中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

基于模型检测和定理证明的形式化验证：基础理论与相关工具

作者姓名：刘坚

指导教师：蒋颖 研究员

中国科学院软件研究所

学位类别：工学博士

学科专业：计算机软件与理论

培养单位：中国科学院软件研究所

2018 年 03 月

Towards Combing Model Checking and Theorem Proving: Theory and Related Tools

By

Jian Liu

A thesis submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor in Computer Software and Theory

Institute of Software, Chinese Academy of Sciences

March, 2018

中国科学院大学
研究生学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。

作者签名：

日　　期：

中国科学院大学
学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：　　导师签名：

日　　期：　　日　　期：

摘 要

模型检测和逻辑推演是目前用于形式化验证系统正确性的主要的两种方法。模型检测的优点是可以实现完全自动化，验证过程不需要人工干预，缺点是在处理大型系统或者无穷状态系统的过程中通常会面临状态爆炸问题；逻辑推演的优点是通常不关心系统的状态，从而避免了状态爆炸问题的产生，而缺点则是通常不能实现完全自动化，在验证的过程中通常需要人工干预。因此，如何结合模型检测和逻辑推演两种方法的优点来建立新的形式化验证方法是本文的主要研究内容。

本文的第一个工作是，建立一个逻辑系统 CTL_P，CTL_P 以 Kripke 模型为参数，对于一个给定的 Kripke 模型 $\mathcal{M}$，一个 $\mathsf{CTL}_P(\mathcal{M})$ 公式是有效的当且仅当这个公式在 M 中是满足的。相比于在 CTL 逻辑中只能讨论模型中当前状态的性质，在 CTL_P 中我们可以定义模型中的状态之间的关系，从而丰富了 CTL 逻辑的表达性；然后，我们根据逻辑 CTL_P 建立了一个证明系统 SCTL（Sequent-calculus-like proof system for CTL_P），并证明了 SCTL 系统的可靠性和完备性，使得一个公式在 SCTL 中是可证的当且仅当它在给定的模型中是满足的。

本文的第二个工作是，提出了一个 SCTL 证明系统的工具实现 SCTLProV，SCTLProV 既可以看作为定理证明器也可看作为模型检测工具：相比于定理证明器，SCTLProV 可以应用更多的优化策略，比如利用 BDD（Binary Decision Diagram）来存储状态集合从而减小内存占用；相比于模型检测工具，SCTLProV 的输出是完整的证明树，比模型检测工具的输出更丰富。

本文的第三个工作是，实现了一个 3D 证明可视化工具 VMDV（Visualization for Modeling, Demonstration, and Verification）。VMDV 目前可以完整的显示 SCTLProV 的证明树以及高亮显示 SCTLProV 的证明过程。同时 VMDV 是一个一般化的证明可视化工具，并提供了不同的接口用来与不同的定理证明器（比如 coq）协同工作。

关键词：模型检测，定理证明，工具实现

Abstract

This paper is a help documentation for the LaTeX class ucasthesis, which is a thesis template for the University of Chinese Academy of Sciences. The main content is about how to use the ucasthesis, as well as how to write thesis efficiently by using LaTeX.

Keywords: University of Chinese Academy of Sciences (UCAS), Thesis, LaTeX Template

目 录

插 图

表 格

符号列表

Characters

Symbol	Description	Unit
R	the gas constant	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
C_v	specific heat capacity at constant volume	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
C_p	specific heat capacity at constant pressure	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
E	specific total energy	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
e	specific internal energy	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
h_T	specific total enthalpy	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
h	specific enthalpy	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
k	thermal conductivity	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
T	temperature	K
t	time	s
p	thermodynamic pressure	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
$\hat{p}$	hydrostatic pressure	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
$\boldsymbol{f}_b$	body force	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
S	boundary surface	m^2
V	volume	m^3
$\boldsymbol{V}$	velocity vector	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
u	x component of velocity	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
v	y component of velocity	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
w	z component of velocity	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
c	speed of sound	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
$\boldsymbol{r}$	position vector	m
$\mathbf{n}$	unit normal vector	1
$\hat{\mathbf{t}}$	unit tangent vector	1
$\tilde{\mathbf{t}}$	unit bitangent vector	1
C_R	coefficient of restitution	1
Re	Reynolds number	1
Pr	Prandtl number	1

Ma	Mach number	1
α	thermal diffusivity	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
μ	dynamic viscosity	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
ν	kinematic viscosity	$\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
γ	heat capacity ratio	1
ρ	density	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
σ_{ij}	stress tensor	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
S_{ij}	deviatoric stress tensor	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
τ_{ij}	viscous stress tensor	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
δ_{ij}	Kronecker tensor	1
I_{ij}	identity tensor	1

Operators

Symbol	**Description**
Δ	difference
∇	gradient operator
$\delta^{\pm}$	upwind-biased interpolation scheme

缩略词

Acronym	**Description**
NASA	National Aeronautics and Space Administration
CPT	Continuation Passing Tree
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
CJ	Chapman-Jouguet
EOS	Equation of State
JWL	Jones-Wilkins-Lee
TVD	Total Variation Diminishing
WENO	Weighted Essentially Non-oscillatory
ZND	Zel'dovich-von Neumann-Doering

第 1 章　引言

INtro.

第 2 章　定理证明与模型检测的结合

本章首先介绍逻辑系统 CTL_P，CTL_P 是计算树逻辑 CTL 的一个扩展；然后介绍针对 CTL_P 的一个证明系统 SCTL; 之后介绍对证明系统 SCTL 的一个实现 SCTLProV，最后介绍案例分析以及相关实验结果的对比。

2.1　CTL_P

我们用逻辑 $\mathsf{CTL}_P(\mathcal{M})$ 来刻画要验证的系统 $\mathcal{M}$ 的性质，其中 $\mathcal{M}$ 通常指的是一个 Kripke 结构，其定义如下。

定义 2.1.1 (Kripke 结构). *一个 Kripke 结构 $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \longrightarrow, \mathcal{P})$ 包含如下三个部分：*

1. *S 是一个有穷的状态集合；*
2. *$\longrightarrow \subseteq S \times S$ 是一个一个二元关系；对于每一个状态 $s \in S$，至少存在一个 $s' \in S$ 使得 $s \longrightarrow s'$;*
3. *$\mathcal{P}$ 是一个有穷的关系符号的集合；对于每个关系符号 $P \in \mathcal{P}$，都存在自然数 n 使得 $P \in S^n$ 。*

对于一个状态 $s \in S$，我们将 s 的所有的下一个状态的集合定义为

$$\mathsf{Next}(s) = \{s' \mid s \longrightarrow s'\}。$$

一个路径是一个有穷或无穷的状态序列，通常形式为 $s_0, ..., s_n$ 或者 $s_0, s_1, ...$，其中，对于任意自然数 i，如果 s_i 不是该序列的最后一个元素，那么就有 $s_{i+1} \in \mathsf{Next}(s_i)$ 。

我们称 T 是一棵路径树当且仅当对于 T 上的所有由 s 标记的非叶子节点，该节点的所有后继节点正好由 $\mathsf{Next}(s)$ 中的所有元素一一标记。一棵路径树上的所有节点既可以是有穷个也可以是无穷个。

语法。　一个 Kripke 结构 $\mathcal{M}$ 的性质由 $\mathsf{CTL}_P(\mathcal{M})$ 公式表示：

定义 2.1.2. *对于一个给定的 Kripke 模型 $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \longrightarrow, \mathcal{P})$，$CTL_P(\mathcal{M})$ 公式的语法定义如下：*

$$\phi := \begin{cases} \top \mid \bot \mid P(t_1, ..., t_n) \mid \neg P(t_1, ..., t_n) \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \\ AX_x(\phi)(t) \mid EX_x(\phi)(t) \mid AF_x(\phi)(t) \mid EG_x(\phi)(t) \mid \\ AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(t) \mid EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(t) \end{cases}$$

其中，x 与 y 为变量，取值范围为 S，而 $t_1, ..., t_n$ 既可以是代表状态的常量，也可以是取值范围为 S 的变量。

在定义 2.1.2 中，我们用模态词来绑定公式中的变量。比如，模态词 AX，EX，AF 以及 EG 在公式 ϕ 中绑定了变量 x；而模态词 AR 和 EU 则在公式 ϕ_1 和 ϕ_2 中分别绑定了变量 x 和 y. 变量的替换则写为 $(t/x)\phi$，表示将公式 ϕ 中所有自由出现的变量 x 都替换为 t。

不失一般性地来说，我们假定所有的否定符号都出现在原子命题上；而且有如下缩写：

- $\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \equiv \neg\phi_1 \vee \phi_2$,
- $EF_x(\phi)(t) \equiv EU_{z,x}(\top, \phi)(t)$,
- $ER_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(t) \equiv EU_{y,z}(\phi_2, ((z/x)\phi_1 \wedge (z/y)\phi_2))(t) \vee EG_y(\phi_2)(t)$, 其中变量 z 既不在 ϕ_1，也不在 ϕ_2 中出现，
- $AG_x(\phi)(t) \equiv \neg(EF_x(\neg\phi)(t))$,
- $AU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(t) \equiv \neg(ER_{x,y}(\neg\phi_1, \neg\phi_2)(t))$.

我们称模态词 AF，EF，AU，以及 EU 为归纳模态词；模态词 AR，ER，AG，以及 EG 为余归纳模态词。

语义。 相应地，对于一个给定的 Kripke 模型 $\mathcal{M}$，$\mathsf{CTL}_P(\mathcal{M})$ 的语义定义如下：

- $\mathcal{M} \models P(s_1, ..., s_n)$：如果 $\langle s_1, ..., s_n\rangle \in P$，而且 P 是一个 $\mathcal{M}$ 上的 n 元关系；
- $\mathcal{M} \models \neg P(s_1, ..., s_n)$：如果 $\langle s_1, ..., s_n\rangle \notin P$，而且 P 是一个 $\mathcal{M}$ 上的 n 元关系；
- $\mathcal{M} \models \top$ 永远成立；
- $\mathcal{M} \models \bot$ 永远不成立；
- $\mathcal{M} \models \phi_1 \wedge \phi_2$：如果 $\mathcal{M} \models \phi_1$ 和 $\mathcal{M} \models \phi_2$ 同时成立；
- $\mathcal{M} \models \phi_1 \vee \phi_2$：如果 $\mathcal{M} \models \phi_1$ 成立，或者 $\mathcal{M} \models \phi_2$ 成立；
- $\mathcal{M} \models AX_x(\phi_1)(s)$：如果对于每个状态 $s' \in \mathsf{Next}(s)$，都有 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$ 成立；
- $\mathcal{M} \models EX_x(\phi_1)(s)$：如果存在一个状态 $s' \in \mathsf{Next}(s)$，使得 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$ 成立；

- $\mathcal{M} \models AF_x(\phi_1)(s)$：如果存在一个有无穷个节点的树 T，而且 T 的根节点是 s, 那么对于 T 的任何一个非叶子节点 s'，s' 的子节点为 $\mathsf{Next}(s')$，对于 T 的任何一个叶子节点 s'，$\vdash (s'/x)\phi_1$ 成立；
- $\mathcal{M} \models EG_x(\phi_1)(s)$：如果存在 $\mathcal{M}$ 上的一个无穷路径 $s_0, s_1, ...$（其中 $s_0 = s$），那么对于任意的自然数 i，都有 $\mathcal{M} \models (s_i/x)\phi_1$ 成立;
- $\mathcal{M} \models AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$：如果存在一棵路径树 T，T 的根节点由 s 标记，对于任意节点 $s' \in T$ 都有 $\mathcal{M} \models (s'/y)\phi_2$ 成立，而且对于任意的叶子节点 $s'' \in T$ 都有 $\mathcal{M} \models (s''/x)\phi_1$ 成立；
- $\mathcal{M} \models EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$：如果存在一个无穷路径 $s_0, s_1, ...$（其中 $s_0 = s$）和一个自然数 j，$\mathcal{M} \models (s_j/y)\phi_2$ 成立，而且对于任意的自然数 $i < j$ 都有 $\mathcal{M} \models (s_i/x)\phi_1$ 成立。

CTL vs. CTL$_P$。 在计算树逻辑（CTL）[8,9] 的语法中，原子公式通常用命题符号来表示，而命题符号在计算树逻辑的语义中通常解释为一个 Kripke 结构上的状态集合。在逻辑系统 CTL$_P$ 中，相比于计算树逻辑，我们通过引入多元谓词来增加逻辑系统中公式的表达能力。CTL$_P$ 相比于 CTL 的表达能力的提升可由如下的例子表示出来：

例子 2.1.1. 本例子受多机器人路径规划系统[6,14] 启发。在原例子中，多机器人路径规划系统的规范可以写成 *CTL* 公式：在一个多个区块的地图上，每从初始位置出发的机器人都能到达指定的最终位置，而且在行进的同时，每个机器人都会避免经过某些位置。

在本例子中，除了 *CTL* 所能表示的时序性质之外，我们考虑一种“空间”性质，即表示状态之间的关系。

假定有一个无人车正在一个星球表面行驶，这个星球的表面已经被分成了有穷个小的区域。无人车一次能从一个区域行走到另一个区域，那么我们将无人车的位置看作成一个状态，无人车所有的可能的所在位置则可看作为状态空间，而且无人车从一个位置到另一个位置的移动规律则可看作成迁移关系。无人车的设计需要满足一个基本的性质，即无人车不能永远在一个很小的范围内移动。准确地说，对于给定的距离 σ，在任意状态 s，随着无人车的移动会到达状态 s'，使得 s 和 s' 的位置之间的距离大于 σ。该性质可以由公式 $AG_x(AF_y(D_\sigma(x,y))(x))(s_0)$ 来刻画，其中 s_0 是初始状态，即无人车的降落点；原子公式 $D_\sigma(x,y)$ 则刻画了一种空间性质，即状态 x 和 y 的位置的距离大于 σ。

例子2.1.1中的性质可以很容易由 CTL$_P$ 中的公式进行刻画，然而很难用传统的时序逻辑的公式进行表示。原因是在传统的时序逻辑的语法中通常没有表述一

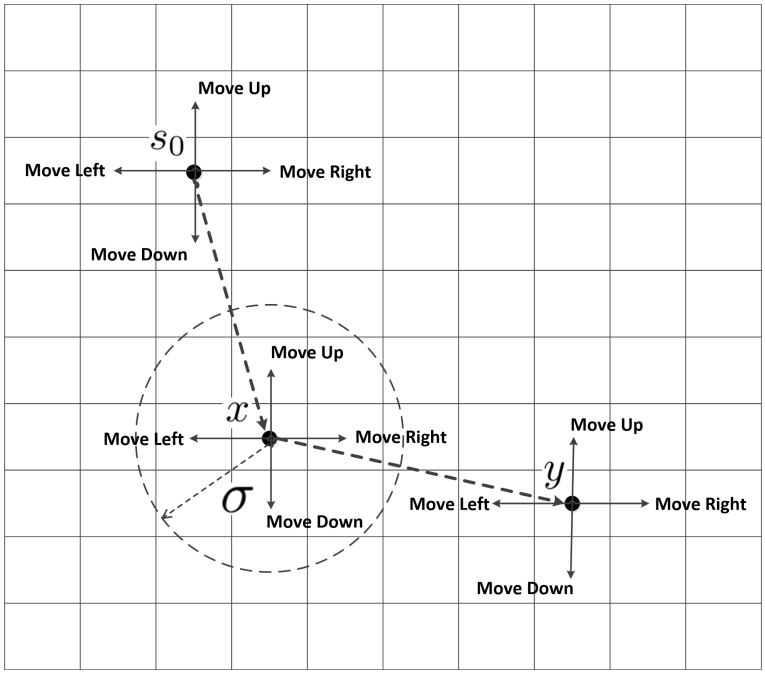


图 2.1: 无人车可能的所在位置

个特定的状态或者多个状态之间的关系的机制，即使在语义中，传统的时序逻辑通常只考虑当前的状态，而无法考虑多个状态之间的关系。

2.2 CTL_P 的证明系统：SCTL

在本节，我们针对逻辑 $\mathsf{CTL}_P(\mathcal{M})$ 给出一个证明系统 $\mathsf{SCTL}(\mathcal{M})$ （Sequent-calculus-like proof system for CTL_P）。在通常意义下的证明系统中，一个公式是可证的当且仅当该公式在所有的模型中都成立，而在 $\mathsf{SCTL}(\mathcal{M})$ 中，一个公式是可证的当且仅当该公式在模型 $\mathcal{M}$ 中是可证的。

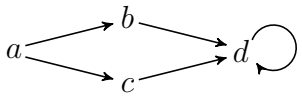
首先，让我们考虑一个 $\mathsf{CTL}_P(\mathcal{M})$ 公式 $AF_x(P(x))(s)$。该公式在模型 $\mathcal{M}$ 中成立当且仅当存在一个路径树 T，T 的根节点由 s 标记，而且 T 上的每个叶子节点都满足 P。

然后,我们考虑一个具有嵌套模态词的 $\mathsf{CTL}_P(\mathcal{M})$ 公式 $AF_x(AF_y(P(x,y))(x))(s)$。如果试图说明该公式在模型 $\mathcal{M}$ 中是成立的，那么就需要找到一个路径树 T，使得 T 的根节点由 s 标记，而且对于 T 中的所有叶子节点 a，$AF_y(P(a,y))(a)$ 是成立的。为了说明 $AF_y(P(a,y))(a)$ 是成立的，则需要又找到一棵路径树 T' 使得 T' 的根节点由 a 标记，而且 T' 上的所有叶子节点 b 都满足 $P(a,b)$。我们可以用以下的两个规则来刻画当前的嵌套的路径树。

$$\frac{\vdash (s/x)\phi}{\vdash AF_x(\phi)(s)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_1$$

$$\frac{\vdash AF_x(\phi)(s_1) \quad \ldots \quad \vdash AF_x(\phi)(s_n)}{\vdash AF_x(\phi)(s)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_2\ {\scriptstyle \{s_1,\ldots s_n\}=\mathsf{Next}(s)}$$

例子 2.2.1. 假设一个模型有如下图所示的迁移规则，



和一个原子谓词 $P = \{b, c\}$，那么公式 $AF_x(P(x))(a)$ 的一个证明如下。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash P(b)}\ \mathit{atom}\text{-}\mathsf{R}}{\vdash AF_x(P(x))(b)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash P(c)}\ \mathit{atom}\text{-}\mathsf{R}}{\vdash AF_x(P(x))(c)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_1}{\vdash AF_x(P(x))(a)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_2$$

在此证明树中，除了 $\mathbf{AF}$-R_1 和 $\mathbf{AF}$-R_2，我们还应用了如下规则。

$$\frac{}{\vdash P(s_1, ..., s_n)}\ \mathit{atom}\text{-}\mathsf{R}\ {\scriptstyle \langle s_1,\ldots,s_n\rangle \in P}$$

例子 2.2.2. 假设另一个模型，该模型的迁移规则与例子*2.2.1*中相同，除此之外还有原子谓词 $Q = \{(b, d), (c, d)\}$。公式 $AF_x(AF_y(Q(x, y))(x))(a)$ 的证明如下。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q(b,d)}\ \mathit{atom}\text{-}\mathsf{R}}{\vdash AF_y(Q(b,y))(d)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_1}{\vdash AF_y(Q(b,y))(b)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_2}{\vdash AF_x(AF_y(Q(x,y))(x))(b)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q(c,d)}\ \mathit{atom}\text{-}\mathsf{R}}{\vdash AF_y(Q(c,y))(d)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_1}{\vdash AF_y(Q(c,y))(c)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_2}{\vdash AF_x(AF_y(Q(x,y))(x))(b)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_1}{\vdash AF_x(AF_y(Q(x,y))(x))(a)}\ \mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_2$$

在 SCTL 中，每个相继式都有 $\Gamma \vdash \phi$ 形式，其中 Γ 是一个可能为空的 SCTL 公式集合，ϕ 是一个 SCTL 公式。不同于通常的相继式演算，

So, as all sequents have the form $\vdash \phi$, the left rules and the axiom rule can be dropped as well. In other words, unlike the usual sequent calculus and like Hilbert systems, SCTL is tailored for deduction, not for hypothetical deduction.

As the left-hand side of sequents is not used to record hypotheses, we will use it to record a different kind of information, that occur in the case of co-inductive modalities, such as the modality EG.

Indeed, the case of the co-inductive formula, for example $EG_x(P(x))(s)$, is more complex than that of the inductive one, such as $AF_x(P(x))(s)$. To justify its validity, one needs to provide an infinite sequence starting from s, and each state

in the infinite sequence verifies P. However, as the model is finite, we can always restrict to regular sequences and use a finite representation of such sequences. This leads us to introduce a rule, called **EG**-merge, that permits to prove a sequent of the form $\vdash EG_x(P(x))(s)$, provided such a sequent already occurs lower in the proof. To make this rule local, we re-introduce hypotheses Γ to record part of the history of the proof. The sequent have therefore the form $\Gamma \vdash \phi$, with a non empty Γ in this particular case only, and the **EG**-merge rule is then just an instance of the axiom rule, that must be re-introduced in this particular case only.

