Εύρηκα

萬丈高樓平地起
-騎士巡邏路徑在方格塔內的存在性

22618 陳彥儒
22621 渠立宇
指導老師:姚志鴻老師
指導老師:施翔仁老師

騎士巡邏

Knight's Tour

- 按照西洋棋中騎士的規定走法走遍整個棋盤的每一個方格，而且每個網格只能夠經過一次的行進路線稱之。

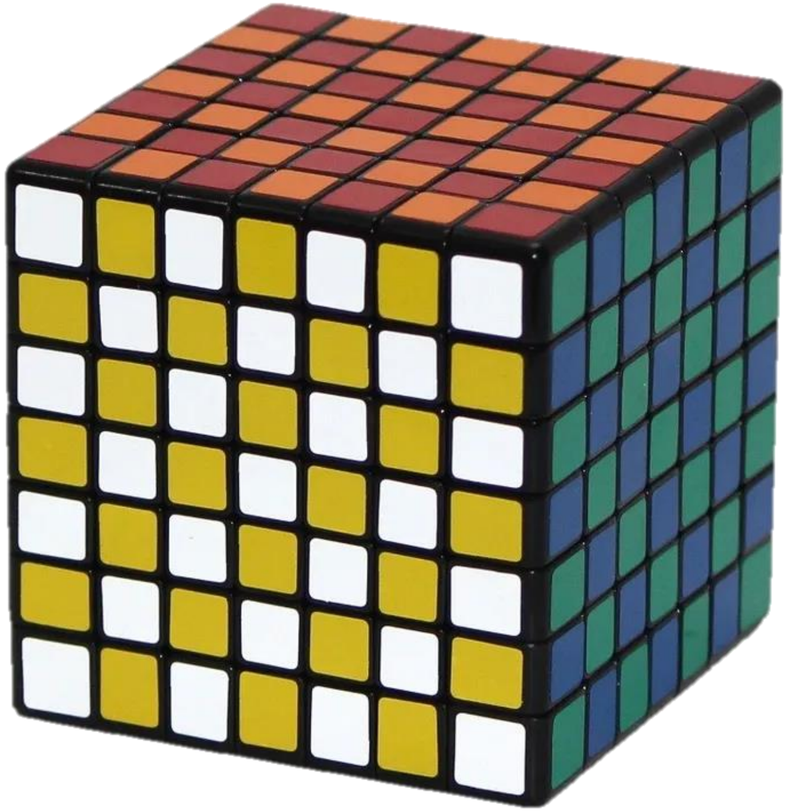
#「存在性」

平面騎士巡邏的先備知識 ......

- 對任意棋盤(m, n)，其中m, n均≥5

→<u>必有騎士巡邏</u>

#「方格塔」



研究目標 ……

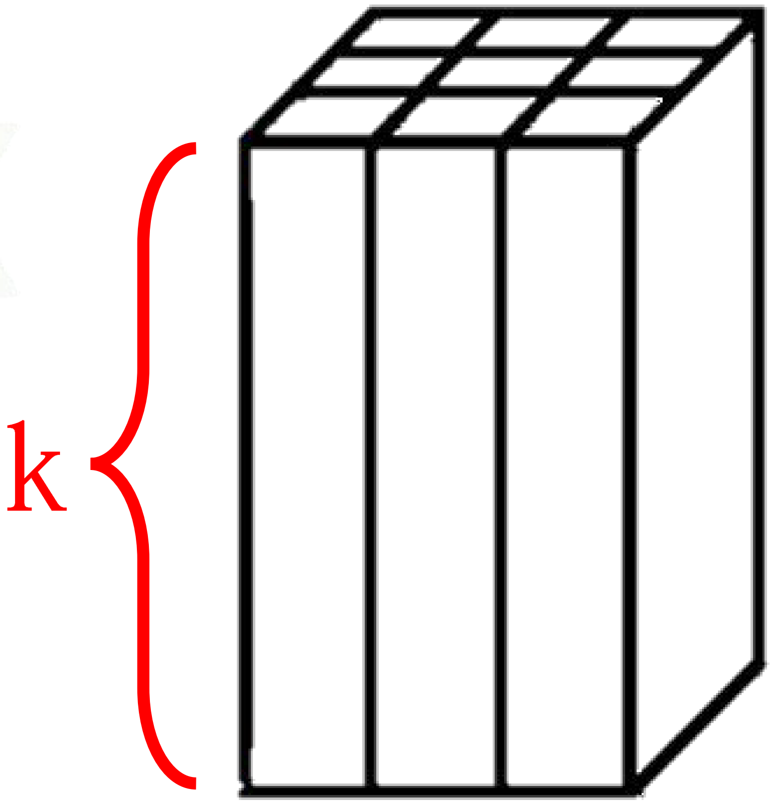
◆ 騎士巡邏路徑在

(m, n, k)方格塔內的存在性

(m, n, k 均≥3且不全為3)

構造法
&
跳躍數學歸納法

「單位方格塔」
(3, 3, k)



Εύρηκα

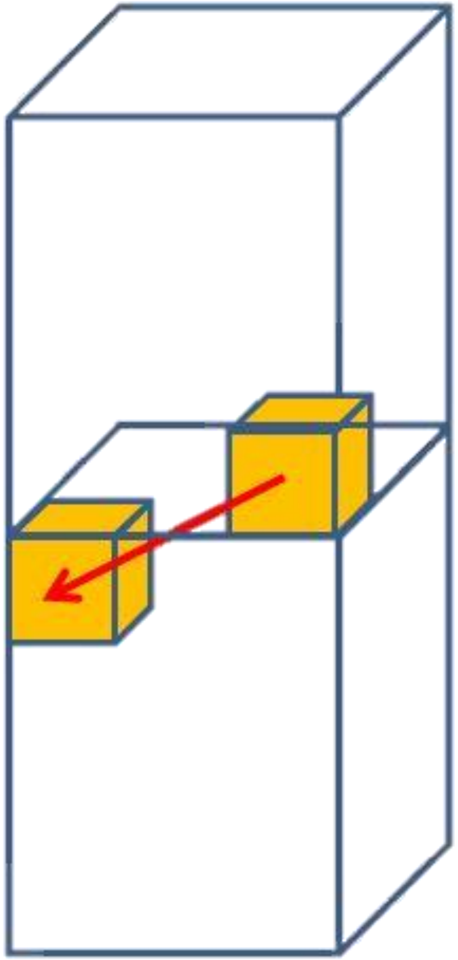
5	8	1	14	17	10	23	26	19	32	35	28
2	21	6	11	30	15	20	3	24	29	12	33
7	4	9	16	13	18	25	22	27	34	31	36

5	8	1	14	17	10	39	22	19	32	27	30	45	38	41
2	23	6	11	28	15	20	3	24	29	12	33	40	21	44
7	4	9	16	13	18	25	36	43	34	31	26	37	42	35

