\imath}' + V_{y'}\hat{\jmath}' \tag{3}$$

Ahora, expresando el vector unitario $\hat{\imath}$ en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}'$ y $\hat{\jmath}'$. Se procede de la misma manera con el vector unitario $\hat{\jmath}$.

$$\hat{\imath} = \hat{\imath}' \cos\theta_{x-x'} + \hat{\jmath}' \cos\theta_{x-y'} \tag{4}$$

$$\hat{\jmath} = \hat{\imath}' \cos\theta_{y-x'} + \hat{\jmath}' \cos\theta_{y-y'} \tag{5}$$

Reemplazando las ecuaciones 4 y 5 en la ecuación 2:

$$\vec{V} = V_x\left(\hat{\imath}' \cos\theta_{x-x'} + \hat{\jmath}' \cos\theta_{x-y'}\right) + V_y\left(\hat{\imath}' \cos\theta_{y-x'} + \hat{\jmath}' \cos\theta_{y-y'}\right)$$

Reorganizando los términos:

$$\vec{V} = \left(V_x \cos\theta_{x-x'} + V_y \cos\theta_{y-x'}\right)\hat{\imath}' + \left(V_x \cos\theta_{x-y'} + V_y \cos\theta_{y-y'}\right)\hat{\jmath}' \tag{6}$$

Ahora reemplazando las ecuaciones 6 y 3 en la ecuación 1:

$$\left(V_x \cos\theta_{x-x'} + V_y \cos\theta_{y-x'}\right)\hat{\imath}' + \left(V_x \cos\theta_{x-y'} + V_y \cos\theta_{y-y'}\right)\hat{\jmath}' = V_{x'}\hat{\imath}' + V_{y'}\hat{\jmath}' \tag{7}$$

Ambos lados de la ecuación 7 contiene términos que dependen de $\hat{\imath}'$ y $\hat{\jmath}'$. Igualando los términos que dependen de $\hat{\imath}'$ y los que dependen de $\hat{\jmath}'$, llegamos a:

$$V_x \cos\theta_{x-x'} + V_y \cos\theta_{y-x'} = V_{x'} \tag{8}$$

$$V_x \cos\theta_{x-y'} + V_y \cos\theta_{y-y'} = V_{y'} \tag{9}$$

Las ecuaciones 8 y 9 las expresamos matricialmente:

$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \tag{10}$$

En la ecuación 10 se identifican los siguientes elementos:

$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$: Componentes del vector $\vec{V}$ en el sistema de referencia $x - y$

$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{bmatrix}$: Componentes del vector $\vec{V'}$ en el sistema de referencia $x' - y'$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix} \tag{11}$$

La ecuación 11 corresponde a la matriz de transformación, la cual nos permite representar entidades físico-matemáticas, descritas en el sistema de referencia $x-y$, en el sistema de referencia $x'-y'$.

¿Cómo leer y/o hallar la matriz de transformación $[T]$?.

Lectura de columnas:

- Columna 1: $\begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} \end{bmatrix}$, vector que contiene los cosenos de los ángulos entre el eje x del sistema de referencia original y los ejes x' y y' (ver figura 1a).
- Columna 2: $\begin{bmatrix} \cos\theta_{y-x'} \\ \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix}$, vector que contiene los cosenos de los ángulos entre el eje y del sistema de referencia original y los ejes x' y y' (ver figura 1a).

Lectura de filas:

- Fila 1: $\begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} \end{bmatrix}$, vector que contiene los cosenos de los ángulos entre los ejes x y x' y entre los ejes y y x' (ver figura 1a).
- Fila 2: $\begin{bmatrix} \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} \end{bmatrix}$, vector que contiene los cosenos de los ángulos entre los ejes x y y' y entre los ejes y y y' (ver figura 1a).

Si lo que conocemos es el vector en el sistema de referencia $x'-y'$ y lo queremos expresar en el sistema de referencia $x-y$, solo es necesario realizar manipulaciones matemáticas simples sobre la ecuación 10.
Reescribiendo la ecuación 10:

$$\left[V'\right] = [T]\,[V]$$

Premultiplicamos la ecuación 10 por la inversa de la matriz de transformación:

$$[T]^{-1}\left[V'\right] = [T]^{-1}[T]\,[V]$$

Ya que $[T]$ es una matriz de transformación entre dos sistemas de referencia ortogonales, se tiene que $[T]^{-1} = [T]^{T}$. Además, se tiene que $[T]\,[T]^{T} = [I]$ y que $[I]\,[V] = [V]$.

