Εύρηκα

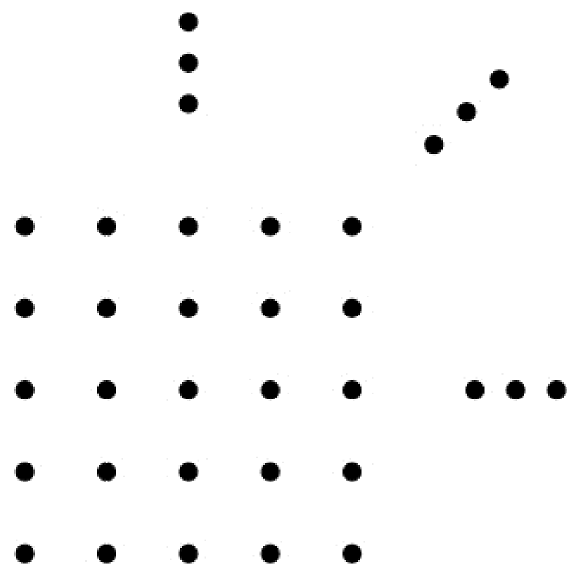
$n \times n$ 格子點中線段長度個數的探討

22617 陳威仲
指導老師：姚志鴻老師

研究問題

研究問題

- 在一個$n \times n$的正方形，由單位長為1的格子點組成的方陣中，任兩點連成一線段，可決定"幾種長度"的線段？

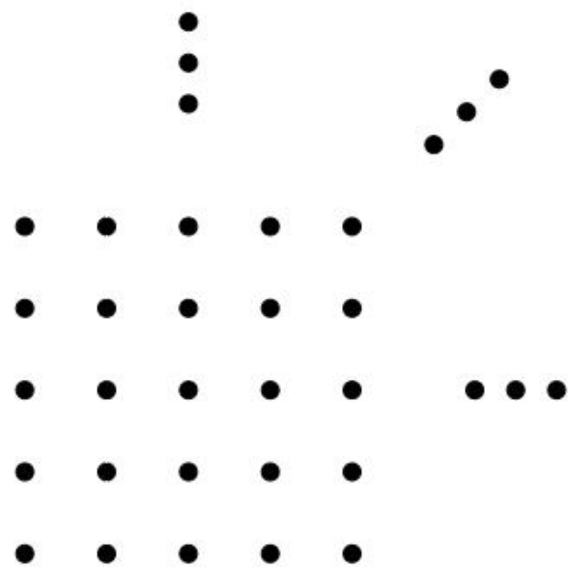


研究問題—簡單討論

- 若沒有重複線段長，

  總數為 $\frac{n(n+3)}{2}$

- 所有的線段長都可以表示成$\sqrt{a^2+b^2}$的形式



研究問題—簡單討論

- 若沒有重複線段長，

  總數為 $\frac{n(n+3)}{2}$

- n=4 為例

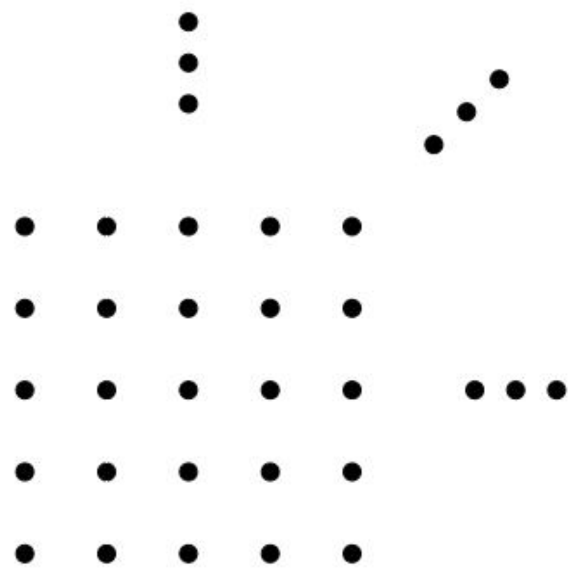
  (0,0)(0,1)(0,2)(0,3)(0,4)

  (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)

  (2,2)(2,3)(2,4)

  (3,3)(3,4)

  (4,4)



