Εύρηκα

最後的十七分鐘
-探討過橋問題

22605 吳柏毅
22629 黎裕玄
姚志鴻老師

摘要

過橋問題中，有若干人要全部過橋，一次只能過兩人，且一定要有人拿燈回來，兩人一起過橋的時長為走較慢的人走的時長。給定每人過橋時間條件下，我們欲得知過橋所需最短的時間。

在4、5人過橋的問題中，我們藉由將時間最長的兩個人放在一起，和其他走法比較時間長短，得知時間大小和最佳解走法的關係，並給原題目設下了一些限制，以邏輯推導討論求得最佳解。討論K人無限制過橋時，分別討論奇、偶數人的情況，並將此過橋問題簡化為多個四人過橋並討論各時間長短和最佳解之間的關係。

過橋謎題介紹

有4人須過橋，而過橋時需要符合以下條件:

1、單次過橋人數不可超過兩人。

2、沒有燈無法過橋，而他們只有一盞燈，所以過完橋後要有另一人將燈帶回。

3、當有兩人過橋時，該次過橋的時間視為較慢者過橋的時間。

4人的過橋時間分別為1分鐘、2分鐘、5分鐘、10分鐘，如何在17分鐘讓全員過橋?

過橋謎題介紹

00

1 2

5 10

研究動機

我們想研究過橋問題的契機，是由於在書本上看到一個過橋問題，對書中將過橋時間長者放在一起走，節省時間的做法感到興趣，後來上網查資料的時候，發現過橋問題並沒有具系統性的解法，於是為了找出有系統性解決過橋問題的方法，便開始了我們的研究。

研究目的

本研究在探討4、5人過橋問題，無限制及有限制過橋，及推導至K人無限制過橋的通解。

研究過程與方法

一、初始公設

(一)無限制過橋時，設過橋人A、B、C、D...的過橋時間為a、b、c、d...，之後以此類推；有限制過橋時，設過橋人A_1、A_2...、B_1、B_2...的過橋時間為a_1、a_2...、b_1、b_2...，之後以此類推，A_1、A_2...為要符合限制的人，有另外設定者不在此限。

研究過程與方法

一、初始公設

(二)設a≦b≦c≦d…，$a_1 \leqq a_2 \ldots$，$b_1 \leqq b_2 \ldots$，之後以此類推。

(三)為表示方便，設「AB→A」為「A與B同時過橋，再由A回程」的情況。

(四)為表示方便，以下僅寫出時間最短走法的其中一種。

研究過程與方法

二、討論無限制過橋

(一)四人過橋

我們經過窮舉後得到以下結果：

1、AB→A→AC→A→AD，時間為2a+b+c+d

0

A B

C D

研究過程與方法

二、討論無限制過橋

(一)四人過橋

條件	走法	時間
$a+c\leq 2b$	AB→A→AC→A→AD	$2a+b+c+d$
$a+c\geq 2b$	AB→A→CD→B→AB	$a+3b+d$

表(一) 四人無限制過橋

研究過程與方法

二、討論無限制過橋

(二)五人過橋

條件	走法	時間
a+d≤2b	AB→A→AC→A→AD→A→AE	3a+b+c+d+e
a+d≥2b	AB→A→AC→A→DE→B→AB	2a+3b+c+e

表(二) 五人無限制過橋

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(一)1組2人同時過橋/保持在同一邊

1、四人過橋

$B_1B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow B_1B_2$，時間為$a_2+b_1+3b_2$

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(一)1組2人同時過橋/保持在同一邊

2、五人過橋

與以上推論同理我們得到以下走法：

$B_1B_2 \to B_1 \to A_1A_2 \to B_2 \to B_1B_2 \to B_1 \to B_1B_3$，時間為 $a_2+2b_1+3b_2+b_3$。

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(二)1組2人保持在不同邊

1、四人過橋

$$A_1B_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_1B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2B_1$$

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(二)1組2人保持在不同邊

1、四人過橋走法:$A_1B_1 \to B_1 \to B_1B_2 \to B_1 \to A_2B_1$。

條件	時間
$b_1 \leqq a_1$	$a_1 + a_2 + 2b_1 + b_2$
$a_1 \leqq b_1 \leqq a_2$	$a_2 + 3b_1 + b_2$
$a_2 \leqq b_1$	$4b_1 + b_2$

表(三)　一組2人保持在不同邊-四人過橋

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(二)1組2人保持在不同邊

2、五人過橋走法：$A_1B_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_1B_2 \rightarrow B_1 \rightarrow B_1B_3 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2B_1$

條件	時間
$b_1 \leqq a_1$	$a_1 + a_2 + 3b_1 + b_2 + b_3$
$a_1 \leqq b_1 \leqq a_2$	$a_2 + 4b_1 + b_2 + b_3$
$a_2 \leqq b_1$	$5b_1 + b_2 + b_3$

