Εύρηκα

以二刻尺作圖法解方程式

SOLVING EQUATIONS BY NEUSIS CONSTRUCTION

作者 邱巖盛

指導老師 姚志鴻

報告大綱

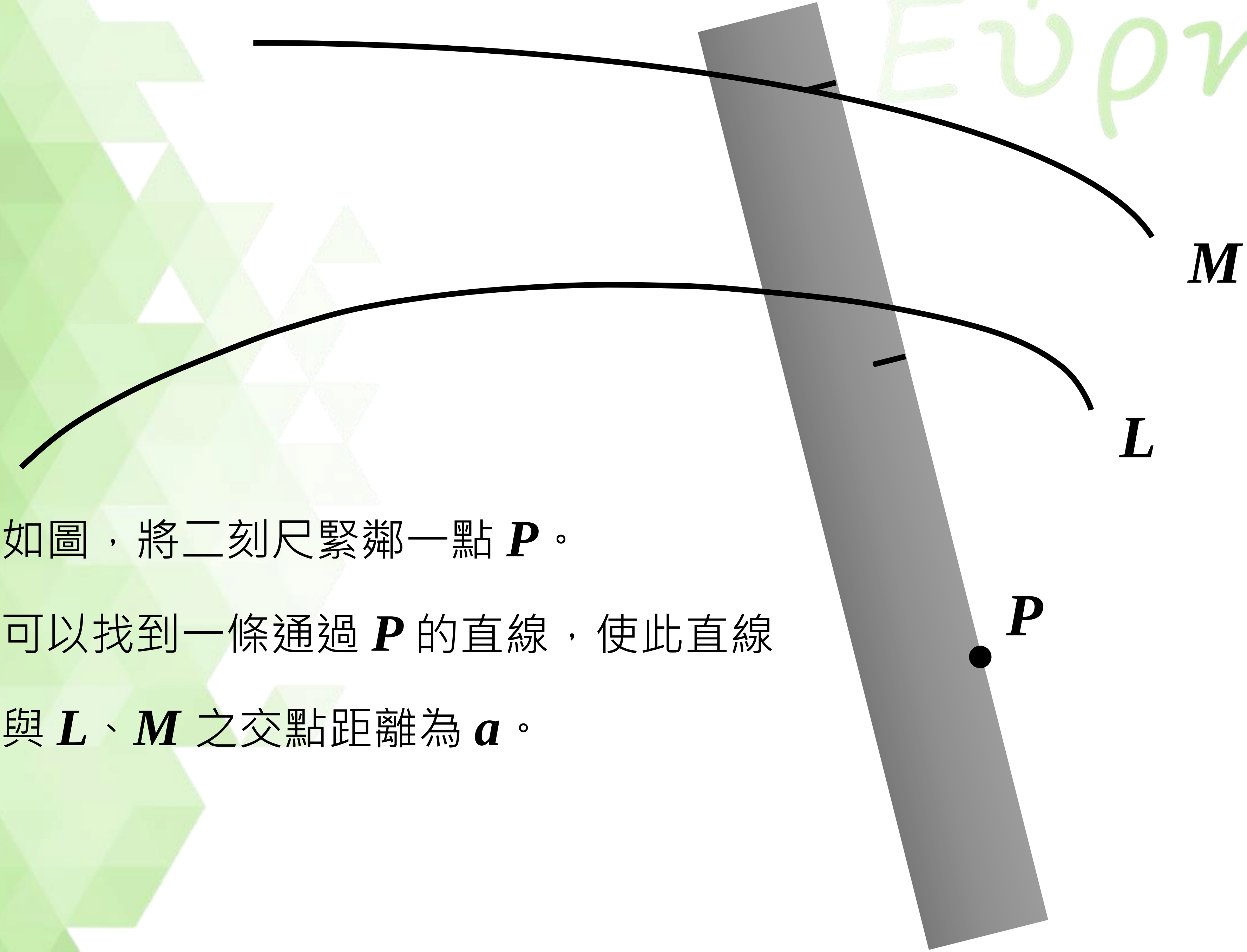
- 二刻尺作圖
- 解析幾何探討二刻尺作圖
- 探討以二刻尺作圖解方程式
- 結論與未來展望

