Εύρηκα

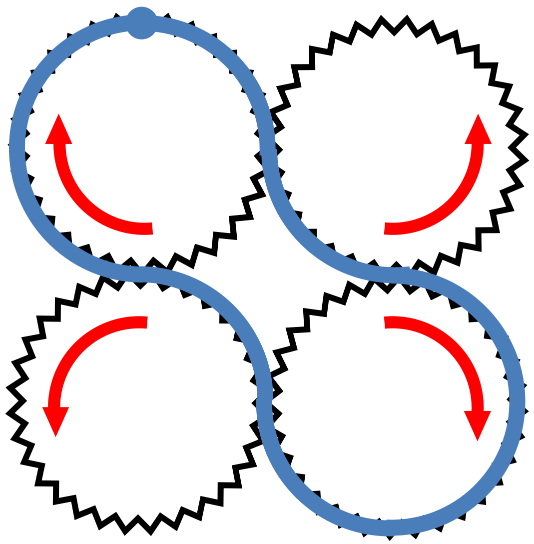
探討封閉齒輪組中的迴圈數量

蘇宏祐
鍾昊哲
姚志鴻老師
施翔仁老師

目錄

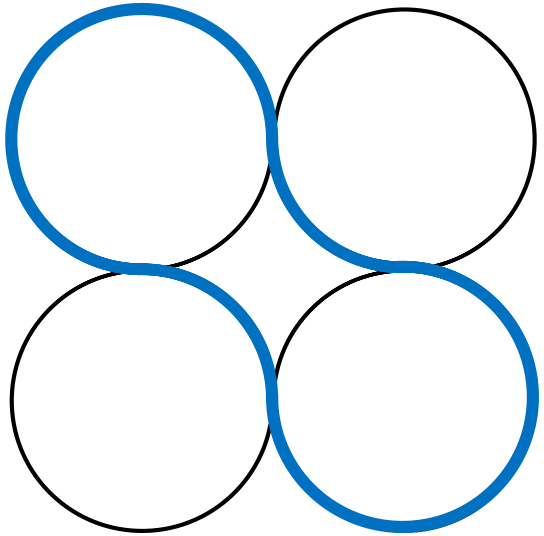
定義

- 將齒輪矩形排列，相鄰的齒輪轉動方向皆相反，今有一黏性物體沿轉動方向運動，碰到另一齒輪則轉而附著於該齒輪，並以圖中的路徑移動。



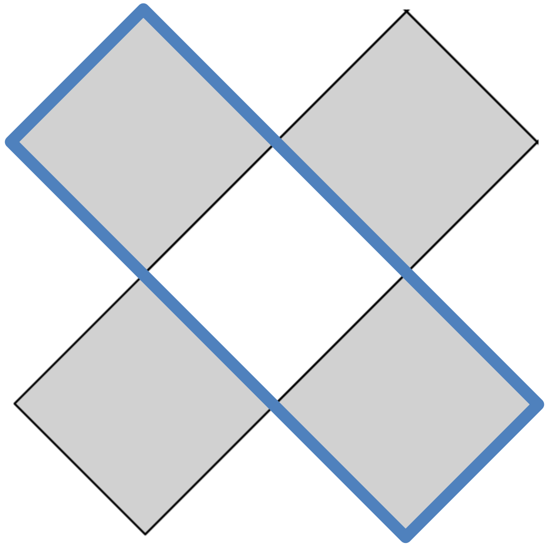
定義

- 若物體使用上述規則移動、進而形成一個封閉的路線，則我們稱之為「**迴圈**」，如圖中的藍色線段。



定義

- 我們將矩形排列簡化為下圖，則我們的迴圈路徑可以化彎為直。

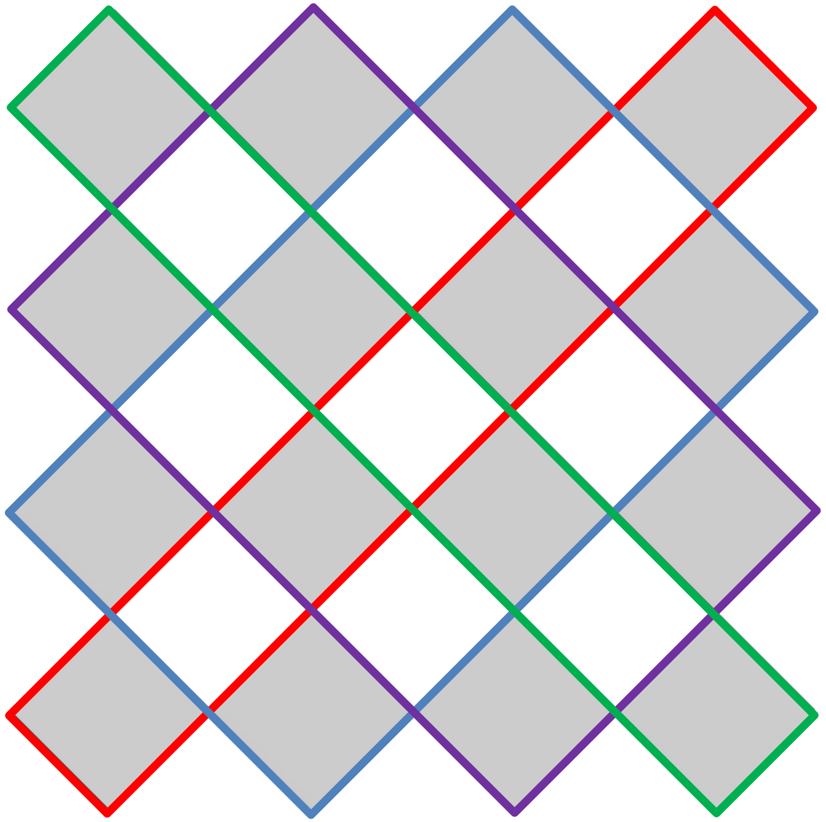


研究目的

- 找出一個能夠快速看出其擁有迴圈數量的方法(或是能夠紀錄演算過程的方法)，並從齒輪組中找出迴圈總數，再觀察從齒輪組中去除$n \times n$排列的齒輪，其減少迴圈的數量中的規律。