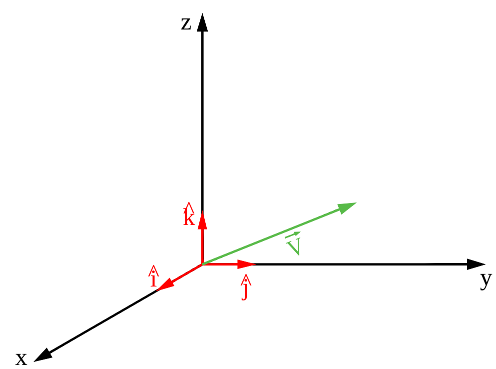
$$[V] = [T]^{T}\left[V'\right] \tag{12}$$

La ecuación 12 nos permite expresar el vector $\vec{V}'$ del sistema de referencia $x'-y'$ en el sistema de referencia $x-y$.

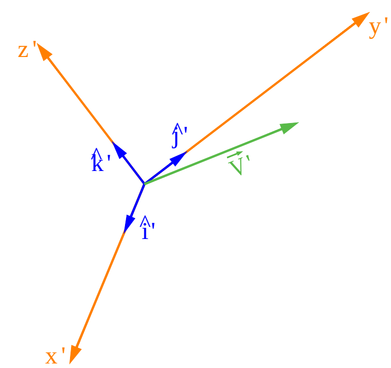
Nota importante: Se utiliza la función trigonométrica *Coseno* pues esta es una función par y por ende no importa el signo del ángulo entre los ejes.
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$.

3. Desarrollo del problema $3D$

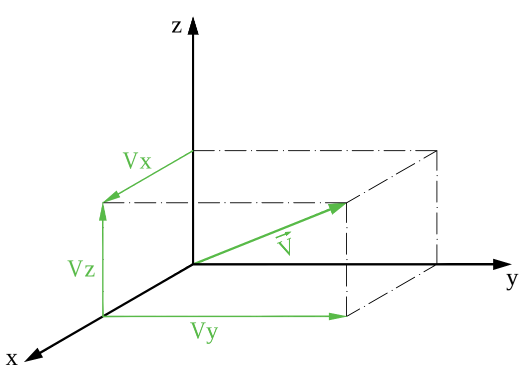
En la figura 5 se presenta el vector a transformar, denominado $\overrightarrow{V}$ en el sistema de referencia $x-y-z$ y $\overrightarrow{V'}$ en el sistema de referencia $x'-y'-z'$.
En las figuras 5a y 5b se presenta dicho vector en cada sistema de referencia. En las figuras 5c y 5d se presenta el vector en cada sistema de referencia junto con sus proyecciones escalares sobre los ejes de cada sistema de referencia.



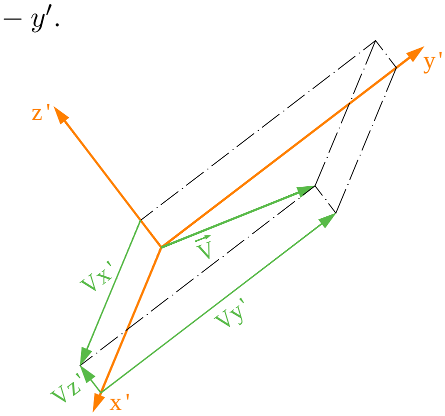
(a) Vector $\overrightarrow{V}$ en el sistema de referencia $x-y$.



(b) Vector $\overrightarrow{V'}$ en el sistema de referencia $x'-y'$.



(c) Vector $\overrightarrow{V}$ en el sistema de referencia $x-y$.

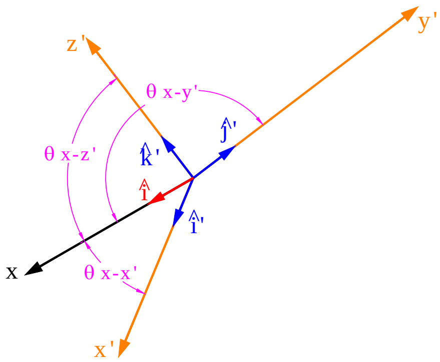


(d) Vector $\overrightarrow{V'}$ en el sistema de referencia $x'-y'$.