二刻尺作圖

二刻尺作圖

二刻尺是自古希臘即存在的一種作圖工具。
和一般尺規作圖相比，尺上多了兩個刻度。

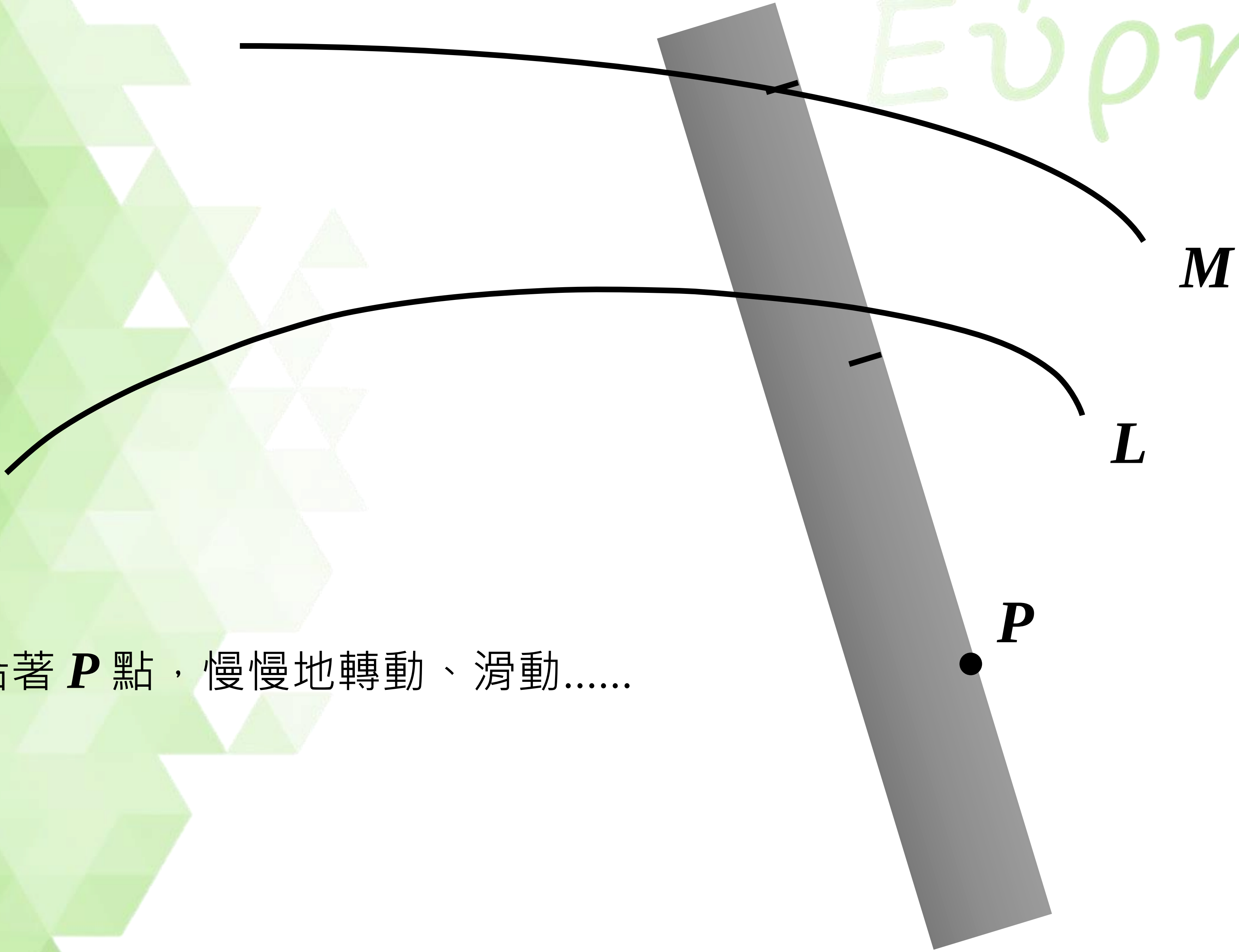
以二刻尺和圓規作圖的過程，即稱為「二刻尺作圖」。



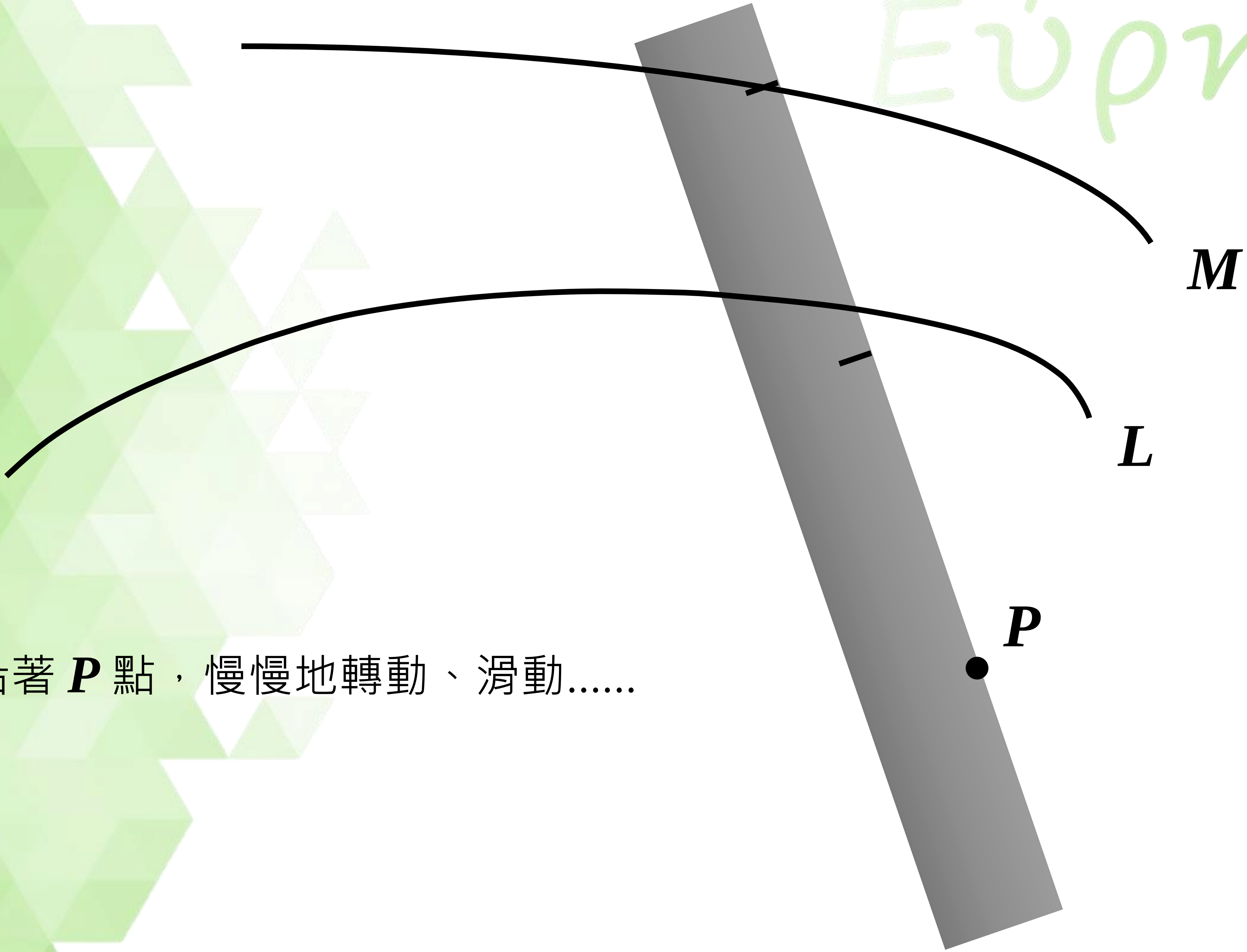
如圖，將二刻尺緊鄰一點 P。

可以找到一條通過 P 的直線，使此直線

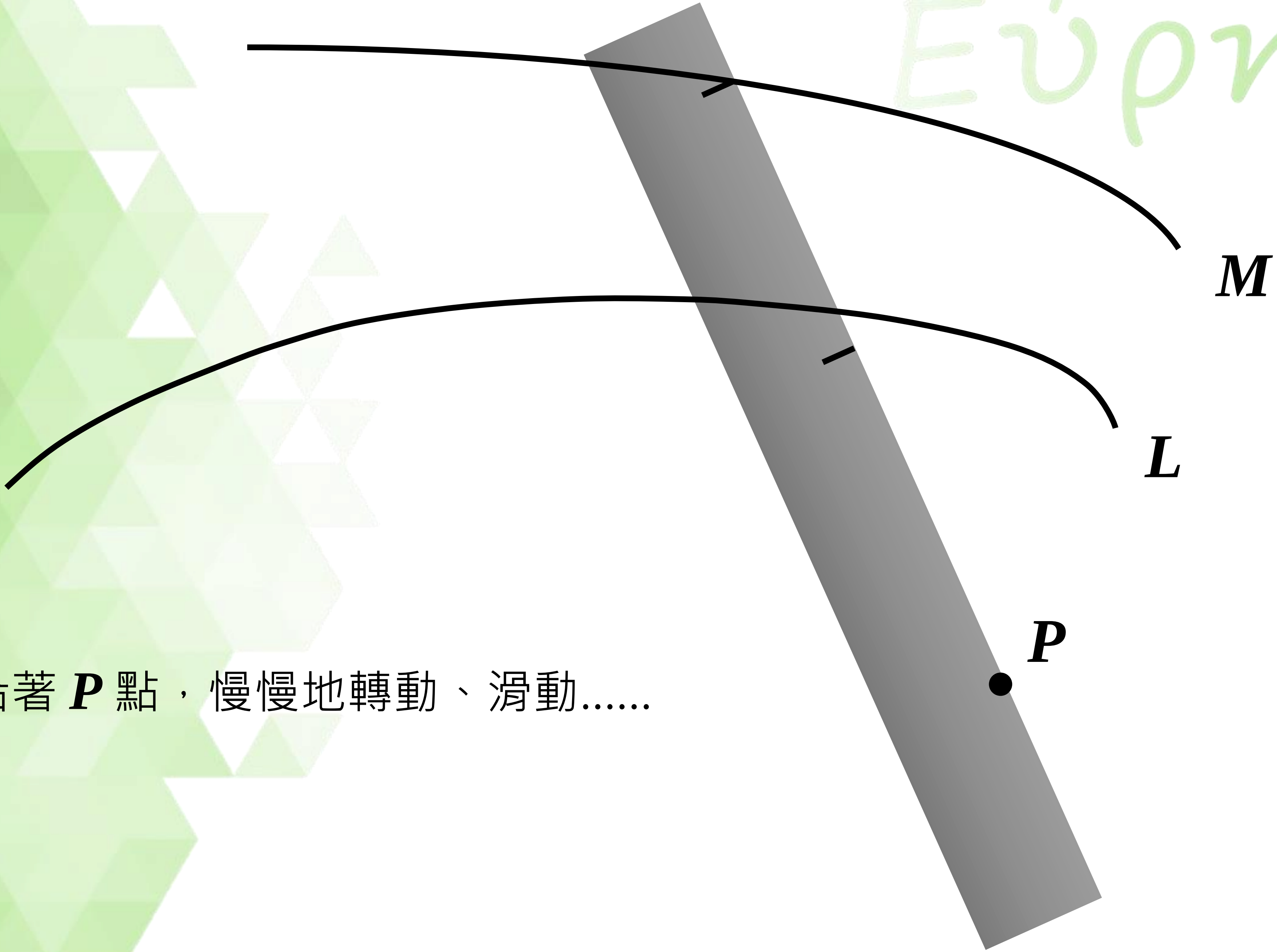