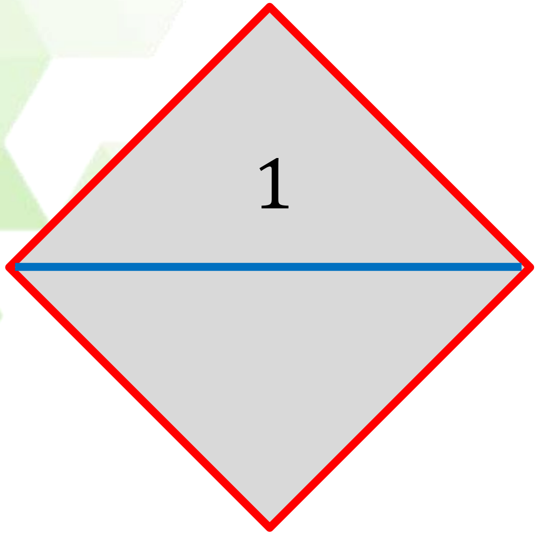
齒輪數量$n \times n$

- 迴圈數量為n

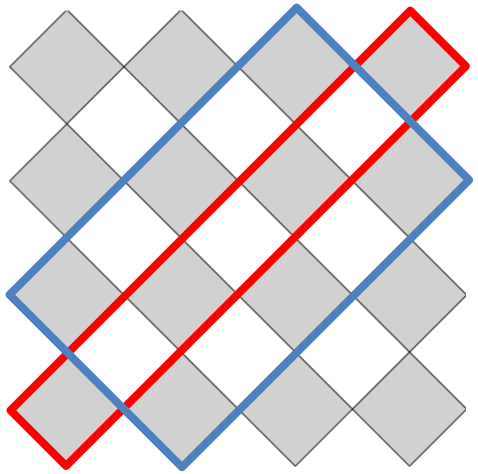


齒輪數量$n \times n$

- 齒輪數量為n^2，令齒輪直徑為1，圖十二中藍色線段與紅色線段周長相同，因此每個迴圈會經過相同的路徑長（周長＝邊長$\frac{\sqrt{2}}{2} \times 4n = 2\sqrt{2}n$，如圖），而總路徑長為一個齒輪周長（$4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$）×齒輪數量（$n^2$），故迴圈數量為$\frac{2\sqrt{2}n^2}{2\sqrt{2}n} = \mathrm{n}$。