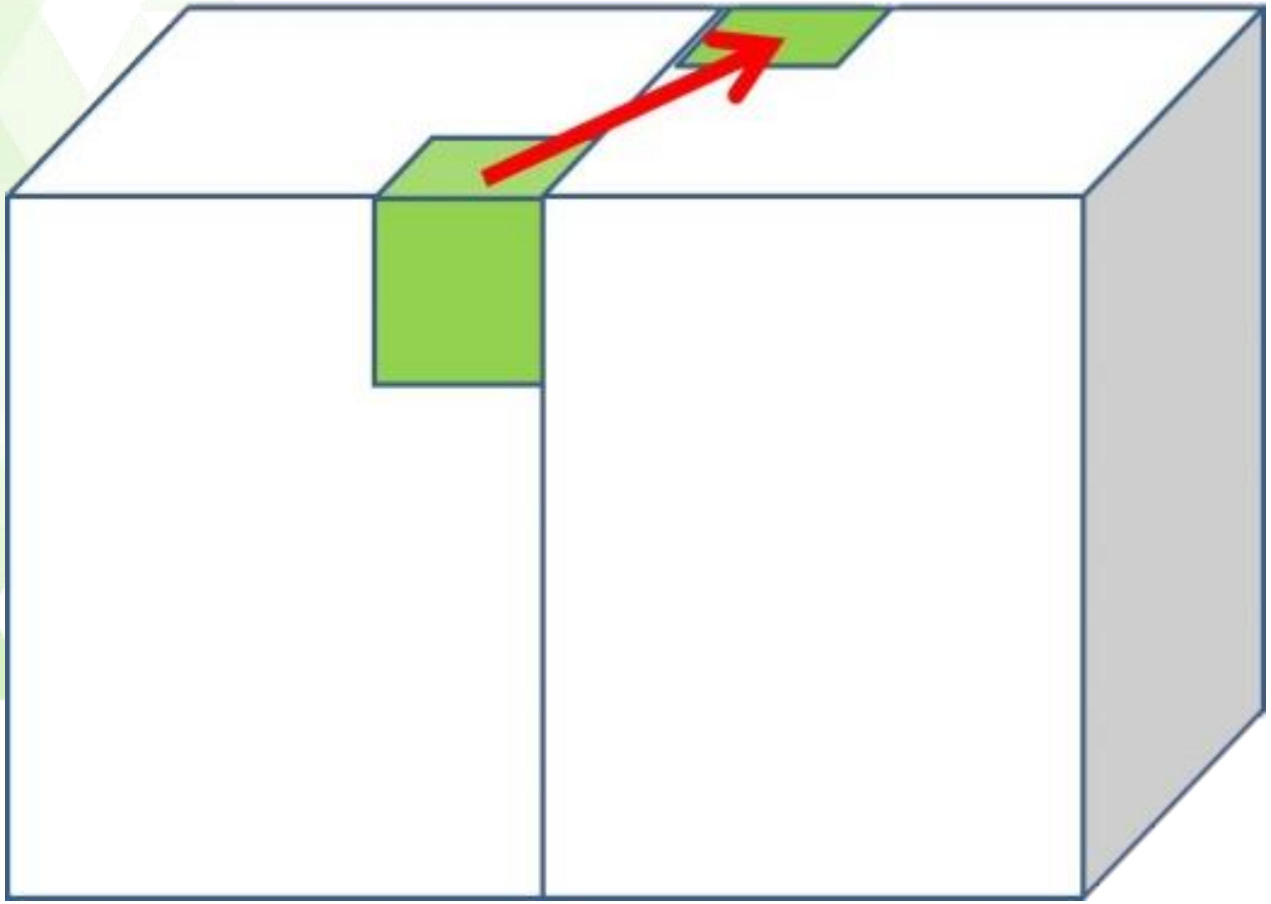
5	8	1	14	17	10	27	24	19	36	33	28	45	40	37	54	49	46
2	21	6	11	32	15	20	3	26	31	12	35	38	23	42	47	30	51
7	4	9	16	13	18	25	22	43	34	29	52	41	44	39	50	53	48

5	8	1	14	17	10	23	26	19	36	33	28	45	42	35	48	51	54	55	44	57
2	21	6	11	30	15	20	3	24	29	12	37	40	59	46	53	32	49	58	41	60
7	4	9	16	13	18	25	22	27	38	31	34	47	62	39	50	43	52	61	56	63

任意單位方格塔

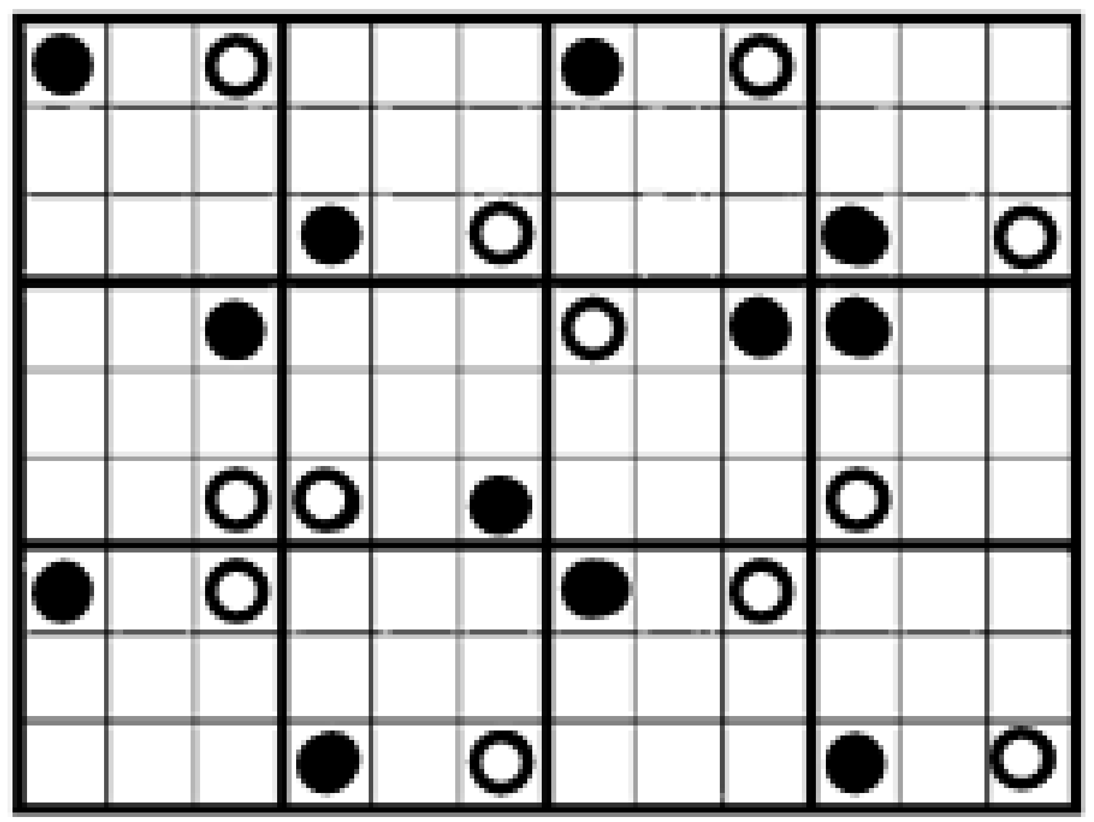


$(3, 3n, k)$



Lemma 1: (3m, 3n, k)方格塔具有騎士巡邏路徑

↓起點



●：各單位方格塔起點
○：各單位方格塔終點
(兩者在不同水平面上)

(3, n, k)