與 L、M 之交點距離為 a。



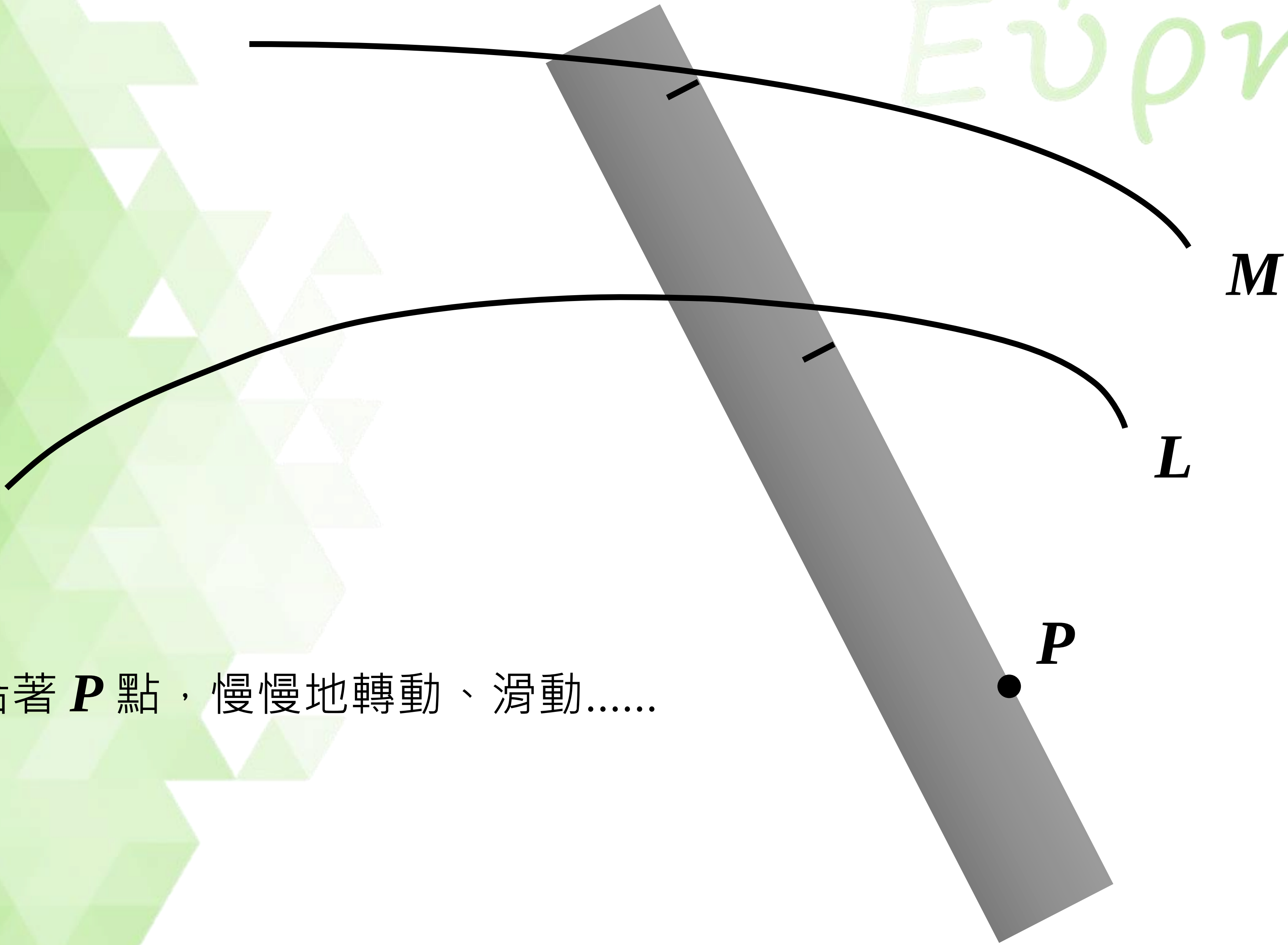
沿著 $\boldsymbol{P}$ 點，慢慢地轉動、滑動……



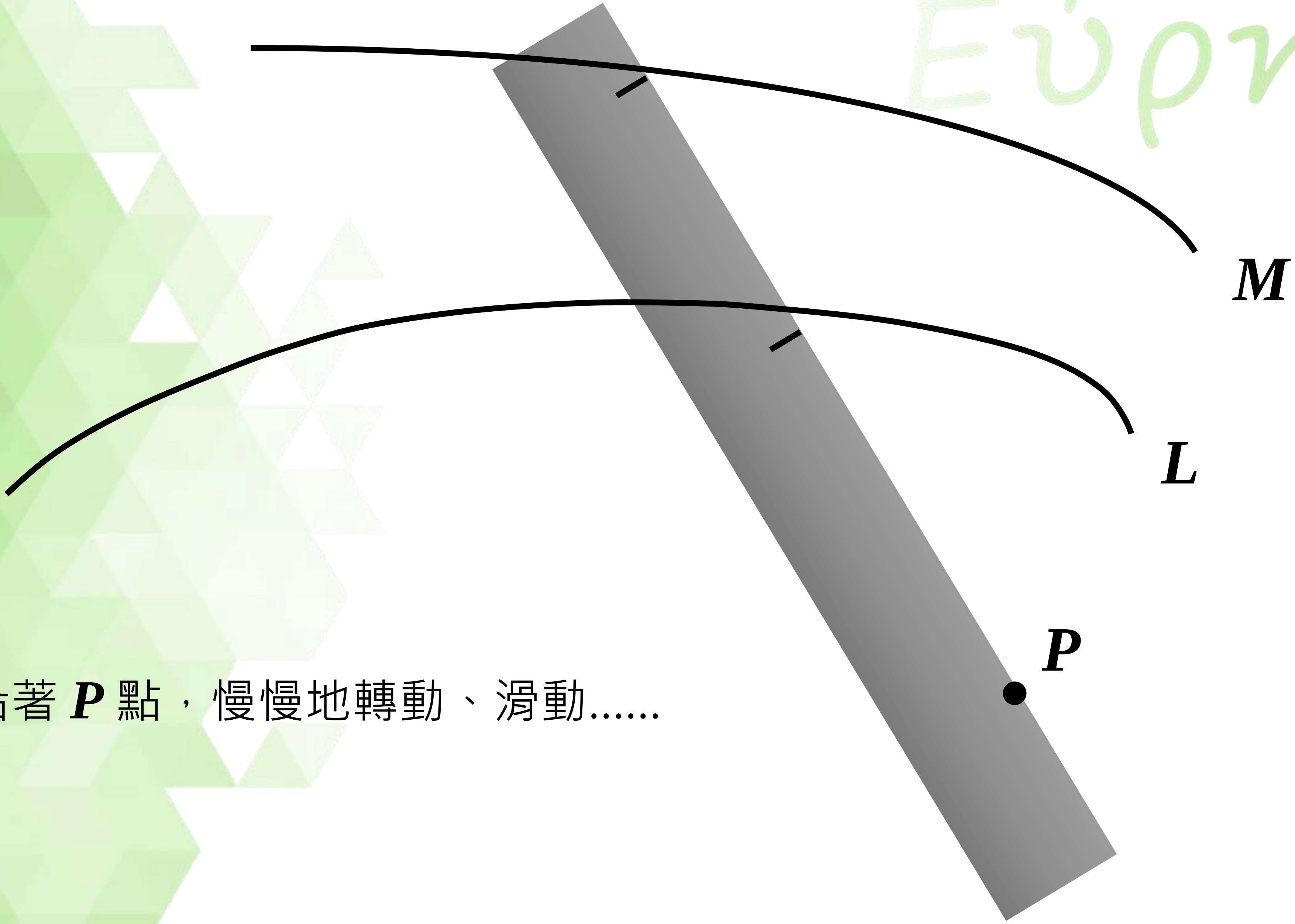
沿著 P 點，慢慢地轉動、滑動……



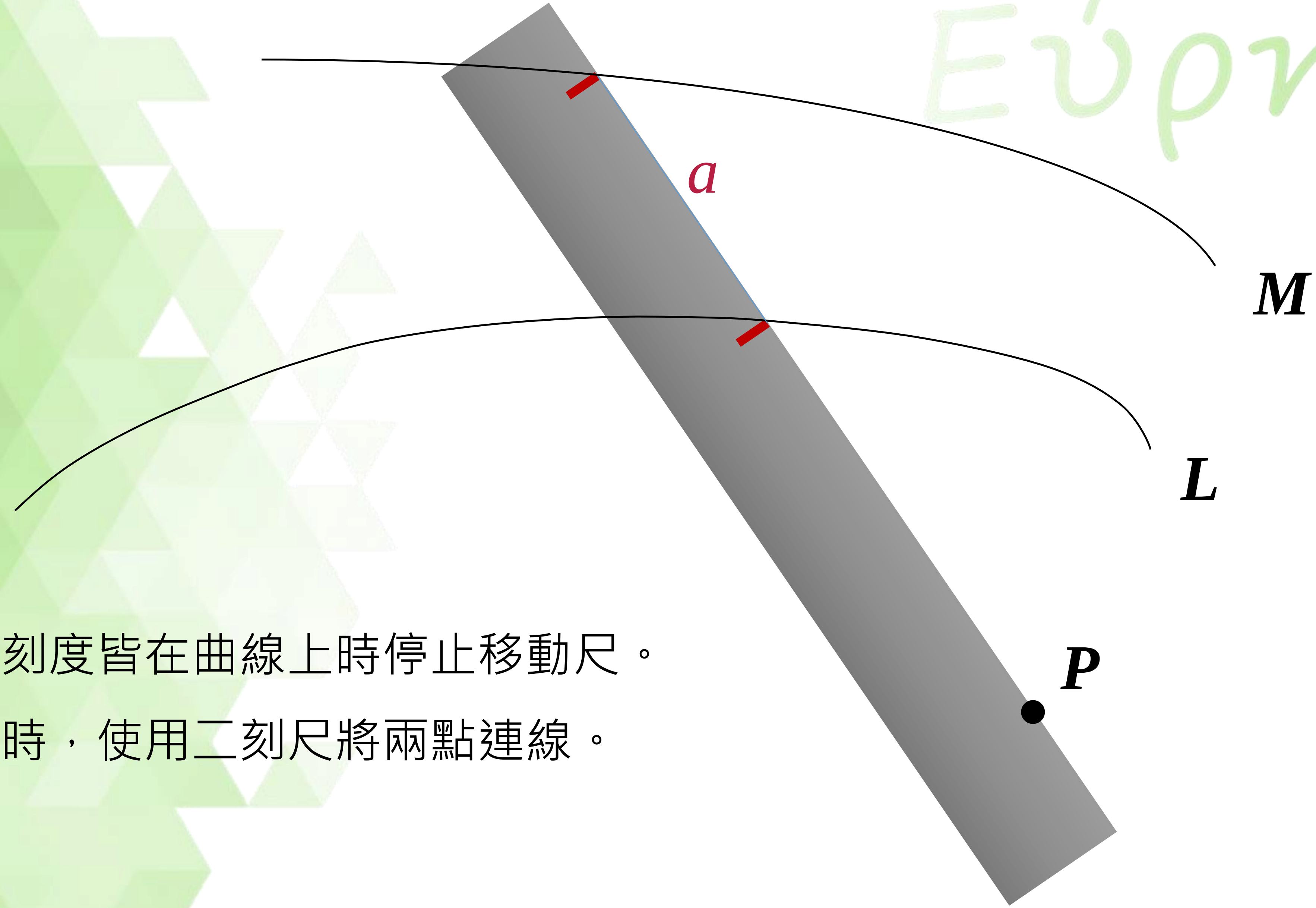