SCTL($\mathcal{M}$) 的证明规则如图2.2所示。

$$\frac{}{\vdash P(s_1,...,s_n)}\ \text{atom-R}_{\langle s_1,...,s_n\rangle\in P} \qquad \frac{}{\vdash \neg P(s_1,...,s_n)}\ \neg\text{-R}_{\langle s_1,...,s_n\rangle\notin P}$$

$$\frac{}{\vdash \top}\ \top\text{-R} \qquad \frac{\vdash \phi_1 \quad \vdash \phi_2}{\vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge\text{-R} \qquad \frac{\vdash \phi_1}{\vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee\text{-R}_1 \qquad \frac{\vdash \phi_2}{\vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee\text{-R}_2$$

$$\frac{\vdash (s'/x)\phi}{\vdash EX_x(\phi)(s)}\ \mathbf{EX}\text{-R}_{s'\in \mathsf{Next}(s)} \qquad \frac{\vdash (s_1/x)\phi \quad \ldots \quad \vdash (s_n/x)\phi}{\vdash AX_x(\phi)(s)}\ \mathbf{AX}\text{-R}_{\{s_1,...,s_n\}=\mathsf{Next}(s)}$$

$$\frac{\vdash (s/x)\phi}{\vdash AF_x(\phi)(s)}\ \mathbf{AF}\text{-R}_1 \qquad \frac{\vdash AF_x(\phi)(s_1) \quad \ldots \quad \vdash AF_x(\phi)(s_n)}{\vdash AF_x(\phi)(s)}\ \mathbf{AF}\text{-R}_2{}_{\{s_1,...,s_n\}=\mathsf{Next}(s)}$$

$$\frac{\vdash (s/x)\phi \quad \Gamma, EG_x(\phi)(s) \vdash EG_x(\phi)(s')}{\Gamma \vdash EG_x(\phi)(s)}\ \mathbf{EG}\text{-R}_{s'\in \mathsf{Next}(s)} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash EG_x(\phi)(s)}\ \mathbf{EG}\text{-merge}_{EG_x(\phi)(s)\in\Gamma}$$

$$\frac{\vdash (s/y)\phi_2 \quad \Gamma' \vdash AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s_1)\ ...\ \Gamma' \vdash AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s_n)}{\Gamma \vdash AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)}\ \mathbf{AR}\text{-R}_1{}_{\{s_1,...,s_n\}=\mathsf{Next}(s),\Gamma'=\Gamma,AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)}$$

$$\frac{\vdash (s/x)\phi_1 \quad \vdash (s/y)\phi_2}{\Gamma \vdash AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)}\ \mathbf{AR}\text{-R}_2 \qquad \frac{}{\Gamma \vdash AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)}\ \mathbf{AR}\text{-merge}_{AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)\in\Gamma}$$

$$\frac{\vdash (s/y)\phi_2}{\vdash EU_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)}\ \mathbf{EU}\text{-R}_1 \qquad \frac{\vdash (s/x)\phi_1 \quad \vdash EU_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s')}{\vdash EU_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)}\ \mathbf{EU}\text{-R}_2{}_{s'\in\mathsf{Next}(s)}$$

图 2.2: SCTL($\mathcal{M}$)

有效性与完备性。 命题2.2.1和命题2.2.2的作用是将有穷结构转换为无穷结构，这两个命题被用来证明 SCTL 的有效性；命题2.2.3和命题2.2.4的作用是将无穷结构转换到有穷结构，这两个命题被用来证明 SCTL 的完备性。

命题 2.2.1 (有穷状态序列到无穷状态序列). 给定一个有穷的状态序列 $s_0, ..., s_n$，其中对于任意 $0 \leq i \leq n-1$ 都有 $s_i \longrightarrow s_{i+1}$，而且存在 $0 \leq p \leq n-1$ 使得 $s_n = s_p$。那么，一定存在一个无穷的状态序列 $s'_0, s'_1, ...$ 使得 $s_0 = s'_0$，而且对于任意 $i \geq 0$ 都有 $s'_i \longrightarrow s'_{i+1}$，同时此无穷状态序列中的每个状态都在 $s_0, ..., s_n$ 中。

证明. 本命题所述无穷序列为：$s_0, ..., s_{p-1}, s_p, ..., s_{n-1}, s_p, ...$，其中 $s_0 = s'_0$. □

命题 2.2.2 (有穷路径树到无穷路径树). 设 Φ 为一个状态集合，T 为一个有穷的路径树，T 的每个叶子节点都由某个状态 s 来标记，其中，$s \in \Phi$；或者存在从 T 的根结点到当前叶子节点的分支上的一个节点，使得该节点同样由 s 所标记。那么，一定存在一棵可能无穷的路径树 T'，而且 T' 的所有叶子节点都由 Φ 中的某个状态标记，同时用来标记 T' 节点的状态都用来标记 T 的节点。

证明. 令 T' 的根结点为 T 的根结点，而且对于 T 的每个节点的标记 s 来说，如果 $s \in \Phi$，那么 s 标记 T' 的叶子节点；否则，s 的后继节点分别由 $\mathsf{Next}(s)$ 中的每个元素标记。显然，标记 T' 中节点的状态都标记 T 中的节点。 □

命题 2.2.3 (无穷状态序列到有穷状态序列). 给定一个无穷状态序列 $s_0, s_1, ...$，其中对于任意 $i \geq 0$ 都有 $s_i \longrightarrow s_{i+1}$。那么，一定存在一个有穷的状态序列 $s'_0, ..., s'_n$，对于任意 $0 \leq i \leq n-1$，都存在一个 $0 \leq p \leq n-1$, 使得 $s'_n = s'_p$，而且 $s'_0, ..., s'_n$ 中的所有状态都在 $s_0, s_1, ...$ 中出现。

证明. 由于 Kripke 模型的状态集是有穷的，因此在状态序列 $s_0, s_1, ...$ 一定存在 $p, n \geq 0$，使得 $s_p = s_n$。本命题所述有穷状态序列即为 $s_0, ..., s_n$。 □

命题 2.2.4 (可能无穷的路径树到有穷路径树). 设 Φ 为一个状态集合；T 为一个可能无穷的路径树，其中 T 的所有叶子节点都由 Φ 中的某个状态所标记。那么，一定存在一个有穷的路径树 T'，使得对于 T' 的每个叶子节点的标记 s，$s \in \Phi$，或者存在从 T' 的根结点到该叶子节点的分支上的一个节点，该节点同样由 s 标记。

证明. 由于 Kripke 模型的状态集是有穷的，因此对于 T 的每个无穷分支，都存在 $0 \leq p < n$，使得 $s_p = s_n$。将 T 的每个这样的无穷分支在 s_n 处截断，所得到的路径树即为 T'。显然，由于 T' 具有有穷个分支，同时 T' 的每个分支都是有穷的，因此 T' 也是有穷的。 □

定理 2.2.1 (有效性). 设 $\mathcal{M}$ 为一个 *Kripke* 模型，ϕ 为一个 $CTL_P(\mathcal{M})$ 闭公式。如果相继式 $\vdash \phi$ 具有一个证明，则 $\mathcal{M} \models \phi$ 成立。

证明. 假设相继式 $\vdash \phi$ 具有证明 π，以下对证明 π 的结构做归纳：

- 如果 π 的最后一条规则为 atom-R，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash P(s_1, ..., s_n)$ 形式，因此 $\mathcal{M} \models P(s_1, ..., s_n)$。
- 如果 π 的最后一条规则为 $\neg$-R，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash \neg P(s_1, ..., s_n)$ 形式，因此 $\mathcal{M} \models \neg P(s_1, ..., s_n)$。
- 如果 π 的最后一条规则为 $\top$-R，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash \top$ 形式，因此 $\mathcal{M} \models \top$。
- 如果 π 的最后一条规则为 $\wedge$-R，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ 形式。根据归纳假设，$\mathcal{M} \models \phi_1$ 与 $\mathcal{M} \models \phi_2$ 均成立，因此 $\mathcal{M} \models \phi_1 \wedge \phi_2$。
- 如果 π 的最后一条规则为 $\vee$-R，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash \phi_1 \vee \phi_2$ 形式。根据归纳假设，$\mathcal{M} \models \phi_1$ 成立或 $\mathcal{M} \models \phi_2$ 成立，因此 $\mathcal{M} \models \phi_1 \vee \phi_2$。
- 如果 π 的最后一条规则为 AX-R，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash AX_x(\phi_1)(s)$ 形式。根据归纳假设，对于任意 $s' \in \mathsf{Next}(s)$，都有 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$ 成立，因此 $\mathcal{M} \models AX_x(\phi_1)(s)$。
- 如果 π 的最后一条规则为 EX-R，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash EX_x(\phi_1)(s)$ 形式。根据归纳假设，存在 $s' \in \mathsf{Next}(s)$，使得 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$ 成立，因此 $\mathcal{M} \models EX_x(\phi_1)(s)$。
- 如果 π 的最后一条规则为 $\mathbf{AF}$-R_1 或 $\mathbf{AF}$-R_2，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash AF_x(\phi_1)(s)$ 形式。根据证明 π，我们利用归纳的方式构造一棵路径树 $|\pi|$。构造方式如下：
  - 如果 π 的最后一条规则为 $\mathbf{AF}$-R_1，而且 ρ 为 $\vdash (s/x)\phi_1$ 的证明，则路径树 $|\pi|$ 只包含一个节点 s；
  - 如果 π 的最后一条规则为 $\mathbf{AF}$-R_2，而且 $\pi_1, ..., \pi_n$ 分别为 $\vdash AF_x(\phi_1)(s_1), ..., AF_x(\phi_n)(s_n)$ 的证明，其中 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$，那么令 $|\pi|$ 等于 $s(|\pi_1|, ..., |\pi_n|)$。

  路径树 $|\pi|$ 的根结点为 s，而且对于 $|\pi|$ 的每个叶子节点 s' 来说，$\vdash (s'/x)\phi_1$ 都有一个比 π 小的证明。根据归纳假设，对于 $|\pi|$ 的每个叶子节点 s' 来说，都有 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$ 成立，因此，$\mathcal{M} \models AF_x(\phi_1)(s)$ 成立。
- 如果 π 的最后一条规则为 $\mathbf{EG}$-R，则 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash EG_x(\phi_1)(s)$ 形式。根据证明 π，我们归纳构造一个状态序列 $|\pi|$。构造方式如下：
  - 如果 π 的最后一条规则为 $\mathbf{EG}$-merge，那么 $|\pi|$ 只包含一个单独的状态 s；
  - 如果 π 的最后一条规则为 $\mathbf{EG}$-R，而且 ρ 和 π_1 分别为 $\vdash (s/x)\phi_1$ 和 $\Gamma, EG_x(\phi_1)(s) \vdash EG_x(\phi_1)(s')$ 的证明，其中 $s' \in \mathsf{Next}(s)$，那么令 $|\pi|$ 等于 $s|\pi_1|$。

对于状态序列 $|\pi| = s_0, ..., s_n$，$s_0 = s$；对于任意 $0 \leq i \leq n-1$，$s_i \longrightarrow s_{i+1}$；对于任意 $0 \leq i \leq n$，$\vdash (s_i/x)\phi_1$ 都有一个比 π 小的证明；而且存在 $p < n$ 使得 $s_n = s_p$。根据归纳假设，对于任意 $i \geq 0$，都有 $\mathcal{M} \models (s_i/x)\phi_1$ 成立。由命题2.2.1可知，存在一个无穷的状态序列 $s'_0, s'_1, ...$，其中对于任意 $i \geq 0$ 都有 $s'_i \longrightarrow s'_{i+1}$，同时 $\mathcal{M} \models (s'_i/x)\phi_1$ 成立。因此，$\mathcal{M} \models EG_x(\phi_1)(s)$ 成立。

- 如果 π 的最后一条规则为 **AR**-R_1 或 **AR**-R_2，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash AR_x(\phi_1, \phi_2)(s)$ 形式。根据 π，我们归纳构造一个有穷的路径树 $|\pi|$。构造方式如下：
  - 如果 π 的最后一条规则为 **AR**-R_1，而且 ρ_1 和 ρ_2 分别为 $\vdash (s/x)\phi_1$ 和 $\vdash (s/x)\phi_2$ 的证明，那么 $|\pi|$ 只包含一个节点 s；
  - 如果 π 的最后一条规则为 **AR**-merge，那么 $|\pi|$ 只包含一个节点 s；
  - 如果 π 的最后一条规则为 **AR**-R_2，而且 $\rho, \pi_1, ..., \pi_n$ 分别为 $\vdash (s/y)\phi_2$, $\Gamma, AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_1), ..., \Gamma, AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_n)$ 的证明，其中 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$，那么令 $|\pi|$ 等于 $s(|\pi_1|, ..., |\pi_n|)$。

  路径树 $|\pi|$ 以 s 为根结点，而且对于 $|\pi|$ 的每个节点 s' 来说，$\vdash (s'/y)\phi_2$ 都有一个比 π 小的证明；对于 $|\pi|$ 的任意叶子节点 s' 来说，$\vdash (s'/x)\phi_1$ 有一个比 π 小的证明，或者在从 $|\pi|$ 的根结点到当前叶子节点的分支上存在一个节点，使得 s' 标记此节点。根据归纳假设，对于 $|\pi|$ 的任意节点 s'，$\models (s'/y)\phi_2$ 成立，而且对于 $|\pi|$ 的任意叶子节点 s'，$\models (s'/x)\phi_1$ 成立，或者在从 $|\pi|$ 的根结点到当前叶子节点的分支上存在一个节点，使得 s' 标记此节点。根据命题2.2.2，存在一个可能无穷的路径树 T'，使得对于 T' 的每个节点 s'，都有 $\models (s'/y)\phi_2$ 成立，而且对于 T' 的每个叶子节点 s'，都有 $\models (s'/x)\phi_1$ 成立。因此，$\models AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$ 成立。

- 如果 π 的最后一条规则为 **EU**-R_1 或 **EU**-R_2，那么 $\vdash \phi$ 具有 $\vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$ 形式。根据 π，我们归纳构造一个有穷状态序列 $|\pi|$。构造过程如下：
  - 如果 π 的最后一条规则为 **EU**-R_1，那么 $|\pi|$ 只包含一个状态 s；
  - 如果 π 的最后一条规则为 **EU**-R_2，而且 ρ 和 π_1 分别为 $\vdash (s/x)\phi_1$ 和 $\vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s')$ 的证明，那么令 $|\pi|$ 等于 $s|\pi_1|$。

  在状态序列 $|\pi| = s_0, ..., s_n$ 中，$s_0 = s$；对于任意 $0 \leq i \leq n-1$，$s_i \longrightarrow s_{i+1}$；对于任意 $0 \leq i \leq n-1$，$\vdash (s_i/x)\phi_1$ 有一个比 π 小的证明；而且 $\vdash (s_n/y)\phi_2$ 有一个比 π 小的证明。根据归纳假设，对任意 $0 \leq i \leq n-1$，$\models (s_i/x)\phi_1$ 和 $\models (s_n/y)\phi_2$ 均成立。因此，$\models EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$ 成立。

- π 的最后一条规则不能为 merge 规则。

□

定理 2.2.2 (完备性). 设 ϕ 是一个 $CTL_P(\mathcal{M})$ 闭公式。如果 $\mathcal{M} \models \phi$，则 $\vdash \phi$ 在 $SCTL(\mathcal{M})$ 中是可证的。

证明. 对 ϕ 的结构作归纳：

- 如果 $\phi = P(s_1, ..., s_n)$，那么由 $\mathcal{M} \models P(s_1, ..., s_n)$ 可知，$\vdash P(s_1, ..., s_n)$ 是可证的。
- 如果 $\phi = \neg P(s_1, ..., s_n)$，那么由 $\mathcal{M} \models \neg P(s_1, ..., s_n)$ 可知，$\vdash \neg P(s_1, ..., s_n)$ 是可证的。
- 如果 $\phi = \top$，那么显然 $\vdash \top$ 是可证的。
- 如果 $\phi = \bot$，那么显然 $\vdash \bot$ 是不可证的。
- 如果 $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$，那么由于 $\mathcal{M} \models \phi_1 \wedge \phi_2$，因此 $\mathcal{M} \models \phi_1$ 和 $\mathcal{M} \models \phi_2$ 均成立。根据归纳假设，$\vdash \phi_1$ 和 $\vdash \phi_2$ 均可证。因此，$\vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ 是可证的。
- 如果 $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$，那么由于 $\mathcal{M} \models \phi_1 \vee \phi_2$，因此 $\mathcal{M} \models \phi_1$ 或 $\mathcal{M} \models \phi_2$ 成立。根据归纳假设，$\vdash \phi_1$ 或 $\vdash \phi_2$ 是可证的。因此，$\vdash \phi_1 \vee \phi_2$ 是可证的。
- 如果 $\phi = AX_x(\phi_1)(s)$，那么由于 $\mathcal{M} \models AX_x(\phi_1)(s)$，因此对于任意 $s' \in \mathsf{Next}(s)$，都有 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$ 成立。根据归纳假设，对于任意 $s' \in \mathsf{Next}(s)$，$\vdash (s'/x)\phi_1$ 都是可证的。因此，$\vdash AX_x(\phi_1)(s)$ 是可证的。
- 如果 $\phi = EX_x(\phi_1)(s)$，那么由于 $\mathcal{M} \models EX_x(\phi_1)(s)$，因此存在 $s' \in \mathsf{Next}(s)$ 使得 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$ 成立。根据归纳假设，$\vdash (s'/x)\phi_1$ 是可证的，因此 $\vdash EX_x(\phi_1)(s)$ 是可证的。
- 如果 $\phi = AF_x(\phi_1)(s)$，那么由于 $\mathcal{M} \models AF_x(\phi_1)(s)$，因此存在一棵有穷的路径树 T，并且 T 以 s 为根结点；对于 T 的每个非叶子节点 s'，s' 的后继节点分别由 $\mathsf{Next}(s)$ 中的元素所标记；对于 T 的每个叶子节点 s'，都有 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$ 成立。根据归纳假设，$\vdash (s'/x)\phi_1$ 是可证的。然后，对于 T 的每个以子树 T'（设 T' 的根结点为 s'），我们归纳构造 $\vdash AF_x(\phi_1)(s')$ 的一个证明 $|T'|$。构造过程如下：
  - 如果 T' 只包含一个节点 s'，那么 $|T'|$ 的最后一条规则为 $\mathbf{AF}\text{-}\mathsf{R}_1$，同时 $|T'|$ 中包含 $\vdash (s'/x)\phi_1$ 的证明；

– 如果 $T' = s'(T_1, ..., T_n)$，那么 $|T'|$ 的最后一条规则为 **AF**-R_2，同时 $|T'_1|, ..., |T'_n|$ 分别为 $\vdash AF_x(\phi_1)(s_1), ..., \vdash AF_x(\phi_1)(s_n)$ 的证明，其中 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$。

因此，$|T|$ 是 $\vdash AF_x(\phi_1)(s)$ 的一个证明。

- 如果 $\phi = EG_x(\phi_1)(s)$，那么由于 $\mathcal{M} \models EG_x(\phi_1)(s)$，因此存在一个状态序列 $s_0, ..., s_n$ 使得 $s_0 = s$，而且对于任意 $0 \leq i \leq n$ 都有 $\mathcal{M} \models (s_i/x)\phi_1$ 成立。根据归纳假设，$\vdash (s_i/x)\phi_1$ 是可证的。根据命题2.2.3，存在一个有穷的状态序列 $T = s_0, ..., s_n$ 使得对任意 $0 \leq i \leq n-1$，$s_i \longrightarrow s_{i+1}$，同时 $\vdash (s_i/x)\phi_1$ 是可证的，而且存在 $p < n$ 使得 $s_n = s_p$。对于 T 的每个后缀 $s_i, ..., s_n$，我们归纳构造 $|s_i, ..., s_n|$ 为 $EG_x(\phi_1)(s_0), \ldots, EG_x(\phi_1)(s_{i-1}) \vdash EG_x(\phi_1)(s_i)$ 的证明。构造方式如下：

  – $|s_n|$ 的最后一条规则为 **EG**-merge；
  – 如果 $i \leq n-1$，根据归纳假设，由于 $\vdash (s_i/x)\phi_1$ 是可证的，而且 $|s_{i+1}, ..., s_n|$ 是 $EG_x(\phi_1)(s_0), ..., EG_x(\phi_1)(s_i) \vdash EG_x(\phi_1)(s_{i+1})$ 的一个证明。因此，$|s_i, ..., s_n|$ 是 $EG_x(\phi_1)(s_0), \ldots, EG_x(\phi_1)(s_{i-1}) \vdash EG_x(\phi_1)(s_i)$ 的一个证明，而且最后一条规则为 **EG**-R。

因此，$|s_0, ..., s_n|$ 是 $\vdash EG_x(\phi_1)(s)$ 的一个证明。

- 如果 $\phi = AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$，那么由于 $\mathcal{M} \models AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$，因此存在一棵以 s 为根节点的可能无穷的路径树，对于该路径树的每个节点 s'，都有 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_2$；对于该路径树的每个叶子节点 s'，都有 $\mathcal{M} \models (s'/x)\phi_1$。根据归纳假设，对于该路径树的每个节点 s'，$\vdash (s'/y)\phi_2$ 是可证的，而且对于该路径树的每个叶子节点 s'，$\vdash (s'/y)\phi_1$ 是可证的。由命题2.2.4可知，存在一棵有穷的路径树 T，对于该路径树的每个节点 s'，$\vdash (s'/y)\phi_2$ 是可证的；对于该路径树的每个叶子节点 s'，$\vdash (s'/y)\phi_1$ 是可证的，或者 s' 为从 T 的根节点到该叶子节点分支上的节点。然后，对于 T 的每个子树 T'，我们归纳构造 $AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_1), ..., AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_m) \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s')$ 的一个证明 $|T'|$，其中 s' 为 T' 的根节点，而且 $s_1, ..., s_m$ 为从 T 的根节点到 T' 的根节点的分支。构造方式如下：

  – 如果 T' 只包含一个单独的节点 s'，同时 $\vdash (s'/x)\phi_1$ 是可证的，那么根据归纳假设，$\vdash (s'/x)\phi_1$ 和 $\vdash (s'/y)\phi_2$ 皆可证，而且 $|T'|$ 的最后一条规则为 **AR**-R_1；
  – 如果 T' 只包含一个单独的节点，同时 s' 包含在 $s_1, ..., s_m$ 中，那么 $|T'|$ 的最后一条规则为 **AR**-merge；

– 如果 $T' = s'(T_1, ..., T_n)$，那么根据归纳假设，$|T_1|, ..., |T_n|$ 分别为

$$AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_1), ..., AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_m),$$
$$AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s') \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s'_1)$$
$$...$$
$$AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_1), ..., AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_m),$$
$$AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s') \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s'_n)$$

的证明，同时 $|T'|$ 的最后一条规则为 $\mathbf{AR}$-R_2，其中 $s'_1, ..., s'_n = \mathsf{Next}(s')$。

因此，$|T|$ 是 $\vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$ 的一个证明。

- 如果 $\phi = EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$，那么由于 $\mathcal{M} \models EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$，因此存在一个有穷的状态序列 $T = s_0, ..., s_n$ 使得 $\mathcal{M} \models (s_n/y)\phi_2$ 成立，而且对于任意 $0 \leq i \leq n-1$，$\mathcal{M} \models (s_i/x)\phi_1$ 成立。根据归纳假设，$\vdash (s_n/y)\phi_2$ 是可证的，而且对于任意 $0 \leq i \leq n-1$，$\vdash (s_i/x)\phi_1$ 是可证的。然后，对于 T 的每个后缀 $s_i, ..., s_n$，我们归纳构造 $|s_i, ..., s_n|$ 为 $\vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_i)$ 的证明。构造方式如下：

  – $|s_n|$ 的最后一条规则为 $\mathbf{EU}$-R_1；
  – 如果 $i \leq n-1$，那么根据归纳假设，由于 $|s_{i+1}, ..., s_n|$ 是 $\vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_{i+1})$ 的证明，而且 $\vdash (s_i/x)\phi_1$ 是可证的，因此，$|s_i, ..., s_n|$ 是 $\vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_i)$ 的证明。

因此，$|s_0, ..., s_n|$ 是 $\vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$ 的一个证明。

□

2.3 SCTL 的工具实现：SCTLProV

本节介绍 SCTL 的一个实现—SCTLProV（图2.3）以及该工具与其他模型检测工具的对比。SCTLProV 的工作方式如下：首先，SCTLProV 读入一个输入文件，并将该输入文件解析到一个 Kripke 模型以及若干个 SCTL 公式；然后，对于每个公式，SCTLProV 搜索该公式的证明，如果该公式可证，则并输出该证明（或者只输出 True），如果该公式不可正，则输出该公式的非的证明（或者只输出 False）。

2.3.1 证明搜索

SCTLProV 的证明搜索方法如下：首先，对于要证明的相继式，以及 SCTL 规则将该公式的所有的前提给定一个序；然后，依次对这些前提进行证明搜索。我们

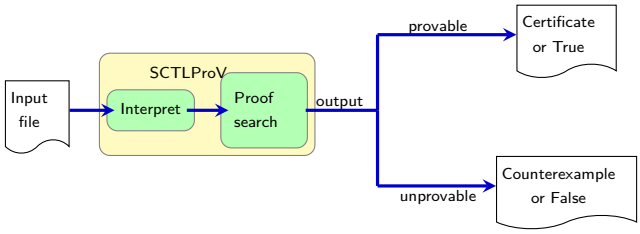


图 2.3: SCTLProV.