表(四)　一組2人保持在不同邊-五人過橋

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(三)1組2人不同時過橋

1、四人過橋-討論AB不同時過橋

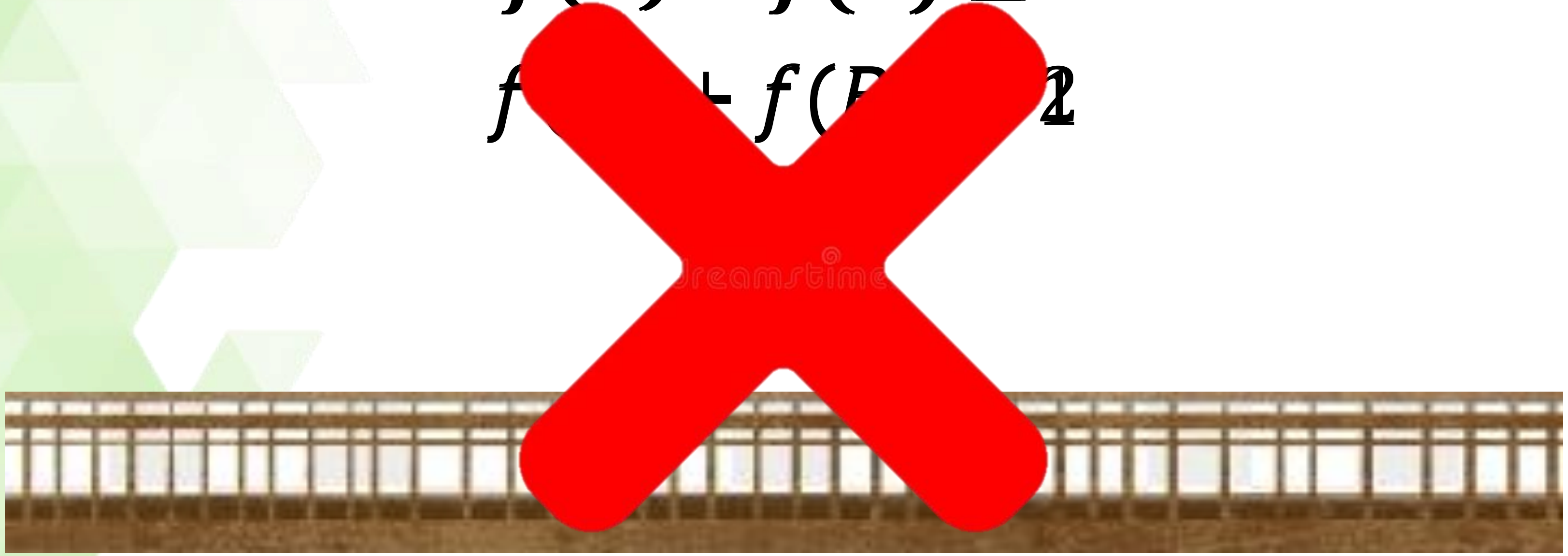
$$f(A)+f(B)\leq 1$$

f … $+f(B$ … 2

$f(A)$ $f(B)$

A B

C D



研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(三)1組2人不同時過橋

1、四人過橋

藉此討論並窮舉後，我們得到AB不同時過橋之最佳解。並藉由相同方法，可得到如附表(五)的結果。

2、五人過橋

與以上推論同理，可得到如附表(六)的結果。

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

不同時過橋的條件	所需時間
AB不同時過橋	a+3c+d
AC不同時過橋	a+3b+d
AD不同時過橋	a+3b+d
BC不同時過橋	2a+b+c+d 或 a+3b+d
BD不同時過橋	2a+b+c+d 或 a+3b+d
CD不同時過橋	2a+b+c+d

表(五)　一組2人不同時過橋-四人過橋

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

不同時過橋的條件	所需時間
ab 不同時過橋	2a+3c+d+e
ac 不同時過橋	2a+3b+d+e 或 a+4b+c+e
ad 不同時過橋	2a+3b+c+e 或 a+4b+c+e
ae 不同時過橋	2a+3b+c+e 或 a+4b+c+e
bc 不同時過橋	3a+b+c+d+e 或 2a+3b+d+e
bd 不同時過橋	3a+b+c+d+e 或 2a+3b+d+e 或 a+4b+c+e
be 不同時過橋	3a+b+c+d+e 或 2a+3b+d+e 或 a+4b+c+e
cd 不同時過橋	3a+b+c+d+e 或 2a+3b+d+e 或 a+4b+c+e
ce 不同時過橋	3a+b+c+d+e 或 2a+3b+d+e 或 a+4b+c+e
de 不同時過橋	3a+b+c+d+e 或 2a+3b+d+e 或 a+4b+c+e

表(六)　一組2人不同時過橋-五人過橋

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(四)1組3人不同時過橋

1、四人過橋

研究過程與方法

三、討論有限制過橋

(四)1組3人不同時過橋

1、四人過橋走法：$A_1B_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2B_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_3B_1$。

限制	時間
$b_1 \leqq a_1$	$a_1+a_2+a_3+2b_1$
$a_1 \leqq b_1 \leqq a_2$	$a_2+a_3+3b_1$
$a_2 \leqq b_1 \leqq a_3$	a_3+4b_1
$a_3 \leqq b_1$	$5b_1$