沿著 P 點，慢慢地轉動、滑動……



沿著 P 點，慢慢地轉動、滑動……

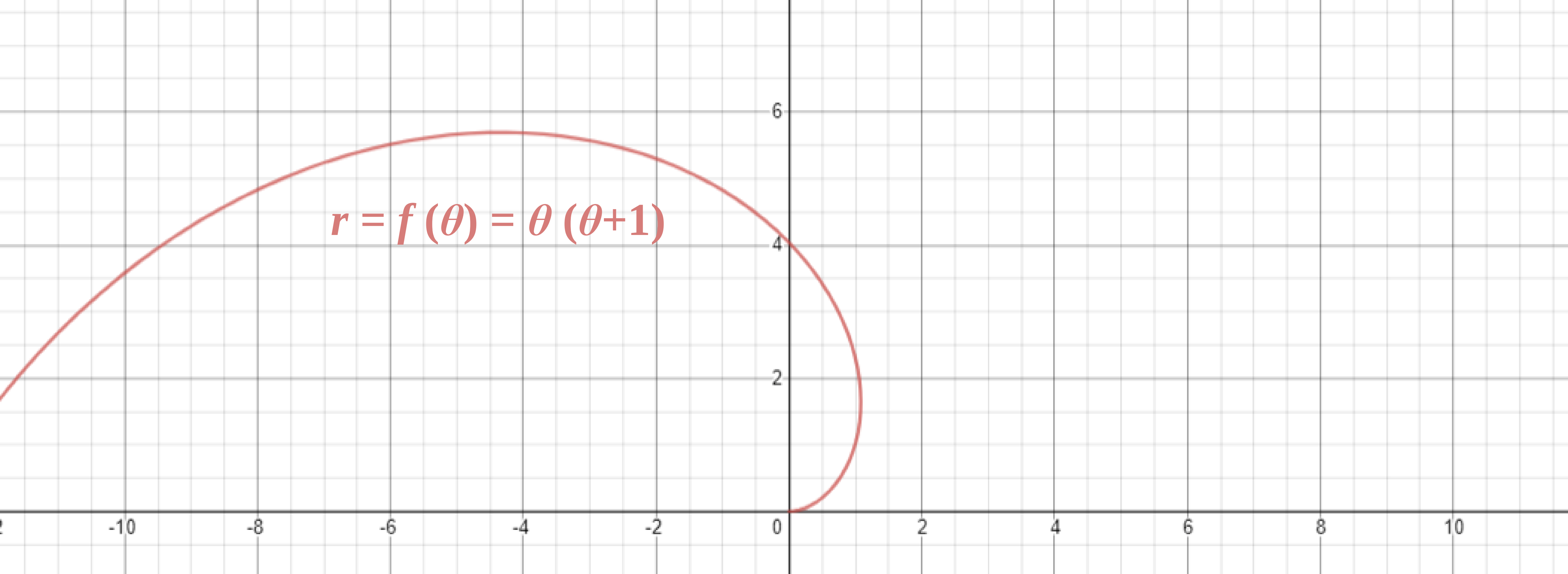


沿著 P 點，慢慢地轉動、滑動……



當刻度皆在曲線上時停止移動尺。

這時，使用二刻尺將兩點連線。

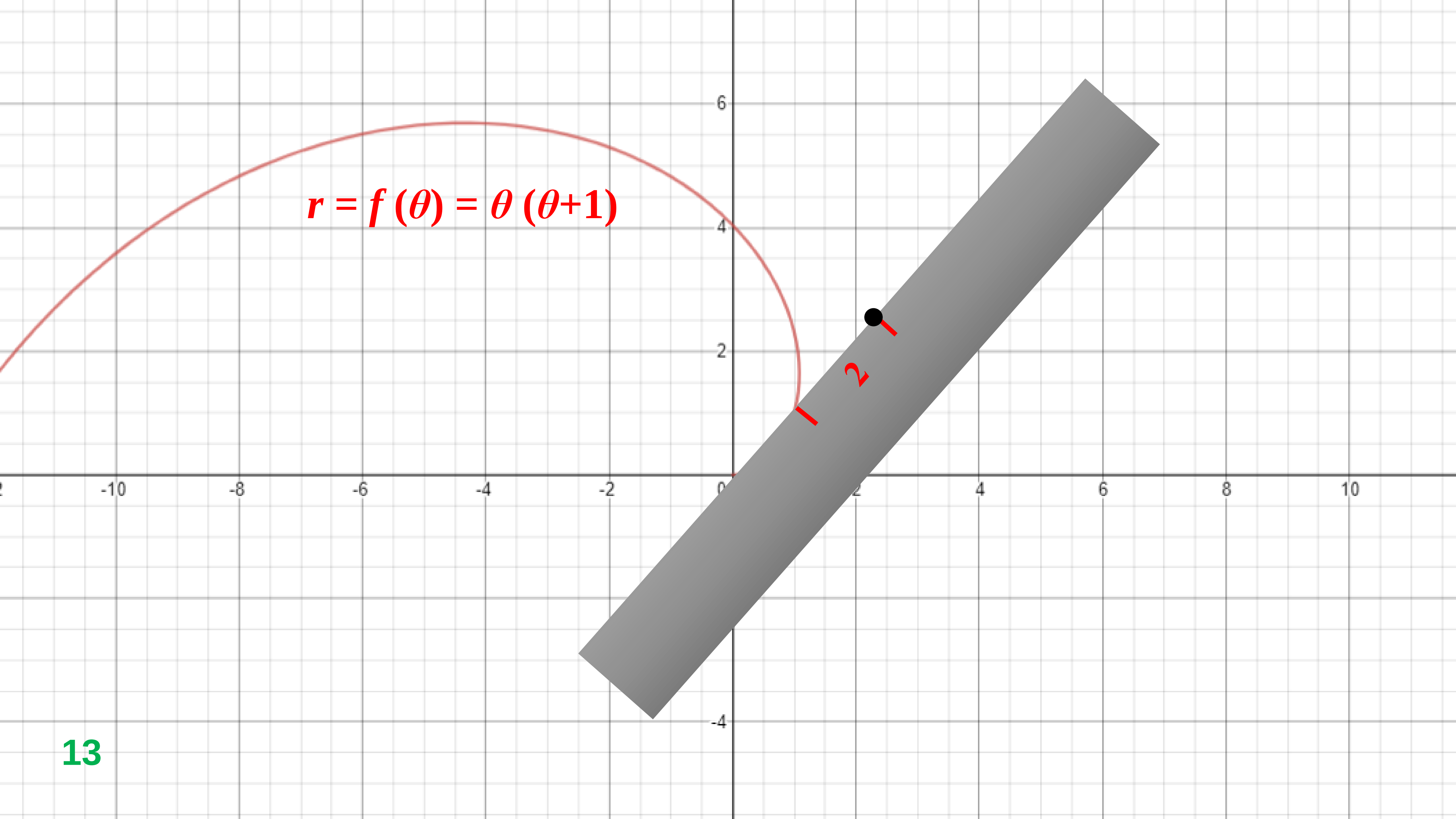


假設曲線C的極座標方程 $r = f(\theta) = \theta(\theta+1)$