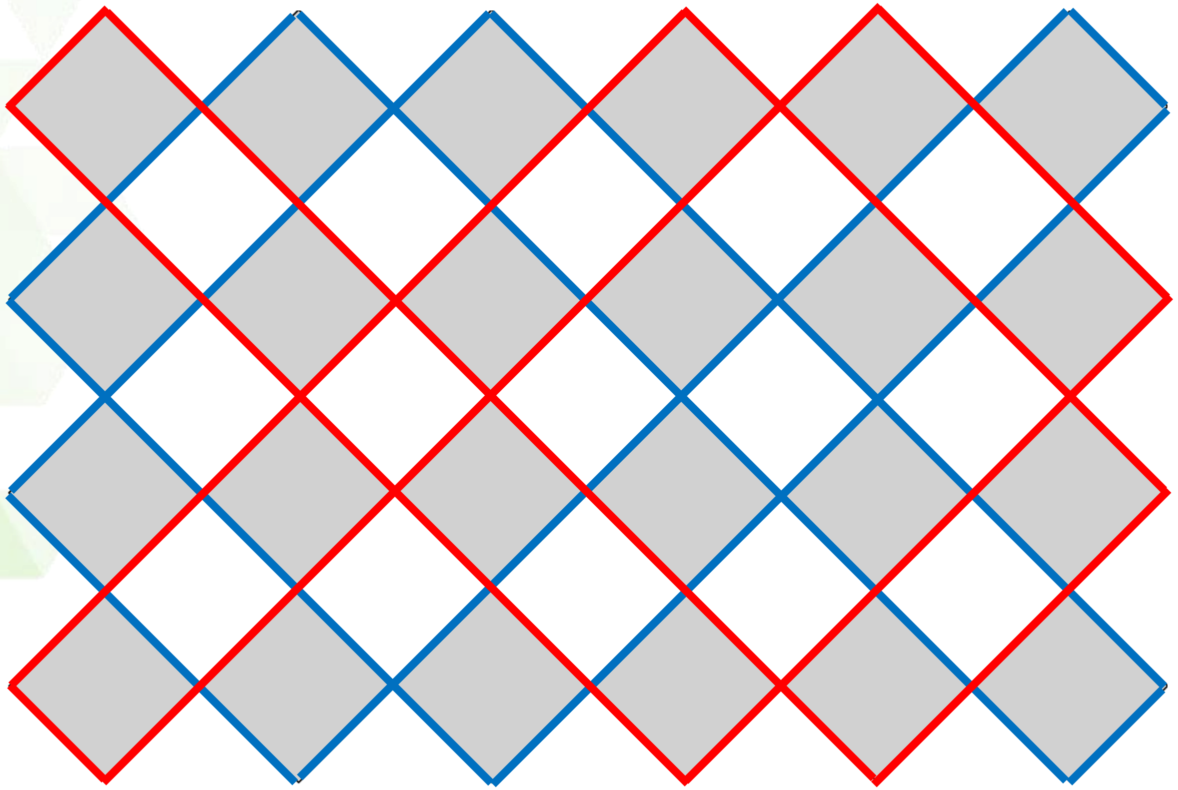


周長$2\sqrt{2}$



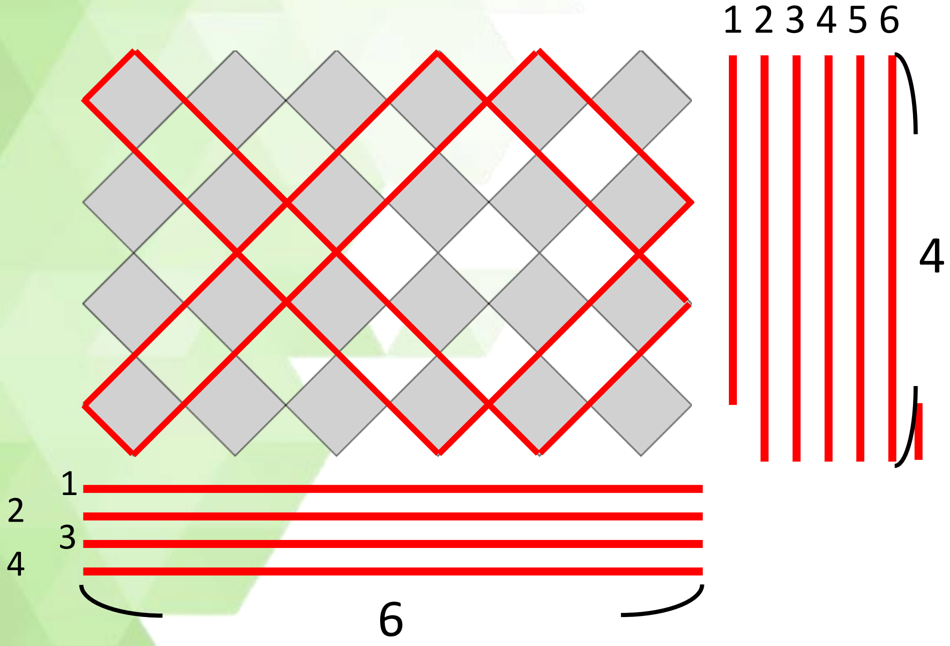
齒輪數量$n \times m$

- 迴圈數量為(n, m)



齒輪數量$n \times m$

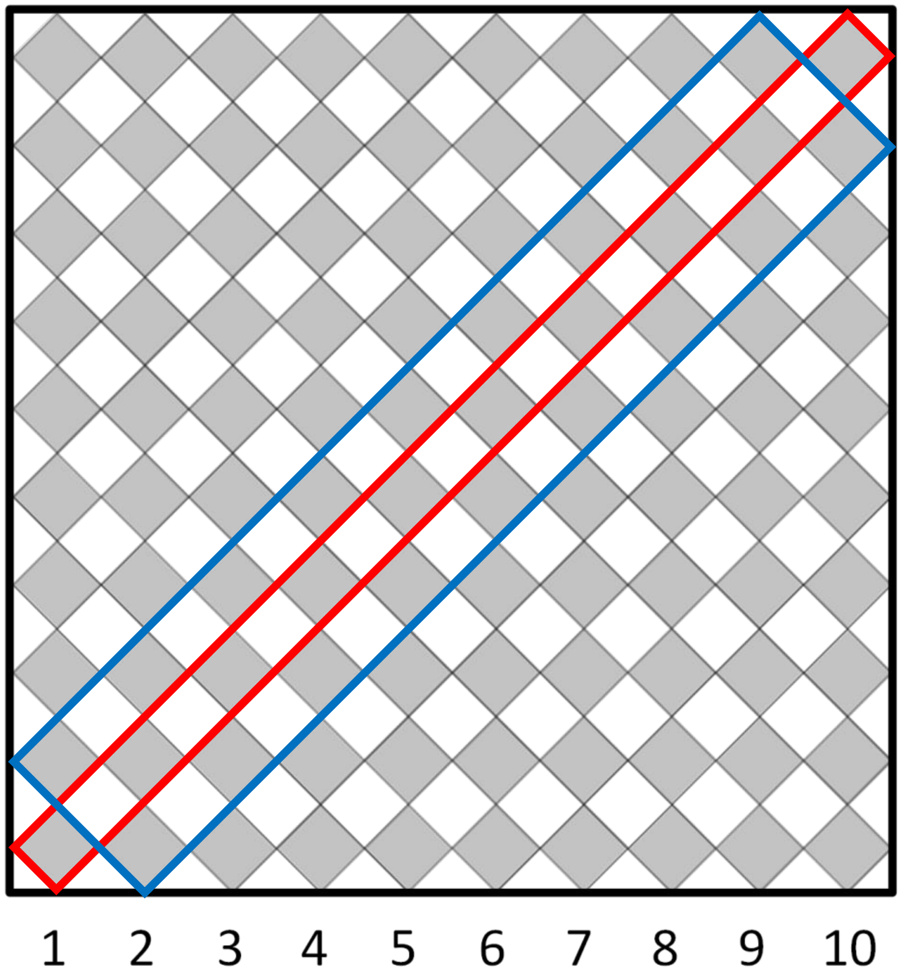
- 由於路線的水平位移和垂直位移是相同的，同時若要回到原點，水平移動的路徑長必為$2n$的倍數，垂直移動的路徑長必為$2m$的倍數，可知一個迴圈長度=$\sqrt{2} \times [2n, 2m] = 2\sqrt{2}[n, m]$，同時所有迴圈的總長度為$2\sqrt{2}nm$可知迴圈數=$\frac{2\sqrt{2}nm}{2\sqrt{2}[n,m]}$=$(n, m)$。