研究問題—簡單討論

- 若沒有重複線段長，

  總數為 $\frac{n(n+3)}{2}$

- n=4 為例

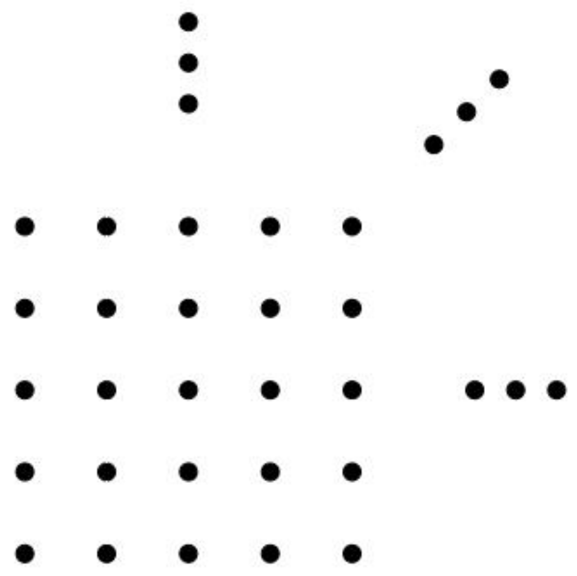
  (0,0)(0,1)(0,2)(0,3)(0,4)

  (1,1)(1,2)(1,3)(1,4)

  (2,2)(2,3)(2,4)

  (3,3)(3,4)

  (4,4)