1	8	3
4	11	6
7	2	9
10	5	12

1	12	5
4	19	2
13	6	11
28	3	20
21	14	27

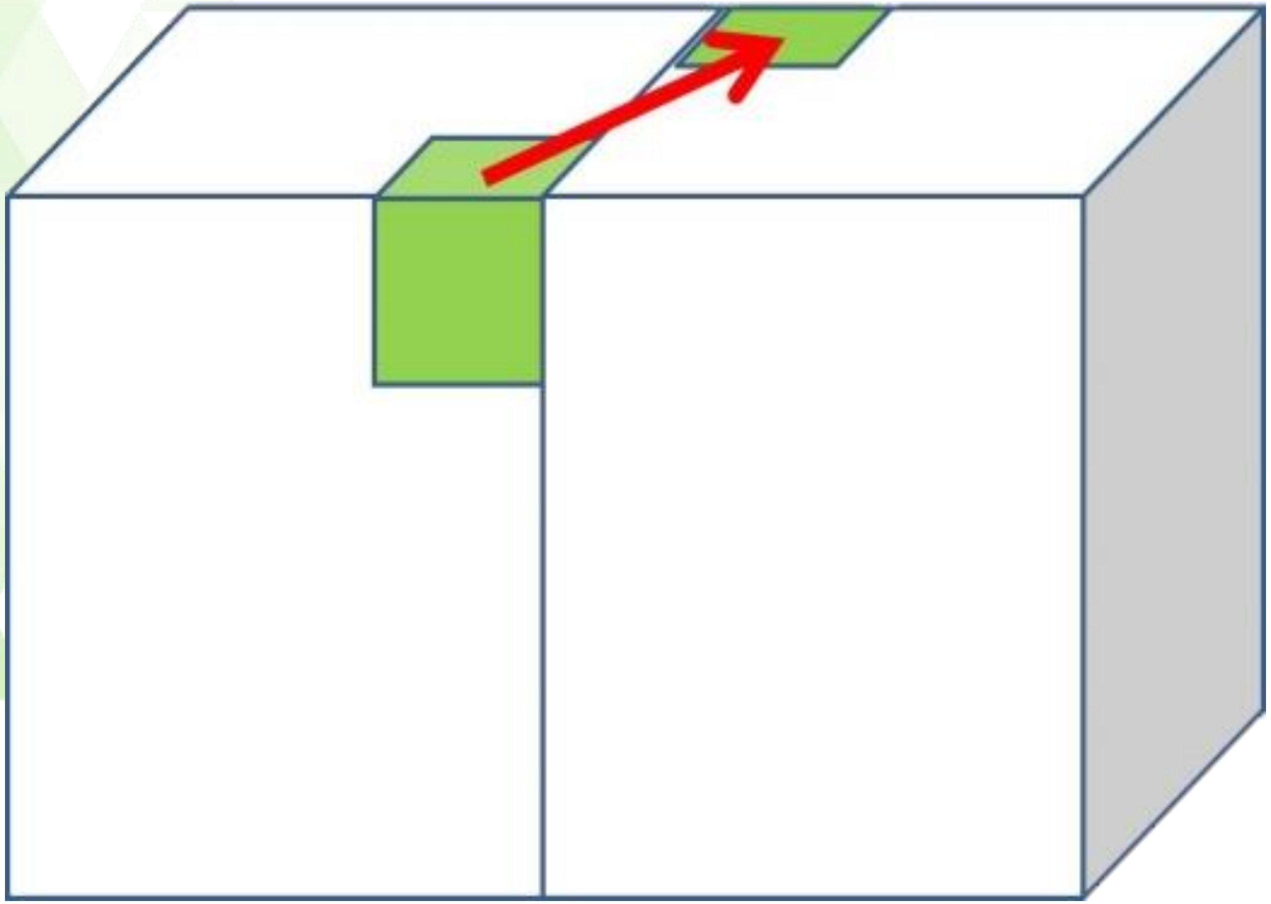
16	7	30
29	24	17
10	15	8
23	18	25
26	9	22

9	6	1
18	15	10
35	24	19
30	33	36
39	44	41

4	21	8
13	28	17
26	3	22
37	12	27
42	23	38

7	2	5
16	11	14
31	20	25
34	29	32
45	40	43

(3, n, k)

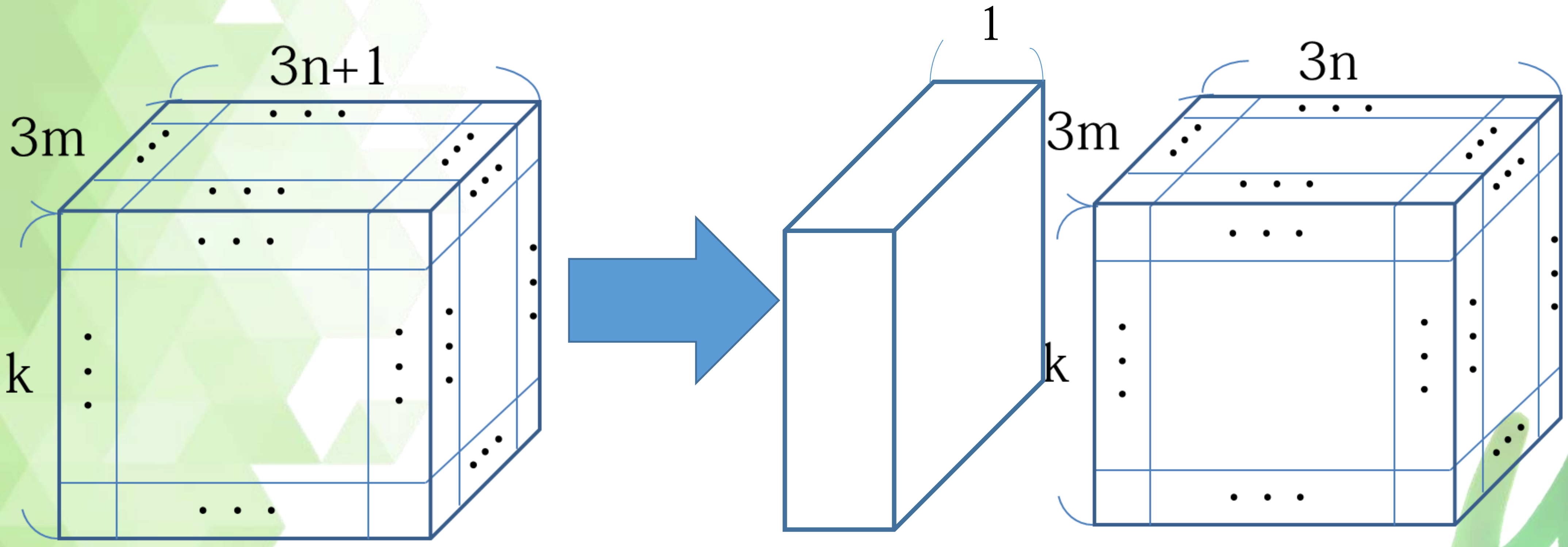


$(3m, 3n+1, k)$

(3m, 3n+1, k)

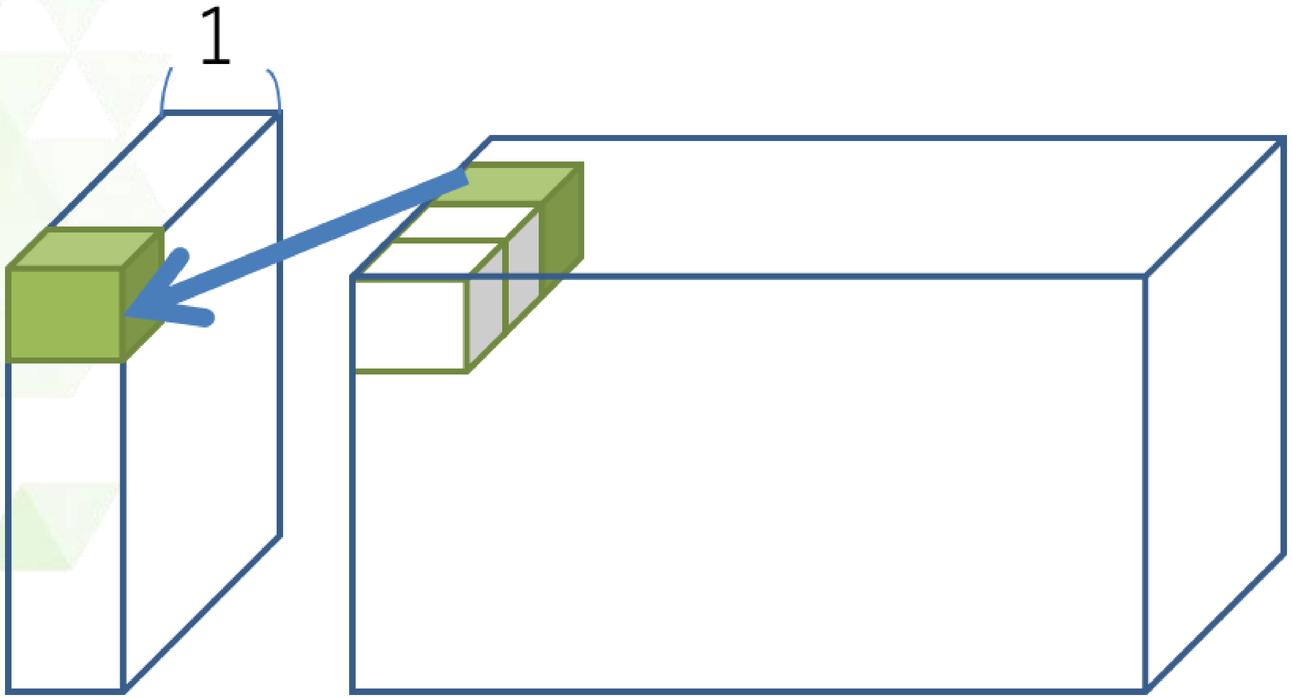
1. k≥5

- ✓ 將方格塔分為(3m, 3n, k)與剩下的(3m, 1, k)平面



Εύρηκα

- 利用單位方格塔，我們可以控制最後落點



(3m, 3n+1, k)