以左圖為例，$[2 \times 6, 2 \times 4] = 24$，故一個迴圈路徑長為$24\sqrt{2}$，而總路徑長為$48\sqrt{2}$，因此共有$(6,4) = 2$個迴圈。

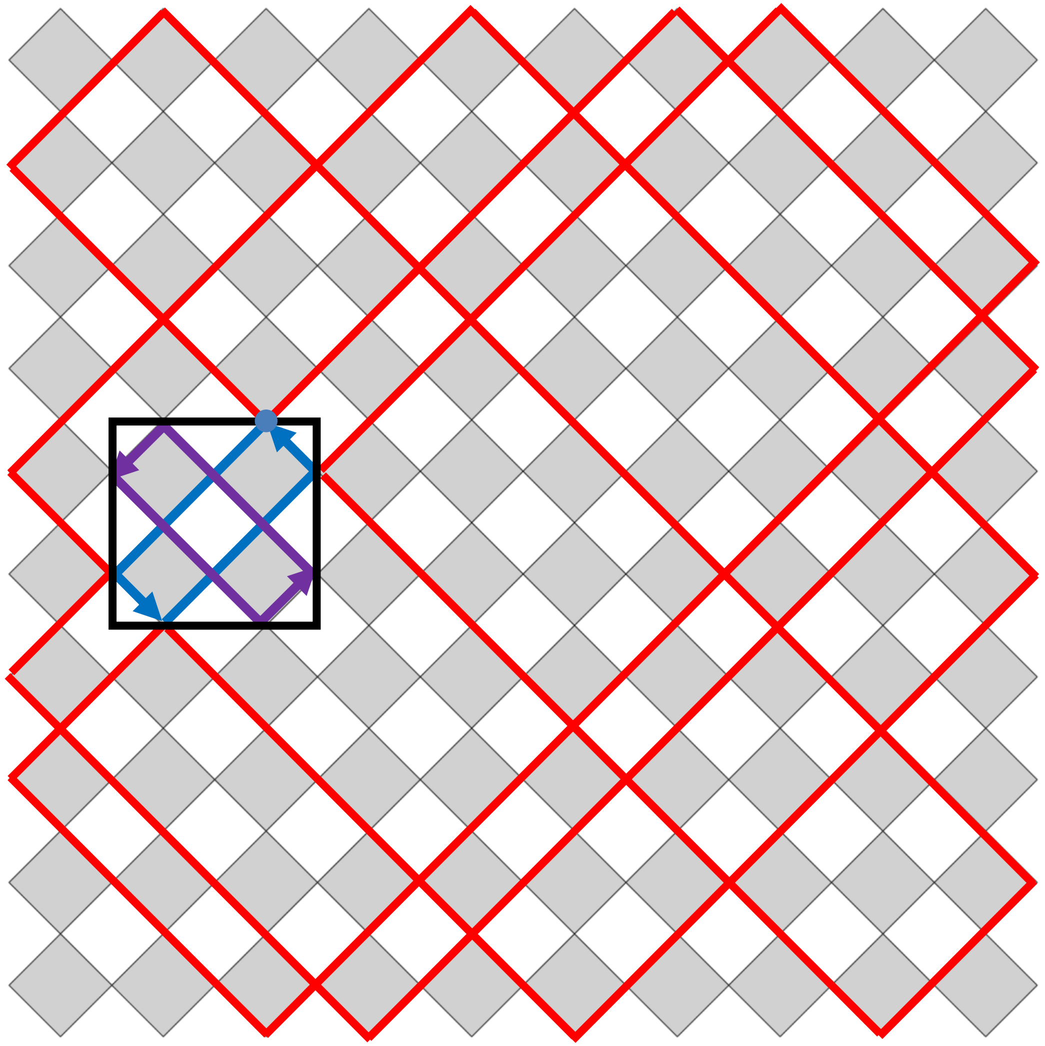
研究表示方法

- 紅色迴圈為一號迴圈
- 藍色迴圈為二號迴圈



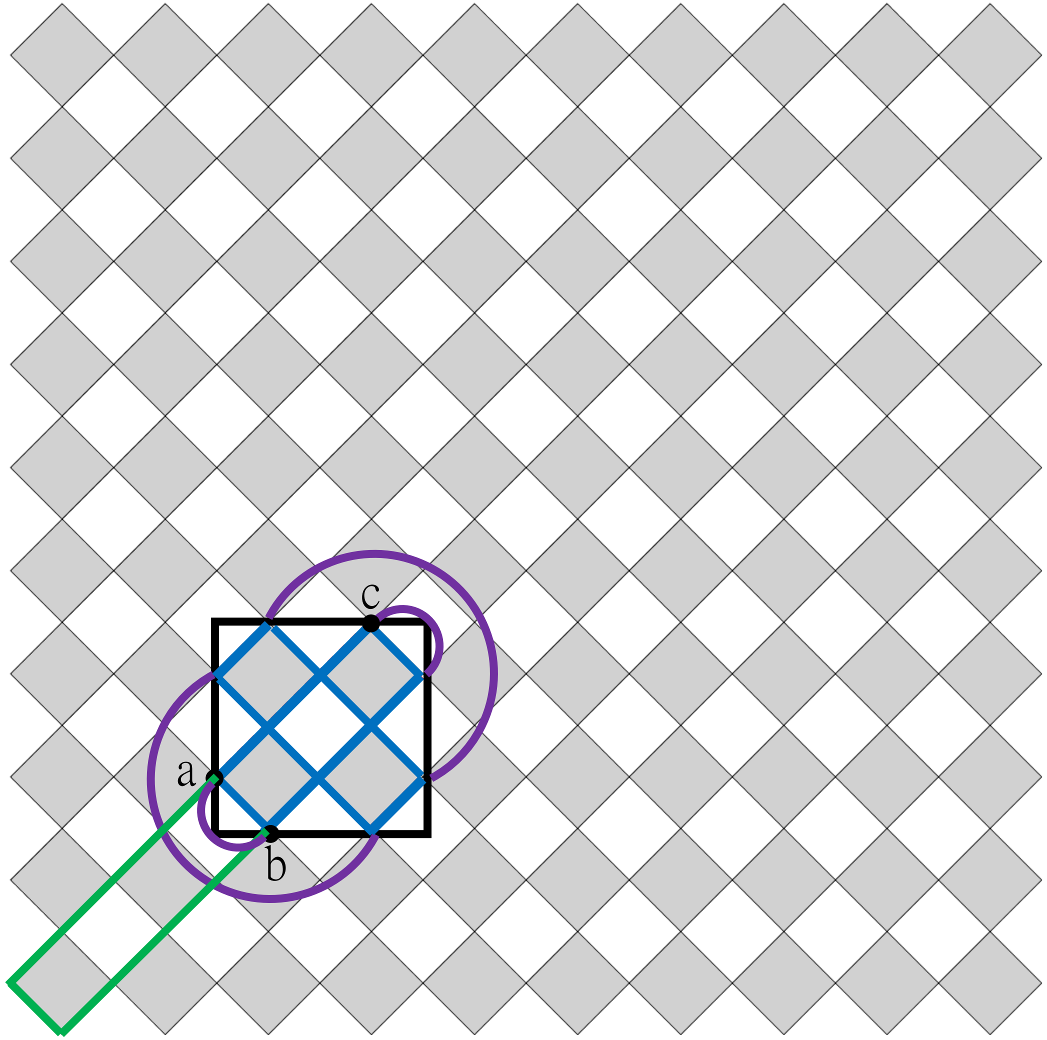
研究表示方法

