a.

左邊是 pirate _a，右邊是 pirate_b。

透過 averge mask 之後，主觀感覺左邊的變動幅度較大，且左邊圖片整體也較為清晰。

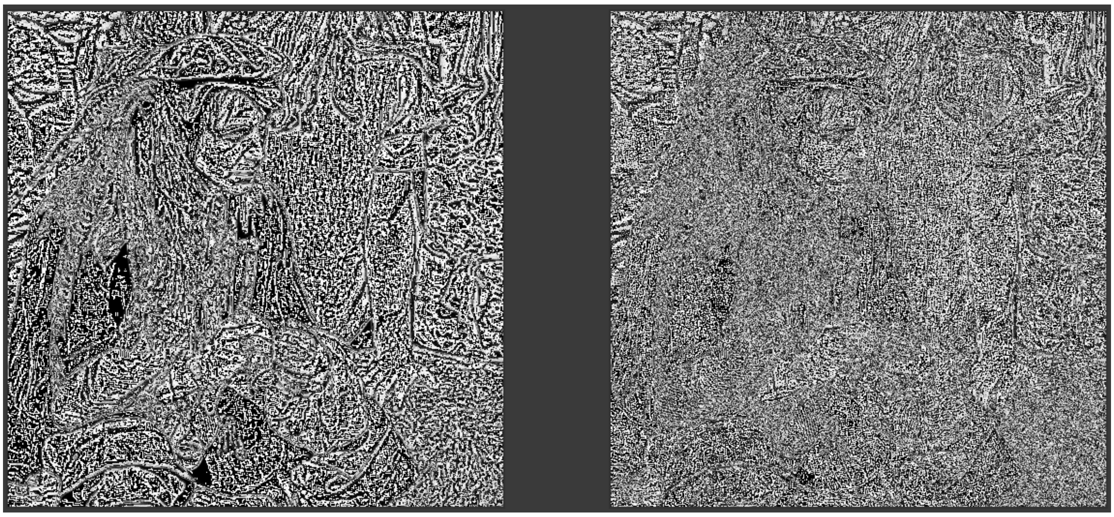
b.

左邊是 pirate _a，右邊是 pirate_b。

在套用 median mask 之後，左邊的圖片有明顯的改善，成像清楚且銳利，非常驚人。

相對來說，右邊的圖片與原圖並沒有太大的差異，可見噪音並不能簡單消除。

c.



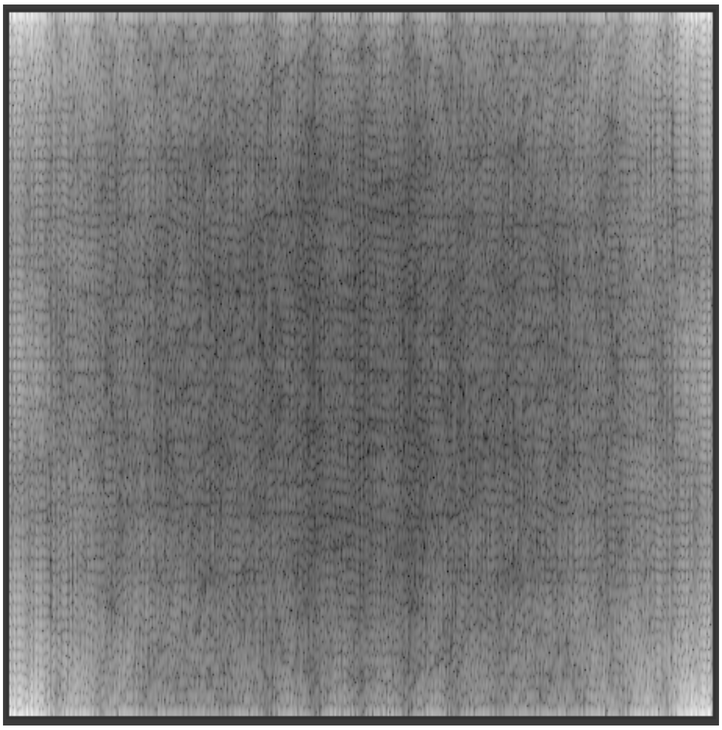
左圖為 pirate_a 經 median filter，與 laplacian filter 的效果。右圖為原圖直接使用 laplacian filter 的效果。

經過 median filter 後，laplacian 呈現出來的邊緣更加清晰且明確。

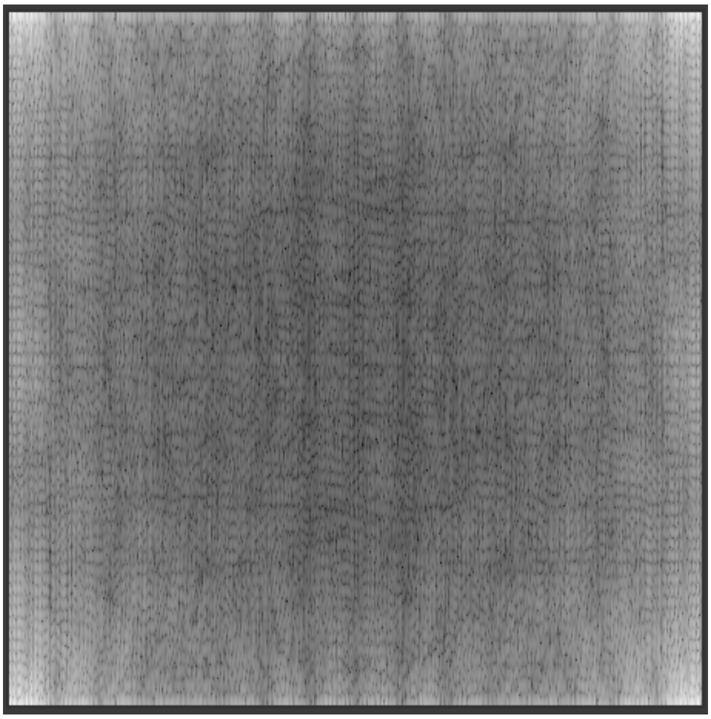
4. Original image

Step 1. Multiply by (-1)^(x+y)