将以上证明搜索方法定义成一系列对于连续传递树（定义2.3.1）的重写规则。下面我们介绍连续传递树的概念。

2.3.1.1 连续传递树

在连续传递树中，连续一个基本的概念。在计算机程序设计语言理论[1,18] 中，连续是计算机程序将要执行的部分的显示表示。

定义 2.3.1 (连续传递树). 一个连续传递树（*Continuation Passing Tree*，简写为 *CPT*）指的是一棵同时满足以下条件的二叉树：

- 每个叶子节点被 $\mathfrak{t}$ 或 $\mathfrak{f}$ 标记，其中 $\mathfrak{t}$ 和 $\mathfrak{f}$ 是不同的两个符号；
- 每个非叶子节点都被一个 *SCTL* 相继式标记。

对于 *CPT* 的每个非叶子节点来说，它的左子树称之为该节点的 $\mathfrak{t}$-连续；它的右子树称之为该节点的 $\mathfrak{f}$-连续。对于一个 *CPT* c 来说，若 c 的根节点为 $\Gamma \vdash \phi$，以及 c 的 $\mathfrak{t}$-连续和 $\mathfrak{f}$-连续分别为 c_1 和 c_2，那么我们将 c 记作 $cpt(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2)$，或者可以表示为如下形式：

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \phi \\ \diagup \quad \diagdown \\ c_1 \quad c_2 \end{array}$$

在 SCTLProV 的证明搜索算法可总结为：对于给定的 SCTL 相继式 $\vdash \phi$，我们构造一个连续传递树 $c = \mathsf{cpt}(\vdash \phi, \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$，然后根据图2.4所示的重写规则将 c 重写到 $\mathfrak{t}$ 或 $\mathfrak{f}$。如果 c 最终重写到 $\mathfrak{t}$，那么 $\vdash \phi$ 是可证的；如果 c 最终重写到 $\mathfrak{f}$，那么 $\vdash \phi$ 是不可证的。

在 CPT 的重写规则中，对一个 CPTc 的一步重写只需判断 c 的根节点，而与 c 的子表达式无关。例如，根据重写规则，CPT$\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$ 重写到 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, \mathfrak{t}, \mathfrak{f}), \mathfrak{f})$，此步重写意味着：如果搜索 $\vdash \phi_1$ 的证明成功，则继续搜索 $\vdash \phi_2$ 的证明；如果搜索 $\vdash \phi_1$ 的证明失败，则直接判定 $\vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ 不可证。接下来，根据 ϕ_1 的结构，继续对 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, \mathfrak{t}, \mathfrak{f}), \mathfrak{f})$ 进行重写。

$\mathsf{cpt}(\vdash \top, c_1, c_2) \rightsquigarrow c_1 \quad \mathsf{cpt}(\vdash \bot, c_1, c_2) \rightsquigarrow c_2$
$\mathsf{cpt}(\vdash P(s_1, ..., s_n), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_1 \quad [\langle s_1, ..., s_n\rangle \in P]$
$\mathsf{cpt}(\vdash P(s_1, ..., s_n), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_2 \quad [\langle s_1, ..., s_n\rangle \notin P]$
$\mathsf{cpt}(\vdash \neg P(s_1, ..., s_n), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_2 \quad [\langle s_1, ..., s_n\rangle \in P]$
$\mathsf{cpt}(\vdash \neg P(s_1, ..., s_n), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_1 \quad [\langle s_1, ..., s_n\rangle \notin P]$
$\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2), c_2)$
$\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, c_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2))$
$\mathsf{cpt}(\vdash AX_x(\phi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash (s_1/x)\phi, \mathsf{cpt}(\vdash (s_2/x)\phi, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash (s_n/x)\phi, c_1, c_2), ..., c_2), c_2), c_2)$ $[\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)]$
$\mathsf{cpt}(\vdash EX_x(\phi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash (s_1/x)\phi, c_1, \mathsf{cpt}(\vdash (s_2/x)\phi, c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash (s_n/x)\phi, c_1, c_2)...)))$ $[\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)]$
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AF_x(\phi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_2 \quad [AF_x(\phi)(s) \in \Gamma]$
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AF_x(\phi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$ $\mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\phi, c_1, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\phi)(s_1), \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\phi)(s_n), c_1, c_2)..., c_2), c_2))$ $[\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s), AF_x(\phi)(s) \notin \Gamma, \text{and } \Gamma' = \Gamma, AF_x(\phi)(s)]$
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EG_x(\phi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_1 \quad [EG_x(\phi)(s) \in \Gamma]$
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EG_x(\phi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$ $\mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\phi, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\phi)(s_1), c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\phi)(s_n), c_1, c_2)...)), c_2)$ $[\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s), EG_x(\phi)(s) \notin \Gamma, \text{and } \Gamma' = \Gamma, EG_x(\phi)(s)]$
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_1 \quad [(AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \in \Gamma]$
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$ $\mathsf{cpt}(\vdash (s/y)\phi_2, \mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\phi_1, c_1, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_1), \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_n),$ $c_1, c_2)..., c_2), c_2)), c_2) \quad [\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s), AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \notin \Gamma, \text{ and } \Gamma' = \Gamma, AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)]$
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_2 \quad [EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \in \Gamma]$
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$ $\mathsf{cpt}(\vdash (s/y)\phi_2, c_1, \mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\phi_1, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_1), c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_n),$ $c_1, c_2)...)), c_2)) \quad [\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s), EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \notin \Gamma, \text{ and } \Gamma' = \Gamma, EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)]$

图 2.4: CPT 的重写规则.

2.3.2 证明搜索的可终止性

在证明利用图2.3.1表示的重写规则，使得 SCTLProV 的证明搜索是可终止的之前，我们需要引入以下定义和命题。

定义 2.3.2 (字典路径序（lexicographic path ordering）[7,17]). 设 $\succeq$ 是函数符号集合 F 的一个拟序（*quasi-ordering*），其中 F 的每个符号的元数（*arity*）是固定不变的。集合 $T(F)$（由 F 生成的项的集合）上的字典路径序 $\succeq_{\mathsf{lpo}}$ 的归纳定义如下：

$s = f(s_1, ..., s_m) \succeq_{\mathsf{lpo}} g(t_1, ..., t_n) = t$ 当且仅当以下至少一条断言成立：

- 存在 $i \in \{1, ..., m\}$，使得 $s_i \succeq_{\mathsf{lpo}} t$ 成立。
- 对于任意 $j \in \{1, ..., n\}$，$f \succ g$ 和 $s \succ_{\mathsf{lpo}} t_j$ 同时成立。

- 对于任意 $j \in \{2,...,n\}, f = g$，$(s_1,...,s_m) \succeq'_{\mathsf{lpo}} (t_1,...,t_n)$ 和 $s \succ_{\mathsf{lpo}} t_j$ 都成立，其中 $\succeq'_{\mathsf{lpo}}$ 是由 $\succeq_{\mathsf{lpo}}$ 产生的字典序。

命题 2.3.1 (字典路径序的良基性). 如果 $\succeq$ 是函数符号集合 F 的一个拟序（*quasi-ordering*），其中 F 的每个符号的元数（*arity*）是固定不变的，那么根据集合 $T(F)$（由 F 生成的项的集合）上的字典路径序 $\succeq_{\mathsf{lpo}}$ 是良基的当且仅当 $\succeq$ 是良基的。

证明. 证明由 Dershowitz 提出，参考[7]。 □

定义 2.3.3 (相继式的权重). 假设一个 *Kripke* 模型的状态集的基数为 n；$\Gamma \vdash \phi$ 是一个 *SCTL*($\mathcal{M}$) 相继式；$|\phi|$ 是公式 ϕ 的大小；$|\Gamma|$ 是 Γ 的基数。相继式 $\Gamma \vdash \phi$ 的权重为

$$w(\Gamma \vdash \phi) = \langle |\phi|, (n - |\Gamma|) \rangle$$

命题 2.3.2 (可终止性). 假设 $\mathcal{M}$ 是一个 *Kripke* 模型，ϕ 是一个 $CTL_P(\mathcal{M})$ 闭公式，那么 *cpt*($\vdash \phi, \mathfrak{t}, \mathfrak{f}$) 能在有限步之内重写到 $\mathfrak{t}$ 或 $\mathfrak{f}$。

证明. 令 $F = \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathsf{cpt}\} \cup \mathsf{Seq}$，其中 Seq 是在 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi, \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$ 的重写步骤中所出现的相继式的集合；cpt 的元数是 3，F 中其他符号的元数是 0。F 上的拟序 $\succeq$（$\forall f, g \in F$, $f \succ g$ 是指 “$f \succeq g$ 同时 $f \neq g$”）定义如下：

- $\mathsf{cpt} \succ \mathfrak{t}$;
- $\mathsf{cpt} \succ \mathfrak{f}$;
- 对于每个相继式 $\Gamma \vdash \phi$ 都有 $\Gamma \vdash \phi \succ \mathsf{cpt}$;
- $\Gamma \vdash \phi \succ \Gamma' \vdash \phi'$ 当且仅当 $w(\Gamma \vdash \phi) > w(\Gamma' \vdash \phi')$，其中 $>$ 是自然数对上的字典序。

令 $\succeq_{\mathsf{lpo}}$ 为由 $\succeq$ 生成的关于 CPT 的字典序。显然，$\succeq$ 是良基的，因此根据命题2.3.1可知，$\succeq_{\mathsf{lpo}}$ 也是良基的。

若要证明重写系统是可终止的，只需证明对于每一步重写 $c \rightsquigarrow c'$，都有 $c \succ_{\mathsf{lpo}} c'$。下面我们针对重写规则逐条进行分析：

假设 c 是 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2)$ 形式的。

- 如果 $\phi = \top, \bot, P(s_1,...,s_m)$ 或 $\neg P(s_1,...,s_m)$，那么由于 c_1 和 c_2 是 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2)$ 的子项，因此，$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} c_1$ 以及 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} c_2$。
- 如果 $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, 那么由 $\succ_{\mathsf{lpo}}$ 的定义可知，由于 $\vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \succ \vdash \phi_1$，$\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2)$ 以及 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} c_2$，因此 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2), c_2)$;

- 如果 $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$，那么由 $\succ_{\mathsf{lpo}}$ 的定义可知，由于 $\vdash \phi_1 \vee \phi_2 \succ \vdash \phi_1$，$\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} c_1$ 以及 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2, c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2)$，因此 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2, c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, c_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2))$；
- 如果 $\phi = AX_x(\phi_1)(s)$，那么根据 $\succ_{\mathsf{lpo}}$ 的定义可知，由于 $\Gamma \vdash AX_x(\phi_1)(s) \succ \vdash (s_i/x)\phi_1$ 以及 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AX_x(\phi_1)(s), c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} \mathsf{cpt}(\vdash (s_i/x)\phi_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash (s_n/x)\phi_1, c_1, c_2)..., c_2), c_2)$,因此 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AX_x(\phi_1)(s), c_1, c_2) \succ_{\mathsf{lpo}} \mathsf{cpt}(\vdash (s_1/x)\phi_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash (s_n/x)\phi_1, c_1, c_2), ..., c_2), c_2)$，其中 $\mathsf{Next}(s) = \{s_1, ..., s_n\}$，而且 $i \in \{1, ..., n\}$；
- 对于 EX 情况的分析与 AX 类似；
- 如果 $\phi = EG_x(\phi_1)(s)$，那么
  - 当 $EG_x(\phi_1)(s) \in \Gamma$ 时，此时与第一种情况类似：$c \succ_{\mathsf{lpo}} c'$；
  - 当 $EG_x(\phi_1)(s) \notin \Gamma$ 时，根据 $\succ_{\mathsf{lpo}}$ 的定义可知，由于 $\Gamma \vdash EG_x(\phi_1)(s) \succ \vdash (s/x)\phi_1$ 以及 $\forall i \in \{1, ..., n\}, \Gamma \vdash EG_x(\phi_1)(s) \succ \Gamma' \vdash EG_x(\phi_1)(s_i)$，其中 $\mathsf{Next}(s) = \{s_1, ..., s_n\}$ 以及 $\Gamma' = \Gamma \cup \{EG_x(\phi_1)(s)\}$；
- 对于 AF 情况的分析与 EG 类似；
- 如果 $\phi = AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$，那么
  - 当 $AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \in \Gamma$ 时，此时与第一种情况类似：$c \succ_{\mathsf{lpo}} c'$;
  - 当 $AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \notin \Gamma$ 时,由 $\succ_{\mathsf{lpo}}$ 的定义可知,由于 $\Gamma \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \succ \vdash (s/y)\phi_2$，$\Gamma \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \succ \vdash (s/x)\phi_1$ 以及 $\forall i \in \{1, ..., n\}, \Gamma \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \succ \Gamma' \vdash AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s_i)$，因此 $c \succ_{\mathsf{lpo}} c'$，其中 $\mathsf{Next}(s) = \{s_1, ..., s_n\}$ 以及 $\Gamma' = \Gamma \cup \{AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)\}$；
- 对于 EU 情况的分析与 AR 类似。

□

2.3.3 证明搜索算法的正确性

证明搜索算法的正确性可由以下命题来表示。

命题 2.3.3 (证明搜索算法的正确性). *对于给定闭公式 ϕ，$cpt(\vdash \phi, \mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \rightsquigarrow^* \mathfrak{t}$ 当且仅当 $\vdash \phi$ 是可证的。*

证明. 我们证明一个更一般的命题，即：对于一个给定的公式 ϕ, 对任意不同的两个 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$ 当且仅当 $\Gamma \vdash \phi$ 是可证的。

需要注意的是，对任意不同的两个 CPT c_1 和 c_2，$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2)$ 总会在有限步之内重写到 c_1 或 c_2。这是由于根据命题2.3.2，$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$ 总会在有限步之内重写到 $\mathfrak{t}$ 或 $\mathfrak{f}$，而且在重写 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2)$ 的过程中;c_1 和 c_2 的结构都不会影响重写的步骤直到需要重写 c_1 或者 c_2 本身。因此，我们可以在 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$ 的重写步骤中将 $\mathfrak{t}$ 替换成 c_1，将 $\mathfrak{f}$ 替换成 c_2 并由此得到由 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash \phi, c_1, c_2)$ 重写到 c_1 或 c_2 的步骤。本证明中需要用到这个性质。

现在，我们通过对 $\Gamma \vdash \phi$ 的权重（见定义2.3.3）进行归纳分析。在本证明中，我们将 CPT c_1 无法在有限步之内重写到 c_2 记作 $c_1 \not\rightsquigarrow^* c_2$。

- 如果 $\phi = \top$ 或 $\bot$，命题显然成立。
- 如果 $\phi = P(s_1, ..., s_n)$，其中 $P(s_1, ..., s_n)$ 是原子公式，那么对任意两个 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash P(s_1, ..., s_n), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_1$ 当且仅当 $\langle s_1, ..., s_n \rangle \in P$ 当且仅当 $\vdash P(s_1, ..., s_n)$ 是可证的。
- 如果 $\phi = \neg P(s_1, ..., s_n)$，其中 $P(s_1, ..., s_n)$ 是原子命题，那么对任意两个 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash \neg P(s_1, ..., s_n), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_1$ 当且仅当 $\langle s_1, ..., s_n \rangle \notin P$ 当且仅当 $\vdash \neg P(s_1, ..., s_n)$ 是可证的。
- 如果 $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$，那么
  - ($\Rightarrow$) 如果对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$，那么 $\vdash \phi_1$ 和 $\vdash \phi_2$ 都是可证的。否则，如果 $\vdash \phi$ 不可证，那么根据归纳假设，存在两个不相同的 CPT c_1 和 c_2 使得 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2), c_2) \rightsquigarrow^* c_2$ 而且 c_2 不能在有限步内重写到 c_1；如果 $\vdash \phi_1$ 可证而 $\vdash \phi_2$ 不可证，那么根据归纳假设，存在两个不同的 CPT c_1 和 c_2 使得 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2), c_2) \rightsquigarrow^* \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2) \not\rightsquigarrow^* c_1$。因此，由证明系统的规则可知，$\vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ 是可证的。
  - ($\Leftarrow$) 如果 $\vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ 是可证的，那么由证明系统规则可知，$\vdash \phi_1$ 和 $\vdash \phi_2$ 都是可证的，那么根据归纳假设，对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2), c_2) \rightsquigarrow^* \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$。
- 如果 $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$，那么
  - ($\Rightarrow$) 对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$，那么 $\vdash \phi_1$ 或 $\vdash \phi_2$ 是可证的。否则，如果 $\vdash \phi_1$ 和 $\vdash \phi_2$ 均不可证，那么根据归纳假设，存在两个不同的 CPT c_1 和 c_2 使得 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, c_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2)) \rightsquigarrow^* \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_2$，而且 c_2 不能在

有限步内重写到 c_1。因此，由证明系统的规则可知，$\vdash \phi_1 \vee \phi_2$ 是可证的。

- ($\Leftarrow$) 如果 $\vdash \phi_1 \vee \phi_2$ 是可证的，那么由证明系统的规则可知，$\vdash \phi_1$ 或 $\vdash \phi_2$ 是可证的，那么根据归纳假设，如果 $\vdash \phi_1$ 是可证的，那么对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, c_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2)) \rightsquigarrow^* c_1$；如果 $\vdash \phi_2$ 是可证的，那么对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, c_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2)) \rightsquigarrow^* \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$ 或者 $\mathsf{cpt}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2, c_1, c_2) \rightsquigarrow \mathsf{cpt}(\vdash \phi_1, c_1, \mathsf{cpt}(\vdash \phi_2, c_1, c_2)) \rightsquigarrow^* c_1$。

- 如果 $\phi = AX_x(\psi)(s)$，而且 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$，那么

  - ($\Rightarrow$) 对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash AX_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$，那么 $\vdash (s_1/x)\psi, ..., \vdash (s_n/x)\psi$ 都是可证的。否则，如果存在 $1 \leq i \leq n$ 使得对任意 $1 \leq j < i$，$\vdash (s_1/x)\psi, ..., \vdash (s_j/x)\psi$ 都是可证的，而 $\vdash (s_i/x)\psi$ 是不可证的，那么根据归纳假设，存在两个不同的 CPT c_1 和 c_2 使得（我们用 $\vdash \psi_{s_i}$ 表示 $\vdash (s_i/x)\psi$）

    $\mathsf{cpt}(\vdash AX_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$
    $\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_1}, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2)...), c_2) \rightsquigarrow^*$
    $... \rightsquigarrow^*$
    $\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_j}, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2)...), c_2) \rightsquigarrow^*$
    $\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_i}, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2)...), c_2) \not\rightsquigarrow^*$
    c_1。因此，由证明系统的规则可知，$\vdash AX_x(\psi)(s)$ 是可证的。

  - ($\Leftarrow$) 如果 $\vdash AX_x(\psi)(s)$ 是可证的，那么由证明系统的规则可知，$\vdash (s_1/x)\psi, ..., \vdash (s_n/x)\psi$ 都是可证的，那么根据归纳假设，对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有（我们用 $\vdash \psi_{s_i}$ 表示 $\vdash (s_i/x)\psi$）

    $\mathsf{cpt}(\vdash AX_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$
    $\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_1}, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2)...), c_2) \rightsquigarrow^*$
    $... \rightsquigarrow^*$
    $\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$。

- 如果 $\phi = EX_x(\psi)(s)$，而且 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$，那么

  - ($\Rightarrow$) 对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\vdash EX_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$，那么存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\vdash (s_i/x)\psi$ 是可证的。否则，如果对任意 $1 \leq i \leq n$，$\vdash (s_i/x)\psi$ 都是不可证的，那么根据归纳假设，存在两个不同的 CPT c_1 和 c_2 使得（我们用 $\vdash \psi_{s_i}$ 表示 $\vdash (s_i/x)\psi$）

$\mathsf{cpt}(\vdash EX_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$
$\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_1}, c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2)...)) \rightsquigarrow^*$
$... \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2) \not\rightsquigarrow^* c_1$。因此，由证明系统的规则可知，$\vdash EX_x(\psi)(s)$ 是可证的。

- ($\Leftarrow$) 如果 $\vdash EX_x(\psi)(s)$ 是可证的，那么由证明系统的规则可知，存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\vdash (s_i/x)\psi$ 是可证的。根据归纳假设，对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有（我们用 $\vdash \psi_{s_i}$ 表示 $\vdash (s_i/x)\psi$）

  $\mathsf{cpt}(\vdash EX_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$
  $\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_1}, c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2)...)) \rightsquigarrow^*$
  ...
  $\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_{i-1}}, c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2)...)) \rightsquigarrow^*$
  $\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_i}, c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\vdash \psi_{s_n}, c_1, c_2)...)) \rightsquigarrow^* c_1$。

- 如果 $\phi = AF_x(\psi)(s)$，而且 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$，那么

  - ($\Rightarrow$) 对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AF_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$,那么$\vdash (s/x)\psi$ 是可证的,或者 $\Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_1), \Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_2),\ ...,\ \Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_n)$ 都是可证的。否则，如果 $\vdash (s/x)\psi$ 是不可证的，而且存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_i)$ 是不可证的，而且对任意 $j < i$，$\Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_j)$ 是可证的，那么根据归纳假设，存在两个不同的 CPT c_1 和 c_2 使得（令 $\Gamma' = \Gamma, AF_x(\psi)(s)$）

    $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AF_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$
    $\mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\psi, c_1, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_1), \mathsf{cpt}(...$
    $\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)..., c_2), c_2)) \rightsquigarrow^*$
    $\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_1), \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)..., c_2), c_2) \rightsquigarrow^*$
    $... \rightsquigarrow^*$
    $\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_i), \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)..., c_2), c_2) \rightsquigarrow^* c_2 \not\rightsquigarrow^* c_1$。因此，由证明系统的规则可知，$\Gamma \vdash AF_x(\psi)(s)$ 是可证的。

  - ($\Leftarrow$) 如果 $\Gamma \vdash AF_x(\psi)(s)$ 是可证的，那么由证明系统的规则可知，$\vdash (s/x)\psi$ 是可证的，或者 $\Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_1),\ \Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_2),\ ...,\ \Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_n)$ 都是可证的。因此，根据归纳假设（令 $\Gamma' = \Gamma, AF_x(\psi)(s)$），

    * 如果 $\vdash (s/x)\psi$ 是可证的，那么对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有

$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AF_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$
$\mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\psi, c_1, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_1),$
$\mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)..., c_2),$
$c_2)) \rightsquigarrow^* c_1$。

* 如果 $\vdash (s/x)\psi$ 是不可证的，而对任意 $1 \leq i \leq n$，$\Gamma, AF_x(\psi)(s) \vdash AF_x(\psi)(s_i)$ 是可证的，那么根据归纳假设，对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有
$\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash AF_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow$
$\mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\psi, c_1, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_1),$
$\mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)..., c_2),$
$c_2)) \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_1), \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)..., c_2), c_2) \rightsquigarrow^*$
$\ldots \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash AF_x(\psi)(s_n), c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$。

- 如果 $\phi = EG_x(\psi)(s)$，而且 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$，那么

  – ($\Rightarrow$) 如果对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EG_x(\psi), c_1, c_2) \rightsquigarrow^* c_1$，那么 $EG_x(\psi)(s) \in \Gamma$，或者 $\vdash (s/x)\psi$ 是可证的以及存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\Gamma, EG_x(\psi)(s) \vdash EG_x(\psi)(s_i)$ 是可证的。否则（令 $\Gamma' = \Gamma, EG_x(\psi)(s)$），