1. k≥5
   - ✓ 將方格塔分為(3m, 3n, k)與剩下的 (3m, 1, k) 平面
2. k=4
   - ✓ 將方格塔分為(3m, 3n-3, k)與剩下的 (3m, 4, 4) 區塊

Εύρηκα

(4, 4, k)

1	22	7	28
6	25	4	21
23	2	27	8
26	5	24	3

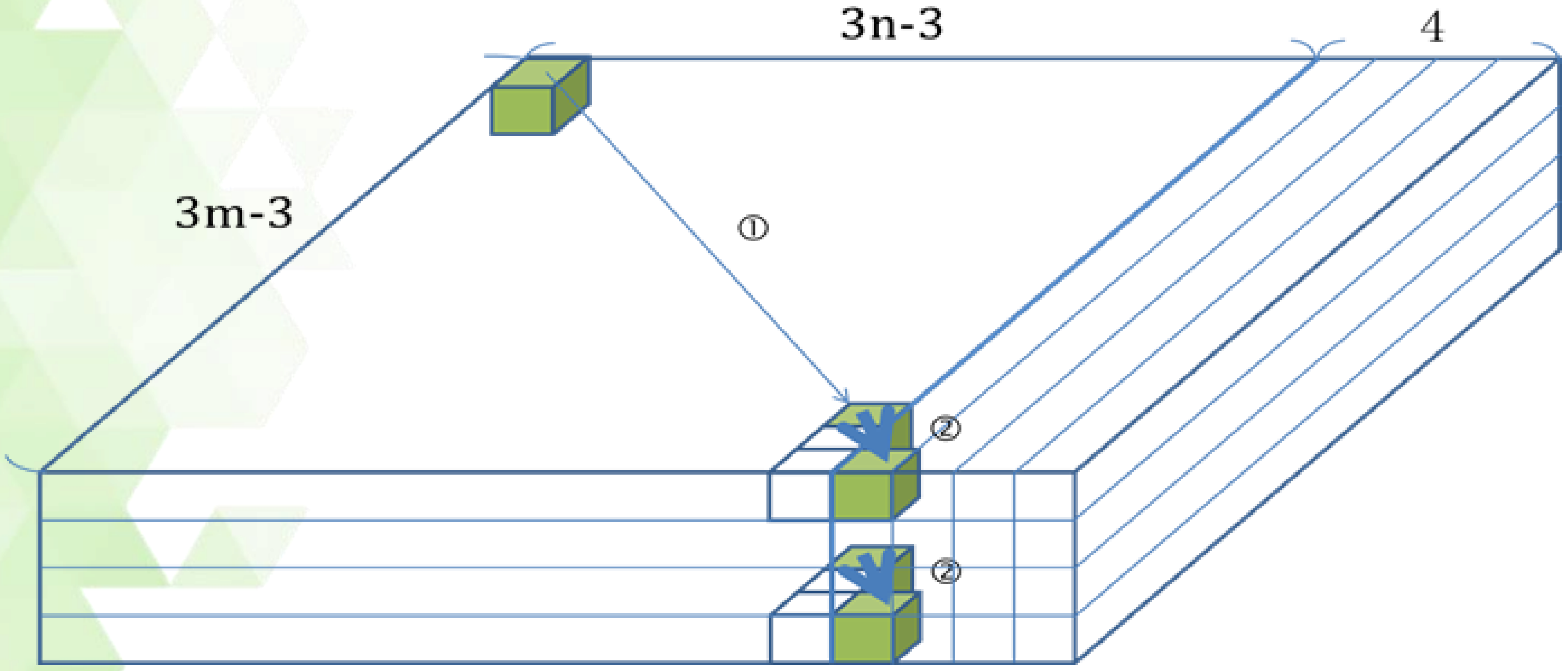
18	15	32	9
31	12	19	16
14	17	10	29
11	30	13	20

1	26	7	32
6	29	4	25
27	2	31	8
30	5	28	3

38	15	36	9
35	12	39	16
14	37	10	33
11	34	13	40

19	44	23	48
22	47	20	41
43	18	45	24
46	21	42	17

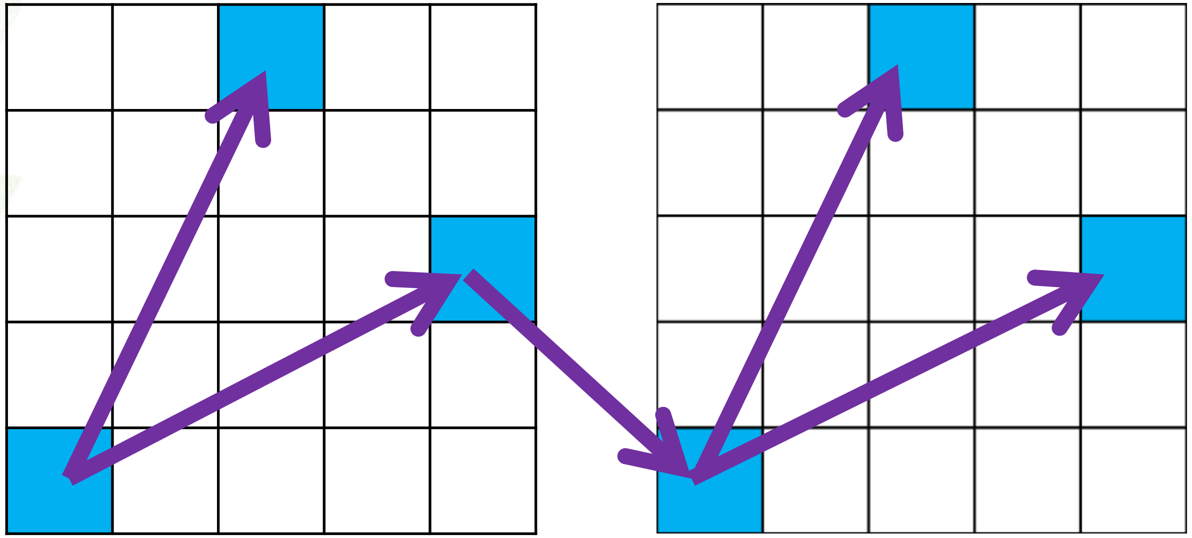
(3m, 3n+1, k)