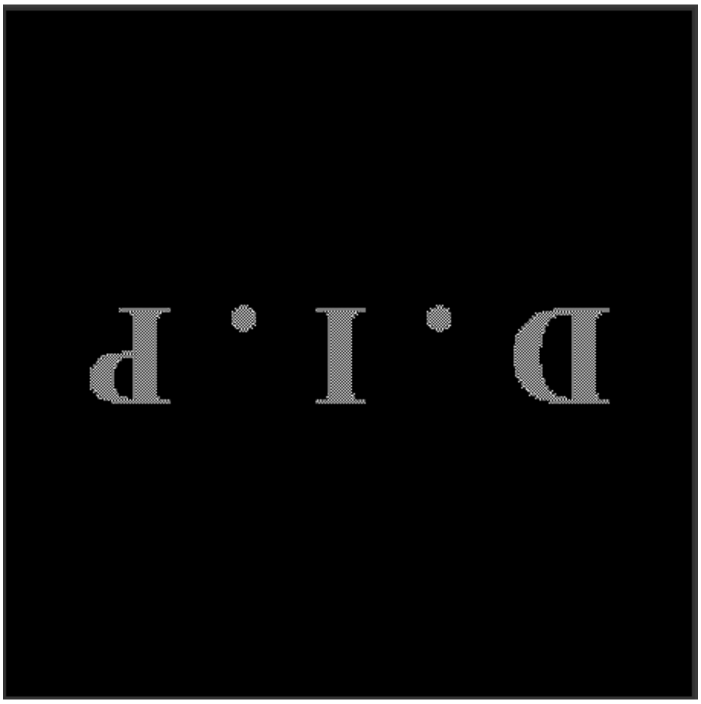
Step 2. Compute the DFT



Step 3. Take the complex conjugate of DFT



Step 4. Compute inverse DFT



Step 5. Multiplying real part of inverse DFT by (-1)^(x+y)

Step 1. 因為將 x+y 奇數格的 pixel 取負值，所以可以在這一步看到圖像中 D.I.P 增加了許多黑點。

Step 2. 透過 DFT，得到複數的陣列，不過由於轉換的關係只會呈現雜訊的模樣，因此透過 SHIFT 以及 log 的算法呈現該 DFT 的 spectrum.

Step 3. 取複數陣列的共軛複數，但是由於實部相同，因此產生的 spectrum 跟 step 2 一樣。

Step 4. 透過 inverse DFT，得到共軛後的圖片，由於傅立葉轉換的性質，使得共軛後的頻譜在轉換後，上下左右顛倒，而得到 step 4 的結果。

Step 5. 將原先 x+y 奇數格的 pixel 乘上-1 還原原本的數值，因此得回沒有黑點、上下左右相反的圖片。

數學證明請見下一頁。

$$e^{-j\theta} = \overline{e^{j\theta}}$$

Let $\theta = 2\pi \cdot \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)$

DFT: $F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left(-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$

IDFT: $f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \exp\left(j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$

With conjugate of $F(u,v)$, we turn j into negative and get:

$$\overline{F(u,v)} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left(j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$
$$= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot \exp\left(-j2\pi\left(\frac{(2M-u)x}{M} + \frac{(2N-v)y}{N}\right)\right)$$
$$= F(2M-u, 2N-v)$$

0 1 2 … M-1

0 -1 -2 … -M+1 +2M.

Using IDFT:

$$f'(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \overline{F(u,v)} \cdot \exp\left(j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(2M-u, 2N-v) \exp\left(j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

$u = 2M - u'$

$u' = 0$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{u'=0}^{M+1} \sum_{v'=0}^{N+1} F(u', v') \exp\left(j2\pi\left(\frac{(2M-u')x}{M} + \frac{(2N-v')y}{N}\right)\right)$$

$u' = -u + 2M$

$$= \frac{1}{MN} \sum_{u'=0}^{M+1} \sum_{v'=0}^{N+1} F(u', v') \exp\left(j2\pi\left(\frac{-u'x}{M} + \frac{-v'y}{N}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{MN} \sum_{u'=0}^{M+1} \sum_{v'=0}^{N+1} F(u', v') \exp\left(-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{MN} \sum_{u'=0}^{M+1} \sum_{v'=0}^{N+1} F(u', v') \cdot \exp\left(j2\pi\left(\frac{-ux}{M} + \frac{-v'y}{N}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{MN} \sum_{u'=0}^{M-1} \sum_{v'=0}^{N-1} F(u', v') \cdot \exp\left(j2\pi\left(\frac{u'(M-x)}{M} + \frac{v'(N-y)}{N}\right)\right)$$
$$= f(M-x, N-y)$$

Therefore, applying IDFT to the conjugate of DFT of an image flips the image along both x and y axes.