- 圖中，黑色方框為挖掉的齒輪紅色路徑可以簡化成小正方形內藍色路徑，此即為一個迴圈，而紫色為另一迴圈。
- 此種表示方法的條件是任意迴圈都只碰到挖空部分一次。



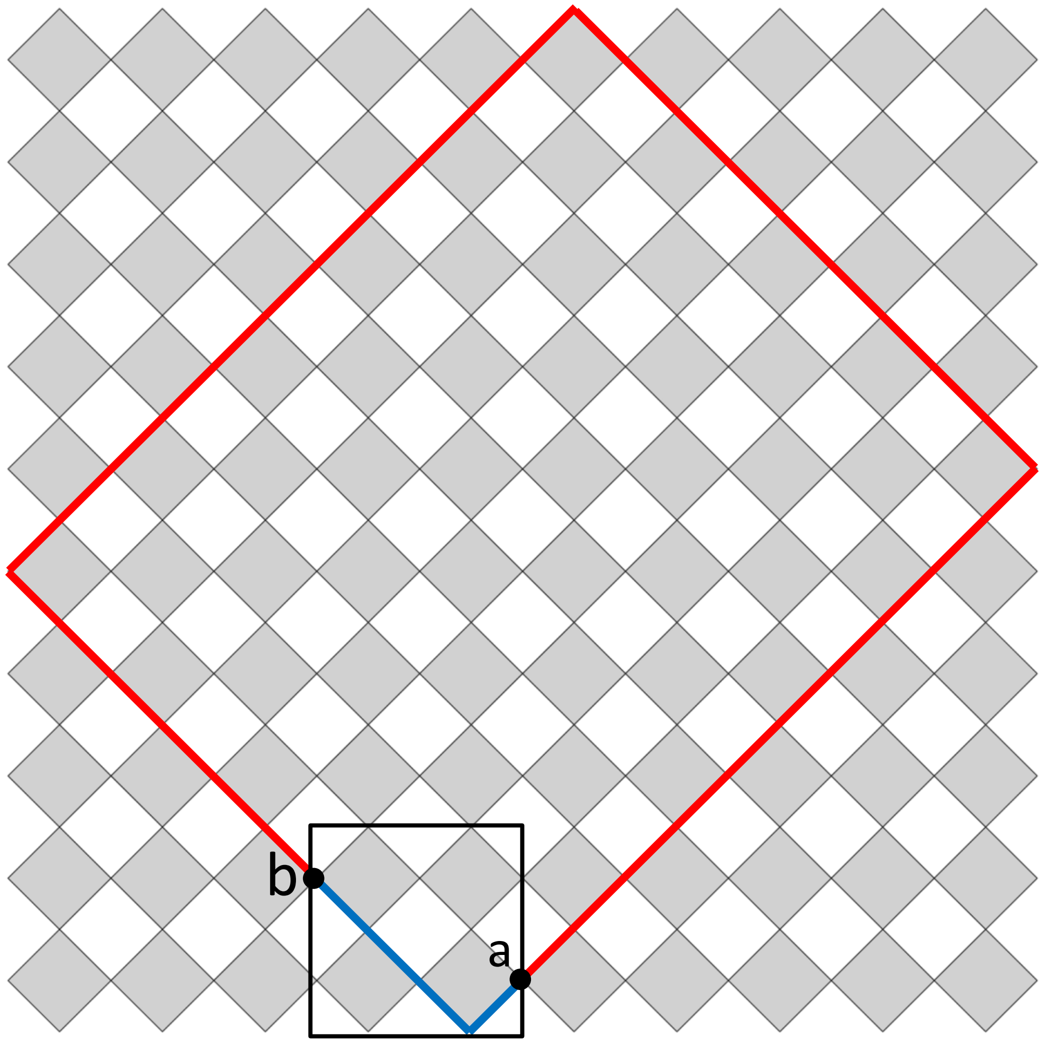
研究表示方法

- 如圖所示，依正常的情況下迴圈從a點出發會碰到c點，但因為此小正方形跟一號迴圈接觸兩次，由a點出發會走到b，因此小正方形中的ac紅色虛線須改為ab紫色曲線。以此類推，由此可見此圖形會產生四個迴圈。