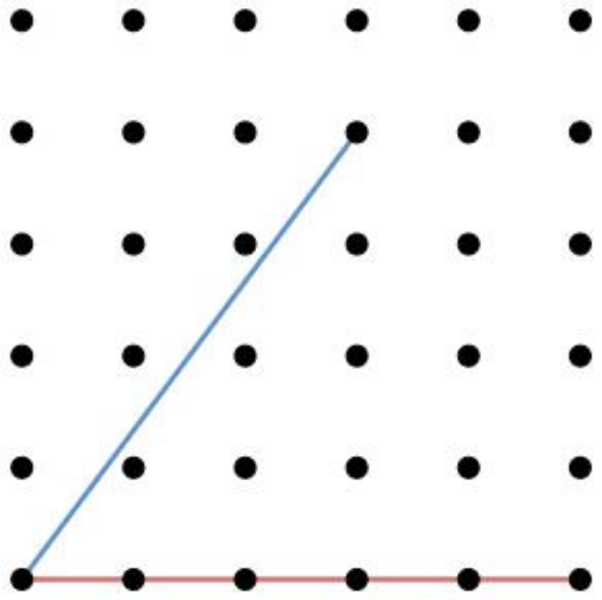
研究問題—簡單討論

- 若沒有重複線段長，

  總數為 $\frac{n(n+3)}{2}$

- 計算重複的線段長

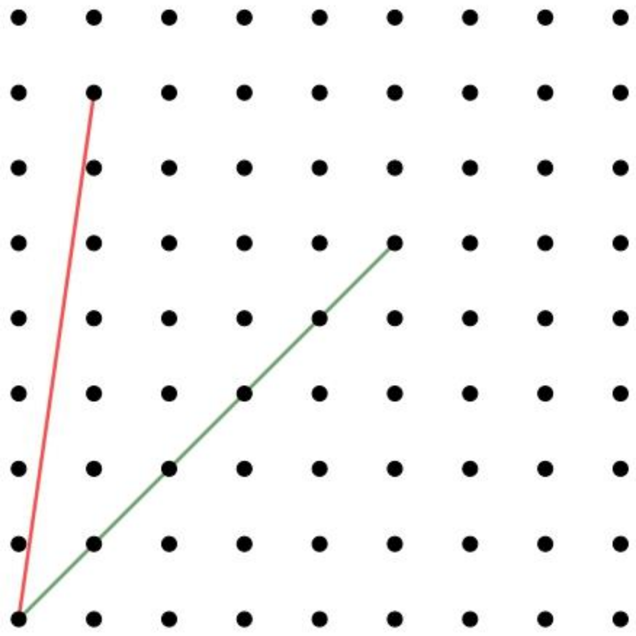
$3^2 + 4^2 = 5^2$



研究問題—簡單討論

- 計算重複的線段長

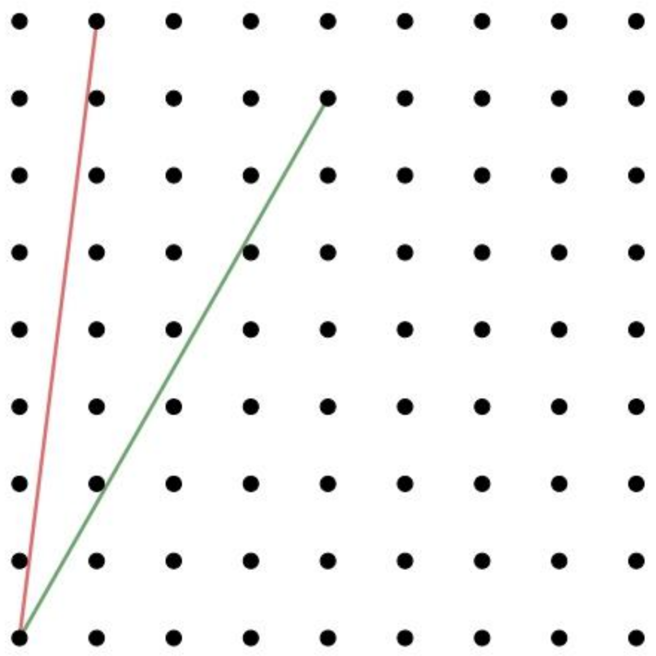
$$\color{red}{7^2+1^2} = \color{green}{5^2+5^2}$$



研究問題—簡單討論

- 計算重複的線段長

$$8^2+1^2=4^2+7^2$$



研究目的

- 尋找四元非負整數方程 $a^2+b^2=c^2+d^2$ 的解

- 找出在一個 $n\times n$ 的正方形，由單位長為1的格子點所組成的方陣中，任兩點連成一線段，可決定線段長度種類總數範圍

找解方式

找解方式一　利用複數平面

找解方式一　利用複數平面

- 利用複數平面的旋轉，可以有以下式子:

$$(a+bi)(cos\theta+isin\theta)$$
$$=(acos\theta-bsin\theta)+i(asin\theta+bcos\theta)$$
$$=(c+di)$$

- 容易知道此時的 $cos\theta$、$sin\theta$皆是有理數
- 即令$cos\theta=\frac{q}{p}$，$sin\theta=\frac{r}{p}$，p,q,r為一組畢式數

找解方式一　利用複數平面

- 不失一般性，設 $a \geq b$，$c \geq d$，$a > c$，即由 (a, b)旋轉到(c, d)的角度 θ 小於$45°$
- 即 $cos\theta > sin\theta$ $(q > r)$。不妨設 $c \geq d$，即 $aq - br \geq bq + ar$，$a(q - r) \geq b(q + r)$

找解方式一 利用複數平面

- $(p, q, r) = (5,4,3)$

a	b	
5	0	$5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2$
7	1	$7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$
10	0	$10^2 + 0^2 = 8^2 + 6^2$
12	1	$12^2 + 1^2 = 9^2 + 8^2$
14	2	$14^2 + 2^2 = 10^2 + 10^2$

找解方式二　利用平方差

找解方式二 利用平方差

$$a^2 - d^2 = c^2 - b^2$$

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

$\boxed{1 \quad 3 \quad 5}$ 7 $\boxed{9}$ 11 13 15 17 19

$$5^2 - 4^2 = 3^2 - 0^2$$

找解方式二 利用平方差

$a^2 - d^2 = c^2 - b^2$

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

1 $\boxed{3 \quad 5 \quad 7}$ 9 11 13 $\boxed{15}$ 17 19

$8^2 - 7^2 = 4^2 - 1^2$

找解方式二 利用平方差

$$a^2 - d^2 = c^2 - b^2$$

$k_m = 1$ $m' = 3$ $\qquad$ $k_n = 7$ $n' = 1$

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

從 k_n 到 $k_n + n'$ (n'為等號同側兩數之差)

$$(k_n + n')^2 - {k_n}^2 = n'^2 + 2n' \cdot k_n$$

找解方式二 利用平方差

- 令$a-d=m'$, $c-b=n'$, $m'>n'$
- 由奇偶性容易推得必可找到一組排法，使得 a,d 之差和 b,c 之差皆為偶數(即取到的m',n'皆為偶數)
- 令 $m'=2m$, $n'=2n$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{k_n}+\boldsymbol{n'})^2-\boldsymbol{k_n}^2&=\boldsymbol{n'}^2+2\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{k_n}\\&=4(\boldsymbol{n}^2+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k_n})\end{aligned}$$

找解方式二 利用平方差

- 解二元一次方程

$$\boldsymbol{m^2 + m \cdot k_m = n^2 + n \cdot k_n}$$

- 若取遍所有 $m, n\ (m > n)$，必能找到所有解
- 其中，最小解滿足 $\dfrac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{gcd}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})} \mid (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{k_{m0}})$