  * 如果 $EG_x(\psi)(s) \notin \Gamma$，而且 $\vdash (s/x)\psi$ 是不可证的，那么存在不同的两个 CPT c_1 和 c_2 使得
  $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EG_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow^*$
  $\mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\psi, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_1), c_1,$
  $\mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)...)),$
  $c_2) \rightsquigarrow^* c_2 \not\rightsquigarrow^* c_1$。

  * 如果 $EG_x(\psi)(s) \notin \Gamma$，$\vdash (s/x)\psi$ 是可证的，而且对任意 $1 \leq i \leq n$，$\Gamma, EG_x(\psi)(s) \vdash EG_x(\psi)(s_i)$ 都是不可证的，那么根据归纳假设，存在不同的两个 CPT c_1 和 c_2 使得
  $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EG_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow^*$
  $\mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\psi, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_1), c_1,$
  $\mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)...)),$
  $c_2) \rightsquigarrow^*$
  $\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_1), c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)...)) \rightsquigarrow^*$
  $\ldots$
  $\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_n), c_1, c_2) \not\rightsquigarrow^* c_1$。

  因此，由证明系统的规则可知，$\Gamma \vdash EG_x(\psi)(s)$ 是可证的。

- ($\Leftarrow$) 如果 $\Gamma \vdash EG_x(\psi)(s)$ 是可证的,那么由证明系统的规则可知,$EG_x(\psi)(s) \in \Gamma$，或者 $\vdash (s/x)\psi$ 是可证的以及存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\Gamma, EG_x(\psi)(s) \vdash EG_x(\psi)(s_i)$ 是可证的。
  * 如果 $EG_x(\psi)(s) \in \Gamma$，那么对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有 $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EG_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow c_1$。
  * 如果 $\vdash (s/x)\psi$ 是可证的，以及存在 $1 \leq i \leq n$ 使得 $\Gamma, EG_x(\psi)(s) \vdash EG_x(\psi)(s_i)$ 是可证的,而且对任意 $j < i$,$\Gamma, EG_x(\psi)(s) \vdash EG_x(\psi)(s_j)$ 都不是可证的，那么根据归纳假设，对任意两个不同的 CPT c_1 和 c_2 都有（令 $\Gamma' = \Gamma, EG_x(\psi)(s)$）
    $\mathsf{cpt}(\Gamma \vdash EG_x(\psi)(s), c_1, c_2) \rightsquigarrow^*$
    $\mathsf{cpt}(\vdash (s/x)\psi, \mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_1), c_1,$
    $\mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)...)),$
    $c_2) \rightsquigarrow^*$
    $\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_1), c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)...)) \rightsquigarrow^*$
    $\ldots \rightsquigarrow^*$
    $\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_i), c_1, \mathsf{cpt}(...\mathsf{cpt}(\Gamma' \vdash EG_x(\psi)(s_n), c_1, c_2)...)) \rightsquigarrow^*$
    c_1。

- 如果 $\phi = AR_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$，由于均为余归纳公式，因此对 AR 公式的分析与 EG 类似。

- 如果 $\phi = EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$，由于均为归纳公式，因此对 EU 公式的分析与 AF 类似。

□

2.3.4 证明搜索算法的优化

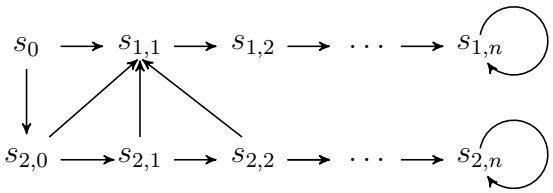
在余归纳公式（尤其是 EG 和 AR 公式）的证明搜索中，我们通常利用 merge 规则来证明某个性质在无穷路径上满足。对于每一个 merge 规则，上下文 Γ（我们称之为 merge）中的公式都是一种类型的，而且都与要证明的公式是相同类型的，唯一的不同是公式中相应的状态常量不同。本质上来说，每个 merge 对应的是无穷路径上的状态，其中所有的状态都满足某个性质。因此，在 merge 规则的实现中，我们可以对于每一种公式类型，只在 Γ 中记录状态常量。

需要注意的是，对于归纳公式（尤其是 AF 和 EU 公式），虽然在证明规则中没有 merge 规则，但是在证明搜索中仍然需要 merge。对于这些公式，merge 的存在可避免无穷的证明搜索。这是由于当归纳公式是不可证的时候，即它们的非（余归纳公式）是可证的时候，我们需要 merge 来表示一个无穷路径，而且这个无穷路

径上的状态都不满足某些性质。对于归纳公式，之所以在证明规则中没有 merge，而在证明搜索中需要 merge 是因为，在证明规则中我们只关心证明树的形状，而不是证明树的构造过程，只有在证明树的构造过程中才需要记录归纳公式的 merge。因此，作为对证明搜索算法的另一个优化，我们需要在归纳公式的证明搜索中同样记录 merge。

另外，在证明搜索过程中，我们对每个子公式都用用一个全局的数据结构来保存访问过的状态，以避免在证明子公式的时候同一个状态被重复访问。在 SCTLProV 中，用来记录状态集合的全局数据结构既可以是哈希表也可以是 BDD。两种数据结构各有优缺点：当模型中的状态变量绝大多数为布尔类型的时候，用 BDD 往往能减少空间的占用；而当模型中包含许多非布尔类型的状态变量时，如果用 BDD 记录的话则需将所有的非布尔变量转化成布尔变量，这个转化的过程会增多状态变量的个数，从而消耗掉更多的时间与空间，因此这时用哈希表来记录状态往往效率更高。接下来，我们利用一个例子来说明利用全局数据结构来记录状态之后，验证的效率会提升。

例子 2.3.1. 考虑一个具有如下状态迁移图的 *Kripke* 模型，其中 $n > 1$，而且在该模型中有集合 $P = \{s_0, s_{1,1}, s_{1,2}, ..., s_{1,n-1}, s_{2,0}, ..., s_{2,n}\}$。



在该模型中，我们考虑公式 $EG_x(P(x))(s_0)$ 的验证，为了验证该公式，我们需要重写 *CPT* $cpt(\vdash EG_x(P(x))(s_0), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$。设在集合 $Next(s_0)$ 中，对状态 $s_{1,1}$ 的搜索在状态 $s_{2,0}$ 之前；对于任意的 $0 \leq i \leq n-1$，在集合 $Next(s_{2,i})$ 中，对状态 $s_{1,1}$ 的搜索在状态 $s_{2,i+1}$ 之前。重写步骤如图*2.5*所示，其中，令

$$\Gamma_0 = \{EG_x(P(x))(s_0)\},$$

$$\Gamma_{1,i} = \{EG_x(P(x))(s_0), EG_x(P(x))(s_{1,0}), \ldots, EG_x(P(x))(s_{1,i})\},$$

以及

$$\Gamma_{2,i} = \{EG_x(P(x))(s_0), EG_x(P(x))(s_{2,0}), \ldots, EG_x(P(x))(s_{2,i})\}$$

在图*2.5*中，在重写 $cpt(\Gamma_{2,0} \vdash EG_x(P(x))(s_{2,1}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$ 之前，路径 $\pi = s_{1,1}, s_{1,2}, ..., s_{1,n}$ 上的所有的状态都已被访问过一遍。而且，对于任意 $0 \leq i \leq n-1$，在每次重写 $cpt(\Gamma_{2,i} \vdash EG_x(P(x))(s_{2,i+1}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$ 之前，π 上的所有状态都会重新被访问一遍。

$\mathsf{cpt}(\vdash EG_x(P(x))(s_0), \mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma_0 \vdash EG_x(P(x))(s_{1,1}), \mathfrak{t}, \mathsf{cpt}(\Gamma_0 \vdash EG_x(P(x))(s_{2,0}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})) \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma_{1,0} \vdash EG_x(P(x))(s_{1,2}), \mathfrak{t}, \mathsf{cpt}(\Gamma_0 \vdash EG_x(P(x))(s_{2,0}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})) \rightsquigarrow^*$
$\ldots \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma_{1,n-1} \vdash EG_x(P(x))(s_{1,n}), \mathfrak{t}, \mathsf{cpt}(\Gamma_0 \vdash EG_x(P(x))(s_{2,0}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})) \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma_0 \vdash EG_x(P(x))(s_{2,0}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma_{2,0} \vdash EG_x(P(x))(s_{1,1}), \mathfrak{t}, \mathsf{cpt}(\Gamma_{2,0} \vdash EG_x(P(x))(s_{2,1}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})) \rightsquigarrow^*$
$\ldots \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma_{2,0} \vdash EG_x(P(x))(s_{2,1}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \rightsquigarrow^*$
$\ldots \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma_{2,n-1} \vdash EG_x(P(x))(s_{2,n}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \rightsquigarrow^*$
$\mathsf{cpt}(\Gamma_{2,n} \vdash EG_x(P(x))(s_{2,n}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f}) \rightsquigarrow \mathfrak{t}$

图 2.5: $\mathsf{cpt}(\vdash EG_x(P(x))(s_0), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$ 的重写步骤

当我们用一个全局数据结构 M 来记录访问在证明 EG 公式的过程中访问过的状态时，可以避免 π 被重复访问。在本例中，我们将所有不满足公式 $EG_x(P(x))(s)$ 的状态 s 存入到 M 中，而且当重写 $c = \mathit{cpt}(\Gamma \vdash EG_x(P(x))(s), c_1, c_2)$ 的时候，如果 $s \in M$，那么直接在当前的重写步骤中将 c 替换成 c_2。因此在本例中，对于任意的 $0 \leq i \leq n-1$，在重写 $\mathit{cpt}(\Gamma_{2,i} \vdash EG_x(P(x))(s_{2,i+1}), \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$ 之前，π 上的所有状态都已记录在 M 中，因此不用重复被访问。

有关全局数据结构的详细解释见下一小节。

2.3.5 证明搜索算法伪代码

在本小节，我们来详细介绍 SCTLProV 的证明搜索算法中的数据结构及伪代码。SCTLProV 的证明搜索算法如图2.6所示。

在解释该算法之前，我们需要介绍公式模式的概念：对于以模态词 AF、EG、AR、EU 开头的公式 ϕ，用 _ 来代替 ϕ 中的常量后得到即为 ϕ 的公式模式 ϕ^-。比如，$EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$ 的模式为 $EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(\_)$；$AF_x(\phi')(s')$ 的模式为 $AF_x(\phi')(\_)$。一个公式的模式可以看作是当前公式中状态常量的上下文。

在该证明搜索算法中，c 是当前需要被重写的 CPT；pt 和 ce 是在证明搜索的过程构造的树结构，分别指的是证明树和反例；M^{t} 和 M^{f} 记录的是，对于当前要证明的公式的每一个子公式，分别使得该子公式满足与不满足的状态的集合；visited 记录的是在对于每个以 AF、EG、AR、EU 开头的公式的证明过程中访问过的状态集合。

需要注意的是，对于算法中重写步骤中的每个 CPT c，我们人为关联一个动作

Input: A CPT c.
Output: A pair (r, t), where r is a Boolean, and t is either pt or ce.

1: **function** PROOFSEARCH
2: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash \psi, \mathfrak{t}^{\emptyset}, \mathfrak{f}^{\emptyset})$
3: $\quad \mathsf{pt} := \mathsf{ce} := \langle$tree with a single node: $\vdash \psi\rangle$
4: $\quad \mathsf{M^t} := \mathsf{M^f} := \mathsf{visited} := \langle$empty hash table$\rangle$
5: $\quad$ **while** $\mathsf{c} = \mathsf{cpt}^{\mathsf{A}_0}(\ \vdash \phi, \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_1}, \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_2})$ **do**
6: $\quad\quad \forall \mathsf{a} \in \mathsf{A}_0$, perform a
7: $\quad\quad$ **case** ϕ **is**
8: $\quad\quad\quad \top$: $\mathsf{c} := \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_1}$
9: $\quad\quad\quad \bot$: $\mathsf{c} := \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_2}$
10: $\quad\quad\quad \mathsf{P}(\mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_n)$:
11: $\quad\quad\quad\quad$ **if** $\langle \mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_n\rangle \in \mathsf{P}$ **then** $\mathsf{c} := \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_1}$ **else** $\mathsf{c} := \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_2}$ **end if**
12: $\quad\quad\quad \neg\mathsf{P}(\mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_n)$:
13: $\quad\quad\quad\quad$ **if** $\langle \mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_n\rangle \in \mathsf{P}$ **then** $\mathsf{c} := \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_2}$ **else** $\mathsf{c} := \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_1}$ **end if**
14: $\quad\quad\quad \phi_1 \wedge \phi_2 : \mathsf{ProveAnd}(\vdash \phi_1 \wedge \phi_2)$
15: $\quad\quad\quad \phi_1 \vee \phi_2 : \mathsf{ProveOr}(\vdash \phi_1 \vee \phi_2)$
16: $\quad\quad\quad \mathsf{EX}_{\mathsf{x}}(\phi_1)(\mathsf{s}) : \mathsf{ProveEX}(\ \vdash \mathsf{EX}_{\mathsf{x}}(\phi_1)(\mathsf{s}))$
17: $\quad\quad\quad \mathsf{AX}_{\mathsf{x}}(\phi_1)(\mathsf{s}) : \mathsf{ProveAX}(\ \vdash \mathsf{AX}_{\mathsf{x}}(\phi_1)(\mathsf{s}))$
18: $\quad\quad\quad \mathsf{EG}_{\mathsf{x}}(\phi_1)(\mathsf{s}) : \mathsf{ProveEG}(\ \vdash \mathsf{EG}_{\mathsf{x}}(\phi_1)(\mathsf{s}))$
19: $\quad\quad\quad \mathsf{AF}_{\mathsf{x}}(\phi_1)(\mathsf{s}) : \mathsf{ProveAF}(\ \vdash \mathsf{AF}_{\mathsf{x}}(\phi_1)(\mathsf{s}))$
20: $\quad\quad\quad \mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}) : \mathsf{ProveEU}(\ \vdash \mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}))$
21: $\quad\quad\quad \mathsf{AR}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}) : \mathsf{ProveAR}(\ \vdash \mathsf{AR}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}))$
22: $\quad\quad$ **end case**
23: $\quad$ **end while**
24: $\quad$ **if** $\mathsf{c} = \mathfrak{t}^{\mathsf{A}}$ **then**
25: $\quad\quad \forall \mathsf{a} \in \mathsf{A}$, perform a
26: $\quad\quad$ **return** $(\mathsf{true}, \mathsf{pt})$
27: $\quad$ **end if**
28: $\quad$ **if** $\mathsf{c} = \mathfrak{f}^{\mathsf{A}}$ **then**
29: $\quad\quad \forall \mathsf{a} \in \mathsf{A}$, perform a
30: $\quad\quad$ **return** $(\mathsf{false}, \mathsf{ce})$
31: $\quad$ **end if**
32: **end function**

图 2.6: 证明搜索算法

集合 A，使得当 c 是当前需要重写的 CPT 时，执行 A 中的所有动作。将 CPT 关联动作集合的目的是为了构造证明树和反例，以及更新 $\mathsf{M^t}$ 和 $\mathsf{M^f}$。在算法执行的初始时刻，我们分别给三个 CPT $\mathsf{cpt}(\vdash \phi, \mathfrak{t}, \mathfrak{f})$、$\mathfrak{t}$、$\mathfrak{f}$ 均关联一个空动作集合，其中 ϕ 是要验证的公式。

另外需要注意的是，该算法中，三个全局变量 $\mathsf{M^t}$、$\mathsf{M^f}$、visited 的值都是哈希

表。实际上，这三个全局变量都是对于每个公式模式记录一个状态集合，因此，M^{t}、M^{f}、visited 均可看作是以公式模式为键，以状态集合为值的哈希表。在该算法中，$\mathsf{M}^{\mathsf{t}}_{\mathsf{EG}_x(\phi)(\_)}$ 用来表示一个状态集合 S，其中 $\forall s \in S$，$EG_x(\phi)(s)$ 是可证的；$\mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{EG}_x(\phi)(\_)}$ 用来表示一个集合 S，其中 $\forall s \in S$，$EG_x(\phi)(s)$ 是不可证的；$\mathsf{visited}_{\mathsf{EG}_x(\phi)(\_)}$ 用来表示一个集合 S，其中 $\forall s \in S$，s 在证明以 $EG_x(\phi)(\_)$ 为模式的公式的过程中已被访问过。

该算法中的“while”循环的作用是重复重写 CPT c，直到重写到 $\mathfrak{t}$ 或 $\mathfrak{f}$。该算法的返回值是一个由一个布尔值和一棵树组成的二元组，布尔值表示要验证的公式的满足与否，树则表示此公式的证明树或者反例。

该算法中，CPT 的重写方式由公式 ϕ 的形状决定，其中 ϕ 为原子公式和原子公式的非的情况在算法主体（表2.6）中给出，对于 ϕ 的更复杂的情况，我们在接下来的小节中依次加以讨论。

2.3.5.1 ProveAnd 和 ProveOr

1: let $\mathsf{A}_{12} = \mathsf{A}_1 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{pt}, \vdash \phi_1 \wedge \phi_2, \{\vdash \phi_1, \vdash \phi_2\})\}$
2: let $\mathsf{A}_{21} = \mathsf{A}_2 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{ce}, \vdash \phi_1 \wedge \phi_2, \{\vdash \phi_1\})\}$
3: let $\mathsf{A}_{22} = \mathsf{A}_2 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{ce}, \vdash \phi_1 \wedge \phi_2, \{\vdash \phi_2\})\}$
4: let $\mathsf{c}' = \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash \phi_1, \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash \phi_2, \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_{12}}, \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_{22}}), \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_{21}})$
5: $\mathsf{c} := \mathsf{c}'$

图 2.7: ProveAnd($\vdash \phi_1 \wedge \phi_2$)

该算法中合取公式的证明搜索如图2.7所示，其中 $\mathsf{ac}(\mathsf{t}, \mathsf{parent}, \mathsf{children})$ 表示将 children 的每个元素都作为证明树 t 上 parent 的子节点。ProveAnd 的解释如下：

- 第 4 行：当从 c' 重写到 c_1 时，由于 $\vdash \phi_1$ 和 $\vdash \phi_2$ 均可证，那么将 $\vdash \phi_1$ 和 $\vdash \phi_2$ 都加在证明树中作为 $\vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ 的子节点（第 1 行）。否则，当从 c' 重写到外部的 c_2 或内部的 c_2 时，由于 $\vdash \phi_1$ 或 $\vdash \phi_2$ 是不可证的，这时将 $\vdash \phi_1$ 或 $\vdash \phi_2$ 加到反例中作为 $\vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ 的子节点（第 2、3 行）。
- 第 5 行: 将 c 重写到 c'。

ProveOr 是 ProveAnd 的对偶情况，算法细节如图2.8所示。

2.3.5.2 ProveEX 和 ProveAX

ProveEX 的算法细节如图2.9所示，其中令 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$。ProveEX 与 ProveAnd 的分析过程类似，不同点在于第 4、5 行，当 c' 重写到第 i 个 c_1 的时候，

1: let $\mathsf{A}_{22} = \mathsf{A}_2 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{ce}, \vdash \phi_1 \vee \phi_2, \{\vdash \phi_1, \vdash \phi_2\})\}$
2: let $\mathsf{A}_{11} = \mathsf{A}_1 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{pt}, \vdash \phi_1 \vee \phi_2, \{\vdash \phi_1\})\}$
3: let $\mathsf{A}_{12} = \mathsf{A}_1 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{pt}, \vdash \phi_1 \vee \phi_2, \{\vdash \phi_2\})\}$
4: let $\mathsf{c}' = \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash \phi_1, \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_{11}}, \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash \phi_2, \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_{12}}, \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_{22}}))$
5: $\mathsf{c} := \mathsf{c}'$

图 2.8: ProveOr($\vdash \phi_1 \vee \phi_2$)

1: */* For notation purpose, here we refer "k" to $EX_x(\phi_1)(\_)$, and "k(s)" to $EX_x(\phi_1)(s)$.*/*
2: $\mathsf{A}_2 := \mathsf{A}_2 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{ce}, \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}), \{\vdash (\mathsf{s}_1/\mathsf{x})\phi_1, ..., \vdash (\mathsf{s}_\mathsf{n}/\mathsf{x})\phi_1\})\}$
3: $\forall \mathsf{i} \in \{1, ..., \mathsf{n}\}$, let $\mathsf{A}_{1\mathsf{i}} = \mathsf{A}_1 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{pt}, \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}), \{\vdash (\mathsf{s}_\mathsf{i}/\mathsf{x})\phi_1\})\}$
4: let $\mathsf{c}' = \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash (\mathsf{s}_1/\mathsf{x})\phi_1, \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_{11}}, \mathsf{cpt}^{\emptyset}(...\mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash (\mathsf{s}_\mathsf{n}/\mathsf{x})\phi_1, \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_{1\mathsf{n}}}, \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_2})...))$
5: $\mathsf{c} := \mathsf{c}'$

图 2.9: ProveEX($\vdash \mathsf{EX}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$)

$\vdash (\mathsf{s}_\mathsf{i}/\mathsf{x})\phi_1$ 应该作为 $\vdash \mathsf{EX}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$ 的子节点被加入到证明树中（第 3 行）；相反，当 c' 重写到 c_2 的时候，$\vdash (\mathsf{s}_1/\mathsf{x})\phi_1, ..., \vdash (\mathsf{s}_\mathsf{n}/\mathsf{x})\phi_1$ 都应该作为 $\vdash \mathsf{EX}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$ 的子节点被加入到反例中（第 2 行）。

ProveAX 是 ProveEX 的对偶情况，算法细节如图2.10所示。

1: */*For notation purpose, here we refer "k" to $AX_x(\phi_1)(\_)$, and "k(s)" to $AX_x(\phi_1)(s)$.*/*
2: $\mathsf{A}_1 := \mathsf{A}_1 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{pt}, \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}), \{\vdash (\mathsf{s}_1/\mathsf{x})\phi_1, ..., \vdash (\mathsf{s}_\mathsf{n}/\mathsf{x})\phi_1\})\}$
3: $\forall \mathsf{i} \in \{1, ..., \mathsf{n}\}$, let $\mathsf{A}_{2\mathsf{i}} = \mathsf{A}_2 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{ce}, \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}), \{\vdash (\mathsf{s}_\mathsf{i}/\mathsf{x})\phi_1\})\}$
4: let $\mathsf{c}' = \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash (\mathsf{s}_1/\mathsf{x})\phi, \mathsf{cpt}^{\emptyset}(...\mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash (\mathsf{s}_\mathsf{n}/\mathsf{x})\phi, \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_1}, \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_{2\mathsf{n}}}), ...), \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_{21}})$
5: $\mathsf{c} := \mathsf{c}'$

图 2.10: ProveAX($\vdash \mathsf{AX}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$)

2.3.5.3 ProveEG and ProveAF

ProveEG 的算法细节如图2.11所示，其中，states( ) 表示 中出现的状态，并且令 $\{s_1, ..., s_n\} = \mathsf{Next}(s)$。ProveEG 的解释如下：

- 第 3、4 行：如果已知 $\mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$ 是不可证的，那么将 c 重写到 c_2。
- 第 5 – 8 行：如果已知 $\mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$ 是可证的，或者可应用 merge 规则，那么将 c 重写到 c_1，同时，由于 中的每个公式都是可证的，因此将 中出现的所有状态加入到 $\mathsf{M}^{\mathsf{t}}_{\mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\_)}$ 中。另外，由于状态的访问是深度优先的，因此将所有的访问过的除了在 出现的状态之外都加入集合 $\mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\_)}$ 中。