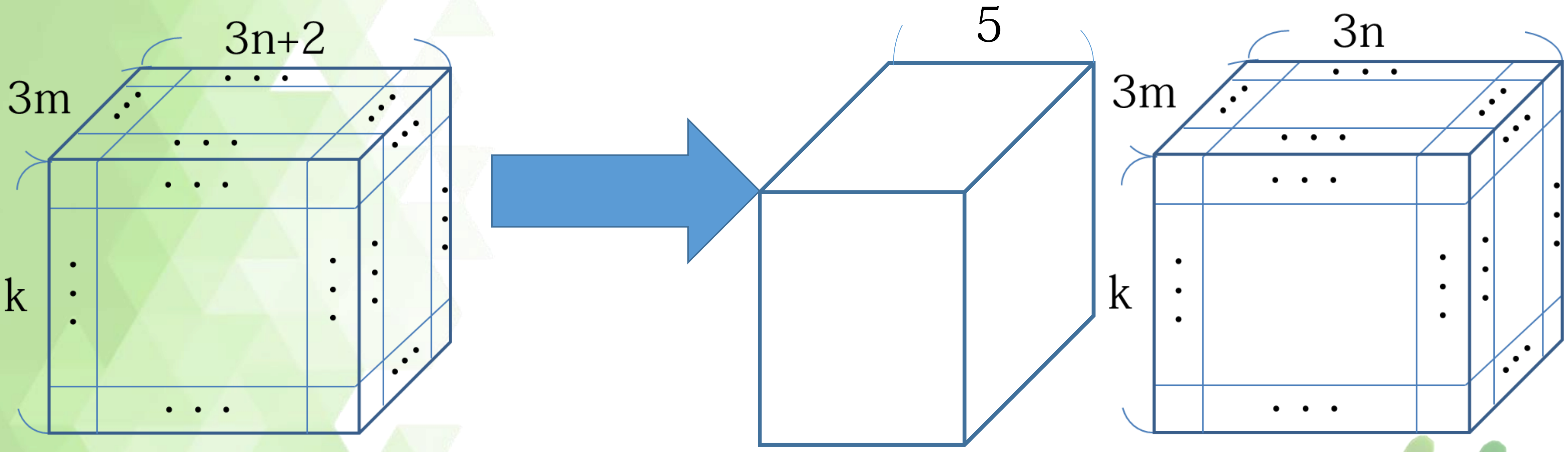


$(3m, 3n+2, k)$

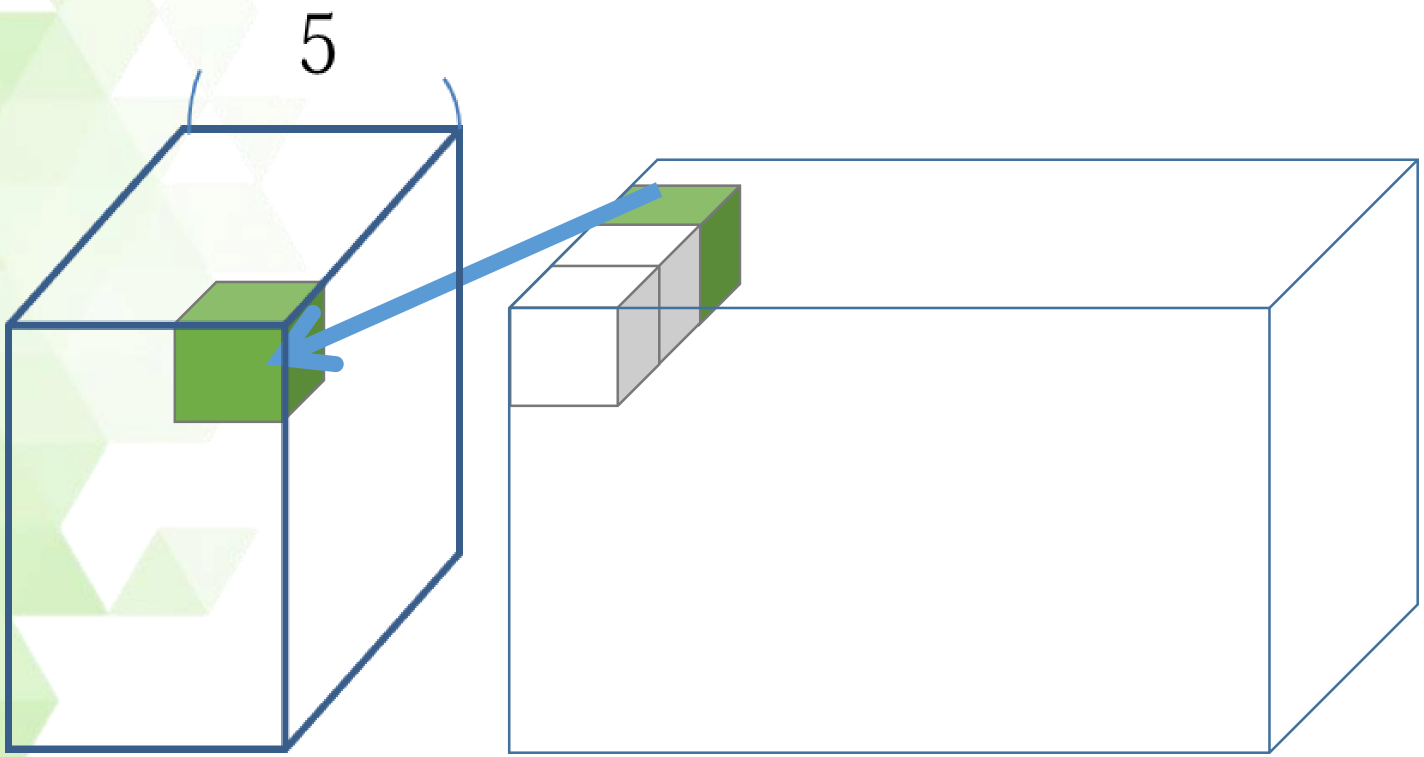
(3m, 3n+2, k)

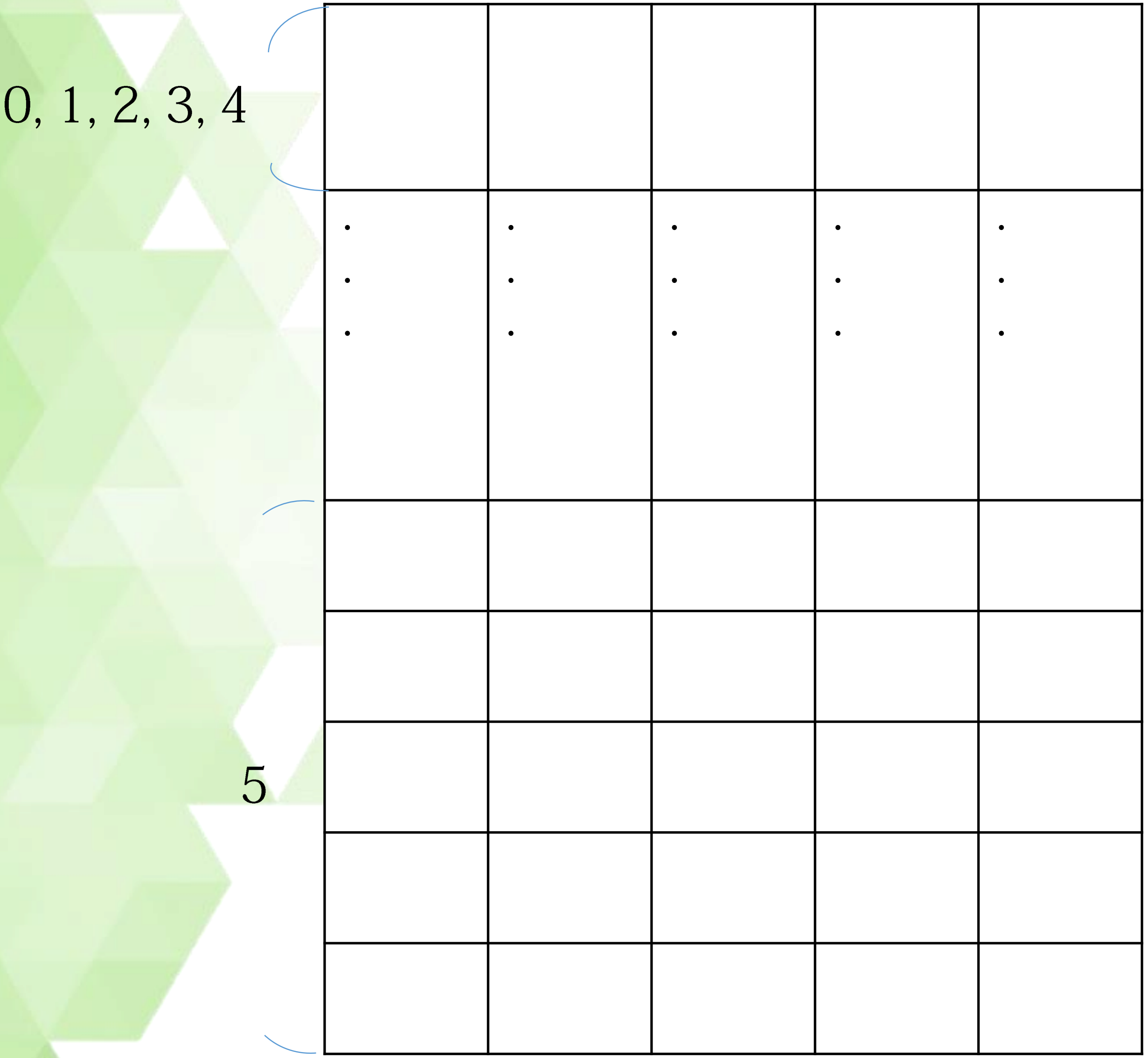
- 此時的k≥4
- 將方格塔分為(3m, 3(n-1), k)與剩下的(3m, 5, k)平面
- 5*5亦具有單位方格塔性質:




3n+2
3m
k
5
3m
3n
k

- 利用單位方格塔，我們可以控制最後落點




0, 1, 2, 3, 4
5

(1, 5, k)