表(七)　一組3人不同時過橋-四人過橋

研究過程與方法

四、討論K人過橋無限制通解

(一)$K\in 2N(N\in \mathbb{N})$

A	B	A_1	A_2	……	A_{K-2}
a	b	a_1	a_2	……	a_{K-2}

最佳解多項式：$ma + nb + x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots\ldots + x_{K-2} a_{K-2}$

$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{K-2})$

研究過程與方法

四、討論K人過橋無限制通解

(一)K∈2N(N∈ ℕ)

X_n

(0,0,......),......,0,0)

A_n A_m

A

($n \leq m$)

研究過程與方法

四、討論K人過橋無限制通解

(一)K∈2N(N∈ℕ)

(x_m, x_{m+1})
$=(0,1)$

2a+2 … $_{m+1}$

A

B

A_m

A_{m+1}

$AB \to A_m \to A \to A \to A_m A_{m+1} \to AB$

研究過程與方法

四、討論K人過橋無限制通解

(1,1,0,1,……,0,1)< (0,1,1,1,……,0,1)

(0,1,0,1,……,0,1) →

(1,1,0,1,……,0,1)

(1,1,1,1,……,0,1)

(1,1,1,1,……,1,1)

研究過程與方法

四、討論K人過橋無限制通解

$$(0,1,0,1,0,1,\ldots,0,1)=\frac{K-2}{2}(a+2b)+\sum_{m=1}^{\frac{K-2}{2}}\mathrm{a}_{2\mathrm{m}}+b=\mathrm{A}_0$$

$$(0,1)\rightarrow(1,1)\Rightarrow(-2b+a+\mathrm{a}_{\mathrm{m}})$$

$$\underline{\mathrm{A}_0\ or\ \mathrm{A}_0-2\mathrm{nb}+\mathrm{na}+\sum_{m=1}^{n}\mathrm{a}_{2\mathrm{m}-1}}\ (\mathrm{n}\in\mathbb{N}\wedge\mathrm{n}\leqq\frac{K-2}{2})$$

A_n

$\mathrm{a}+\mathrm{a}_{2n-1}\leqq 2\mathrm{b}$

$\mathrm{a}+\mathrm{a}_{2n+1}\geqq 2\mathrm{b}$

研究過程與方法

四、討論K人過橋無限制通解

(二)K∈2N-1(N∈ℕ)

$$(1,0,1,0,1,0,1,\ldots,0,1)=A_0=\frac{K-3}{2}(a+2b)+\left(\sum_{m=1}^{\frac{K-3}{2}}a_{2m+1}\right)+a_1$$

(1,1,1,0,1,0,1,…,0,1)
(1,1,1,1,1,0,1,…,0,1)
(1,1,1,1,1,1,1,…,0,1)
(1,1,1,1,1,1,1,…,1,1)

$$A_0 \; or \; A_0-2nb+na+\left(\sum_{m=1}^{n}a_{2m}\right)$$

$$\left(n\in\mathbb{N}\wedge n\leqq\frac{K-3}{2}\right)$$

$$a+a_{2n}\leqq 2b$$

$$a+a_{2n+2}\geqq 2b$$

討論

一、在討論無限制過橋時比較兩組解，最小時間與次大時間之和與次小時間之兩倍之大小關係會影響最佳解。

二、在討論1組2人同時過橋/保持在同一邊時，受限制的2人必不在首次及末次過橋。

討論

三、在討論1組2人保持在不同邊時，受限制的2人必有1人在首次過橋，另1人在末次過橋；而b_1以外a_n和b_n的係數不大於1，且最佳解的時間中所有值小於b_1的a_n皆會被b_1取代。

四、在討論不同時過橋時，被限制的人數會影響推導流程。

五、在討論K人、無限制過橋時，過程會被簡化為複數個A、B、A_p、A_q($p \neq q$)過橋的走法。

結論

一、在討論無限制過橋時，過橋時間最長之兩人是否同時過橋會影響最佳解。

二、在討論N人過橋，1組2人保持在不同邊時，可將問題簡化成N-2人過橋無限制問題。

結論

三、在討論K人無限制過橋時(K∈2N(N∈ ℕ))，解會出現在(0,1,0,1,0,1,...,0,1)及由左方逐次將0替換為1的過程中所有的解；在討論K人無限制過橋時(K∈2N-1(N∈ ℕ))，解會出現在(1,0,1,0,1,0,1,...,0,1)及由左方逐次將0替換為1的過程中所有的解。

四、未來展望：做出K人過橋，有限制過橋之最佳走法之通解、改變單次過橋人數限制下無限制過橋的通解，及限制過橋次數的走法。

參考資料

一、賴妙。全世界最美的猜謎書。初版。台北市。如果出版社。79頁。2013

二、張蒔曦、賴德全(2008)。2019年10月30號，取自https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race1/48/senior/040415.pdf

三、你能解開吊橋謎題嗎？ - Alex Gendler。2019年10月30號，取自https://www.youtube.com/watch?v=7yDmGnA8Hw0&t=93s

感謝

- 數專指導老師：姚志鴻老師和施翔仁老師
- 支持我們的父母
- 數專的同學們
- 特教組
- 正在收看的你們

報告結束