1: */* For notation purpose, here we refer "k" to $EG_x(\phi_1)(\_)$ and "k(s)" to $EG_x(\phi_1)(s)$,*/
2: */* and let Γ' be $\Gamma \cup \{k(s)\}$.*/*
3: **if** $\mathsf{s} \in \mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}}$ **then**
4: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_2}$
5: **else if** $\mathsf{s} \in \mathsf{M}^{\mathsf{t}}_{\mathsf{k}}$ or $\mathsf{k}(\mathsf{s}) \in \Gamma$ **then**
6: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_1}$
7: $\quad \mathsf{M}^{\mathsf{t}}_{\mathsf{k}} := \mathsf{M}^{\mathsf{t}}_{\mathsf{k}} \cup \mathsf{states}(\Gamma)$
8: $\quad \mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}} := \mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}} \cup \mathsf{visited}_{\mathsf{k}} \setminus \mathsf{states}(\Gamma)$
9: **else**
10: $\quad$ let $\mathsf{A}_{20} = \mathsf{A}_2 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{ce}, \Gamma \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}), \{\vdash (\mathsf{s}/\mathsf{x})\phi_1\})\}$
11: $\quad$ let $\mathsf{A}_{2\mathsf{n}} = \mathsf{A}_2 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{ce}, \Gamma \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}), \{\Gamma' \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}_1), ..., \Gamma' \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}_\mathsf{n})\})\}$
12: $\quad \forall \mathsf{i} \in \{1, ..., \mathsf{n}\}$, let
13: $\quad\quad \mathsf{A}_{1\mathsf{i}} = \mathsf{A}_1 \cup \{\mathsf{ac}(\mathsf{pt}, \Gamma \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}), \{\vdash (\mathsf{s}/\mathsf{x})\phi_1, \Gamma' \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}_\mathsf{i})\})\}$
14: $\quad$ **if** $\Gamma = \emptyset$ **then**
15: $\quad\quad \mathsf{visited}_{\mathsf{k}} := \{\mathsf{s}\}$
16: $\quad$ **else**
17: $\quad\quad \mathsf{visited}_{\mathsf{k}} := \mathsf{visited}_{\mathsf{k}} \cup \{\mathsf{s}\}$
18: $\quad$ **end if**
19: $\quad \mathsf{A}_{20} := \mathsf{A}_{20} \cup \{\mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}} := \mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}} \cup \{\mathsf{s}\}\}$;
20: $\quad \mathsf{A}_{2\mathsf{n}} := \mathsf{A}_{2\mathsf{n}} \cup \{\mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}} := \mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}} \cup \{\mathsf{s}\}\}$;
21: $\quad$ let $\mathsf{c}' = \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash (\mathsf{s}/\mathsf{x})\phi_1, \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\Gamma' \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}_1), \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_{11}}, \mathsf{cpt}^{\emptyset}(...\mathsf{cpt}^{\emptyset}(\Gamma' \vdash \mathsf{k}(\mathsf{s}_\mathsf{n}), \mathsf{c}_1^{\mathsf{A}_{1\mathsf{n}}}, \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_{2\mathsf{n}}})...)), \mathsf{c}_2^{\mathsf{A}_{20}})$
22: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{c}'$
23: **end if**

图 2.11: $\mathsf{ProveEG}(\ \vdash \mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s}))$

- 第 21 行：CPT c' 的构造方式如下：

  1. 如果 c' 重写到外层的 c_2，那么 $\vdash (\mathsf{s}/\mathsf{x})\phi_1$ 是不可证的，因此将 $\vdash (\mathsf{s}/\mathsf{x})\phi_1$ 作为 $\Gamma \vdash \mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$ 的子节点加到反例中（第 10 行）。另外，如果 $\Gamma \vdash \mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$ 是不可证的，那么不存在以 s 开头的无穷路径使得该路径上的所有状态都满足 ϕ_1，在这种情况下，我们将 s 加入到 $\mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\_)}$ 中（第 19、20 行）。
  2. 如果 c' 重写到内层的 c_2，那么 $\Gamma' \vdash \mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s}_1), ..., \Gamma' \vdash \mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s}_\mathsf{n})$ 都是不可证的，因此将其都作为 $\Gamma \vdash \mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$ 的子节点加入到反例中（第 11 行）。
  3. 如果 c' 重写到第 i 个 c_1，那么 $\vdash (\mathsf{s}/\mathsf{x})\phi_1$ 和 $'\vdash \mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s}_\mathsf{i})$ 都是可证的，因此将其都作为 $\ \vdash \mathsf{EG}_\mathsf{x}(\phi_1)(\mathsf{s})$ 的子节点加入到证明树中（第 12、13 行）。

- 第 22 行：将 c 重写到 c'。

1: /* For notation purpose, here we refer "k" to $AF_x(\phi_1)(\_)$ and "k(s)" to $AF_x(\phi_1)(s)$,
2: and let Γ' be $\Gamma \cup \{k(s)\}$..*/
3: **if** $s \in M_k^t$ **then**
4: $\quad c := c_1^{A_1}$
5: **else if** $s \in M_k^f$ or $k(s) \in \Gamma$ **then**
6: $\quad c := c_2^{A_2}$
7: $\quad M_k^f := M_k^f \cup states(\Gamma)$
8: $\quad M_k^t := M_k^t \cup visited_k \setminus states(\Gamma)$
9: **else**
10: $\quad let\ A_{10} = A_1 \cup \{ac(pt, \Gamma \vdash k(s), \{\vdash (s/x)\phi_1\})\}$
11: $\quad let\ A_{1n} = A_1 \cup \{ac(pt, \Gamma \vdash k(s), \{\Gamma' \vdash k(s_1), ..., \Gamma' \vdash k(s_n)\})\}$
12: $\quad \forall i \in \{1, ..., n\}, let$
13: $\quad\quad A_{2i} = A_2 \cup \{ac(ce, \Gamma \vdash k(s), \{\vdash (s/x)\phi_1, \Gamma' \vdash k(s_i)\})\}$
14: $\quad$ **if** $= \emptyset$ **then**
15: $\quad\quad visited_k := \{s\}$
16: $\quad$ **else**
17: $\quad\quad visited_k := visited_k \cup \{s\}$
18: $\quad$ **end if**
19: $\quad A_{10} := A_{10} \cup \{M_k^t := M_k^t \cup \{s\}\}$
20: $\quad A_{1n} := A_{1n} \cup \{M_k^t := M_k^t \cup \{s\}\};$
21: $\quad let\ c' = cpt^{\emptyset}(\vdash (s/x)\phi_1, c_1^{A_{10}}, cpt^{\emptyset}(\Gamma' \vdash k(s_1), cpt^{\emptyset}(...cpt^{\emptyset}(\Gamma' \vdash k(s_n), c_1^{A_{1n}}, c_2^{A_{2n}})...), c_2^{A_{21}}))$
22: $\quad c := c'$
23: **end if**

图 2.12: $ProveAF(\Gamma \vdash AF_x(\phi_1)(s))$

ProveAF 是 ProveEG 的对偶情况，算法细节如图2.12所示。

2.3.5.4 ProveEU 和 ProveAR

ProveEU 的算法细节要比 ProveEG 更加复杂。原因是，对于后者我们只需找到一个满足某个公式的环即可，而对于前者我们需要找到一条终点状态满足某公式的有穷路径，而且在找到这条路径之前可能已访问若干个环。ProveEU 的算法细节如图2.13所示。在 ProveEG 中，我们令 $\{s_1, ..., s_n\} = Next(s)$；令 $reachable(S)$ 表示能经过有穷路径到达 S 的某个状态的状态集合。ProveEU 的解释如下：

- 第 3、4 行：如果 $EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$ 是可证的，那么将 c 重写到 c_1。
- 第 5、6 行：如果 $EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s)$ 是不可证的，或者 $EU_{x,y}(\phi_1, \phi_2)(s) \in \Gamma$，那么将 c 重写到 c_2。
- 第 26、27 行：CPT c' 的构造方式如下：

1: /* For notation purpose, here we refer "k" to $EU_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(\_)$ and "k(s)" to $EU_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)$,
2: and let Γ' be $\Gamma \cup \{k(s)\}$.*/
3: **if** $\mathsf{s} \in \mathsf{M_k^t}$ **then**
4: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{c_1^{A_1}}$
5: **else if** $\mathsf{s} \in \mathsf{M_k^f}$ or $\mathsf{k_s} \in$ **then**
6: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{c_2^{A_2}}$;
7: **else**
8: $\quad$ let $\mathsf{A_{10}} = \mathsf{A_1} \cup \{$
9: $\quad\quad \mathsf{ac(pt,\ \vdash k(s), \{\vdash (s/y)}\phi_2\mathsf{\})}$,
10: $\quad\quad \mathsf{M_k^t := M_k^t \cup reachable(states(}\Gamma\mathsf{) \cup \{s\})}$,
11: $\quad\quad \mathsf{M_k^f := (M_k^f \cup visited_k) \setminus reachable(states(}\Gamma\mathsf{) \cup \{s\})}$
12: $\quad$ let $\mathsf{A_{20}} = \mathsf{A_2} \cup \{\mathsf{ac(ce,}\ \Gamma \vdash \mathsf{k(s), \{\vdash (s/x)}\phi_1, \vdash \mathsf{(s/y)}\phi_2\mathsf{\})\}}$
13: $\quad$ let $\mathsf{A_{2n}} = \mathsf{A_2} \cup \{\mathsf{ac(ce,}\ \Gamma \vdash \mathsf{k(s), \{}\Gamma' \vdash \mathsf{k(s_1), ..., }\Gamma' \vdash \mathsf{k(s_n)\})\}}$
14: $\quad \forall \mathsf{i} \in \{1, ..., \mathsf{n}\}$, let
15: $\quad\quad \mathsf{A_{1i} = A_1 \cup \{}$
16: $\quad\quad\quad \mathsf{ac(pt,}\ \Gamma \vdash \mathsf{k(s), \{}\Gamma' \vdash \mathsf{k(s_i)\})}$,
17: $\quad\quad\quad \mathsf{M_k^t := M_k^t \cup reachable(states(}\Gamma'\mathsf{) \cup \{s_i\})}$,
18: $\quad\quad\quad \mathsf{M_k^f := (M_k^f \cup visited_k) \setminus reachable(states(}\Gamma'\mathsf{) \cup \{s_i\})\}}$
19: $\quad$ **if** $\Gamma = \emptyset$ **then**
20: $\quad\quad \mathsf{visited_k := \{s\}}$
21: $\quad$ **else**
22: $\quad\quad \mathsf{visited_k := visited_k \cup \{s\}}$
23: $\quad$ **end if**
24: $\quad \mathsf{A_{20} := A_{20} \cup \{M_k^f := M_k^f \cup \{s\}\}}$
25: $\quad \mathsf{A_{2n} := A_{2n} \cup \{M_k^f := M_k^f \cup \{s\}\}}$
26: $\quad$ let $\mathsf{c'} = \mathsf{cpt^{\emptyset}(\vdash (s/y)}\phi_2, \mathsf{c_1^{A_{10}}, cpt^{\emptyset}(\vdash (s/x)}\phi_1, \mathsf{cpt^{\emptyset}(}\Gamma' \vdash \mathsf{k(s_1)},$
27: $\quad\quad \mathsf{c_1^{A_{11}}, cpt^{\emptyset}(...cpt^{\emptyset}(}\Gamma' \vdash \mathsf{k(s_n)}, \mathsf{c_1^{A_{1n}}, c_2^{A_{2n}})...)), c_2^{A_{20}}))}$
28: $\quad \mathsf{c := c'}$
29: **end if**

图 2.13: $\mathsf{ProveEU}(\Gamma \vdash \mathsf{EU_{x,y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}))$

1. 如果 $\mathsf{c'}$ 将来能重写到第一个 $\mathsf{c_1}$，那么 $\vdash \mathsf{(s/y)}\phi_2$ 是可证的，因此将其作为 $\Gamma \vdash \mathsf{EU_{x,y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s})$ 的子节点加到证明树中（第 9 行）。与此同时，由于 $\mathsf{EU_{x,y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s})$ 是可证的，那么对于任意访问过的状态 s'，如果存在以 s' 为起点的有穷路径而 s 在这条路径上，那么 $\mathsf{EU_{x,y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s'})$ 也是可证的。因此，可将状态集合 $\mathsf{reachable(states(}\Gamma\mathsf{) \cup \{s\})}$ 中的所有状态加入到 $\mathsf{M^t_{EU_{x,y}}}(\phi_1,\phi_2)(\_)$ 中（第 10 行）。每个 $\mathsf{reachable(states(}\Gamma\mathsf{) \cup \{s\})}$ 中的状态 $\mathsf{s'}$ 或者在 $\mathsf{states(}\Gamma\mathsf{) \cup \{s\}}$ 中，或者在与 $\mathsf{states(}\Gamma\mathsf{) \cup \{s\}}$ 重叠的某个环上。因此，通过记录并选取与 $\mathsf{states(}\Gamma\mathsf{) \cup \{s\}}$ 重叠的所有的环，就

1: /* For notation purpose, here we refer "k" to $AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(\_)$ and "k(s)" to $AR_{x,y}(\phi_1,\phi_2)(s)$,
2: and let Γ' be $\Gamma \cup \{k(s)\}$.*/
3: **if** $\mathsf{s} \in \mathsf{M_k^f}$ **then**
4: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{c_2^{A_2}}$
5: **else if** $\mathsf{s} \in \mathsf{M_k^t}$ or $\mathsf{k(s)} \in \Gamma$ **then**
6: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{c_1^{A_1}}$;
7: **else**
8: $\quad$ let $\mathsf{A_{10}} = \mathsf{A_1} \cup \mathsf{ac(pt}, \Gamma \vdash \mathsf{k(s)}, \{\vdash (\mathsf{s/x})\phi_1, \vdash (\mathsf{s/y})\phi_2\})\}$
9: $\quad$ let $\mathsf{A_{1n}} = \mathsf{A_1} \cup \{\mathsf{ac(pt}, \Gamma \vdash \mathsf{k(s)}, \{\ \Gamma' \vdash \mathsf{k(s_1)}, ..., \Gamma' \vdash \mathsf{k(s_n)}\})\}$
10: $\quad$ let $\mathsf{A_{20}} = \mathsf{A_2} \cup \{$
11: $\quad\quad \mathsf{ac(ce}, \Gamma \vdash \mathsf{k(s)}, \{\vdash (\mathsf{s/y})\phi_2\}),$
12: $\quad\quad \mathsf{M_k^f} := \mathsf{M_k^f} \cup \mathsf{reachable(states}(\Gamma) \cup \{\mathsf{s}\}),$
13: $\quad\quad \mathsf{M_k^t} := (\mathsf{M_k^t} \cup \mathsf{visited_k}) \setminus \mathsf{reachable(states}(\Gamma) \cup \{\mathsf{s}\})$
14: $\quad \forall \mathsf{i} \in \{1, ..., \mathsf{n}\}$, let
15: $\quad\quad \mathsf{A_{2i}} = \mathsf{A_2} \cup \{$
16: $\quad\quad\quad \mathsf{ac(ce}, \Gamma \vdash \mathsf{k(s)}, \{\vdash (\mathsf{s/x})\phi_1, \Gamma' \vdash \mathsf{k(s_i)}\}),$
17: $\quad\quad\quad \mathsf{M_k^f} := \mathsf{M_k^f} \cup \mathsf{reachable(states}(\Gamma') \cup \{\mathsf{s_i}\}),$
18: $\quad\quad\quad \mathsf{M_k^t} := (\mathsf{M_k^t} \cup \mathsf{visited_k}) \setminus \mathsf{reachable(states}(\Gamma') \cup \{\mathsf{s_i}\})\}$
19: $\quad$ **if** $\ = \emptyset$ **then**
20: $\quad\quad \mathsf{visited_k} := \{\mathsf{s}\}$
21: $\quad$ **else**
22: $\quad\quad \mathsf{visited_k} := \mathsf{visited_k} \cup \{\mathsf{s}\}$
23: $\quad$ **end if**
24: $\quad \mathsf{A_{10}} := \mathsf{A_{10}} \cup \{\mathsf{M_k^t} := \mathsf{M_k^t} \cup \{\mathsf{s}\}\}$
25: $\quad \mathsf{A_{1n}} := \mathsf{A_{1n}} \cup \{\mathsf{M_k^t} := \mathsf{M_k^t} \cup \{\mathsf{s}\}\}$
26: $\quad$ let $\mathsf{c'} = \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash (\mathsf{s/y})\phi_2, \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\vdash (\mathsf{s/x})\phi_1, \mathsf{c_1^{A_{10}}}, \mathsf{cpt}^{\emptyset}(\Gamma' \vdash \mathsf{k(s_1)},$
27: $\quad\quad \mathsf{cpt}^{\emptyset}(...\mathsf{cpt}^{\emptyset}(\Gamma' \vdash \mathsf{k(s_n)}, \mathsf{c_1^{A_{1n}}}, \mathsf{c_2^{A_{2n}}})...), \mathsf{c_2^{A_{21}}})), \mathsf{c_2^{A_{20}}})$
28: $\quad \mathsf{c} := \mathsf{c'}$
29: **end if**

图 2.14: $\mathsf{ProveAR}(\Gamma \vdash \mathsf{AR_{x,y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}))$

可以计算状态集合 $\mathsf{reachable(states}(\Gamma) \cup \{\mathsf{s}\})$ 了。然后，我们将所有被访问过的状态加入到 $\mathsf{M^f_{EU_{x,y}}}(\phi_1,\phi_2)(\_)$ 中，然后去掉可经过有穷路径到达 $\mathsf{states}(\Gamma) \cup \{\mathsf{s}\}$ 中某个状态的状态（第 11 行）。

2. 如果 $\mathsf{c'}$ 能重写到第 i 个其他的 $\mathsf{c_1}$，那么 $\vdash (s/x)\phi_1$ 和 $\Gamma' \vdash \mathsf{EU_{x,y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s_i})$ 是可证的，因此将其都作为 $\Gamma \vdash \mathsf{EU_{x,y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s})$ 的子节点加入到证明树中（第 16 行）。与此同时，$\mathsf{reachable(states}(\Gamma') \cup \{\mathsf{s_i}\})$ 中的所有状态都应加到 $\mathsf{M^t_{EU_{x,y}}}(\phi_1,\phi_2)(\_)$ 中（第 17 行）；所有被访问过的状态都加到 $\mathsf{M^f_{EU_{x,y}}}(\phi_1,\phi_2)(\_)$ 中并且去掉可经过有穷路径到达 $\mathsf{states}(\Gamma') \cup \{\mathsf{s_i}\}$ 中某个

状态的状态（第 18 行）。

3. 如果 c' 重写到外层的 c_2，那么 $\vdash (\mathsf{s}/\mathsf{x})\phi_1$ 和 $\vdash (\mathsf{s}/\mathsf{y})\phi_2$ 是不可证的，因此将其都作为 $\Gamma \vdash \mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s})$ 的子节点加入到反例中（第 12 行）。
4. 如果 c' 重写到内层的 c_2，那么 $\Gamma' \vdash \mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}_1), ..., \Gamma' \vdash \mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}_\mathsf{n})$ 都是不可证的，因此将其全部作为 $\Gamma \vdash \mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s})$ 的子节点加入到反例中（第 13 行）。
5. 如果 $\Gamma \vdash \mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s})$ 是不可证的，那么将 s 加入到 $\mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1,\phi_2)(\_)}$ 中，并以此在对这个 EU 公式的证明搜索中避免重复访问 s（第 24、25 行）。值得注意的是 s 可从 $\mathsf{M}^{\mathsf{f}}_{\mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1,\phi_2)(\_)}$ 被移除（第 11 – 18 行）。这种情况只当存在 Γ' 和 s' 使得 $\Gamma' \vdash \mathsf{EU}_{\mathsf{x},\mathsf{y}}(\phi_1, \phi_2)(\mathsf{s}')$ 是可证的，$\mathsf{s}', \vdash (\mathsf{s}'/\mathsf{y})\phi_2$ 是可证的，以及 $\mathsf{s} \in \mathsf{reachable}(\mathsf{states}(\Gamma') \cup \{\mathsf{s}'\})$ 的时候发生。

- 第 28 行：将 c 重写到 c'。

ProveAR 是 ProveEU 的对偶情况，算法细节如图2.14所示。

2.3.6 其他 CTL_P 模型检测方法的对比

在这里，我们讨论 SCTLProV 的证明搜索算法与其他 CTL_P 模型检测方法的对比。

基于 BDD 的符号模型检测 当 Kripke 模型中绝大多数状态变量是布尔类型（比如在硬件模型检测问题中）的时候，BDD 的应用可以用来减少模型检测算法的空间占用。迄今为止，最好的基于 BDD 的符号模型检测工具是 NuSMV[5,11] 以及 NuSMV 的扩展 NuXMV[4]。下面我们举例说明基于 BDD 的符号模型检测方法的原理：假设存在一个以 s_0 为初始状态，T 为迁移规则的 Kripke 模型 $\mathcal{M}$。若要验证 $\mathcal{M}, s_0 \models EF\phi$，基于 BDD 的符号模型检测工具（例如 NuSMV）会首先计算一个最小不动点 $\mathrm{lfp} = \mu Y.(\phi \vee EXY)$，然后，若 $s_0 \in \mathrm{lfp}$，则 $\mathcal{M}, s_0 \models EF\phi$ 成立，反之则不成立。计算不动点的过程中会不断地对迁移规则 T 进行展开直到得到不动点，其中 s_0 不可达的状态也可能被计算在不动点之内。

与基于 BDD 的符号模型检测工具不同，SCTLProV 在验证过程中没有必要计算不动点：迁移规则 T 是动态展开，即展开 T 直到可以判定公式是否可证为止。SCTLProV 的验证过程只访问初始状态 s_0 可达的状态，因此验证过程会节省空间的占用。不止如此，当 Kripke 模型的状态变量绝大多数为布尔类型的时候，SCTLProV 可以用 BDD 来记录访问过的状态，并以此来进一步节省空间占用；反之，当 Kripke 模型中包含多个非布尔类型的状态变量的时候，SCTLProV 可以选择直接记录（通常用哈希表）访问过的状态。不同于符号模型检测中将 Kripke 结

构和要证明的性质都编码到 BDD 的做法，SCTLProV 在 Kripke 结构上直接做状态搜索，BDD 只被用来记录搜索过的状态。

动态（On-the-fly）模型检测 在验证时序逻辑公式的正确性时，利用动态模型检测的方法可以避免访问 Kripke 模型的整个状态空间，而只是访问由初始状态可达的状态集合。传统的 CTL 动态模型检测方法[2,19] 通常是基于递归的：即子公式的验证以及迁移规则的展开都是递归进行的。基于递归的 CTL 动态模型检测通常会涉及到大量的栈操作，尤其是在验证大型系统的过程中。验证算法通常会在栈操作上浪费大量的时间。

与传统的 CTL 动态模型检测方法不同，在 SCTLProV 中，公式和迁移规则均按需展开，而且验证算法基于连续（连续传递风格）而不是递归。基于连续的算法只需占用常数大小的栈空间[1,16,18]，而在递归算法中，栈空间的占用大小与递归深度成正比。