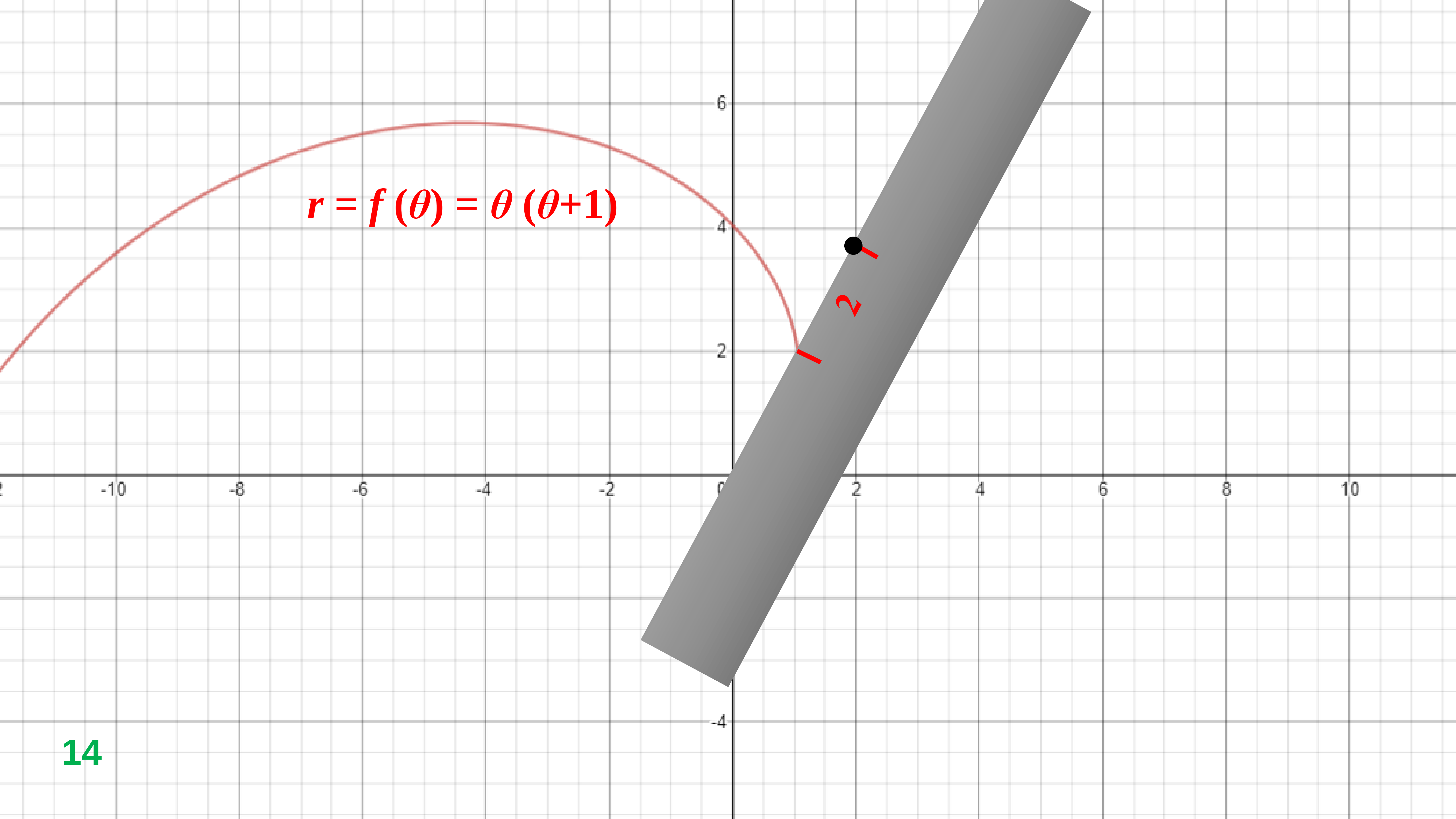
記尺的原點為刻度0的點，用尺上的刻度

(長度2)，對曲線C上的每一個點作以下操作：

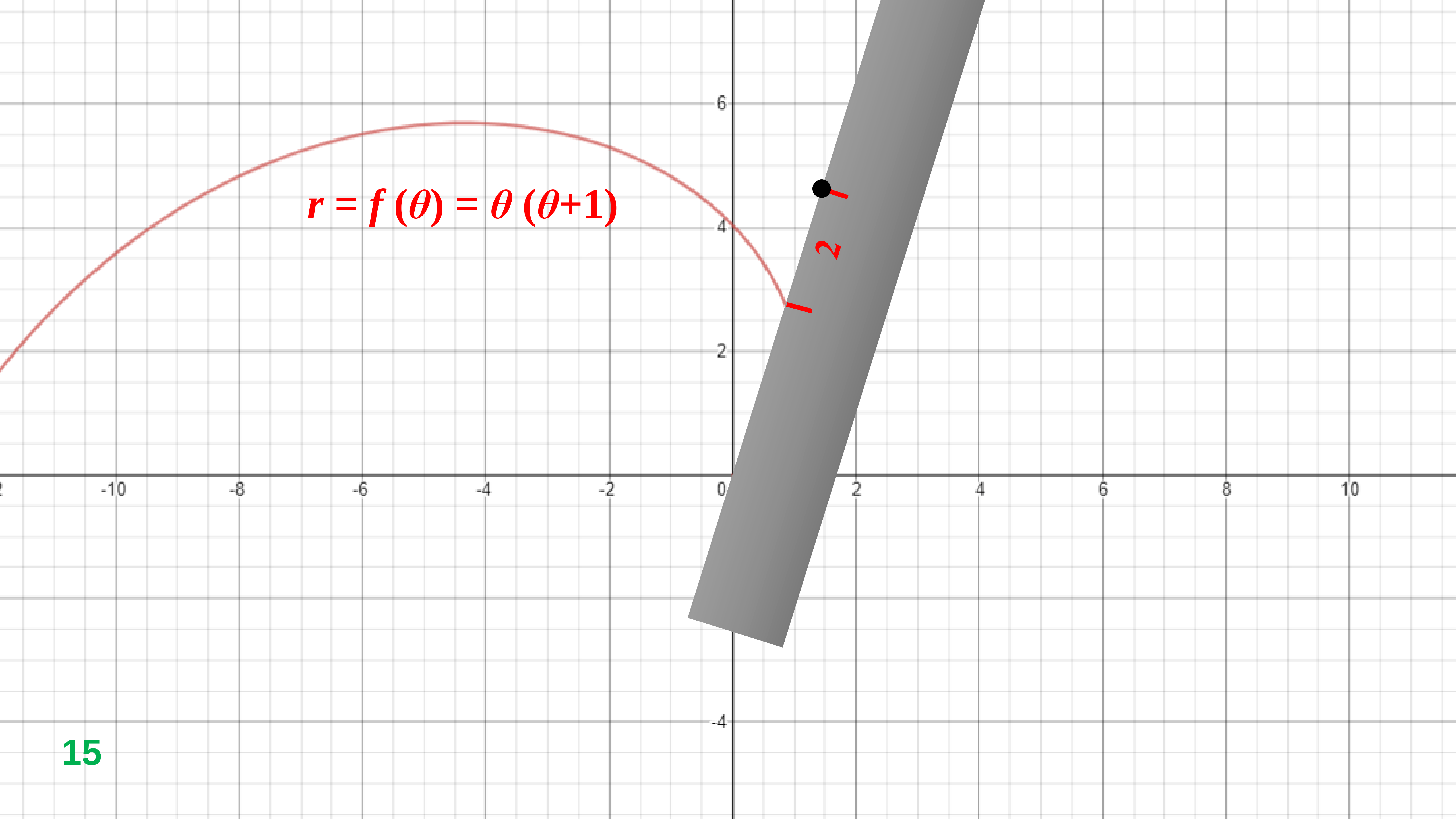
軌跡曲線



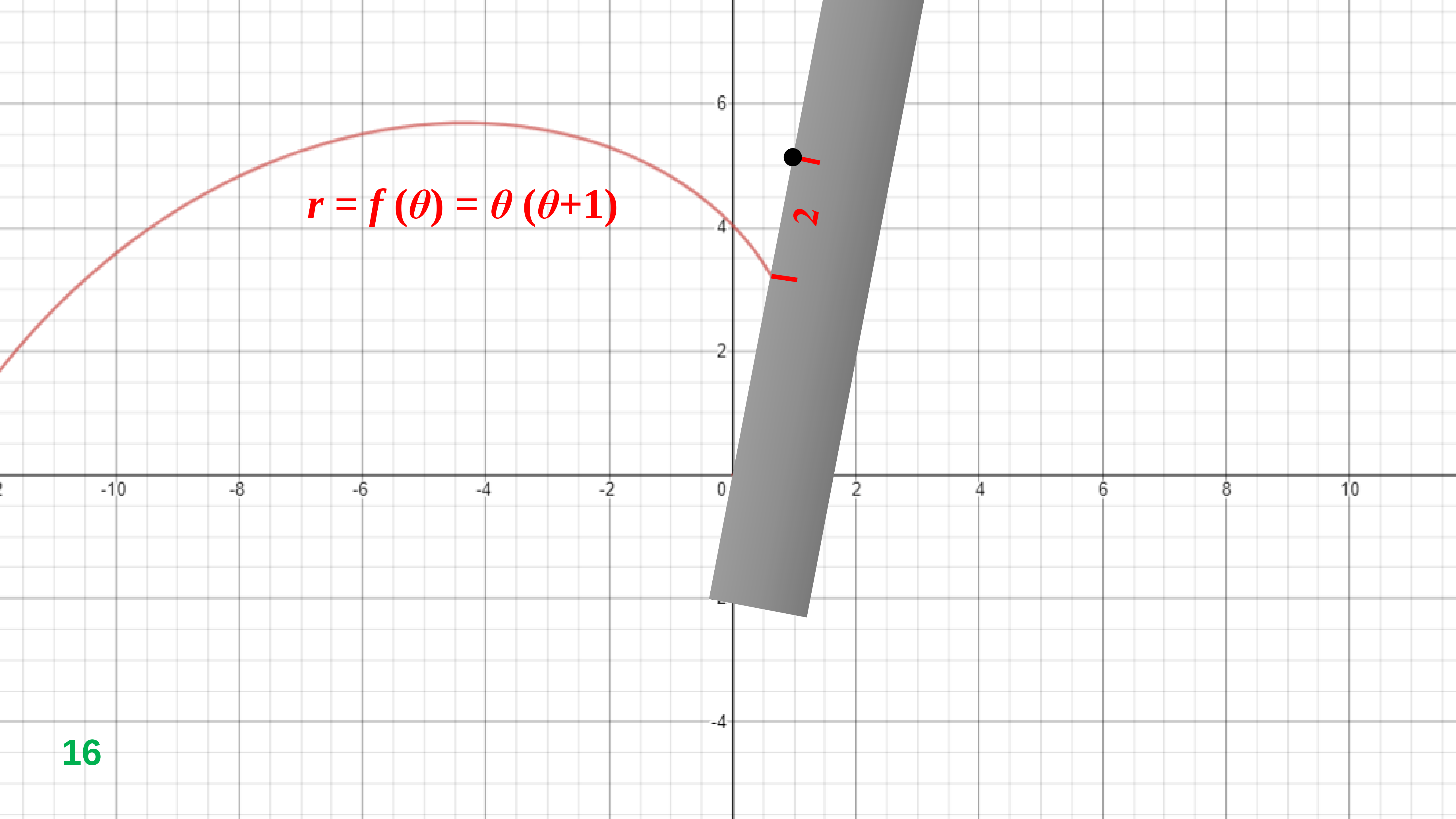
13

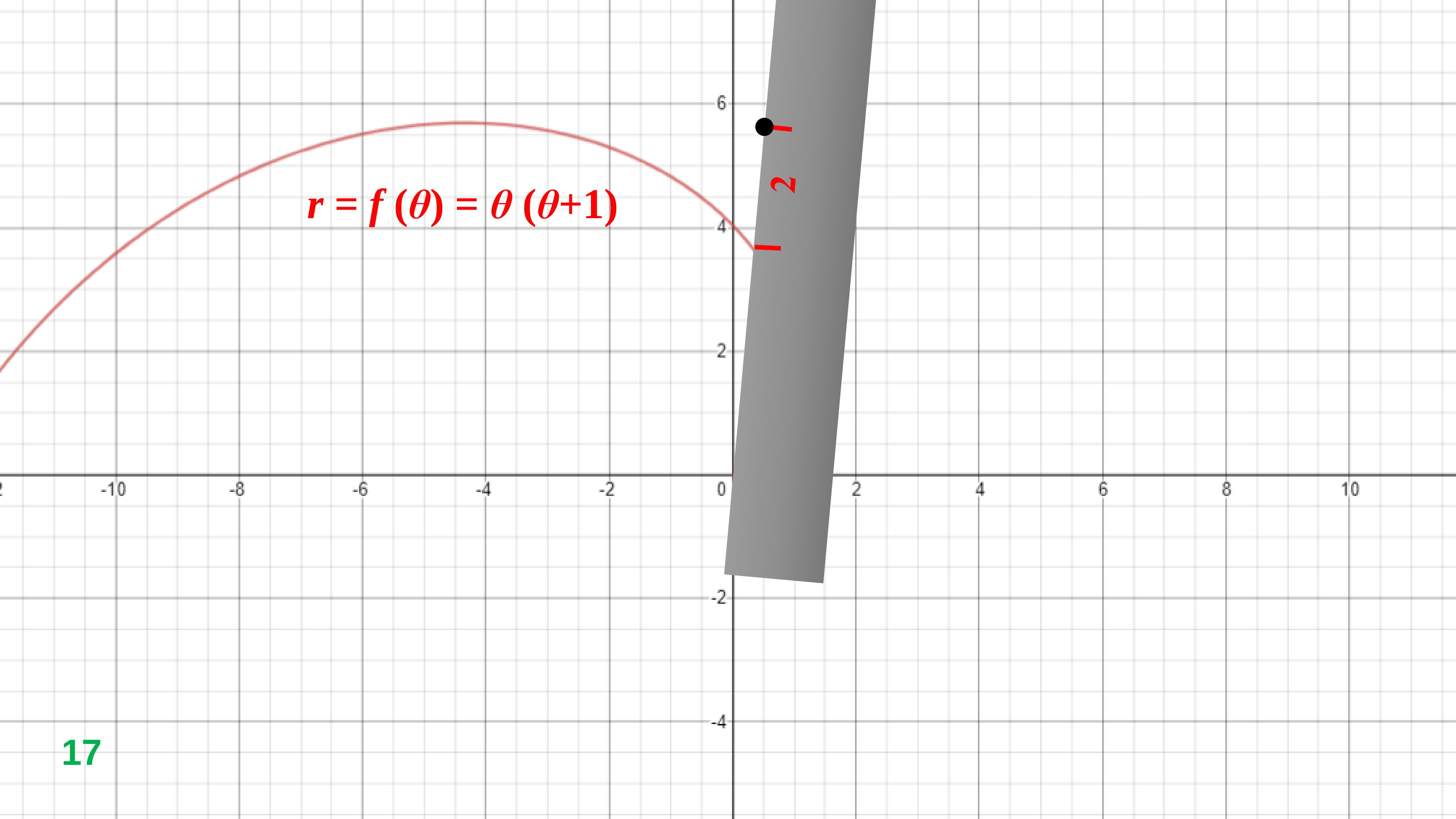