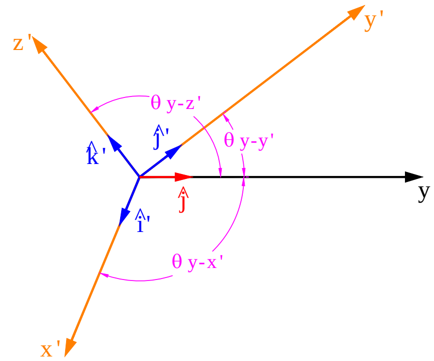
Figura 5

En la figura 6 se presentan los ángulos entre los ejes del sistema de referencia $x-y-z$ y el sistema de referencia $x'-y'-z'$, cosenos directores, junto con los vectores unitarios de cada base ortogonal $\left(\hat{i},\hat{j},\hat{k}\right)$ y $\left(\hat{i}',\hat{j}',\hat{k}'\right)$.

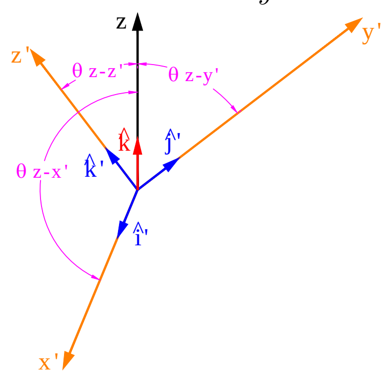
El caso tridimensional ($3D$) no es nada más que una extensión del caso bi-



(a) Vector $\overrightarrow{V}$ en el sistema de referencia $x - y$.



(b) Vector $\overrightarrow{V'}$ en el sistema de referencia $x' - y'$.



(c) Vector $\overrightarrow{V'}$ en el sistema de referencia $x' - y'$.

Figura 6

dimensional ($2D$), por lo cual en este documento solo se muestra que se le debe adicionar a las ecuaciones descritas en el caso ($2D$).

- $\theta_{x-x'}$: Ángulo entre el eje x y el eje x'
- $\theta_{x-y'}$: Ángulo entre el eje x y el eje y'
- $\theta_{x-z'}$: Ángulo entre el eje x y el eje z'
- $\theta_{y-x'}$: Ángulo entre el eje y y el eje x'
- $\theta_{y-y'}$: Ángulo entre el eje y y el eje y'
- $\theta_{y-z'}$: Ángulo entre el eje y y el eje z'
- $\theta_{z-x'}$: Ángulo entre el eje z y el eje x'
- $\theta_{z-y'}$: Ángulo entre el eje z y el eje y'
- $\theta_{z-z'}$: Ángulo entre el eje z y el eje z'
- $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$: Vectores unitarios bases del sistema de referencia $x - y - z$.

- $\hat{i}'$, $\hat{j}'$, $\hat{k}'$: Vectores unitarios bases del sistema de referencia $x' - y' - z'$.

Reescribiendo la ecuación 10:

$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} & \cos\theta_{z-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} & \cos\theta_{z-y'} \\ \cos\theta_{x-z'} & \cos\theta_{y-z'} & \cos\theta_{z-z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{13}$$

Donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{x-x'} & \cos\theta_{y-x'} & \cos\theta_{z-x'} \\ \cos\theta_{x-y'} & \cos\theta_{y-y'} & \cos\theta_{z-y'} \\ \cos\theta_{x-z'} & \cos\theta_{y-z'} & \cos\theta_{z-z'} \end{bmatrix} \tag{14}$$

El significado de las columnas y filas de la matriz de transformación $[T]$ de la ecuación 14 es el mismo al que se le dio para el caso de la matriz de transformación presentada en la ecuación 11.

Reescribiendo la ecuación 13 en forma compacta y la ecuación de transformación de $x' - y' - z'$ a $x - y - z$.

$$\left[V'\right] = [T]\,[V]$$
$$[V] = [T]^T \left[V'\right]$$