由于目前没有完整的基于传统的动态模型检测算法的工具存在，因此，为了将其与 SCTLProV 的证明搜索算法进行对比，我们开发了一个递归版本的 SCTLProV，即 SCTLProV$_R$[1]。不同于 SCTLProV，SCTLProV$_R$ 利用基于递归的算法来证明子公式并搜索状态空间。SCTLProV 与 SCTLProV$_R$ 的实验结果对比见第2.4节。

限界模型检测 在传统的限界模型检测工具中，若要证明一个时序逻辑公式，首先需要人为规定（或程序给定）一个限界，并将 Kripke 模型的迁移规则在限界之内展开，然后判断该公式在迁移规则的有限步展开之内满足与否。若在当前的限界之内可以判断公式满足与否，则算法终止；否则，继续扩大限界。举例来说，若要判断 $\mathcal{M}, s_0 \models_{k+1} EF\phi$ 满足与否，则要先在限界 $k+1$ 之内展开公式与迁移规则[3]：

$$[\mathcal{M}, EF\phi]_{k+1} := \bigwedge_{i=0}^{k-1} T(s_i, s_{i+1}) \wedge \bigvee_{j=0}^{k} \phi(s_j)$$

与限界模型检测工具不同，SCTLProV 不需要限界展开迁移规则，而是在展开证明公式的同时按需展开迁移规则。例如在证明 $\vdash EF_x(\phi)(s_0)$ 的时候，公式和迁移规则的展开方式如下：

$$\mathsf{unfold}(S, \vdash EF_x(\phi)(s_i)) := \phi(s_i) \vee ((s_i \notin S) \wedge T(s_i, s_{i+1}) \wedge \mathsf{unfold}(S \cup \{s_i\}, \vdash EF_x(\phi)(s_{i+1})))$$

其中，S 是在证明过程中已经访问过的状态集合。

[1] https://github.com/terminatorlxj/SCTLProV_R

2.4 案例分析与实验结果

在本节中，我们首先讨论 SCTLProV 的两个应用案例：一个进程互斥问题和一个针对 NASA 提出的小型飞机场控制系统的形式化验证问题；然后，分别对比 SCTLProV 和其他 5 个工具在 5 个测试集上的实验结果。被用于与 SCTLProV 对比的 5 个工具分别为：基于 BDD 的符号模型检测工具 NuSMV 及 NuXMV，基于 QBF 的限界模型检测工具 Verds，基于消解（Resolution）的定理证明工具 iProver Modulo，以及形式验证工具包 CADP。本节所有工具的运行环境均为：Linux 操作系统，内存 3.0GB，2.93GHz×4 CPU；每个测试用例的最大运行时间限制为 20 分钟。本节所有的测试用例均可在因特网[2]下载。

2.4.1 案例一：进程互斥问题

例子 2.4.1 (进程互斥问题[15]). 本例讲的是关于两个进程（进程 A 和进程 B）的互斥问题。进程的互斥指的是在程序执行的任意时刻，最多只有一个进程在临界区内。一个关于此类问题的算法描述如图**??**所示，其中 $flag$ 是一个布尔变量，指的是当前是否有进程在运行，而 $mutex$ 是一个整型变量，指的是当前进入临界区的进程个数（初始值为 0）。如果在程序执行的某个时刻有多于 1 个进程进入临界区（即 $mutex = 2$），那么则称该程序违反了进程互斥性质。

```
/* Process A */              /* Process B */
1: while(flag);/*wait*/      1: while(flag);/*wait*/
2: flag = true;              2: flag = true;
3: mutex ++;                 3: mutex ++;
/*critical section*/         /*critical section*/
4: mutex --;                 4: mutex --;
5: flag = false;             5: flag = false;
```

图 2.15: 进程 A 和进程 B 的一个简单描述。

如图*2.16*所示，输入文件*"mutual.model"* 中变量 a 和变量 b 分别指代进程 A 和进程 B 的程序计数器（*Program Counter*），变量 ini 指代初始状态。本例中要验证的性质为：是否存在程序执行的某个时刻使得两个进程同时进入临界区。利用 *SCTLProV*，我们可以在计算机的命令行中输入以下命令来验证该性质。

```
sctl -output output.out mutual.model
```

[2]https://github.com/terminatorlxj/ctl_benchmarks

```
Model mutual()
{
  Var {
   flag : Bool; mutex : (0 .. 2); a : (1 .. 5); b : (1 .. 5);
  }
  Init {
   flag := false; mutex := 0; a := 1; b := 1;
  }
  Transition {
    a = 1 && flag = false : {a := 2;};
    a = 2 : {a := 3; flag := true;};
    a = 3 : {a := 4; mutex := mutex + 1;}; /*A has entered the critical section*/
    a = 4 : {a := 5; mutex := mutex - 1;}; /*A has left the critical section*/
    a = 5 : {flag := 0;};
    b = 1 && flag = false : {b := 2;};
    b = 2 : {b := 3; flag := true;};
    b = 3 : {b := 4; mutex := mutex + 1;}; /*B has entered the critical section*/
    b = 4 : {b := 5; mutex := mutex - 1;}; /*B has left the critical section*/
    b = 5 : {flag := 0;};
    /*If none of the conditions above are satisfied, then the current state goes to itself.*/
    (a = 1 || b = 1) && flag = true: {}
  }
  Atomic {
    bug(s) := s(mutex = 2);
  }
  Spec {
    find_bug := EU(x, y, TRUE, bug(y), ini);
  }
}
```

图 2.16: 输入文件“mutual.model”。

SCTLProV 的运行结果如下所示：该程序存在漏洞，即该程序违反了进程互斥性质。

```
verifying on the model mutual...
find_bug: EU(x,y, TRUE, bug(y), ini)
find_bug is true.
```

该性质的证明树输出在文件*"output.out"* 中，如下图所示。证明树的每个节点被输出为 $id : seqt\ [id_1, ..., id_n]$ 形式，其中 id 是该节点的 ID，$seqt$ 是当前的相继式，而 $id_1, ..., id_n$ 则是当前的相继式的所有的前提的 ID。

```
0: |- EU(x,y,TRUE,bug(y),{flag:=false;mutex:=0;a:=1;b:=1}) [4, 1]
4: {flag:=false;mutex:=0;a:=1;b:=1}
|- EU(x,y,TRUE,bug(y),{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=1}) [7, 5]
1: |- TRUE []
7: {flag:=false;mutex:=0;a:=1;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=1}
```

```
|- EU(x,y,TRUE,bug(y),{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=2}) [23, 20]
5: |- TRUE []
23:{flag:=false;mutex:=0;a:=1;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=2}
|- EU(x,y,TRUE,bug(y),{flag:=true;mutex:=0;a:=3;b:=2}) [27, 24]
20: |- TRUE []
27:{flag:=false;mutex:=0;a:=1;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=2}
{flag:=true;mutex:=0;a:=3;b:=2}
|- EU(x,y,TRUE,bug(y),{flag:=true;mutex:=1;a:=4;b:=2}) [31, 28]
24: |- TRUE []
31:{flag:=false;mutex:=0;a:=1;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=2}
{flag:=true;mutex:=0;a:=3;b:=2}
{flag:=true;mutex:=1;a:=4;b:=2}
|- EU(x,y,TRUE,bug(y),{flag:=true;mutex:=1;a:=4;b:=3}) [35, 32]
28: |- TRUE []
35:{flag:=false;mutex:=0;a:=1;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=1}
{flag:=false;mutex:=0;a:=2;b:=2}
{flag:=true;mutex:=0;a:=3;b:=2}
{flag:=true;mutex:=1;a:=4;b:=2}
{flag:=true;mutex:=1;a:=4;b:=3}
|- EU(x,y,TRUE,bug(y),{flag:=true;mutex:=2;a:=4;b:=4}) [37]
32: |- TRUE []
37: |- bug({flag:=true;mutex:=2;a:=4;b:=4}) []
```

由以上的证明树输出可知，当进程 A 进入临界区之后，进程 B 同样进入临界区。

如图*2.17*所示，*SCTLProV* 验证该例子时的输出（证明树和 *Kripke* 模型）可由可视化工具 *VMDV*（*Visualization for Modeling, Demonstration, and Verification*）实现三维可视化显示。

通过对原程序进行修改[15]，可以使程序满足进程互斥性质，修改后的程序如图*2.18*所示。修改后的程序可形式化描述为图*2.19*所示的输入文件。在此输入文件中，变量 x 和变量 y 均为布尔变量，分别指代当前状态下进程 A 和进程 B 是否在运行，而 $turn$ 则表示进程 A 和进程 B 轮流处在临界区内。

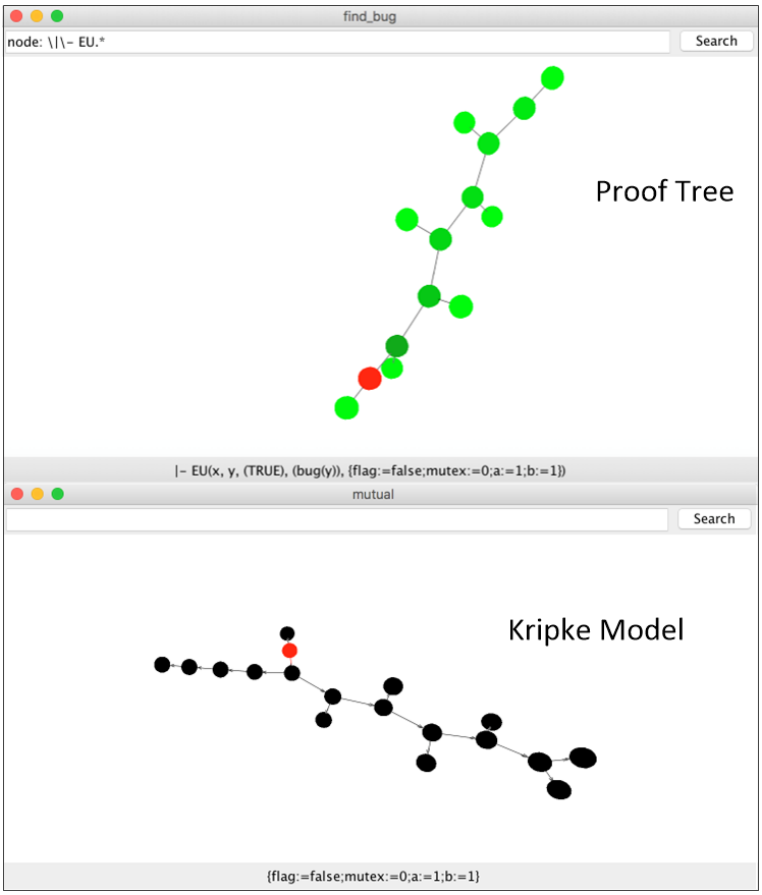


图 2.17: 进程互斥问题的验证中证明树和模型的可视化

```
/* Process A */                  /* Process B */
1: x = true;                     1: y = true;
2: turn = 1;                     2: turn = 2;
3: while(y&&turn!=2); /*wait*/   3: while(x&&turn!=1); /*wait*/
4: mutex ++;                     4: mutex ++;
/*critical section*/             /*critical section*/
5: mutex --;                     5: mutex --;
6: x = false;                    6: y = false;
```

图 2.18: 修改后的进程互斥程序。

如下所示，修改后的程序满足进程互斥性质。

```
verifying on the model mutual...
find_bug: EU(x, y, TRUE, bug(y), ini)
find_bug is false.
```

```
Model mutual()
{
  Var {
    x:Bool; y:Bool; mutex:(0 .. 2); turn:(1 .. 2); a:(1 .. 6); b:(1 .. 6);
  }
  Init {
    x := false; y := false; mutex := 0; turn := 1; a := 1; b := 1;
  }
  Transition {
    a = 1 : {a := 2; x := true;};
    a = 2 : {a := 3; turn := 1;};
    a = 3 && (y = false || turn = 2): {a := 4;};
    /*A has entered the critical section*/
    a = 4 : {a := 5; mutex := mutex + 1;};
    /*A has left the critical section*/
    a = 5 : {a := 6; mutex := mutex - 1;};
    a = 6 : {x := false;};
    b = 1 : {b := 2; y := true;};
    b = 2 : {b := 3; turn := 2;};
    b = 3 && (x = false || turn = 1): {b := 4;};
    /*B has entered the critical section*/
    b = 4 : {b := 5; mutex := mutex + 1;};
    /*B has left the critical section*/
    b = 5 : {b := 6; mutex := mutex - 1;};
    b = 6 : {y := false;};
    /*If none of the conditions above are satisfied,
    then the current state goes to itself.*/
    (a != 3 && (y = true && turn = 1)) || (b != 3 && (x = true && turn = 2)) : {};
  }
  Atomic {
    bug(s) := s(mutex = 2);
  }
  Spec {
    find_bug := EU(x, y, TRUE, bug(y), ini);
  }
}
```

图 2.19: 输入文件“mutual_solution.model”

2.4.2 案例二：小型飞机场运输系统

在本小节中，我们介绍对于一个工程问题的形式化验证：由美国国家航空与航天局（National Aeronautics and Space Administration，简称 NASA）为主导提出的小型飞机场运输系统（Small Aircraft Transportation System，简称 SATS）[12,13]。在 SCTLProV 中，我们对 SATS 系统进行形式化描述，并验证该系统的安全性。

在 SATS 系统中，整个飞机场区域被称为自我控制区（Self Control Area，简称 SCA）。如图2.20所示，该模型将 SCA 被分为 15 个子区域：

- **holding3(right/left)**：等待航线，高度 3000 英尺（右/左）；

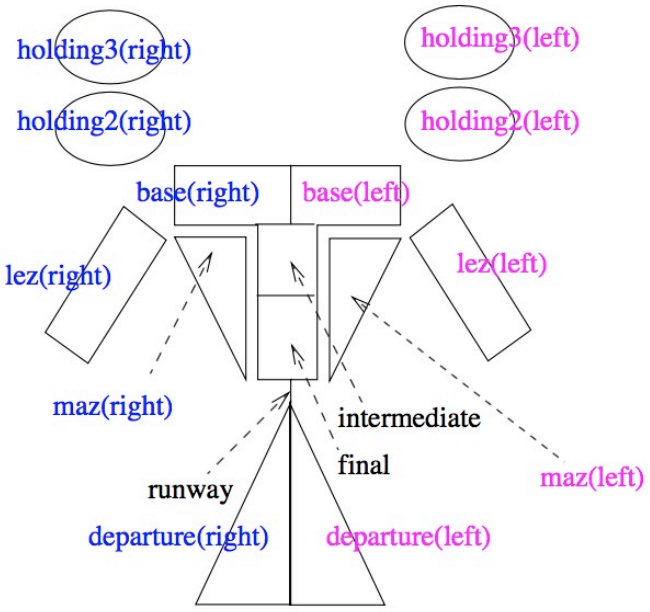


图 2.20: 飞机场自我控制区域的划分（以飞行员视角区分左右）

- **holding2(right/left)**：等待航线，高度 2000 英尺（右/左）；
- **lez(right/left)**：水平降落航线（右/左）；
- **base(right/left)**：基地航线（右/左）；
- **intermediate**：中间航线；
- **final**：最终航线；
- **runway**：机场跑道；
- **maz(right/left)**：重新降落航线（右/左）；
- **departure(right/left)**：起飞航线（右/左）。

在任意时刻，SCA 的每个子区域内都有若干架飞机，每个子区域内的飞机遵循先进先出的顺序依次进出。在整个 SCA 中，飞机的进出子区域的方式有 24 种，分别如下：

- 进入 3000 英尺高度等待航线（右/左）；
- 进入水平降落航线（右/左）；
- 从 3000 英尺等待航线进入 2000 英尺等待航线（右/左）；

- 从 2000 英尺等待航线进入基地航线（右/左）；
- 从水平降落航线进入基地航线（右/左）；
- 从基地航线（右/左）进入中间航线；
- 从中间航线进入重新降落航线（右/左）；
- 从中间航线进入最终航线；
- 准备降落，从最终航线进入机场跑道；
- 降落成功，飞机驶离机场跑道；
- 降落失败，从最终航线进入重新降落航线（右/左）；
- 从重新降落航线进入高度最低，而且可以进入（当前等待航线中没有飞机）的等待航线；
- 进入机场跑道并准备起飞；
- 从机场跑道进入起飞航线；
- 从起飞航线（右/左）离开，最终离开 SCA。

在任意时刻，飞机进出 SCA 的子区域的方式必须是安全的，即 SATS 系统必须满足 8 个性质：

- SCA 中不超过 4 架飞机同时准备降落：即等待航线，水平降落航线，重新降落航线，基地航线，中间航线，以及最终航线上飞机的总数不超过 4;
- SCA 中左右两侧的航线（等待航线，水平降落航线，以及重新降落航线）中，同侧的飞机数总和不超过 2，同时 SCA 中不超过 2 架飞机准备从同侧重新降落航线重新降落；
- 进入 SCA 的航线（等待航线和水平进入航线）中，每个航线每侧的飞机数不超过 2，同时基地航线的飞机数总和不超过 3；
- 在每侧的水平进入航线中最多只有一架飞机，同时如果某侧水平进入航线中有飞机，则 SCA 的同侧其他航线（水平降落航线以及重新降落航线）中没有飞机；
- SCA 中的飞机按照事先给定的顺序依次进入 SCA；
- 最先进入 SCA 中飞机一定最先降落；

- 机场跑道上最多只有一架飞机；
- 起飞航线上的飞机彼此必须相隔足够远的距离。

在 SCTLProV 中，我们针对 SCA 建立一个 Kripke 模型：模型中的状态用 15 个状态变量来表示，分别代表 SCA 中 15 个子区域，每个状态变量都是列表类型，代表该子区域内的若干架飞机；模型中包含 24 条迁移规则，分别指代 SCA 中的所有飞机在每个子区域间的 24 种进出方式；要验证的性质是一个 $\mathsf{CTL}_P(\mathcal{M})$ 公式，即在每个状态上，SCA 都满足安全性质。该模型的输入文件可在因特网[3]上下载。

SCTLProV 验证该模型用时 26 秒左右，运行环境为：Linux 操作系统，内存 3.0GB，2.93GHz×4 CPU。验证过程中共访问 54221 个状态（Dowek，Muñoz 和 Carreño 提出了的对 SATS 系统的一个简化版的 PVS 建模[12] 中，该模型中可访问的状态数为 2811）。经 SCTLProV 验证，该模型满足安全性性质。

值得注意的是，虽然这是一个典型的模型检测问题，但是传统的模型检测工具均无法验证该模型[12]，理由如下：

1. 模型的状态由复杂的数据结构所表示：每个状态变量的值均为列表类型，而且列表的长度可能为无穷。
2. 状态的迁移规则必须由复杂的算法所描述：在某些状态迁移的过程中需要对飞机列表进行递归操作。
3. 模型的性质必须由复杂的算法所描述：某些原子命题的定义需要对飞机列表进行递归操作。

SCTLProV 的输入语言表达能力强于绝大多数模型检测工具，并能完整的表示该模型，同时成功进行验证。

2.4.3 随机生成的布尔程序的验证

本小节包含三个测试集：测试用例集一在首次提出[20] 时被用作对比限界模型检测工具 Verds 和符号模型检测工具 NuSMV 的性能；并紧接着被用作对比定理证明器 iProver Modulo 与 Verds 的性能；在测试集一的基础上，我们通过增大模型中的状态变量的个数而得到测试集二与测试集三。每个测试集中均包含 2880 个测试用例，每个测试用例的 Kripke 模型都是随机生成的，每个模型中的状态变量绝大多数为布尔类型。大量的随机的测试用例对于 SCTLProV 与不同的工具来说都是相对公平的，而且通过对比不同工具的实验结果数据，我们可以清晰的得出有关各个工具在验证不同的模型以及不同的性质时的优势与劣势的结论。

以下分别介绍这三个测试集。

[3] https://github.com/terminatorlxj/SATS-model

2.4.3.1 测试集一

测试集一中包含两类测试用例：并发进程（Concurrent Processes，简称 CP）和并发顺序进程（Concurrent Sequential Processes，简称 CSP）。

并发进程 在描述并发进程需要用到以下 4 个变量：

a: 进程个数
b: 所有进程的共享变量和局部变量的个数
c: 进程间共享变量的个数
d: 每个进程的局部变量的个数

进程间的共享变量的初始值均为 $\{0,1\}$ 中的随机值，而每个进程的局部变量的初始值均为 0。每个进程的共享变量和局部变量的每次赋值均为随机选择的某个变量的值的逻辑非。我们令每个测试用例中进程个数为 3，即 $a=3$；令 b 在 $\{12,24,36\}$ 中取值；同时令 $c=b/2$，以及 $d=c/a$。对于每个 b 的取值有 20 个 Kripke 模型，然后在每个 Kripke 模型分别验证 24 个 CTL 性质。因此，此测试集中共有 $3\times 20\times 24=1440$ 个并发进程测试用例。

并发顺序进程 在并发顺序进程测试用例中，除了以上定义的 a,b,c,d 变量之外，描述该类型测试用例还需用到以 2 个变量：

t: 每个进程的迁移的个数
p: 在每个迁移过程中同时进行的赋值的个数

除了在并发进程中介绍的 b 个布尔变量之外，在每个并发顺序进程中还用到一个局部变量来表示进程当前执行的位置，共有 c 个取值。进程间的共享变量的初始值均为 $\{0,1\}$ 中的随机值，而每个进程的局部变量的初始值均为 0。每个进程共有 t 种迁移（状态变换，即对变量的赋值操作），在每个迁移种对随机选择的 p 个共享变量和局部变量进行赋值操作。随着进程的运行，所有的迁移依次周期性地进行。我们令每个测试用例包含 2 个进程，即 $a=2$；令 b 在 $\{12,16,20\}$ 中取值；同时令 $c=b/2, d=c/a, t=c, p=4$。对于每个 b 的取值有 20 个 Kripke 模型，然后在每个 Kripke 模型分别验证 24 个 CTL 性质。因此，此测试集中共有 $3\times 20\times 24=1440$ 个并发顺序进程测试用例。

在本测试集中，我们验证 24 个 CTL 性质，其中性质 P_{01} 至 P_{12} 如图2.21所示，而性质 P_{13} 至 P_{24} 为依次将 P_{01} 至 P_{12} 中的 $\wedge$ 替换成 $\vee$，以及将 $\vee$ 替换成 $\wedge$。

P_{01}	$AG(\bigvee_{i=1}^{c} v_i)$	P_{07}	$AU(v_1, AU(v_2, \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$
P_{02}	$AF(\bigvee_{i=1}^{c} v_i)$	P_{08}	$AU(v_1, EU(v_2, \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$
P_{03}	$AG(v_1 \Rightarrow AF(v_2 \wedge \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$	P_{09}	$AU(v_1, AR(v_2, \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$
P_{04}	$AG(v_1 \Rightarrow EF(v_2 \wedge \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$	P_{10}	$AU(v_1, ER(v_2, \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$
P_{05}	$EG(v_1 \Rightarrow AF(v_2 \wedge \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$	P_{11}	$AR(AXv_1, AXAU(v_2, \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$
P_{06}	$EG(v_1 \Rightarrow EF(v_2 \wedge \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$	P_{12}	$AR(EXv_1, EXEU(v_2, \bigvee_{i=3}^{c} v_i))$