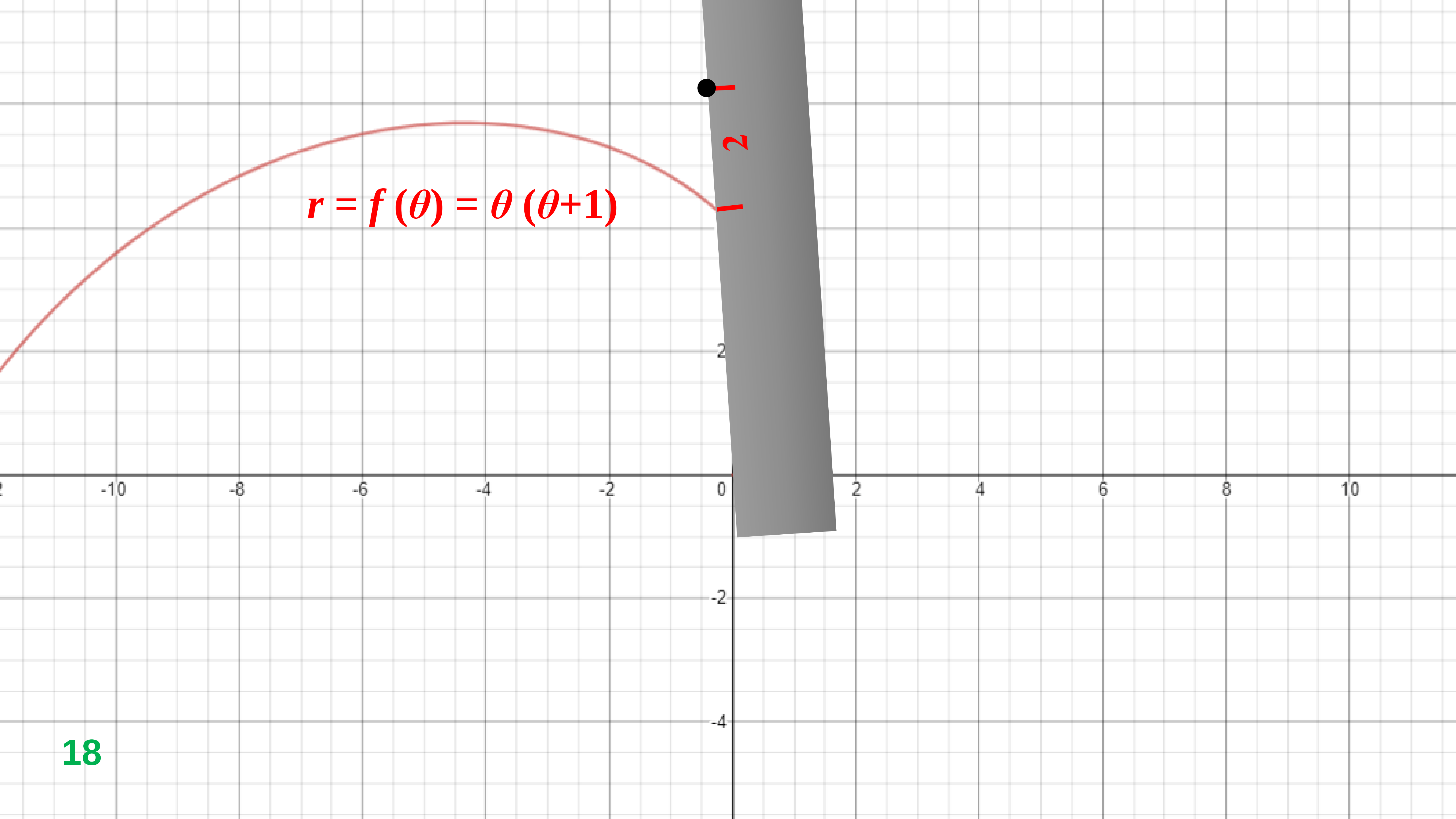
14



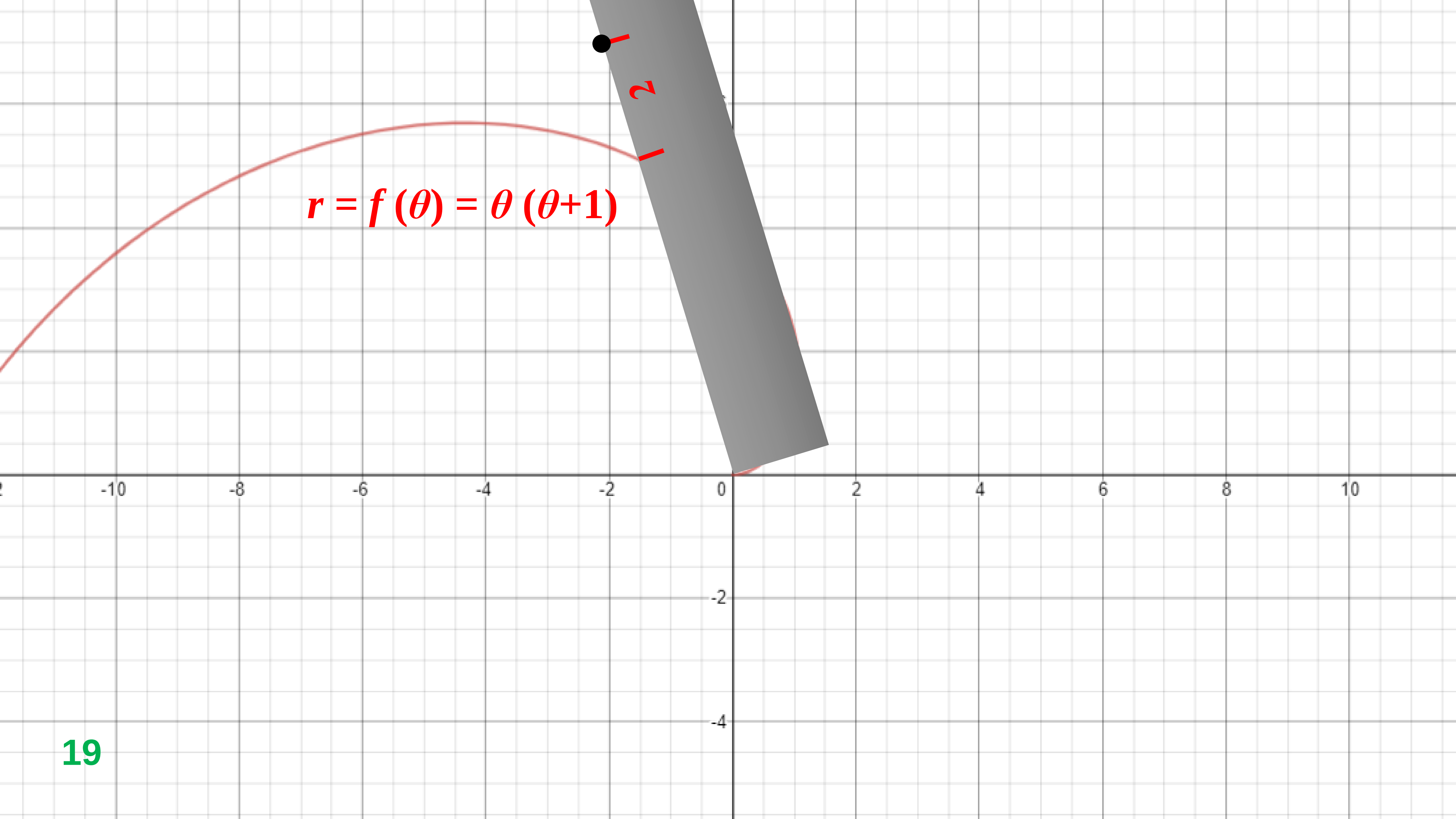
15

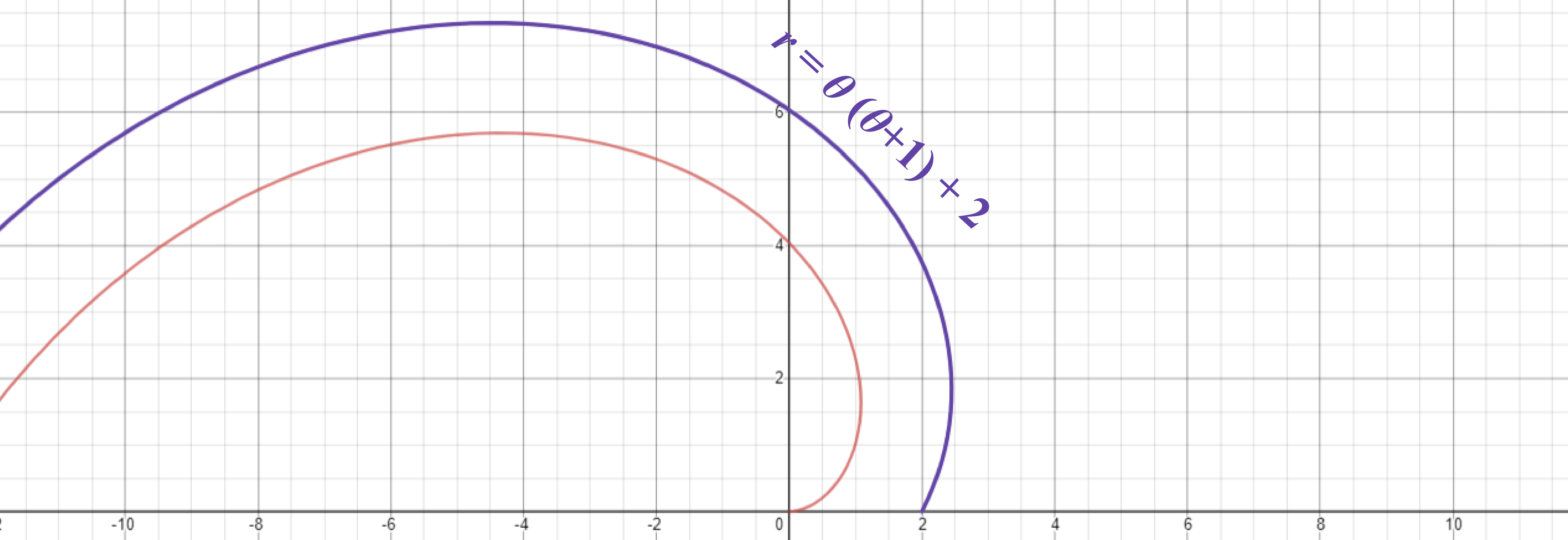

r = f (θ) = θ (θ+1)
2
6
4
2
-4
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10


