Εύρηκα

數獨中
多重解集合之性質探究

22507沈泓毅
22527　謝翔
指導老師：姚志鴻
施翔仁

目錄

一. 名詞解釋
二. 研究目的
三. 研究結果
四. 未來展望

名詞解釋

盤面

- 盤面：一個符合數獨限制且有解的9*9方陣。
- 完整盤面：一無空格的盤面。

多重解集合(unavoidable set)

在一完整盤面中，若將**若干格挖空後**可**導出不只一解**，且每一格在不同解時之可能值大於1，則這些格子的集合被稱為多重解集合。

2	1	8	3	7	9	4	5	6
7	4	5	8	2	6	3	1	9
9	3	6	1	4	5	8	7	2
4	8	3	9	1	2	7	6	5
1	7	9	5	6	3	2	8	4
5	6	2	7	8	4	9	3	1
3	2	1	6	9	7	5	4	8
6	5	4	2	3	8	1	9	7
8	9	7	4	5	1	6	2	3

一格集合

在一完整盤面中，將某多重解集合挖空後，**填入任一格**後都可**導出唯一解**，則此多重解集合又可稱為一格集合。

2	1	8	3	7	9	4	5	6
7	4	5	8	2	6	3	1	9
9	3	6	1	4	5	8	7	2
4	8	3	9	1	2	7	6	5
1	7	9	5	6	3	2	8	4
5	6	2	7	8	4	9	3	1
3	2	1	6	9	7	5	4	8
6	5	4	2	3	8	1	9	7
8	9	7	4	5	1	6	2	3

B.D.(Buddy Digit)

在一多重解集合中，對於某一在此集合內的格子A，若能在**格子A**的**所在宮、行、列**都找到**某數值的格子B_n**在**該多重解集合內**，則格子B_n被稱為格子A的B.D.。

2	1	8	3	7	9	4	5	6
7	4	5	8	2	6	3	1	9
9	3	6	1	4	5	8	7	2
4	8	3	9	1	2	7	6	5
1	7	9	5	6	3	2	8	4
5	6	2	7	8	4	9	3	1
3	2	1	6	9	7	5	4	8
6	5	4	2	3	8	1	9	7
8	9	7	4	5	1	6	2	3

B.D.(Buddy Digit)

- B.D.值：對某格A而言，若B_n表A之B.D.，則**B_n的數值**被稱為A的B.D.值。
- 一組逆B.D.：對某格 A 而言若**A表B_n之B.D.**且**每一個B_n在同一行、列、宮中唯一**，則稱為 A 有一組逆B.D.

2	1	8	3	7	9	4	5	6
7	4	5	8	2	6	3	1	9
9	3	6	1	4	5	8	7	2
4	8	3	9	1	2	7	6	5
1	7	9	5	6	3	2	8	4
5	6	2	7	8	4	9	3	1
3	2	1	6	9	7	5	4	8
6	5	4	2	3	8	1	9	7
8	9	7	4	5	1	6	2	3

直觀可能性

	1	8	3	7	9	4	5	
7								9
9			1	4	5			2
4		3		1		7		5
1		9	5		3	2		4
5		2		8		9		1
3			6	9	7			8
6								7
	9	7	4	5	1	6	2	

若在一盤面中，某空格A的**同一行、列、宮**都**沒有填入某數值B的格子**，則數值B可能為空格A的其中一個直觀可能性。

直觀可能性：~~1~~,2,3,4,5,6,~~7,8,9~~

直觀可能性

	1	8	3	7	9	4	5	
7								9
9			1	4	5			2
4		3		1		7		5
1		9	5		3	2		4
5		2		8		9		1
3			6	9	7			8
6								7
	9	7	4	5	1	6	2	

直觀可能合理性：若在一盤面中存在**一空格沒有直觀可能性**，則此盤面的直觀可能不合理。

直觀可能性

	1	8	3	7	9	4	5	
7								9
9			1	4	5			2
4		3		1		7		5
1		9	5		3	2		4
5		2		8		9		1
3			6	9	7			8
6								7
	9	7	4	5	1	6	2	