图 2.21: 测试集一中需要验证的性质 P_{01} 至 P_{12}

2.4.3.2 测试集二

在测试集一的基础上，我们分别将并发进程测试用例中 b 的值分别扩大为 48、60、72、252、504、1008，将并发顺序进程测试用例中 b 的值分别扩大为 24、28、32、252、504、1008。由此，我们得到包含 5760 个新的测试用例的测试集二。与测试集一一样，测试集二中的测试用例的模型的初始状态和迁移规则也是随机生成的。测试集二中要验证的性质与测试集一一致。

2.4.3.3 实验数据

在测试集一、二上，我们分别对比了 SCTLProV 与 iProver Modulo、Verds、NuSMV，以及 NuXMV 的实验结果。

测试集一的实验结果 由表2.1与表2.2可知：在测试集一的 2880 个测试用例中，iProver Modulo、Verds、NuSMV、NuXMV、SCTLProV 分别能验证 1816（63.1%）、2230（77.4%）、2880（100%）、2880（100%）、2862（99.4%）个测试用例；同时 SCTLProV 分别在 2823（98.2%）、2858（99.2%）、2741（95.2%）、2763（95.9%）个测试用例上占用时间和空间少于 iProver Modulo、Verds、NuSMV、NuXMV。各个工具的时间占用随着状态变量的个数的变化趋势如图2.22所示；各个工具占用空间随着状态变量的个数的变化趋势如图2.23所示。

测试集二的实验结果 由表2.3与表2.4可知：在测试集二的 5760 个测试用例中，iProver Modulo、Verds、NuSMV、NuXMV、SCTLProV 分别能验证 2748（44.7%）、2226（38.6%）、728（12.6%）、736（12.8%）、4441（77.1%）个测试用例；同时 SCTLProV 分别在 4441（77.1%）、4438（77.0%）、4432（76.9%）、4432（76.9%）个测试用例上占用时间和空间少于 iProver Modulo、Verds、NuSMV、NuXMV。各个工具的时间占用随着状态变量的个数的变化趋势如图2.24所示；各个工具占用空间随着状态变量的个数的变化趋势如图2.25所示。

程序类型	iProver Modulo	Verds	NuSMV	NuXMV	SCTLProV
CP $(b = 12)$	467(97.3%)	433(90.2%)	480(100%)	480(100%)	480(100%)
CP $(b = 24)$	372(77.5%)	428(89.2%)	480(100%)	480(100%)	480(100%)
CP $(b = 36)$	383(79.8%)	416(86.7%)	480(100%)	480(100%)	470(97.9%)
CSP $(b = 12)$	177(36.9%)	370(77.1%)	480(100%)	480(100%)	480(100%)
CSP $(b = 16)$	164(34.2%)	315(65.6%)	480(100%)	480(100%)	474(98.8%)
CSP $(b = 20)$	253(52.7%)	268(55.8%)	480(100%)	480(100%)	478(99.6%)
Sum	1816(63.1%)	2230(77.4%)	2880(100%)	2880(100%)	2862(99.4%)

表 2.1: 测试集一中 5 个工具能成功验证的测试用例个数

程序类型	iProver Modulo	Verds	NuSMV	NuXMV
CP $(b = 12)$	480(100%)	480(100%)	430(89.6%)	431(89.8%)
CP $(b = 24)$	480(100%)	480(100%)	456(95.0%)	458(95.4%)
CP $(b = 36)$	454(94.6%)	467(97.3%)	441(91.9%)	446(92.9%)
CSP $(b = 12)$	480(100%)	480(100%)	464(96.7%)	465(96.9%)
CSP $(b = 16)$	474(98.6%)	473(98.5%)	472(98.3%)	474(98.6%)
CSP $(b = 20)$	455(94.8%)	478(99.6%)	478(99.6%)	479(99.8%)
Sum	2823(98.2%)	2858(99.2%)	2741(95.2%)	2763(95.9%)

表 2.2: 测试集一中 SCTLProV 相比其他工具占用资源（时间和空间）少的测试用例个数

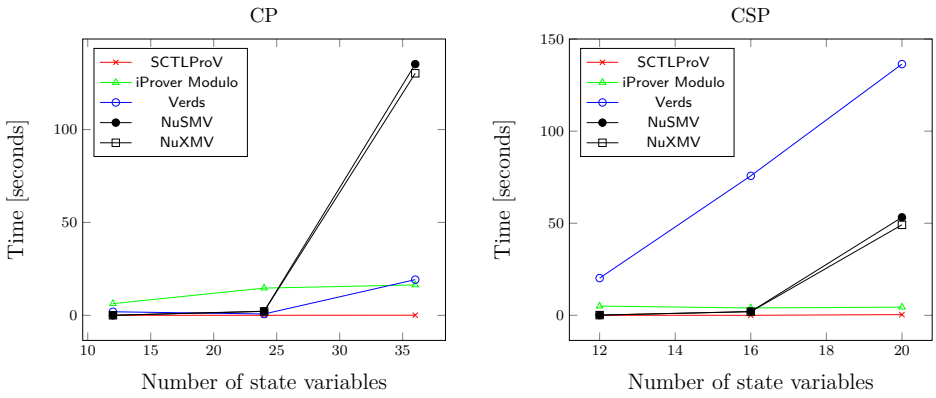


图 2.22: 在测试集一上各个工具的平均占用时间

2.4.3.4 连续 vs. 递归

传统的动态模型检测工具通常使用递归算法来进行公式的证明和状态空间的搜索。不同于递归算法，SCTLProV 的验证算法是连续传递风格（Continuation-Passing Style，简称 CPS），CPS 的应用可以大大减少栈的操作，从而节省验证所需的时间。为了对比使用连续传递风格的算法和递归算法的效率，我们对比了

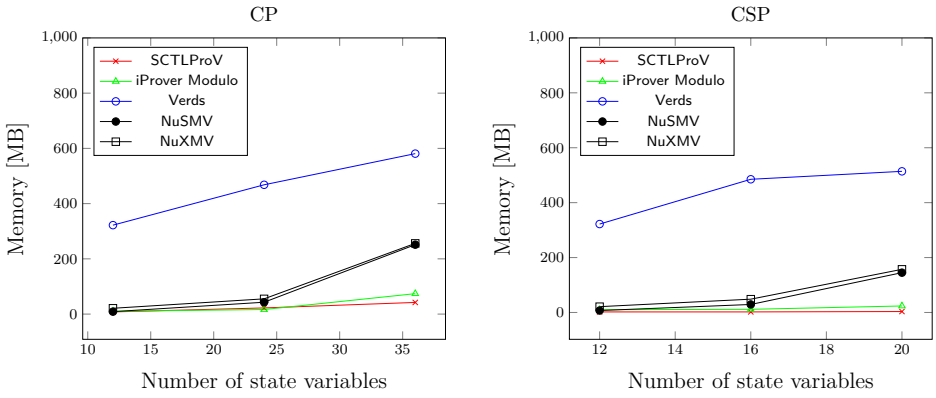


图 2.23: 在测试集一上各个工具的平均占用内存

程序类型	iProver Modulo	Verds	NuXMV	NuXMV	SCTLProV
CP $(b = 48)$	375(78.1%)	400(83.3%)	171(35.6%)	176(36.7%)	446(92.9%)
CP $(b = 60)$	360(75.0%)	403(84.0%)	22(4.6%)	23(4.8%)	440(91.7%)
CP $(b = 72)$	347(72.3%)	383(79.8%)	0	0	437(91.0%)
CP $(b = 252)$	299(62.3%)	216(45.0%)	0	0	371(77.3%)
CP $(b = 504)$	292(60.8%)	0	0	0	335(69.8%)
CP $(b = 1008)$	271(56.5%)	0	0	0	278(57.9%)
CSP $(b = 24)$	190(39.6%)	235(49.0%)	421(87.7%)	423(88.1%)	430(89.6%)
CSP $(b = 28)$	172(35.8%)	229(47.7%)	106(22.1%)	108(22.5%)	426(88.8%)
CSP $(b = 32)$	158(32.9%)	224(46.7%)	8(1.7%)	6(1.3%)	418(87.1%)
CSP $(b = 252)$	114(23.6%)	136(28.3%)	0	0	312(65.0%)
CSP $(b = 504)$	108(22.5%)	0	0	0	295(61.5%)
CSP $(b = 1008)$	62(12.9%)	0	0	0	253(52.7%)
Sum	2748(47.7%)	2226(38.6%)	728(12.6%)	736(12.8%)	4441(77.1%)

表 2.3: 测试集二中 5 个工具能成功验证的测试用例个数

SCTLProV 和 SCTLProV$_R$ 分别在测试集一、二上的实验数据。其中 SCTLProV$_R$ 与 SCTLProV 的唯一不同是使用递归算法来证明公式和搜索状态空间。如表2.5所示，SCTLProV 能成功验证的测试用例个数比 SCTLProV$_R$ 多 10%，而且 SCTLProV 在绝大多数能成功运行的测试用例中比 SCTLProV$_R$ 所用时间短。如图2.26所示，随着状态变量数的增加，SCTLProV$_R$ 的平均运行时间多于 SCTLProV，而且时间的变化幅度更大。

程序类型	iProver Modulo	Verds	NuSMV	NuXMV
CP $(b = 48)$	446(92.9%)	444(92.5%)	442(92.1%)	442(92.1%)
CP $(b = 60)$	440(91.7%)	440(91.7%)	440(91.7%)	440(91.7%)
CP $(b = 72)$	437(91.0%)	437(91.0%)	437(91.0%)	437(91.0%)
CP $(b = 252)$	371(77.3%)	371(77.3%)	371(77.3%)	371(77.3%)
CP $(b = 504)$	335(69.8%)	335(69.8%)	335(69.8%)	335(69.8%)
CP $(b = 1008)$	278(57.9%)	278(57.9%)	278(57.9%)	278(57.9%)
CSP $(b = 24)$	430(89.6%)	429(89.4%)	426(88.8%)	426(88.8%)
CSP $(b = 28)$	426(88.8%)	426(88.8%)	425(88.5%)	425(88.5%)
CSP $(b = 32)$	418(87.1%)	418(87.1%)	418(87.1%)	418(87.1%)
CSP $(b = 252)$	312(65.0%)	312(65.0%)	312(65.0%)	312(65.0%)
CSP $(b = 504)$	295(61.5%)	295(61.5%)	295(61.5%)	295(61.5%)
CSP $(b = 1008)$	253(52.7%)	253(52.7%)	253(52.7%)	253(52.7%)
Sum	4441(77.1%)	4438(77.0%)	4432(76.9%)	4432(76.9%)

表 2.4: 测试集二中 SCTLProV 相比其他工具占用资源（时间和空间）少的测试用例个数

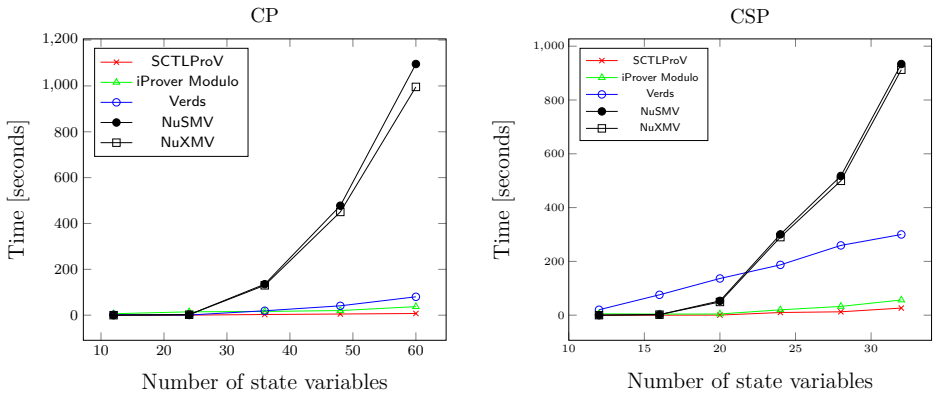


图 2.24: 在测试集一、二上各个工具的平均占用时间

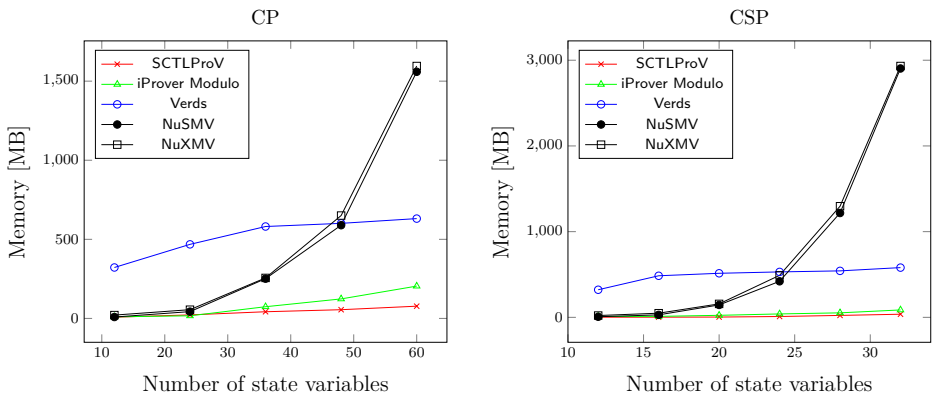


图 2.25: 在测试集一、二上各个工具的平均占用内存

测试集	Solvable		t(SCTLProV) < t(SCTLProV$_R$)
	SCTLProV	SCTLProV$_R$	
一	2862(99.4%)	2682(93.1%)	2598(90.2%)
二	4446(77.2%)	3826(66.4%)	3841(71.9%)

表 2.5: 在测试集一、二上 SCTLProV 和 SCTLProV$_R$ 的实验数据对比

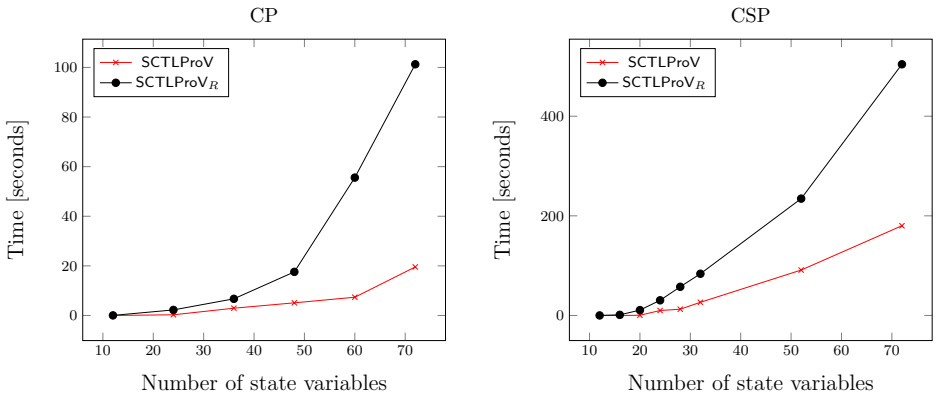


图 2.26: SCTLProV 和 SCTLProV$_R$ 平均运行时间

2.4.4 公平性性质的验证

在本小节，我们来对比 SCTLProV 和 Verds、NuSMV、NuXMV 在验证公平性性质时的效率。此次对比没有考虑 iProver Modulo，这是因为 iProver Modulo 无法验证公平性性质。此次对比所用的所有测试用例（测试集四）同样分为两种：互斥算法和环算法[4]。下面我们介绍这两种测试用例。

2.4.4.1 测试集三

测试集三种包含两类测试用例：互斥算法和环算法。

每个互斥算法包含 n 个进程，n 个进程的调度方式如下：对于 $0 \leq i \leq n-2$，进程 $i+1$ 的迁移在进程 i 之后，进程 0 的迁移在进程 $n-1$ 之后。互斥算法中 n 的取值范围为 $\{6, ..., 51\}$。要验证的性质如表2.27所示，其中 non_i，try_i 以及 cri_i 分别表示进程 i 的内部状态为 noncritical，trying 以及 critical。所有的性质必须在公平性的前提下进行验证，即在互斥算法的执行过程中没有进程饿死（永远处在等待状态）。

每个环算法包含 n 个进程，n 个进程的调度方式如下：对于 $1 \leq i \leq n-1$，进程 i 的内部状态由进程 $i-1$ 的输出决定，进程 0 的内部状态由进程 $n-1$ 的输出决定；每个进程的输出取决于它的内部状态；每个进程的内部状态由 5 个布尔变量的值表示；每个进程的输出由 1 个布尔变量表示。环算法中 n 的取值范围

[4]http://lcs.ios.ac.cn/~zwh/verds/verds_code/bp12.rar

性质	互斥算法公式
P_1	$EF(cri_0 \wedge cri_1)$
P_2	$AG(try_0 \Rightarrow AF(cri_0))$
P_3	$AG(try_1 \Rightarrow AF(cri_1))$
P_4	$AG(cri_0 \Rightarrow Acri_0U(\neg cri_0 \wedge A\neg cri_0Ucri_1))$
P_5	$AG(cri_1 \Rightarrow Acri_1U(\neg cri_1 \wedge A\neg cri_1Ucri_0))$

图 2.27: 互斥算法的性质

为 $\{3, ..., 10\}$。要验证的性质如表2.28所示，其中 out_i 表示进程 i 的输出为布尔值 true。所有的性质必须在公平性的前提下进行验证，即在环算法的执行过程中没有进程饿死（永远处在等待状态）。

性质	环算法公式
P_1	$AGAFout_0 \wedge AGAF\neg out_0$
P_2	$AGEFout_0 \wedge AGEF\neg out_0$
P_3	$EGAFout_0 \wedge EGAF\neg out_0$
P_4	$EGEFout_0 \wedge EGEF\neg out_0$

图 2.28: 环算法的性质

测试集三的实验结果 如表2.6所示，在本测试集的 262 个测试用例中，Verds、NuSMV、NuXMV、SCTLProV 分别能解决 152 (58.0%)、71 (27.1%)、71 (27.1%)、211 (80.2%) 个测试用例。如表2.7所示，SCTLProV 分别在 200 (76.3%)、211 (80.2%)、211 (80.2%) 个测试用例上占用的时间和空间少于 Verds、NuSMV、NuXMV。测试集三上各个工具的详细实验数据如表2.8和表2.9所示。

Programs	Verds	NuSMV	NuXMV	SCTLProV
`mutual exclusion`	136 (59.1%)	50 (21.7%)	50 (21.7%)	191 (83.0%)
`ring`	16 (50.0%)	21 (65.6%)	21 (65.6%)	20 (62.5%)
Sum	152(58.0%)	71(27.1%)	71(27.1%)	211 (80.5%)

表 2.6: 测试集三中各个工具能成功验证的测试用例的个数

Programs	Verds	NuSMV	NuXMV
`mutual exclusion`	187 (81.3%)	191 (83.0%)	191 (83.0%)
`ring`	13 (40.6%)	20 (62.5%)	20 (62.5%)
Sum	200(76.3%)	211(80.5%)	211(80.5%)

表 2.7: 测试集三中 SCTLProV 占用资源更少的的测试用例的个数

2.4.5 工业级测试用例的验证

在本小节中，我们在工业级测试用例上（测试集四）对比 SCTLProV 与其他工具的效率。不同于测试集一、二、三，本次对比所用的测试用例均为符号迁移系统（Labeled Transition System，简称 LTS），而且所有的 LTS 均以 BCG（Binary-Coded Graph）格式表示，其中 BCG 格式可以用来表示较大的状态空间。测试集四是形式化验证工具包 CADP[10] 的一部分，也被称作 VLTS（Very Large Transition Systems）测试集。不同于本文中其他的形式化验证工具，CADP 是专门验证基于动作的系统的工具，比如符号迁移系统、马尔可夫链等。测试集四中的例子均由对不同的传输协议以及并发系统的建模而得到的，其中许多例子是对工业级系统的建模[5]。

测试集四中共有 40 个测试用例，针对每个测试用例我们分别验证有无死锁与活锁。由于 SCTLProV 是基于 Kripke 模型的验证工具，因此在验证之前，我们需将每个 LTS 转换到相应的 Kripke 模型，然后在转换后的 Kripke 模型中进行验证。

给定一个 LTS $\mathcal{L} = \langle s_0, S, Act, \rightarrow \rangle$，其中 s_0 是初始状态；s 是一个有穷的状态集合；Act 是一个有穷的动作集合；$\rightarrow \subseteq S \times Act \times S$ 是迁移规则。那么 $\mathcal{L}$ 到相应的 Kripke 模型 $\mathcal{M} = \langle s'_0, S', \longrightarrow, \mathcal{P} \rangle$ 的转换过程如下：

- 令 s'_0 为 $(s_0, \cdot)$，其中 $\cdot \notin Act$ 是一个特殊的动作符号。
- 分别将 $(s_d, \cdot)$ 与 S' 与 $(s_d, \cdot) \longrightarrow (s_d, \cdot)$ 添加到 S' 与 $\longrightarrow$ 中，其中 $(s_d, \cdot)$ 区分于 S' 中的所有其他状态。
- 重复以下步骤直到没有更多的状态和迁移被添加到 $\mathcal{M}$ 中：
  - 如果 $\mathcal{L}$ 中存在一个迁移 $s_1 \xrightarrow{a} s_2$，那么对于所有的 $(s_1, b) \in S'$，将 $(s_1, b) \longrightarrow (s_2, a)$ 添加到 $\mathcal{M}$ 的迁移关系 $\longrightarrow$ 中，其中 $a, b \in Act \cup \{\cdot\}$；同时将 (s_2, a) 添加到 $\mathcal{M}$ 的状态集合 S' 中；
  - 对于 S' 中的状态 (s, a)，如果 s 在 $\mathcal{L}$ 中没有后继，那么将 $(s, a) \longrightarrow (s_d, \cdot)$ 添加到 $\mathcal{M}$ 的迁移关系 $\longrightarrow$。

[5] `http://cadp.inria.fr/resources/vlts/`

Prop	**NoP**	Mutual Exclusion Algorithms							
		Verds		NuSMV		NuXMV		SCTLProV	
		sec	MB	sec	MB	sec	MB	sec	MB
P_1	6	0.286	321.99	0.153	9.07	0.270	21.18	0.005	2.25
	12	1.278	322.08	19.506	76.98	21.848	89.25	0.016	3.70
	18	4.719	426.45	-	-	-	-	0.037	5.44
	24	11.989	601.55	-	-	-	-	0.091	9.36
	30	26.511	926.25	-	-	-	-	0.200	16.49
	36	52.473	1287.57	-	-	-	-	0.418	27.46
	42	100.071	1944.95	-	-	-	-	0.682	48.28
	48	-	-	-	-	-	-	1.119	66.63
	51	-	-	-	-	-	-	1.392	82.32
P_2	6	0.375	322.07	0.054	9.07	0.048	21.31	0.012	3.07
	12	2.011	322.02	22.774	76.96	21.733	89.24	0.035	4.44
	18	7.958	446.71	-	-	-	-	0.101	8.09
	24	23.448	692.30	-	-	-	-	0.252	14.57
	30	48.800	1026.48	-	-	-	-	0.509	23.61
	36	105.183	1619.01	-	-	-	-	1.005	50.49
	42	-	-	-	-	-	-	1.791	57.93
	48	-	-	-	-	-	-	2.679	86.67
	51	-	-	-	-	-	-	3.453	129.83
P_3	6	0.331	322.02	0.089	9.04	0.033	21.27	0.012	3.03
	12	2.059	322.07	22.749	76.91	21.897	89.22	0.035	4.93
	18	7.995	449.13	-	-	-	-	0.110	9.59
	24	23.578	696.74	-	-	-	-	0.286	21.04
	30	51.774	1138.27	-	-	-	-	0.643	30.09
	36	106.027	1628.84	-	-	-	-	1.287	66.14
	42	-	-	-	-	-	-	2.138	86.29
	48	-	-	-	-	-	-	3.369	170.94
	51	-	-	-	-	-	-	4.333	149.03
P_4	6	0.446	321.97	0.089	9.04	0.033	21.27	0.039	3.38
	12	8.289	552.62	22.749	76.91	21.897	89.22	150.115	986.64
	18	-	-	-	-	-	-	-	-
	24	-	-	-	-	-	-	-	-
	30	-	-	-	-	-	-	-	-
	36	-	-	-	-	-	-	-	-
	42	-	-	-	-	-	-	-	-
	48	-	-	-	-	-	-	-	-
	51	-	-	-	-	-	-	-	-
P_5	6	0.430	322.03	0.031	9.09	0.047	21.19	0.011	3.10
	12	3.398	363.78	22.747	77.01	22.029	89.17	0.040	4.81
	18	18.176	783.24	-	-	-	-	0.115	10.99
	24	87.432	2382.82	-	-	-	-	0.322	18.68
	30	-	-	-	-	-	-	1.414	47.68
	36	-	-	-	-	-	-	1.287	66.35
	42	-	-	-	-	-	-	2.405	142.86
	48	-	-	-	-	-	-	4.848	225.55
	51	-	-	-	-	-	-	5.177	225.66