$r = f(\theta) = \theta(\theta+1)$
2
17



$r = f(\theta) = \theta(\theta+1)$
2
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
2
-2
-4


$r = f(\theta) = \theta(\theta+1)$
2
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
-2
-4



將所有黑點連起來會形成一條曲線(圖中藍色曲線)，藍色曲線稱之為「**曲線*C*的二刻尺作圖軌跡曲線**」，簡稱「***C*的軌跡曲線**」，其方程式為 $r-2=\theta\,(\theta+1)$。

軌跡曲線的
種類、用途及方程式

軌跡曲線與任一條線的交點即為

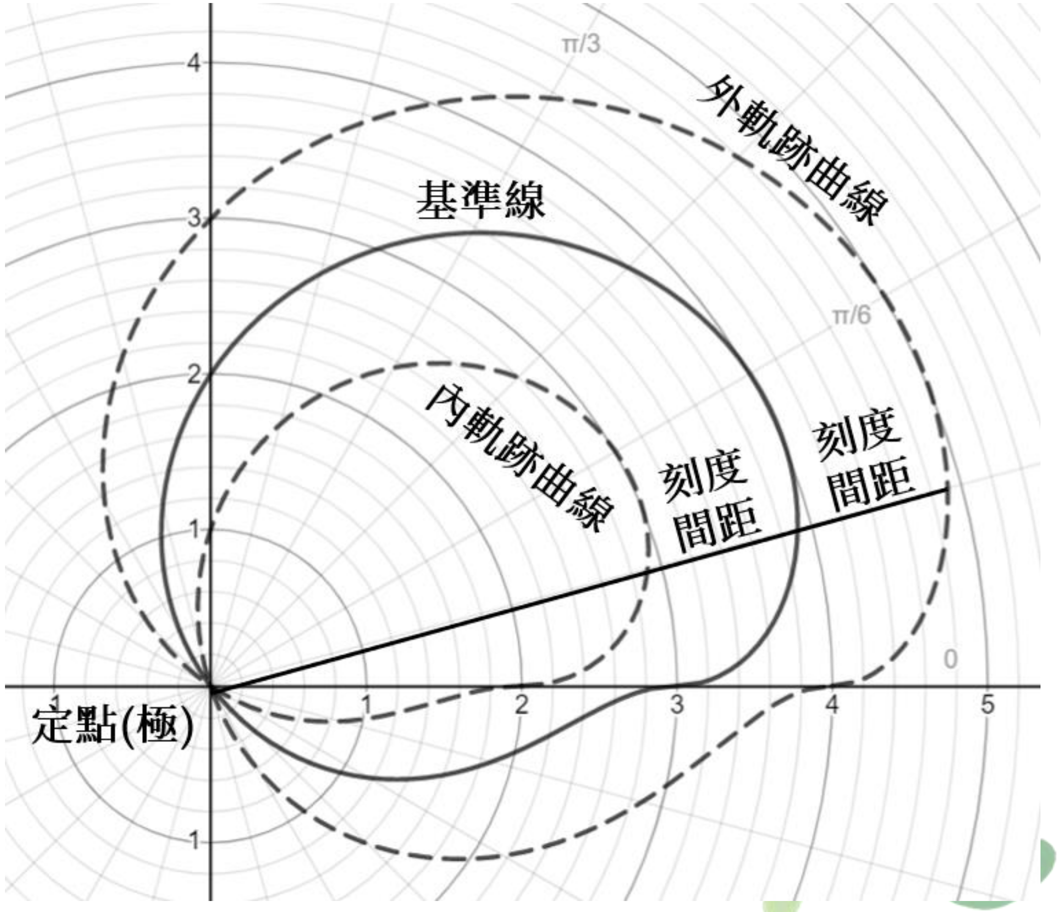
「二刻尺作圖法」欲求的目標點。

設極座標中有一曲線方程式為：

$$f(r, \theta) = 0$$

則其軌跡曲線方程式：

$$f(r \pm b, \theta) = 0$$



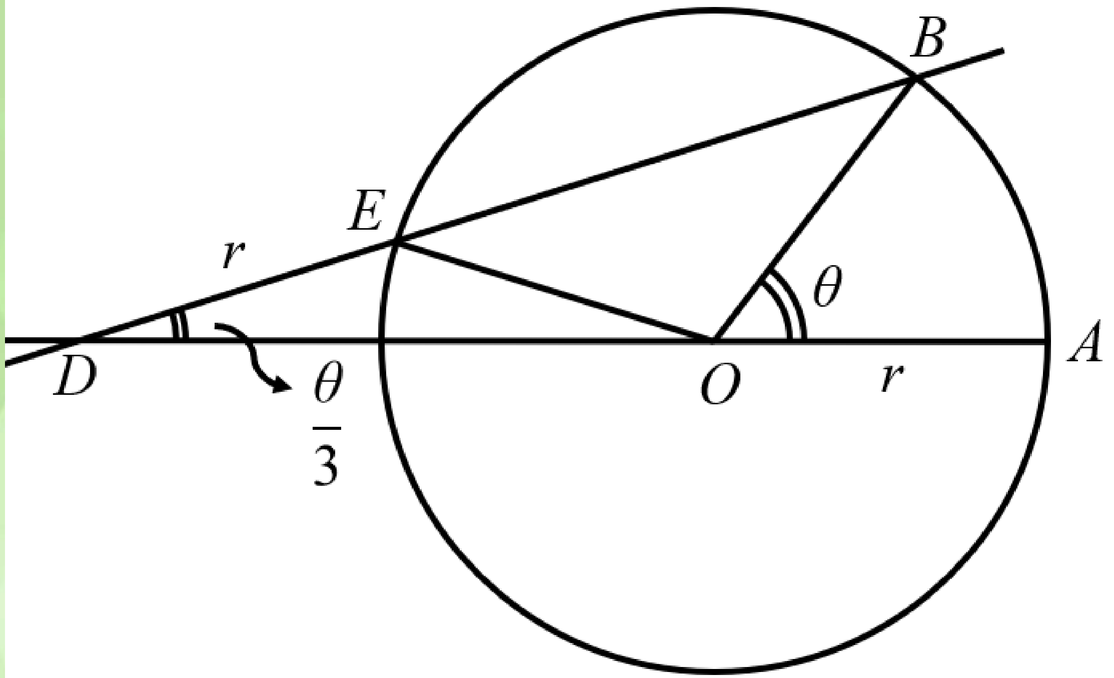
圓與直線的軌跡曲線

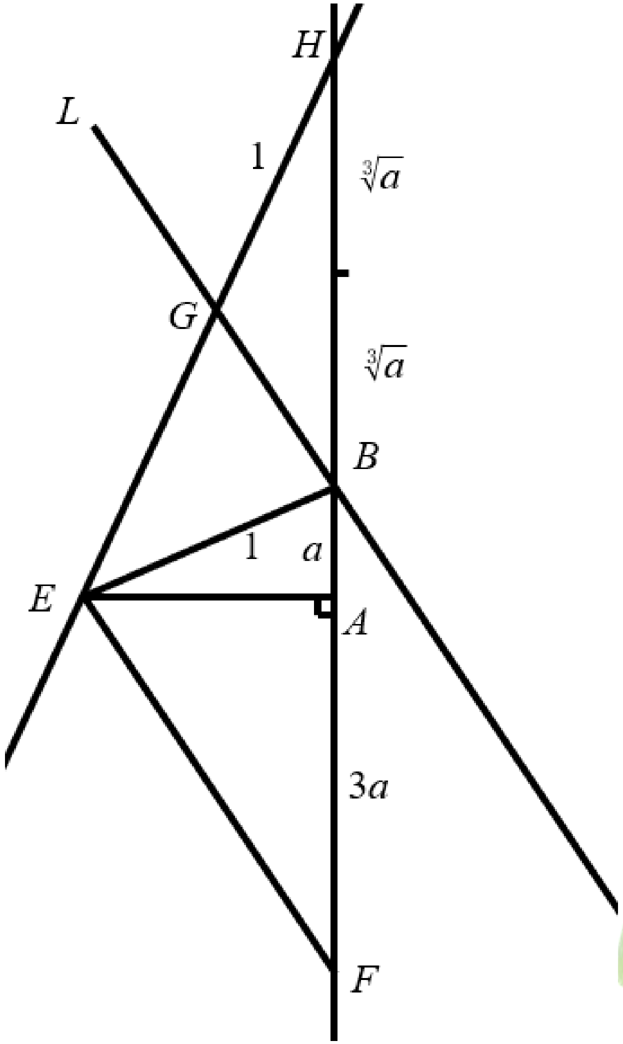
在二刻尺作圖中，我們探討圓與直線的軌跡曲線。

種類	方程式	軌跡曲線
直線	$r = r_0 \sec(\theta - \phi)$	$r \pm b = r_0 \sec(\theta - \phi)$
圓	$r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \phi) + r_0^2 - s^2 = 0$	$(r \pm b)^2 - 2r_0 (r \pm b)\cos(\theta - \phi) + r_0^2 - s^2 = 0$

