



Εύρηκα

重心求點

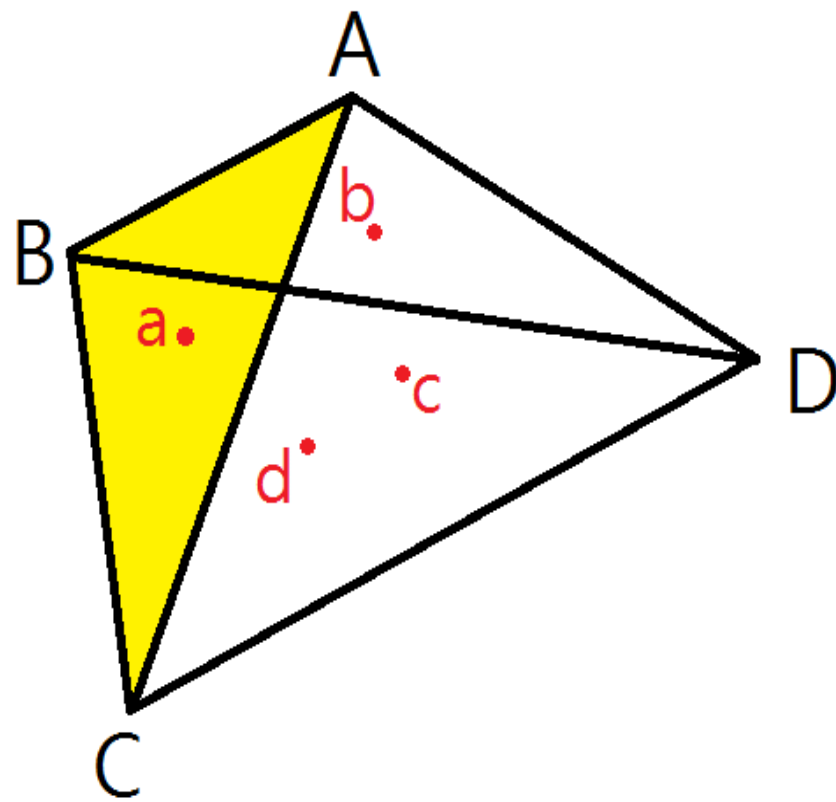
22611施伯昌

指導老師 姚志鴻



原題

- 四個原點 A 、 B 、 C 、 D ，任三點不共線
- 做三角形 ABC 、 ABD 、 ACD 、 BCD 的重心 a 、 b 、 c 、 d
- 由 a 、 b 、 c 、 d 求 A 、 B 、 C 、 D



Εύρηκα

解法

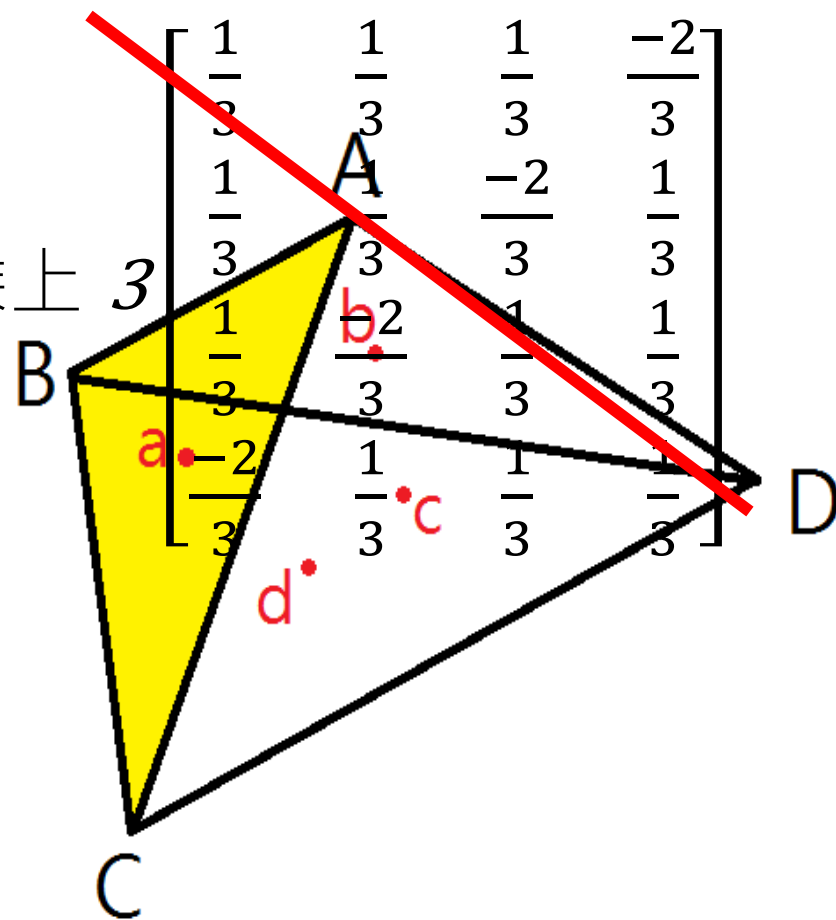
Εύρηκα

$$a = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \quad b = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}D$$

$$c = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D \quad d = \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D$$