表 2.8: 测试集三中互斥算法测试用例的实验数据

- 最后，令 $P = \{(s_d, \cdot)\}$ 而且 $Q = \{(s, a) \mid s \in S \wedge a = \tau\}$。

经过从 LTS 到 Kripke 模型的转换之后，我们就可以在 SCTLProV 中验证死锁与活

Prop	**NoP**	Ring Algorithms							
		Verds		NuSMV		NuXMV		SCTLProV	
		sec	MB	sec	MB	sec	MB	sec	MB
P_1	3	0.168	322.09	0.040	10.02	0.045	22.08	4.622	62.22
	4	0.216	322.12	0.299	22.46	0.255	34.96	-	-
	5	0.301	322.07	2.421	59.31	1.195	71.53	-	-
	6	0.449	322.13	22.127	80.49	17.967	92.82	-	-
	7	0.740	322.19	147.895	224.17	131.735	236.50	-	-
	8	1.115	322.09	1135.882	865.04	1083.48	877.36	-	-
	9	1.646	322.07	-	-	-	-	-	-
	10	2.232	321.96	-	-	-	-	-	-
P_2	3	-	-	0.058	10.74	0.068	22.73	0.031	3.22
	4	-	-	0.583	40.29	0.562	52.61	0.125	3.73
	5	-	-	5.164	62.29	5.295	74.62	0.444	4.05
	6	-	-	39.085	81.85	37.969	93.96	1.373	4.71
	7	-	-	246.123	229.07	241.375	241.15	3.745	6.03
	8	-	-	-	-	-	-	9.154	7.61
	9	-	-	-	-	-	-	19.997	10.07
	10	-	-	-	-	-	-	40.331	13.05
P_3	3	-	-	0.045	10.03	0.071	22.32	0.022	3.20
	4	-	-	0.296	22.46	0.299	34.96	0.820	13.11
	5	-	-	2.357	59.31	2.526	71.63	111.96	676.29
	6	-	-	22.147	80.49	21.304	92.93	-	-
	7	-	-	147.567	224.17	141.134	236.74	-	-
	8	-	-	-	-	-	-	-	-
	9	-	-	-	-	-	-	-	-
	10	-	-	-	-	-	-	-	-
P_4	3	0.158	322.09	0.066	10.00	0.171	22.32	0.024	3.24
	4	0.190	322.05	0.356	22.46	0.367	34.95	0.104	3.82
	5	0.263	322.04	2.726	59.31	2.781	71.63	0.385	3.99
	6	0.385	322.07	27.013	80.48	24.794	94.95	1.289	4.57
	7	0.528	322.07	181.007	224.16	166.725	236.61	3.727	5.29
	8	0.815	322.14	-	-	-	-	9.525	7.14
	9	1.138	322.19	-	-	-	-	21.568	9.31
	10	1.574	321.98	-	-	-	-	45.097	12.95

表 2.9: 测试集三中环算法测试用例的实验数据

锁的存在了。

死锁 在 LTS 中，死锁状态指的是没有后继的状态。当验证一个 LTS $\mathcal{L}$ 中是否存在可达的死锁状态时，我们首先将 $\mathcal{L}$ 经过以上的转换方法转换到一个 Kripke 模型 $\mathcal{M}$。经过观察得知，$\mathcal{L}$ 中存在一个可达的死锁状态当且仅当 $\mathcal{M}$ 中状态 $(s_d, \cdot)$ 时可达的。

然后，我们可以通过证明如下的公式来验证 $\mathcal{M}$ 中 $(s_d, \cdot)$ 是否可达：

$$EF_x(P(x))((s_0, \cdot))$$

这个公式是可证的当且仅当 $\mathcal{M}$ 中存在一条形式为 $(s_0, \cdot) \longrightarrow^* (s, a) \longrightarrow (s_d, \cdot)$ 的路径，其中 a 是一个动作符号，而且 s 在 $\mathcal{L}$ 中没有后继。因此，这个公式可以

被用来验证 $\mathcal{L}$ 中有没有可达的死锁状态。

Name	**Deadlocks**	SCTLProV		CADP	
		sec	MB	sec	MB
vasy_0_1	No	0.13	27.16	0.40	10.95
cwi_1_2	No	0.13	27.67	0.39	10.80
vasy_1_4	No	0.14	27.75	0.39	10.71
cwi_3_14	Yes	0.14	25.70	0.40	10.82
vasy_5_9	Yes	0.14	25.70	0.40	10.82
vasy_8_24	No	0.17	28.90	0.43	10.79
vasy_8_38	Yes	0.14	25.76	0.39	10.74
vasy_10_56	No	0.20	29.90	0.43	10.86
vasy_18_73	No	0.24	31.68	0.47	11.81
vasy_25_25	Yes	0.97	33.52	2.18	23.26
vasy_40_60	No	0.21	29.42	0.46	15.08
vasy_52_318	No	0.59	41.09	0.65	16.69
vasy_65_2621	No	1.41	77.02	2.09	109.03
vasy_66_1302	No	0.89	34.92	1.25	14.13
vasy_69_520	Yes	0.23	27.47	0.51	11.84
vasy_83_325	Yes	0.21	27.96	0.48	11.32
vasy_116_368	No	0.67	35.27	0.77	14.40
cwi_142_925	Yes	0.28	28.33	0.57	12.72
vasy_157_297	Yes	0.18	27.14	0.45	11.48
vasy_164_1619	No	2.53	48.39	1.53	22.90
vasy_166_651	Yes	0.29	31.19	0.55	13.30
cwi_214_684	Yes	0.39	34.39	0.63	22.94
cwi_371_641	No	1.36	40.41	1.24	42.92
vasy_386_1171	No	2.14	74.11	1.66	45.12
cwi_566_3984	Yes	0.78	38.53	1.11	21.92
vasy_574_13561	No	18.23	246.97	9.72	188.21
vasy_720_390	Yes	0.23	28.49	0.48	12.89
vasy_1112_5290	No	10.2	89.81	6.54	97.47
cwi_2165_8723	No	16.51	166.74	14.55	185.58
cwi_2416_17605	Yes	3.19	87.61	3.38	71.80
vasy_2581_11442	Yes	2.40	74.11	2.68	58.43
vasy_4220_13944	Yes	2.85	89.50	3.20	73.82
vasy_4338_15666	Yes	3.41	96.21	3.83	80.59
vasy_6020_19353	No	37.19	456.34	74.24	649.41
vasy_6120_11031	Yes	2.35	82.57	2.60	67.01
cwi_7838_59101	No	72.76	1013.67	140.21	1019.55
vasy_8082_42933	No	7.85	309.74	7.82	240.69
vasy_11026_24660	Yes	4.82	149.80	5.15	134.17
vasy_12323_27667	Yes	5.40	164.73	5.67	149.09
cwi_33949_165318	No	366.51	2368.22	636.39	2972.61

表 2.10: SCTLProV 与 CADP 分别验证测试集四中测试用例的死锁性质的实验数据

活锁 在 LTS 中，活锁指的是所有动作均为 τ 的无穷的环状路径。在 LTS 中检测活锁相比检测死锁更复杂，原因是当观察一个迁移的时候，状态和动作都要考察到。与在检测死锁的方法一样，当验证一个 LTS $\mathcal{L}$ 中是否存在可达的活锁时，我

们首先将 $\mathcal{L}$ 经过以上的转换方法转换到一个 Kripke 模型 $\mathcal{M}$。通过以下分析可知，$\mathcal{L}$ 中存在一个可达的活锁当且仅当 $\mathcal{M}$ 中存在一个环状路径，而且该路径上的所有状态均满足 Q。

- ($\Rightarrow$) 如果 $\mathcal{L}$ 中存在一个可达的环状路径，那么这个环状路径具有 $s_p \xrightarrow{\tau} s_{p+1} \xrightarrow{\tau} \cdots \xrightarrow{\tau} s_n \xrightarrow{\tau} s_p$ 形式，其中 $s_p = s_0$，或者存在一个从 s_0 到 s_p 的路径 $s_0 \xrightarrow{a_0} \cdots \xrightarrow{a_{p-1}} s_p$。那么根据由 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{M}$ 的转换方法可知，$\mathcal{M}$ 中一定存在一个环状路径 $(s_p, a) \longrightarrow (s_{p+1}, \tau) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (s_n, \tau) \longrightarrow (s_p, \tau) \longrightarrow (s_{p+1}, \tau)$，其中 $a = a_{p-1}$，而且 $(s_0, \cdot) \longrightarrow^* (s_p, a)$。
- ($\Leftarrow$) 如果 $\mathcal{M}$ 中存在一个具有 $(s_p, \tau) \longrightarrow (s_{p+1}, \tau) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (s_n, \tau) \longrightarrow (s_p, \tau)$ 形式的环状路径,而且其中对于此路径中的某个状态 (s_m, τ),有 $(s_0, \cdot) \longrightarrow^* (s_m, \tau)$，那么在 $\mathcal{L}$ 中存在一个环状路径 $s_p \xrightarrow{\tau} \cdots \xrightarrow{\tau} s_m \xrightarrow{\tau} \cdots \xrightarrow{\tau} s_p$，其中此路径是从 s_0 状态可达的。

然后，我们可以通过在 $\mathcal{M}$ 中证明如下的公式来验证 $\mathcal{L}$ 中是否有可达的活锁：

$$EF_x(EG_y(Q(y))(x))((s_0, \cdot))$$

这个公式是可证的当且仅当 $\mathcal{L}$ 中存在一个可达的活锁。

测试集四的实验结果 我们用 SCTLProV 与 CADP 分别验证了测试集四中所有测试用例。如表2.12所示，在 40 个测试用例中，SCTLProV 和 CADP 均能成功验证所有的例子。在验证死锁性质时，SCTLProV 在 33 (82.5%) 个测试用例中用时比 CADP 短；在 7 (17.5%) 个测试用例中占用内存比 CADP 少。在验证活锁性质时，SCTLProV 在 22 (55.0%) 个测试用例中用时比 CADP 短；在 6 (15.0%) 个测试用例中占用内存比 CADP 少。测试集四的详细实验数据见表2.10和表2.11。

2.4.6 关于实验结果的讨论

由测试集一、二、三的实验结果可知，NuSMV、NuXMV、Verds、iProver Modulo、SCTLProV 的实验数据主要受两方面因素影响：状态变量的个数和要验证的公式的类型。其中，NuSMV、NuXMV 的实验数据主要受状态变量个数的影响，而 Verds、iProver Modulo、SCTLProV 的实验数据主要受公式类型的影响。当状态变量的个数较小的时候（比如测试集一），NuSMV 和 NuXMV 的表现往往优于 Verds，iProver Modulo 以及 SCTLProV；然而，在状态变量数较大的测试集中（比如测试集二、三），Verds、iProver Modulo、SCTLProV 的表现更好。如果在验证公式的过程中需要访问到几乎整个状态空间（比如一些 AG 性质），那么 NuSMV 和 NuXMV 的表现优于 Verds，iProver Modulo 以及 SCTLProV；然而，在验证其他公式的时候，

Name	**Livelocks**	SCTLProV		CADP	
		sec	MB	sec	MB
vasy_0_1	No	0.13	27.45	0.48	14.57
cwi_1_2	No	0.14	27.74	0.50	14.61
vasy_1_4	No	0.14	27.70	0.48	14.66
cwi_3_14	No	0.16	28.18	0.50	14.57
vasy_5_9	No	0.16	28.08	0.51	14.68
vasy_8_24	No	0.18	29.09	0.53	14.75
vasy_8_38	No	0.20	28.86	0.52	14.73
vasy_10_56	No	0.23	30.33	0.55	15.34
vasy_18_73	No	0.28	33.07	0.56	16.25
vasy_25_25	No	0.96	33.54	2.25	27.84
vasy_40_60	No	0.26	30.23	0.57	19.65
vasy_52_318	Yes	0.21	27.66	0.55	15.45
vasy_65_2621	No	5.31	280.57	1.98	113.40
vasy_66_1302	No	2.40	38.33	1.30	18.50
vasy_69_520	No	1.04	33.41	0.85	16.39
vasy_83_325	No	0.83	39.27	0.76	19.40
vasy_116_368	No	1.19	42.14	0.86	15.74
cwi_142_925	No	2.67	46.30	1.22	17.89
vasy_157_297	No	0.80	33.99	0.78	17.91
vasy_164_1619	No	3.69	53.30	1.51	23.44
vasy_166_651	No	1.60	49.98	1.02	26.02
cwi_214_684	Yes	0.26	29.93	0.63	16.81
cwi_371_641	Yes	0.26	30.63	0.62	17.41
vasy_386_1171	No	2.91	80.16	1.55	41.75
cwi_566_3984	No	13.32	106.25	3.95	54.08
vasy_574_13561	No	27.02	272.11	8.17	188.69
vasy_720_390	No	0.86	31.45	0.76	17.45
vasy_1112_5290	No	10.49	89.86	5.24	97.93
cwi_2165_8723	Yes	1.87	61.94	2.15	48.80
cwi_2416_17605	Yes	3.10	87.61	3.44	76.30
vasy_2581_11442	No	32.70	326.38	14.78	214.93
vasy_4220_13944	No	43.93	423.03	24.71	330.85
vasy_4338_15666	No	47.55	479.15	28.06	344.64
vasy_6020_19353	Yes	3.23	100.24	3.57	106.43
vasy_6120_11031	No	30.59	425.64	38.37	437.71
cwi_7838_59101	Yes	11.34	250.68	11.58	236.09
vasy_8082_42933	No	119.77	1123.85	106.49	908.29
vasy_11026_24660	No	60.86	698.85	108.97	804.34
vasy_12323_27667	No	68.50	793.83	134.44	898.61
cwi_33949_165318	Yes	33.89	732.05	34.60	738.78

表 2.11: SCTLProV 与 CADP 分别验证测试集四中测试用例的活锁性质的实验数据

性质	t(SCTLProV) < t(CADP)	m(SCTLProV) < m(CADP)
死锁	33 (82.5%)	7 (17.5%)
活锁	22 (55.0%)	6 (15.0%)

表 2.12: 测试集四中 SCTLProV 相比 CADP 用时短以及占用内存少的测试用例的个数

Verds，iProver Modulo、SCTLProV 的表现更好，这是因为在验证此类性质的时候 Verds，iProver Modulo 以及 SCTLProV 不必访问整个状态空间。因此，Verds，iProver Modulo、SCTLProV 相比 NuSMV、NuXMV 在状态变量个数上扩展性更好，其中 SCTLProV 在状态变量个数上比 Verds 和 iProver Modulo 扩展性更好，而且在几乎所有能验证的例子上比 Verds 和 iProver Modulo 占用资源更少。

由测试集四的实验结果可知，SCTLProV 和 CADP 的实验数据也受两方面因素影响：状态空间的大小以及是否满足要验证的性质。当状态空间较小时，SCTLProV 和 CADP 均占用资源较少;而且当要验证的性质（死锁和活锁）满足的时候,SCTLProV 和 CADP 的占用资源也较少。同时，在超过一半的例子中，SCTLProV 用时相比 CADP 更少。另外，值得注意的是，在验证测试集四种的测试用例时，SCTLProV 需要将 LTS 转换成 Kripke 模型，而在转换的过程中往往状态空间也会增大，因此在某些测试用例中 SCTLProV 的空间占用比 CADP 大。如果 SCTLProV 能直接在 LTS 上进行验证，那么则可避免增大状态空间，这是本文的下一步工作。

第 3 章　定理证明的可视化

在数理逻辑领域，一个公式的形式化证明通常被表示成一个公式序列，其中这个公式序列中的每个公式既可以是公理，也可以是之前公式的逻辑推导结论。一种更加自然的表示公式的形式化证明的方式是将证明表示成一棵树，其中这颗树的每一个节点都用一个公式标记，而该节点的子节点则标记为相应公式的逻辑前提。

在上一章中我们提到，SCTLProV 在验证 Kripke 模型的性质的时候，相比于传统的模型检测工具，能生成更丰富的验证结果。而且，在传统的模型检测工具和定理证明工具中，验证的结果通常是以文本形式输出的，而文本形式的输出通常无法清晰地表达对于结构复杂的 Kripke 模型的状态搜索，也无法完整展现模态词嵌套的公式的证明树。为了能将 SCTLProV 的证明输出结果以及证明过程得以清晰并完整的展现出来，在本章我们介绍 VMDV[1]（Visualization for Modeling, Demonstration and Verification）。VMDV 是一个将证明树及其他数据结构（比如 Kripke 模型）在 3D 空间内进行动态可视化布局和显示的工具，并可与定理证明工具协同工作，实现证明的 3D 可视化。VMDV 利用 OpenGL 接口来编写显示引擎，并用 Java 编程语言来实现布局算法与其他工具的数据通信。

需要进一步说明的是，VMDV 被设计成一个一般化的定理证明可视化工具，并定义了接口[2]来与不同的定理证明工具进行通信，而不仅仅能可视化 SCTLProV 的证明输出。接下来，我们分别介绍 VMDV 的相关技术细节及其应用。

3.1　OpenGL

[1] https://github.com/terminatorlxj/VMDV

[2] https://github.com/terminatorlxj/VMDV/blob/master/protocol.md

参考文献

[1] APPEL A W, 2006. Compiling with continuations (corr. version)[M]. UK: Cambridge University Press.

[2] BHAT G, CLEAVELAND R, GRUMBERG O, 1995. Efficient on-the-fly model checking for *ctl**[C]//Proceedings of LICS'95. San Diego, California, USA: IEEE Computer Society, USA: 388–397.

[3] BIERE A, CIMATTI A, CLARKE E, et al., 1999. Symbolic model checking without BDDs[C]//CLEAVELAND W R. LNCS: volume 1579 Proceedings of TACAS'99. Amsterdam, the Netherlands: Springer, USA: 193–207.

[4] CAVADA R, CIMATTI A, DORIGATTI M, et al., 2014. The nuxmv symbolic model checker[C]//Proceedings of Computer Aided Verification - 26th International Conference, CAV 2014. Vienna, Austria: Springer International Publishing, Switzerland: 334–342.

[5] CIMATTI A, CLARKE E M, GIUNCHIGLIA F, et al., 1999. Nusmv: A new symbolic model verifier[C]//Proceedings of CAV'99. Trento, Italy: Springer-Verlag, Berlin: 495–499.

[6] CRAIG J J, 1989. Introduction to robotics - mechanics and control (2. ed.)[M]. USA: Prentice Hall.

[7] DERSHOWITZ N, 1987. Termination of rewriting[J]. J. Symb. Comput., 3(1/2): 69–116.

[8] EMERSON E A, CLARKE E M, 1982. Using branching time temporal logic to synthesize synchronization skeletons[J]. Sci. Comput. Program., 2(3): 241–266.

[9] EMERSON E A, HALPERN J Y, 1985. Decision procedures and expressiveness in the temporal logic of branching time[J]. J. Comput. Syst. Sci., 30(1): 1–24.

[10] GARAVEL H, LANG F, MATEESCU R, et al., 2013. CADP 2011: a toolbox for the construction and analysis of distributed processes[J]. STTT, 15(2): 89–107.

[11] MCMILLAN K L, 1993. Symbolic model checking[M]. USA: Springer.

[12] MUÑOZ C A, DOWEK G, CARREÑO V, 2004. Modeling and verification of an air traffic concept of operations[C]//Proceedings of the ACM/SIGSOFT International Symposium on Software Testing and Analysis, ISSTA 2004. Boston, Massachusetts, USA: ACM, USA: 175–182.

[13] NASA/TM-2004-213006, 2004. Abstract model of sats concept of operations: Initial results and recommendations[M]. USA: NASA.

[14] PARTOVI A, LIN H, 2014. Assume-guarantee cooperative satisfaction of multi-agent systems[C]//Proceedings of American Control Conference, ACC 2014. USA: IEEE, USA: 2053–2058.

[15] PETERSON G L, 1981. Myths about the mutual exclusion problem[J]. Inf. Process. Lett., 12(3): 115–116.

[16] REYNOLDS J C, 1993. The discoveries of continuations[J]. Lisp and Symbolic Computation, 6(3-4): 233–248.

[17] SARNAT J, SCHÜRMANN C, 2009. Lexicographic path induction[C]//Proceedings of Typed Lambda Calculi and Applications, 9th International Conference, TLCA 2009. Brasilia, Brazil: Springer, Berlin: 279–293.

[18] SESTOFT P, 2012. Undergraduate topics in computer science: volume 50 programming language concepts[M]. Switzerland: Springer International Publishing.

[19] VERGAUWEN B, LEWI J, 1993. A linear local model checking algorithm for CTL [C]//Proceedings of CONCUR '93, 4th International Conference on Concurrency Theory. Hildesheim, Germany: Springer-Verlag, Berlin: 447–461.

[20] ZHANG W, 2014. QBF Encoding of Temporal Properties and QBF-based Verification [C]//Proceedings of IJCAR 2014. Vienna: Springer-Verlag, Berlin: 224–239.

发表学术论文

学术论文

[1] Jian Liu, Ying Jiang, Yanyun Chen. VMDV: A 3D Visualization Tool for Modeling, Demonstration, and Verification. TASE 2017. accepted.

[2] Ying Jiang, Jian Liu, Gilles Dowek, Kailiang Ji. SCTL: Towards Combining Model Checking and Proof Checking. The Computer Journal. submitted.

项目资助情况

中法合作项目 LOCALI (项目编号 NSFC 61161130530 和 ANR 11 IS02 002 01)。

简历

基本情况

刘坚，男，山东省茌平县人，1989 年出生，中国科学院软件研究所博士研究生。

教育背景

- 2011 年 9 月至今：中国科学院软件研究所，计算机软件与理论，硕博连读
- 2007 年 9 月至 2011 年 7 月：山东农业大学，信息与计算科学，本科

联系方式

通讯地址：北京市海淀区中关村南四街 4 号，中国科学院软件研究所，5 号楼 3 层计算机科学国家重点实验室

邮编：100090

E-mail: dreammaker2010@yeah.net

致　谢

值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师、学长、同学、朋友和家人表示衷心的感谢！