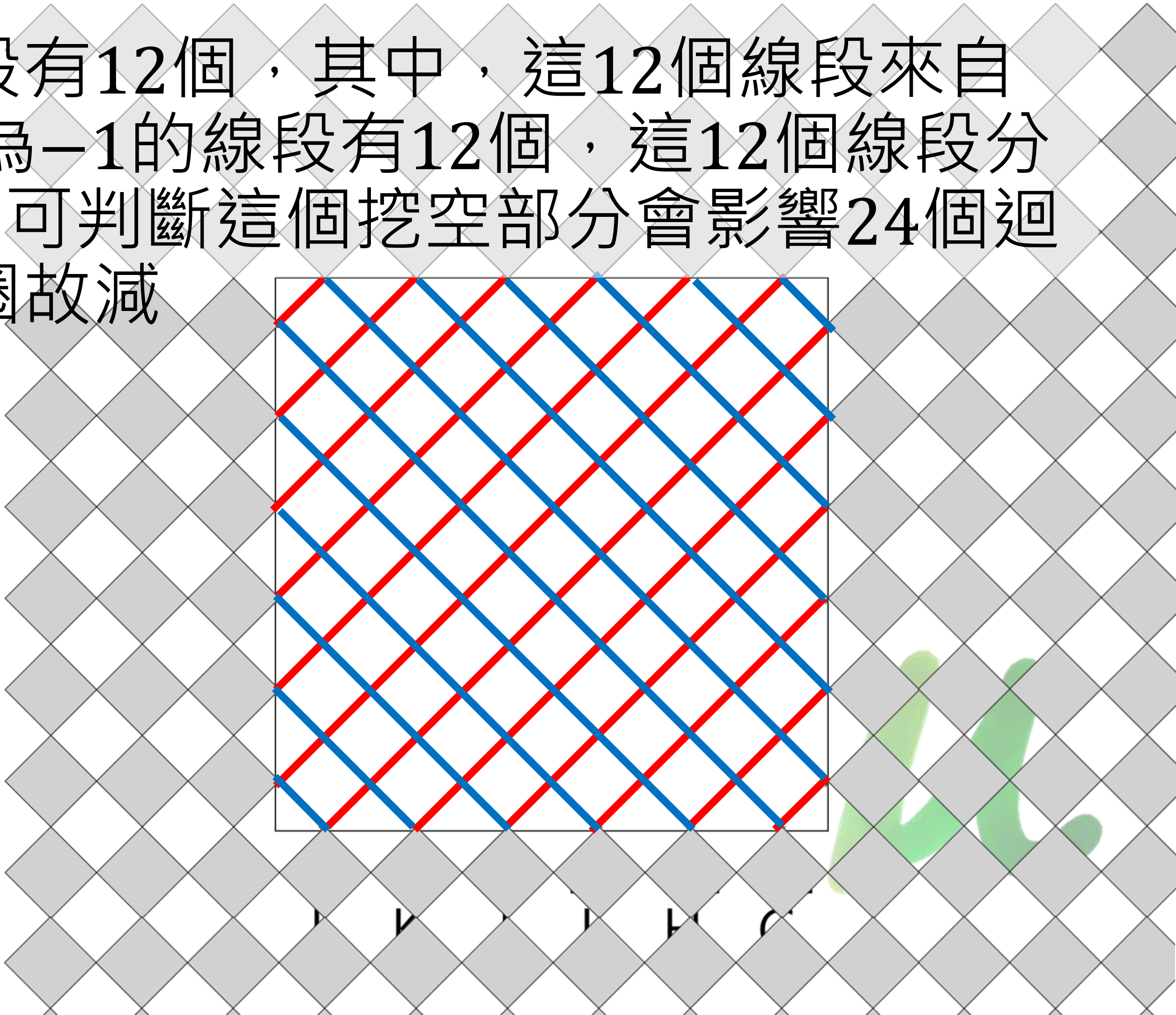
研究表示方法

- 雖然挖空部分貼在邊上，看似會有特殊情況，但由於此情況與原本的畫法並沒有牴觸(皆是從a到b)，故我們不採用特別的標記來顯示這個狀況。



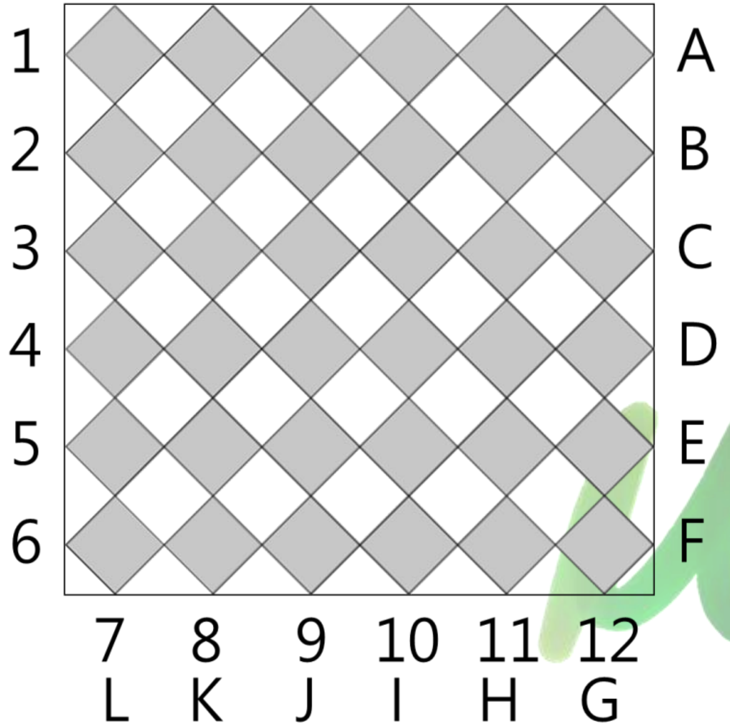
研究結果——無特殊情況

- 如圖所示，在圖中斜率為1的線段有12個，其中，這12個線段來自12個迴圈（1 ~ 