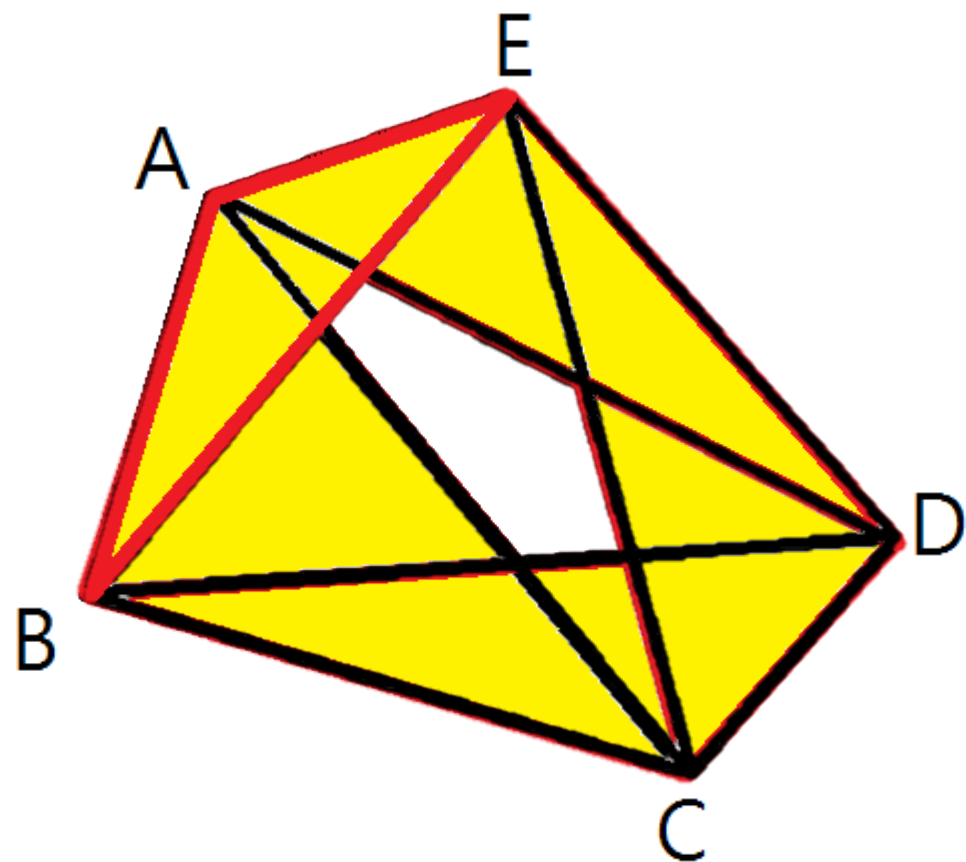
左右各乘上 3

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$



發展

- 增加原點數量
- 做N個三角形的重心
- 不只一種可能

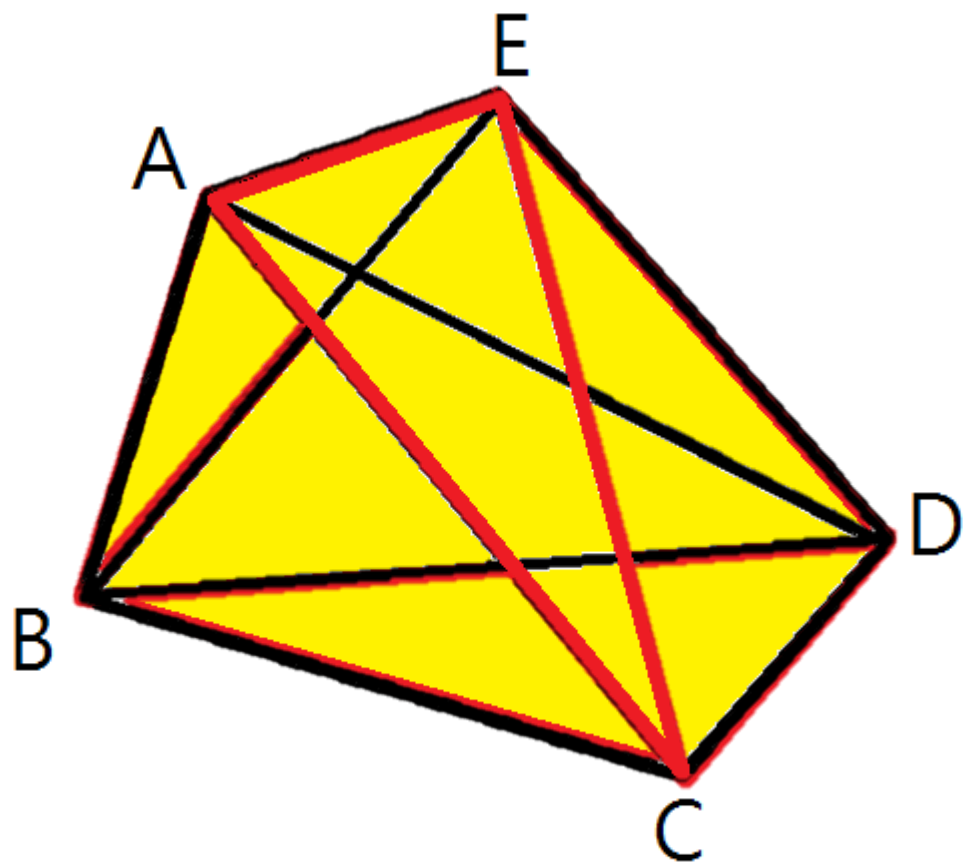


Εύρηκα



發展

- 增加原點
- 做N個三角形的重心
- 不只一種可能



N=5的情況

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

可化為 $\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = 3[M] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$, 有解

原點矩陣

if 有反矩陣[M]

Εύρηκα

N=5的情況

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{A} \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

μ

N=5的窮舉

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
---	--	--

行越多11, 放越左邊

4 3 N=5時, 共有 5 3 4 2 2 4 4 4 3 3 2 1 2 3 4

4 4 3 2 2、4 3 3 3 2、3 3 3 3 3

皆為4 4 3 2 2



N=5的窮舉

44322 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

不可解 可解 可解 可解

N=5的窮舉

		數量					是否可解									
		1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	
53322	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	否	0	1	0
44332	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	可解	0	是	1	1	0
44331	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	是	0	1	1
44322	0	0	1	0	2	0	1	0	0	0	0	1	是	1	0	1
44322	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	是	0	1	0
43332	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	三個可解	1	0	個不可解	0	1
43332	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	不可解
33333	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	是	1	0	1