直觀可能性排擠：若**有n格空格內共有n種直觀可能性之數值**，則其他格子若填入n種直觀可能性數值之一，會導致**直觀可能性不合理**。因此在討論直觀可能性時必須特別注意不合適的直觀可能性。

Εύρηκα

研究目的

研究目的

- 修改並驗證關於**一格集合**的假設
- 探討不同解數之**多重解集合**的性質

研究結果

假設1

一盤面中格子集合為

- 在集合中每一個格 逆B.D.。
- 若將集合內之格子 之B.D.們之連線視為一邊，則這些點

2	1	8	3	7	9	4	5	6
7	4	5	8	2	6	3	1	9
9	3	6	1	4	5	8	7	2
4	8	3	9	1	2	7	6	5
1	7	9	5	6	3	2	8	4
5	6	2	7	8	4	9	3	1
3	2	1	6	9	7	5	4	8
6	5	4	2	3	8	1	9	7
8	9	7	4	5	1	6	2	3

引理1-1

一完成盤面挖空**一格集合**後有**唯二解**

2	1	8	3	9	7	4	5	6
7	4	5	8	2	6	3	1	9
9	3	6	1	4	5	8	7	2
5	6	3	9	1	2	7	8	4
4	7	9	5	8	3	2	6	1
1	8	2	7	6	4	9	3	5
3	2	1	6	7	9	5	4	8
6	5	4	2	3	8	1	9	7
8	9	7	4	5	1	6	2	3

引理1-2

在完整盤面中挖空多重解集合，任選一空格皆**可填原值和 B.D. 之值**。

2	1 4 5	8	3	7	9	1 4 5	1 4 5	6
7	1 4 5	1 4 5	8	2	6	3	1 4 5	9
9	3	6	1	4	5	8	7	2
4	8	3	9	1	2	7	6	5
1	7	9	5	6	3	2	8	4
5	6	2	7	8	4	9	3	1
3	2	1 4 5	6	9	7	1 4 5	1 4 5	8
6	1 4 5	1 4 5	2	3	8	1 4 5	9	7
8	9	7	4	5	1	6	2	3

定理1

一盤面中格子集合為一**一格集合若且唯若**：

- 在集合中每一個格子都具備**一個B.D.值和一組逆B.D.**。
- 若將集合內之格子視為一點，將每一格和該格之B.D.們之連線視為一邊，則這些點和邊的集合為一**連通圖**。

定理1

若
條件符合

1-2：
必可填入

B.D.唯一

必為
一格集合

定理1

若為
一格集合

1-2：
原值+B.D.

1-1：
二直觀可能

條件符合

定理1

一盤面中格子集合為一**一格集合**若且唯若：

- 在集合中每一個格子都具備**一個B.D.值和一組逆B.D.**。
- 若將集合內之格子視為一點，將每一格和該格之B.D.們之連線視為一邊，則這些點和邊的集合為一**連通圖**。