- k≥5:已證
- k=4:

1	12	5	18	9
6	17	10	13	4
11	2	15	8	19
16	7	20	3	14

(2, 5, k)

- 轉為(7, 5, k):

3	18	11	26	5	34	13
10	27	4	33	12	25	6
19	2	17	30	23	14	35
28	9	32	21	16	7	24
1	20	29	8	31	22	15

(3, 5, k),(4, 5, k)

- (3, 5, k)可轉為(8, 5, k)(2個(4, 5, k))

1	12	5	18	9
6	17	10	13	4
11	2	15	8	19
16	7	20	3	14

21

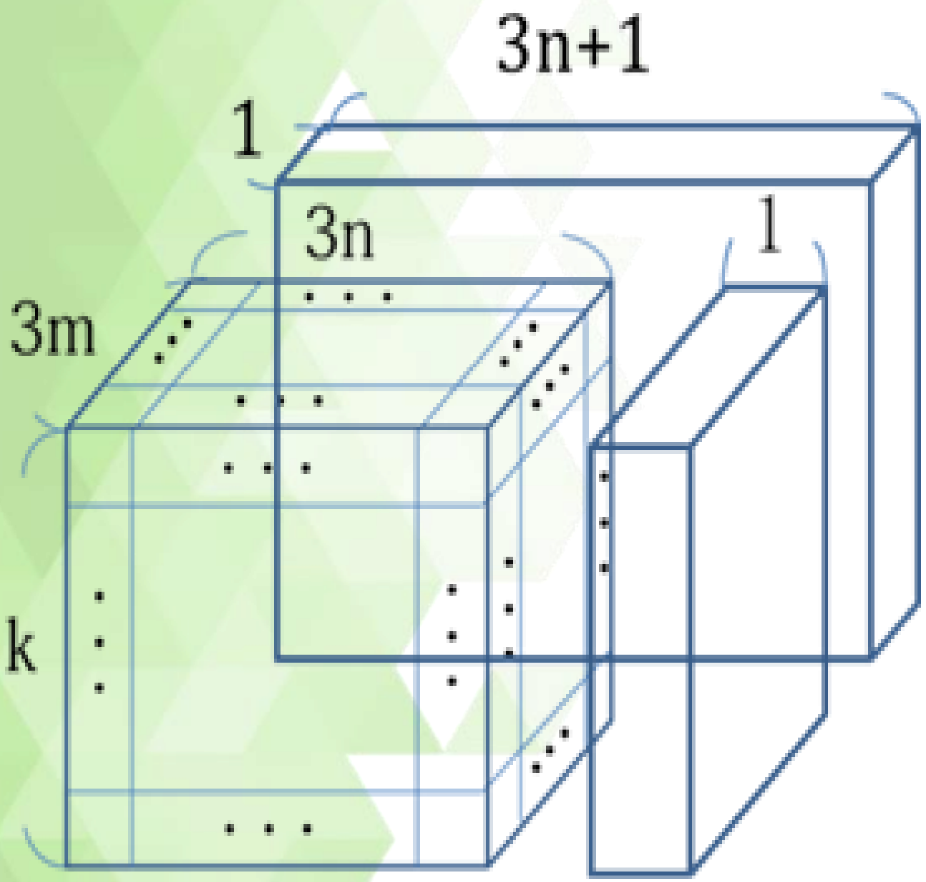
$$(3m+1,\ 3n+1,\ k)$$

$(3m+1, 3n+1, k)$

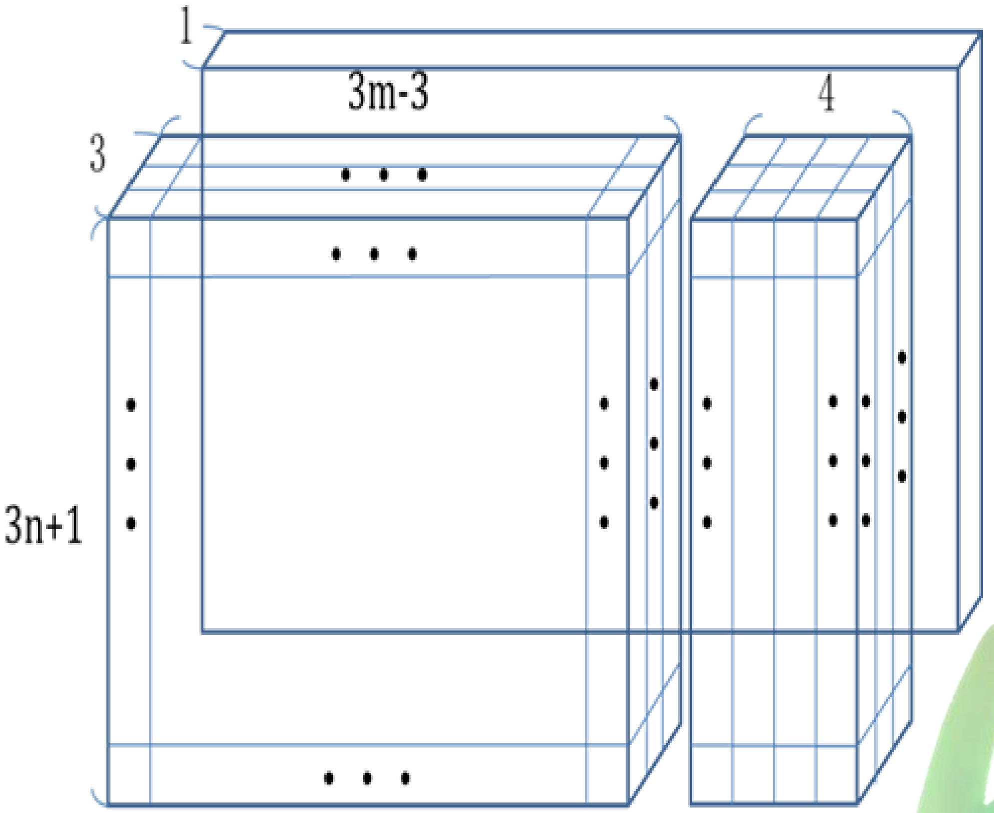
1. $k \geq 5$
   - ✓ 將方格塔分為$(3m, 1, k)$、$(1, 3n+1, k)$、$(3m, 3n, k)$
2. $k=4$
   - ✓ 將方格塔分為$(1, 3m+1, 3n+1)$、$(3, 3m-3, 3n+1)$、$(3, 4, 3n+1)$