12）；圖中斜率為−1的線段有12個，這12個線段分別來自12個迴圈（$A \sim L$），因此可判斷這個挖空部分會影響24個迴圈。而根據計算得知產生6個迴圈故減少$24-6=18$個迴圈。



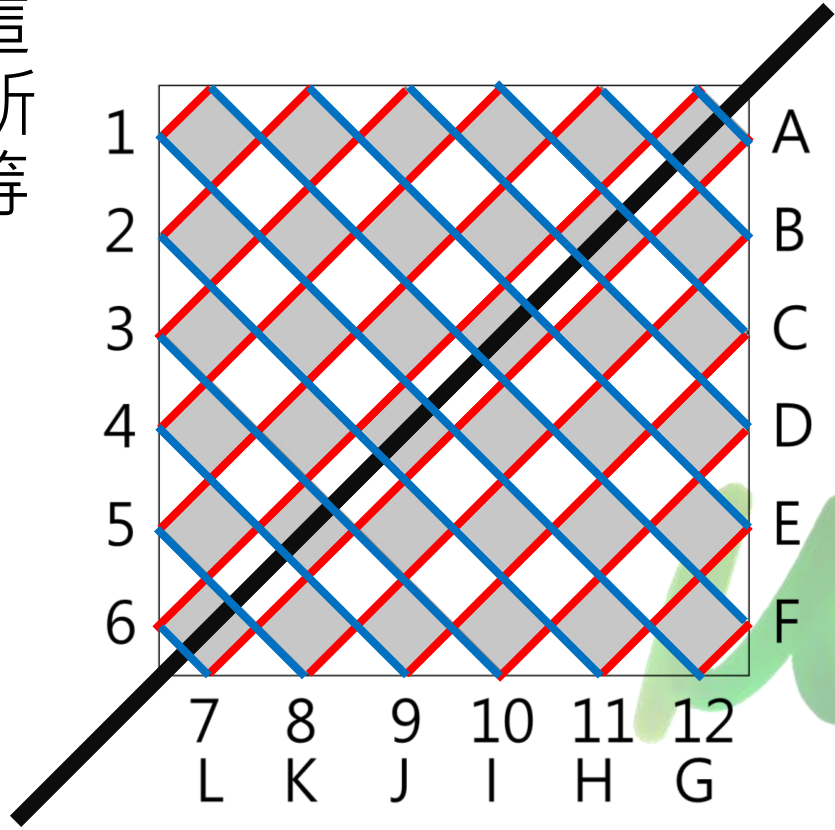
研究結果——無特殊情況

- 我們延伸到所有挖空部分，若沒有對角線和邊界的影響，會影響到$4n$個迴圈（斜率為1的和斜率為-1的線段各$2n$個），並產生n個迴圈，因此會減少$4n-n=3n$個迴圈。