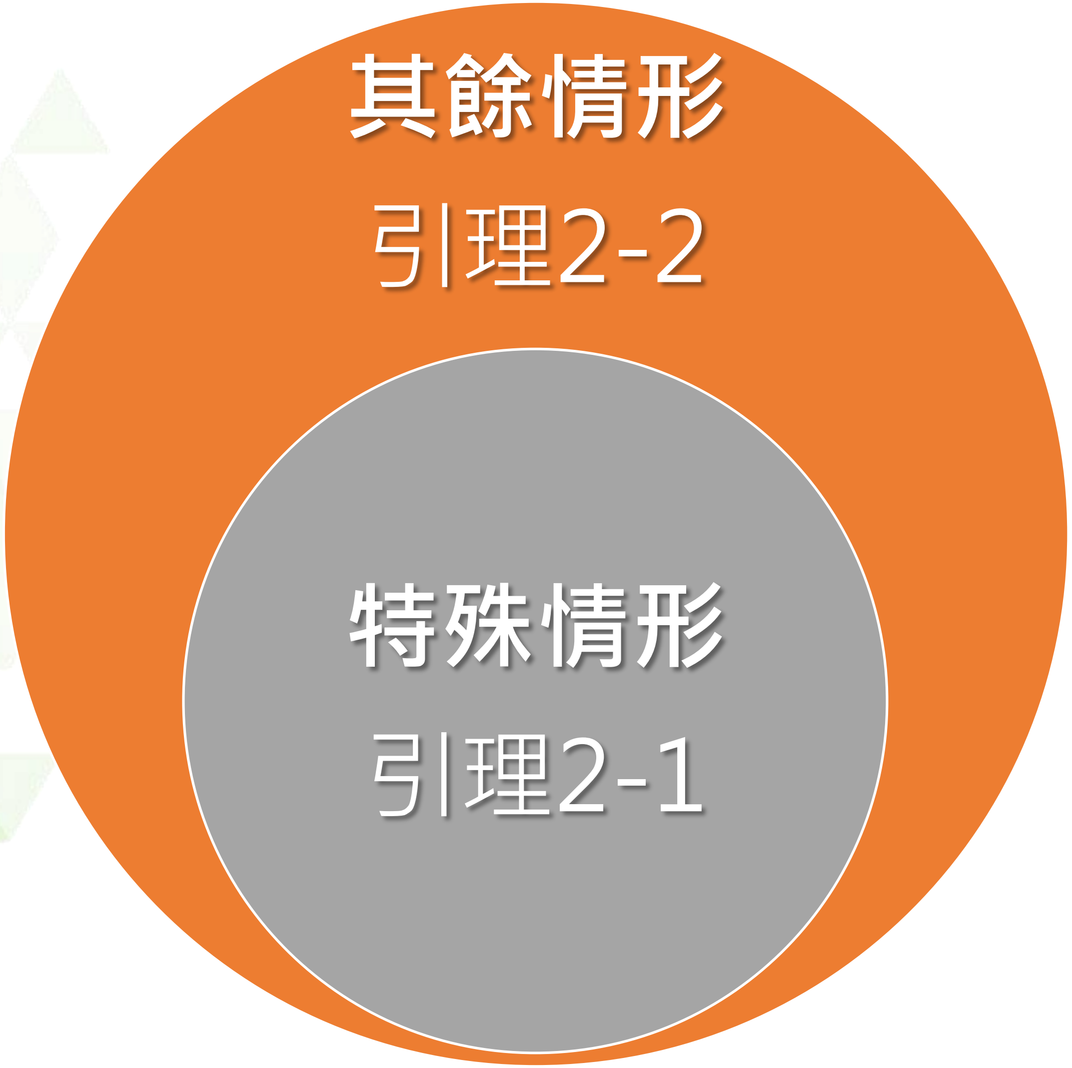
假設2

147	2	3	147	5	6	147	8	9
147	5	6	147	8	9	147	2	3
147	8	9	147	2	3	147	5	6

2	145	8	145	145	6
7	145	145	3	145	9
9	3	6	8	7	2
3	2	145	145	145	8
6	145	145	145	9	7
8	9	7	6	2	3