Εύρηκα

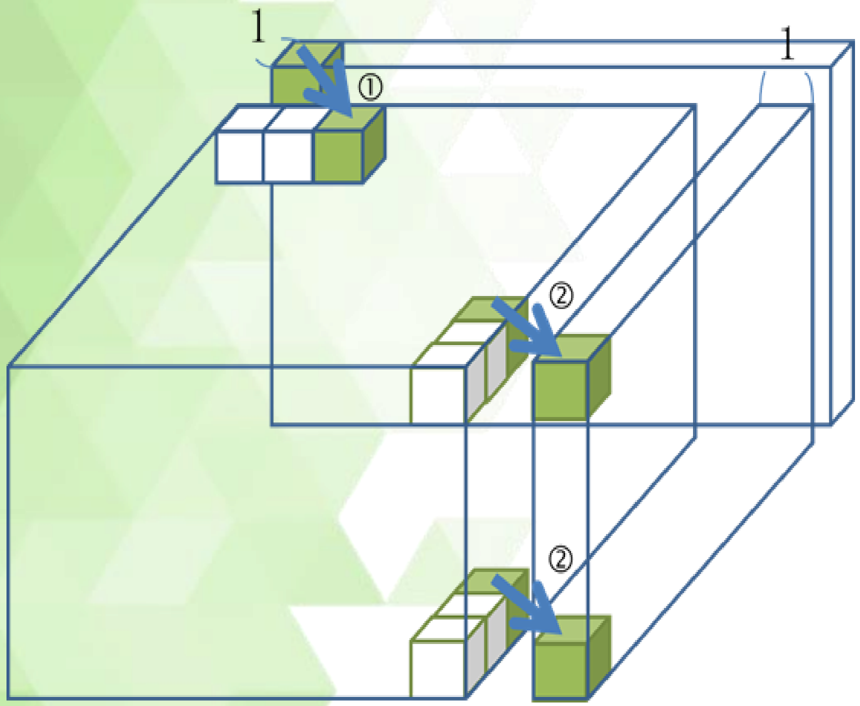
- k≥5



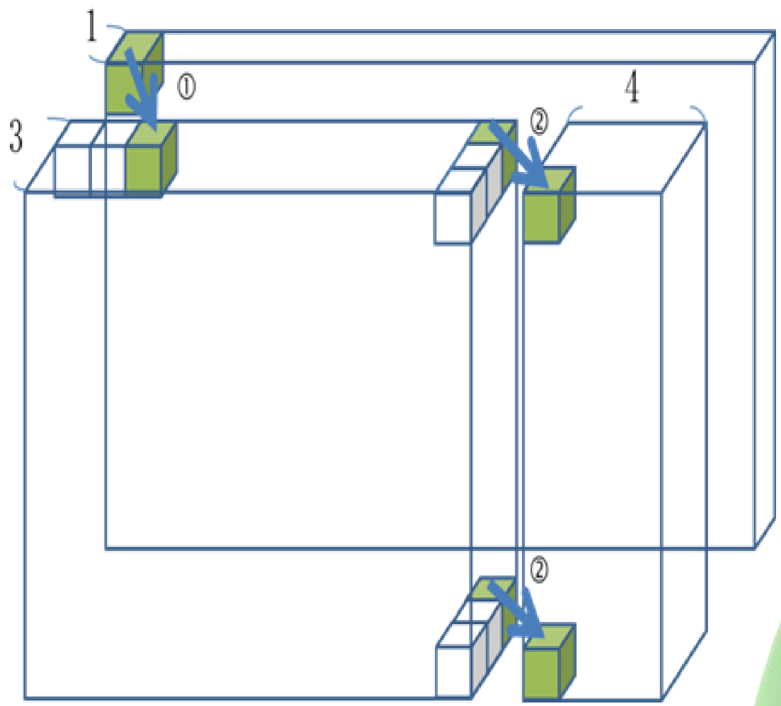
- k=4



- k≥5



- k=4



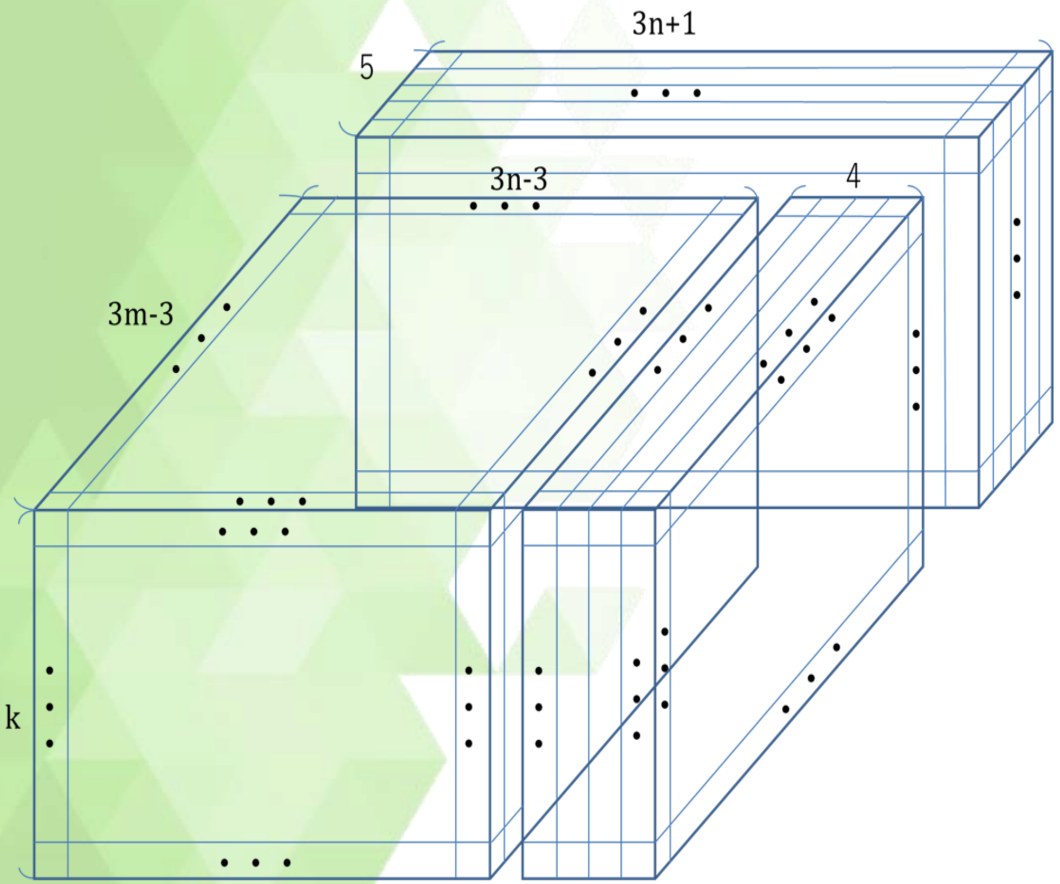
$(3m+2, 3n+1, k)$
&
$(3m+2, 3n+2, k)$

(3m+2, 3n+1, k) & (3m+2, 3n+2, k)

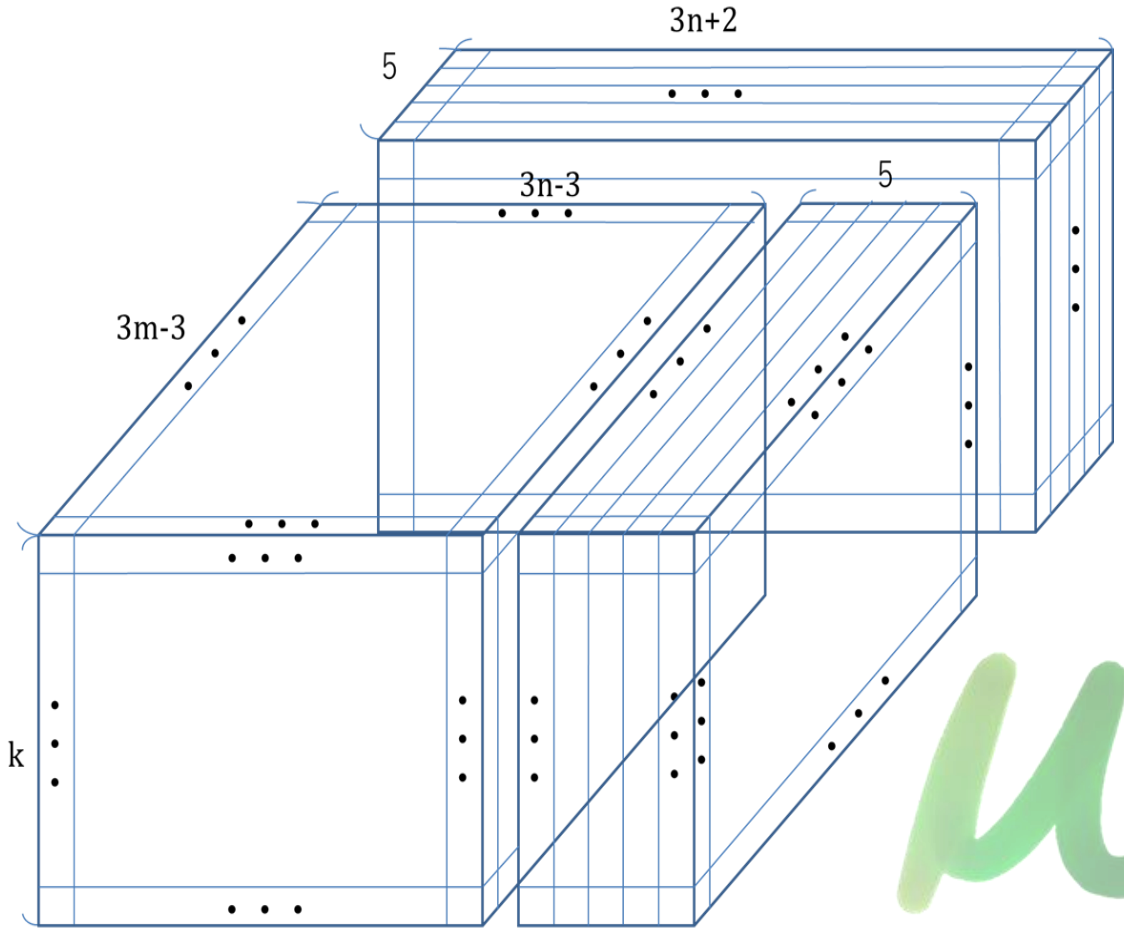
- 此時$k \geq 4$

1. (3m+2, 3n+1, k):
   - ✓ 將方格塔分為(3m-3, 4, k)、(3m-3, 3n-3, k)、(5, 3n+1, k)
2. (3m+2, 3n+2, k):
   - ✓ 將方格塔分為(3m-3, 5, k)、(3m-3, 3n-3, k)、(5, 3n+2, k)