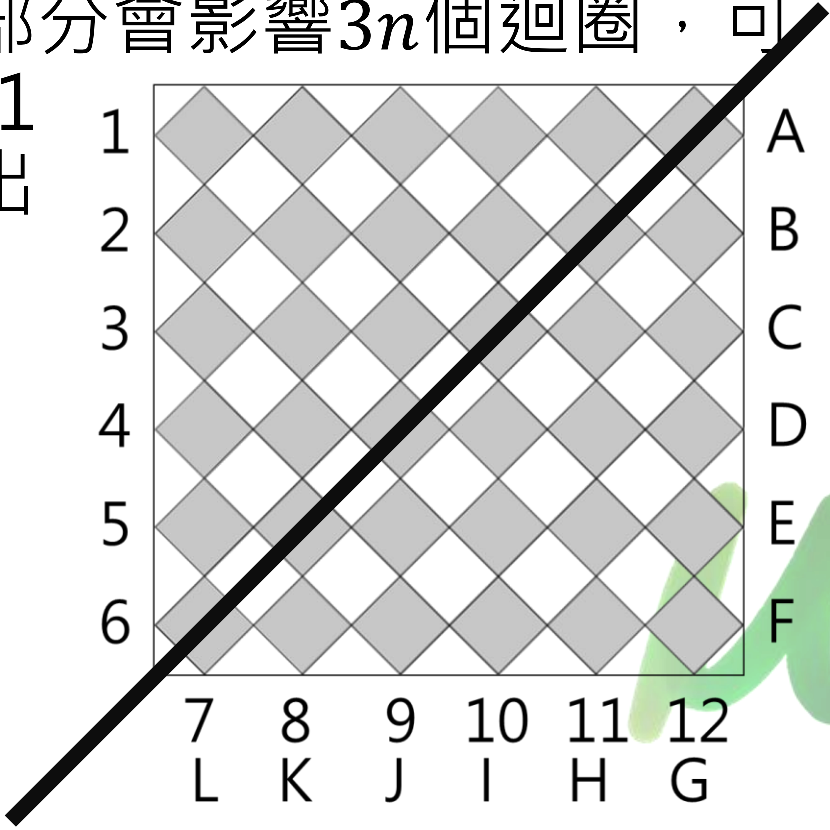
研究結果——穿過對角線

- 如圖所示，在圖中斜率為1的線段有12個，其中，這12個線段來自6個迴圈（1～6）；圖中斜率為−1的線段有12個，這12個線段分別來自12個迴圈（a～l），故可判斷這個挖空部分會影響18個迴圈。利用以前所述的詳盡表示法可知此挖空部分的路徑等同於12個斜率為−1的線，進而判斷其會製造12個迴圈，得出這挖空部分會減少6個迴圈。



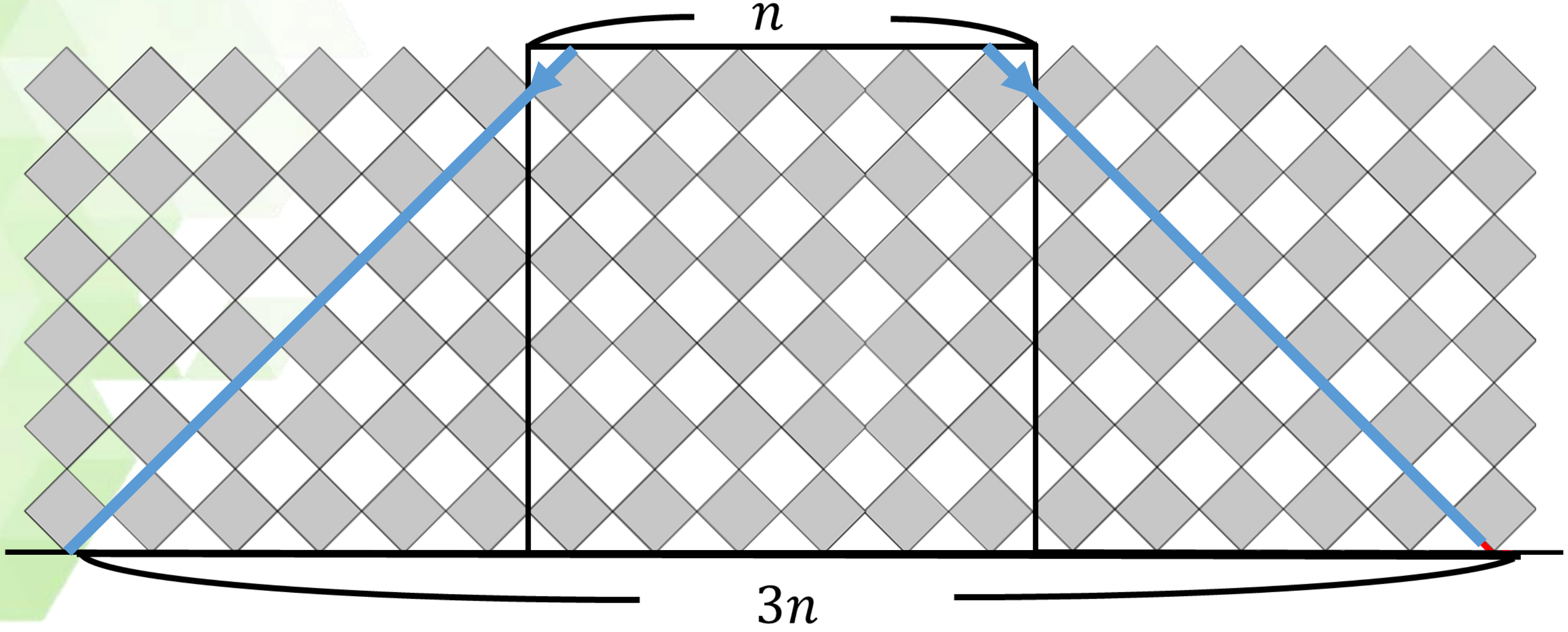
研究結果——穿過對角線

- 此時，我們延伸到所有挖空部分，斜率為1的線段有$2n$個，這$2n$個線段來自n個迴圈；圖中斜率為-1的線段有$2n$個，這$2n$個線段分別來自$2n$個迴圈，故可判斷這個挖空部分會影響$3n$個迴圈，可知此挖空部分的路徑等同於$2n$個斜率為-1的線，進而判斷其會製造$2n$個迴圈，得出這挖空部分會減少$3n-2n=n$個迴圈。



研究結果——在邊上

- 如圖，邊長為n的挖空部分，總共會影響到$3n$個迴圈，而依據上述表示法，在邊上並不會影響到產生的迴圈數，因此產生n個迴圈，故減少$3n-n=2n$個迴圈。



研究結果——彙整

- 若以$n \times n$排列齒輪，則有 n 個迴圈。
- 若以$n \times m$排列齒輪，則有(n, m)個迴圈。
- 若在大正方形中挖去小正方形：
    1. 若挖空部分中心在對角線上，則減少 n 個迴圈。
    2. 若挖空部分貼在邊上，則減少 $2n$ 個迴圈。
    3. 若挖空部分不在對角線上也不在邊上，則減少 $3n$ 個迴圈。

感謝

- 姚志鴻老師
- 一起研究的數專同學
- 數資班的同學們
- 一路支持我們父母
- 在臺下的各位

Εύρηκα

- The end