33333	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0

窮舉完的證明

Εύρηκα

	數量	每個代表的矩陣	總數
53322	1	30	30
44331	1	30	30
44322	2	30	60
43332	6	20	120
33333	12	1	12
全部			252

N=6的情況

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{red arrow}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0+0+0+0+0+0$$



Εύρηκα

N=6的情況

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

μ

Εύρηκα

N=6的情況

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}F = f$$

u

特殊選法

- 按照順序選
- 幾乎為上三角矩陣
- 分成三部分討論

$$3k \times 3k \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

Εύρηκα

特殊選法 ($3k+1$)

1	11	111	000	000	000
0	11	111			000	000	000
0	00	111			000	000	000
⋮			⋮⋮⋮				
⋮				⋮⋮⋮			
0	00	000			111	111	111
0	01	01			000	111	221
0	00	011			000	000	311

→ 可解

u

特殊選法 ($3k+2$)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \end{array} \right]$$

→ 可解



特殊選法 ($3k$)

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 11 & \dots & \dots & 000 & 000 & 000 \\
 0 & 1 & 11 & & & 000 & 000 & 000 \\
 0 & 0 & 11 & & & 000 & 000 & 000 \\
 \vdots & & & \ddots & & & & \\
 \vdots & & & & \ddots & & & \\
 0 & 0 & 00 & & & 111 & 111 & 111 \\
 0 & -01 & -01 & & & 000 & 001 & 001 \\
 0 & 0 & -011 & & & 000 & 000 & 011
 \end{bmatrix}
 \xrightarrow{\text{red arrow}} \text{不可解}$$



Εύρηκα

討論與未來展望

- 空間限制（三點以上不可共線）
- N 為 6 以上時可用降階
- 原點矩陣有反矩陣，則題目有解
- 照順序選，則 $3k$ 無解

u

致謝

- 姚志鴻老師的指導
- 父母的支持
- 一同奮鬥的數專夥伴
- 25班、26班的各位同學

Εύρηκα



Εύρηκα

感謝聆聽

μ