若一完整盤面挖空多重解集合所生的盤面中，每一個空格都有**三個直觀可能性以上**，則此多重解集合必有**12解以上**。

假設2



引理2-1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6

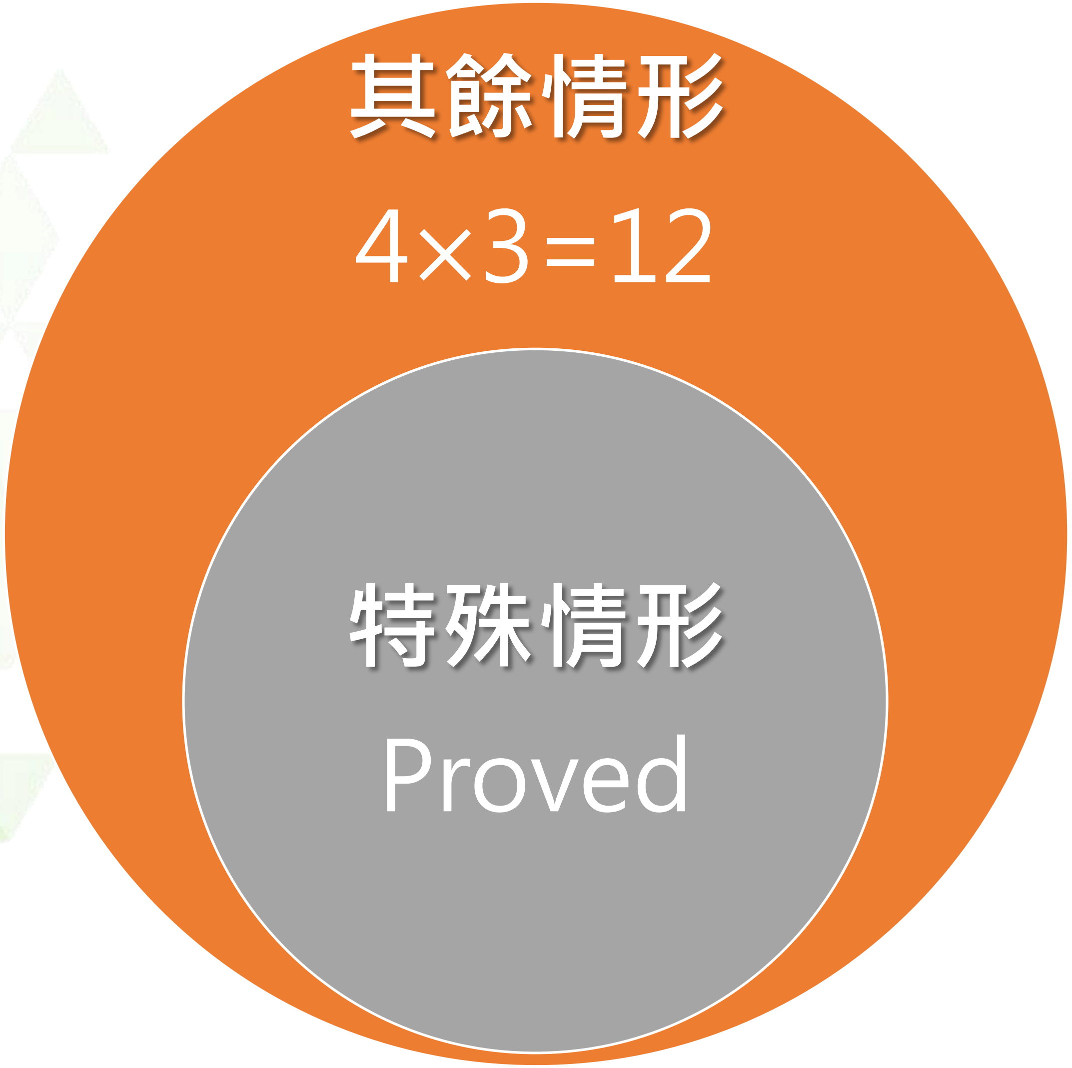
2	1	8	4	5	6
7	4	5	3	1	9
9	3	6	8	7	2
3	2	1	5	4	8
6	5	4	1	9	7
8	9	7	6	2	3

若一完整盤面挖空多重解集合所生的盤面中，每一個空格都有三個直觀可能性，且**每宮被挖掉的格子皆具同三個數值**，則此多重解集合必有**12解以上**。

引理2-2

若一個完整盤面挖空符合定理條件的多重解集合後所得到的解中，**不存在**一解中多重解集合內含**符合引理2-1**敘述的多重解集合，則完整盤面挖空符合定理條件的集合後，必定**存在一格有四種直觀可能性以上**。

定理2



定理2

147	2	3	147	5	6	147	8	9
147	5	6	147	8	9	147	2	3
147	8	9	147	2	3	147	5	6

2	145	8	145	145	6
7	145	145	3	145	9
9	3	6	8	7	2
3	2	145	145	145	8
6	145	145	145	9	7
8	9	7	6	2	3

若一完整盤面挖空多重解集合所生的盤面中，每一個空格都有**三個直觀可能性以上**，則此多重解集合必有**12解以上**。

討論

- 定理1：**一格集合**的結構
- 定理2：具備**特殊格子**之多重解集合

未來展望

末來展望

- 延展一格集合、多重解集合等的**性質**
  – 討論一格集合格子數的範圍
- 藉由以上性質**推論**出數獨許多需仰賴程式才能推導出的定理

致謝

- 指導老師
- 數專的好夥伴
- 爸爸媽媽
- 所有提供意見的人
- 在場的你/妳

Εύρηκα

謝謝大家