(3m+2, 3n+1, k)

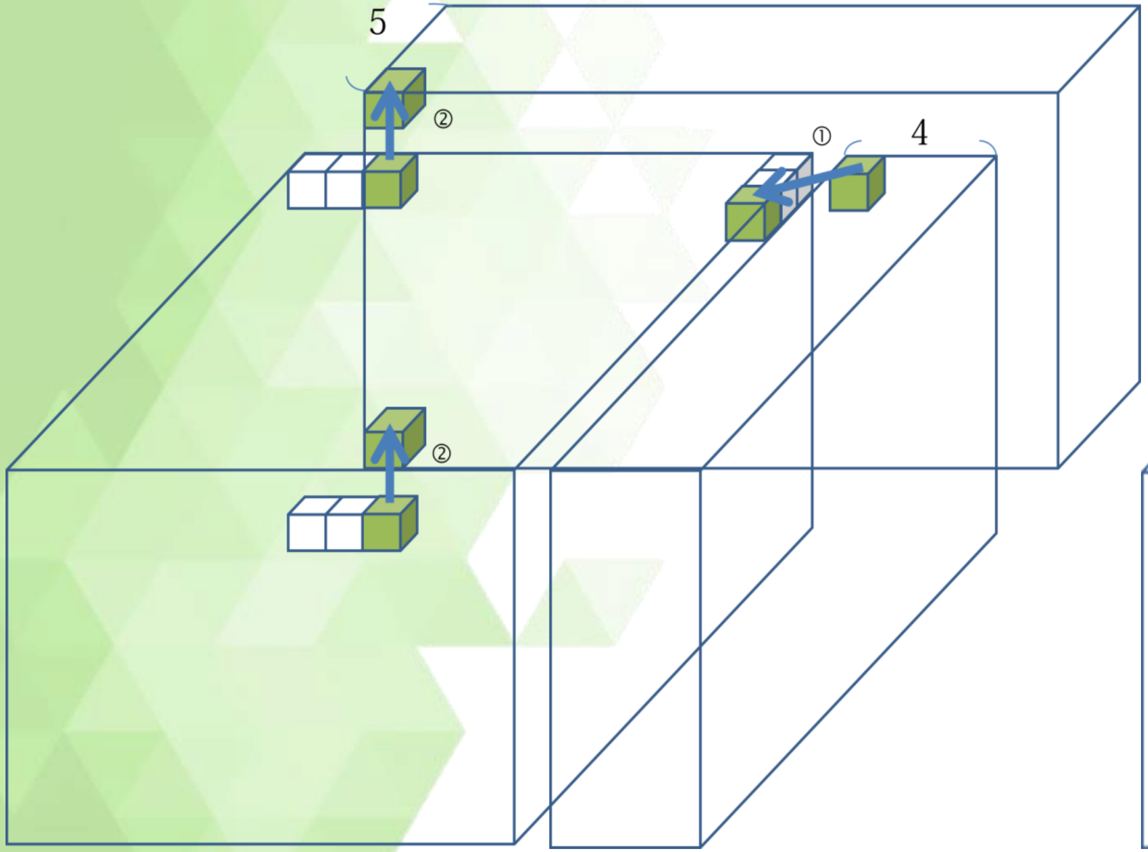


(3m+2, 3n+2, k)

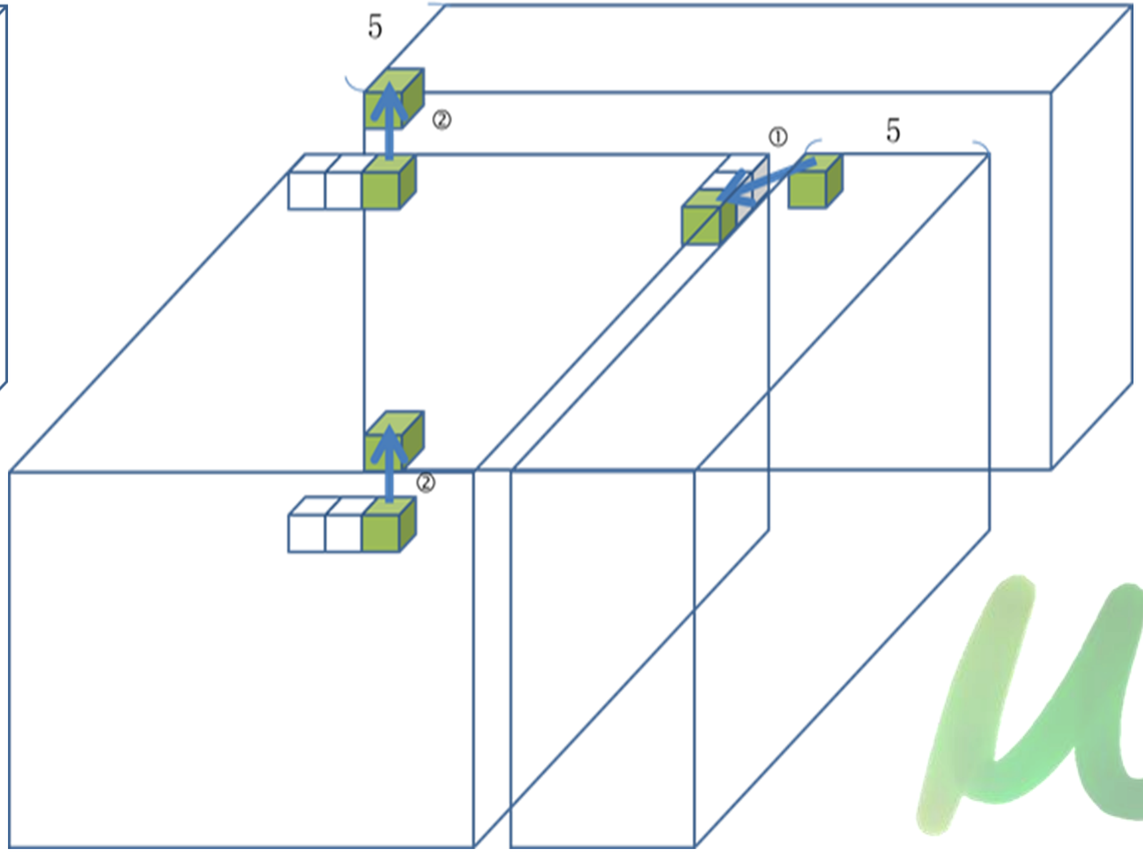


Εύρηκα

(3m+2, 3n+1, k)



(3m+2, 3n+2, k)



研究結論

研究結論

- 綜合上述引理，我們得到以下定理:
- **定理:**

　　任意方格塔在三邊長 (m, n, k) 均≧3且不全為3的情況下有騎士巡邏路徑。

未來展望

未來展望

- 高度為2的方格塔中騎士巡邏路徑之存在性
- 同一條件下哈密頓迴圈之存在性
- 更改行走步數數值大小
- 行走方式拓展為三維向量
- 計算(m, n, k) 方格塔的所有哈密頓路徑數

一路走來感謝有您~

感謝

- 指導老師:姚志鴻老師、施翔仁老師
- 一起在數專奮鬥的同學們
- 數資班的同學們
- 父母與親友們
- 一路相挺的專題好夥伴
- 臺下與攝影機前的所有帥哥美女觀眾們

謝謝大家！