找解方式二 利用平方差

- 滿足 $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2+d^2}$ 的解為

$$(a,b)=\left(k_{m0}+\frac{nt}{\gcd(m,n)},k_{n0}+2n+\frac{mt}{\gcd(m,n)}\right)$$

$$(c,d)=\left(k_{m0}+2m+\frac{nt}{\gcd(m,n)},k_{n0}+2n+\frac{mt}{\gcd(m,n)}\right)$$

其中，t為非負整數

找解方式二 利用平方差

- 滿足 $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2+d^2}$ 的解為

$$(a,b)=\left(k_{m0}+\frac{nt}{\gcd(m,n)},k_{n0}+2n+\frac{mt}{\gcd(m,n)}\right)$$

$$(c,d)=\left(k_{m0}+2m+\frac{nt}{\gcd(m,n)},k_{n0}+2n+\frac{mt}{\gcd(m,n)}\right)$$

其中，t為非負整數

找解方式二 利用平方差

- $(m,n) = (3,1)$

t	
0	$6^2 + 8^2 = 10^2 + 0^2$
1	$7^2 + 11^2 = 13^2 + 1^2$
2	$8^2 + 14^2 = 16^2 + 2^2$
3	$9^2 + 17^2 = 19^2 + 3^2$
4	$10^2 + 20^2 = 22^2 + 4^2$

找解方式二 利用平方差

- $(m, n) = (6,4)$

t	
0	$12^2 + 5^2 = 13^2 + 0^2$
1	$14^2 + 8^2 = 16^2 + 2^2$
2	$16^2 + 11^2 = 19^2 + 4^2$
3	$18^2 + 14^2 = 22^2 + 6^2$
4	$20^2 + 17^2 = 25^2 + 8^2$

找解方式三 利用恒等式

找解方式三 利用恆等式

- 費伯納西恆等式

$$(p^2+q^2)(r^2+s^2)$$
$$=\boxed{(pr+qs)^2+(ps-qr)^2}$$
$$=\boxed{(pr-qs)^2+(ps+qr)^2}$$

- 當 $p \neq q, r \neq s, pqrs \neq 0$ 三項要件都滿足，就可以找到一組解

找解方式三 利用恆等式

$$
\begin{aligned}
(p^2+q^2)(r^2+s^2) &= (pr+qs)^2+(ps-qr)^2 \\
&= (pr-qs)^2+(ps+qr)^2
\end{aligned}
$$

- 令 $a=pr+qs,\ b=ps-qr,$
  $c=pr-qs,\ \ d=ps+qr$
- 固定 p，有 $q=\frac{a-c}{b+d}p,\ r=\frac{a+c}{2p},\ s=\frac{b+d}{2p}$
- 取 $p=\gcd\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$，可使 q,r,s 為整數

找解方式三 利用恆等式

- $p > q, r > s, p \geq r$

p	q	r	s	
2	1	2	1	$5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2$
3	1	2	1	$7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$
3	2	2	1	$8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$
4	1	2	1	$9^2 + 2^2 = 6^2 + 7^2$
4	2	2	1	$10^2 + 0^2 = 6^2 + 8^2$

找解方式三 利用恆等式

- 定義函數 $w(n): \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 為乘積為 n 的無序組數
- 定義函數 $A(n): \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ 為在 $\max\{a, b, c, d\} = n$ 的條件下，$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$的非負整數解個數。

$$\boldsymbol{A(n) \le 2 \cdot \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor} \{w(k) \cdot [w(n-k) - 1]\}}$$

$$\boldsymbol{n \le 13,\ A(n) \le \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor} \{w(k) \cdot [w(n-k) - 1]\}}$$

結論

結論

- 我們找到了三個較為簡潔的方法來討論四元非負整數方程 $a^2+b^2 = c^2 + d^2$ 的解，並且能保證透過這三種方法的任何一種皆能找到所有此方程的解。

- 目前可以大略給定 $A(n)$ 的範圍，但是此範圍仍然有壓縮的空間，或是可能會有更簡潔的表示形式，值得更進一步探討。

結論

- 我們找到了三個較為簡潔的方法來討論四元非負整數方程 $a^2+b^2=c^2+d^2$ 的解，並且能保證透過這三種方法的任何一種皆能找到所有此方程的解。

- 目前可以大略給定 $A(n)$ 的範圍，但是此範圍仍然有壓縮的空間，或是可能會有更簡潔的表示形式，值得更進一步探討。

感謝

- 數專老師:姚志鴻老師
- 數專的好夥伴
- 一起奮鬥的225、226同學們
- 一路支持我們父母和師長們
- 在台下參與我們成發的各位師長和同學們

Εύρηκα

謝謝大家聆聽~