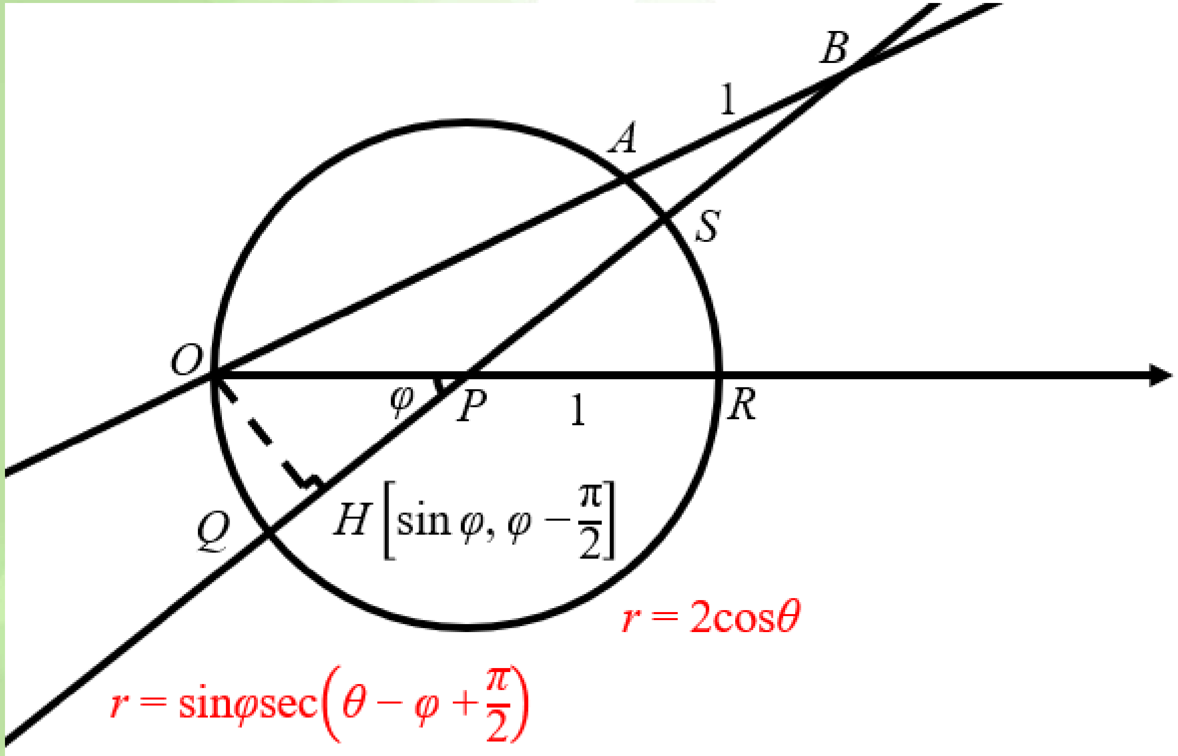
以解析幾何探討二刻尺作圖

三等分角作圖及立方根作圖





以極座標系統探討三等分角作圖



$$\begin{cases} r=-\sin\phi\csc(\theta-\phi) & \text{（直線）} \\ r=2\cos\theta+1 & \text{（圓的軌跡曲線）} \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ （消去$\boldsymbol{\theta}$）

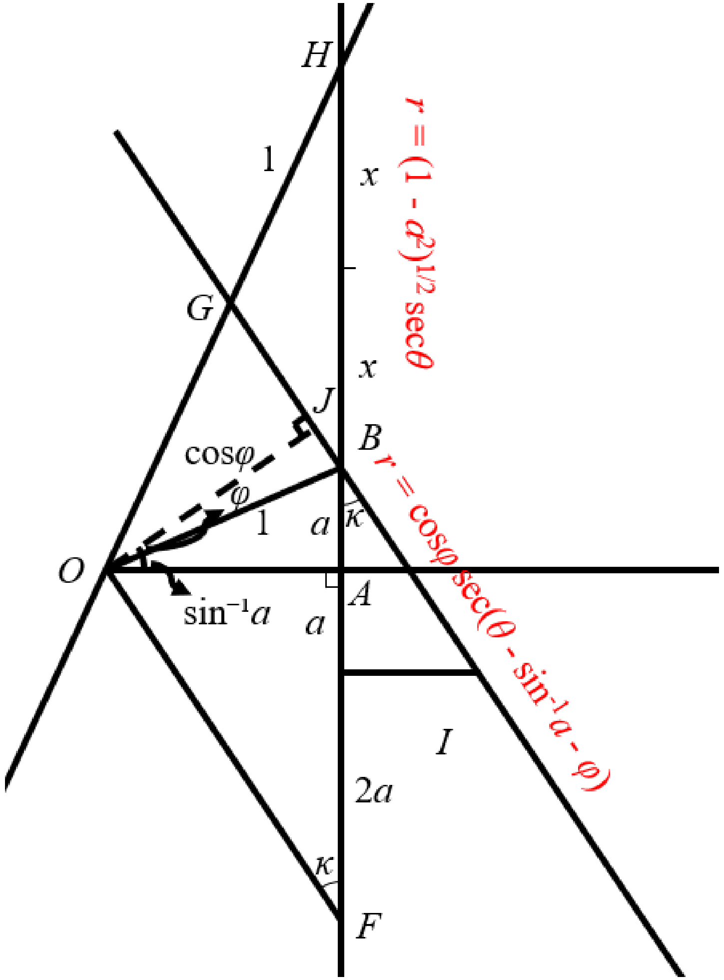
$$(r+1)\left[\left(\tan^2\phi+1\right)r^3+\left(-3\tan^2\phi-3\right)r^2+4\tan^2\phi\right]=0$$

以極座標系統探討立方根作圖

$$\begin{cases} r = \sqrt{1-a^2}\sec\theta & \text{（直線）} \\ r = \cos\left(\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{3a} - \sin^{-1}a\right)\sec\left(\theta - \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{3a}\right)+1 & \text{（直線的軌跡曲線）} \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ （消去$\boldsymbol{\theta}$）

$$(r+1)\left[r^3-3r^2+3r+\left(-8a^2-1\right)\right]=0$$



觀察

上述兩作圖中，**「二刻尺作圖法步驟」在解析幾何中實際上是對應求解一個三次方程式。**

作圖	目標	構成方程式的係數
三等分角	$\phi \to \dfrac{\phi}{3}$	$\tan^2\phi$
立方根	$a \to \sqrt[3]{a}$	a^2

探討以二刻尺作圖法解方程式

猜測一

?

r 的三次方程

（係數與作圖參數有關）

（作圖參數與係數有關）

解三次方程式-係數與作圖參數的關係

（直線的軌跡曲線） $\varepsilon_1,(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots=\pm 1)$

（直線）

用係數計算作圖參數

$$x^3+b_2x^2+b_1x+b_0=0$$

（已知係數）

$$\begin{cases} r=a\sec\theta+\varepsilon_1 \\ r=r_0\sec(\theta-\phi) \end{cases}$$

（消去$\boldsymbol{\theta}$）

二刻尺作圖，求解$r = x$

（和係數有關的作圖參數）

$$r^4+2\varepsilon_1 r^3+\left(1-\frac{a^2-2a\cos\phi r_0+r_0^2}{\sin^2\phi}\right)r^2+\frac{-2\varepsilon_1 r_0^2+2\varepsilon_1 a\cos\phi r_0}{\sin^2\phi}r+\frac{-r_0^2}{\sin^2\phi}=0$$

r 的四次方程式

解三次方程式-
係數與作圖參數的關係

$$x^4+2\varepsilon_1 x^3+\underline{\left(1-\frac{a^2-2a\cos\phi r_0+r_0^2}{\sin^2\phi}\right)}x^2+\underline{\frac{-2\varepsilon_1 r_0^2+2\varepsilon_1 a\cos\phi r_0}{\sin^2\phi}}x+\underline{\frac{-r_0^2}{\sin^2\phi}}=0$$

已經固定的三次項係數

$$\left(x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\right)\left[x+\left(2\varepsilon_1-b_2\right)\right]$$

比較係數......

$$=x^4+2\varepsilon_1 x^3+\underline{\left[b_2\left(2\varepsilon_1-b_2\right)+b_1\right]}x^2+\underline{\left[b_1\left(2\varepsilon_1-b_2\right)+b_0\right]}x+\underline{b_0\left(2\varepsilon_1-b_2\right)}=0$$

解三次方程式-
係數與作圖參數的關係

$$
\begin{cases}
b_2\left(2\varepsilon_1 - b_2\right) + b_1 = 1 - (a^2 - 2a\cos\phi r_0 + r_0^2)\csc^2\phi \\
b_1\left(2\varepsilon_1 - b_2\right) + b_0 = (-2\varepsilon_1 r_0^2 + 2\varepsilon_1 a\cos\phi r_0)\csc^2\phi \\
b_0\left(2\varepsilon_1 - b_2\right) = -r_0^2\csc^2\phi
\end{cases}
$$

解三次方程式-
係數與作圖參數的關係

引理—-以係數表達作圖參數

可以三次方程式的係數表達作圖參數。

$$r_0 = \sqrt{\frac{4l \cdot n - m^2}{4n}}, a = \varepsilon_4 \sqrt{\frac{4l \cdot n - m^2}{4l}}, \cos\phi = \varepsilon_3 \sqrt{\frac{m^2}{4l \cdot n}}$$

$$l = b_0\left(b_2 - 2\varepsilon_1\right), m = -\varepsilon_1 b_0 - \left(2b_0 - \varepsilon_1 b_1\right)\left(b_2 - 2\varepsilon_1\right), n = \left(b_2 - \varepsilon_1\right)\left(b_2 - \varepsilon_1 b_1 + b_0 - \varepsilon_1\right)$$

引理二-限制條件

茲列出方程式可以二刻尺作圖法解出的限制條件。

三角函數性質 $|\cos\phi| = \left|\varepsilon_3\sqrt{\dfrac{m^2}{4l\cdot n}}\right| \le 1,\ 4l\cdot n \ge m^2$

根號的性質 $l > 0,\ \ n > 0$

$$4l\cdot n - m^2 > 0,\ \ l > 0,\ \ n > 0$$

引理三- ε的討論

ε	意義	是否影響解方程式	原因
ε_1	蚌線的內外兩支	是，可自由選擇	出現在引理一的式子中
ε_2	θ 的象限	否	推導過程中會被消去
ε_3	φ 的象限	是	出現在引理一的式子中
ε_4	a 的正負	是	出現在引理一的式子中

引理三- ε的討論

$$2a\cos\phi = r_0 \cdot \frac{2a_0 - \varepsilon_1 a_1}{a_0}$$

$$\Big\downarrow$$

（**r**, **a**, **cosφ** 代入）

$$\varepsilon_3\varepsilon_4|m| = \varepsilon_3\varepsilon_4\sqrt{m^2} = -m$$

$$\varepsilon_3\varepsilon_4\begin{cases}+1, & m<0\\ \pm 1, & m=0\\ -1, & m>0\end{cases}$$

（無論 **a** 的正負，交點 **r** 座標都會相等）

引理四-三次方程式的負根

$x=-\alpha\ (\alpha>0)$ 是 $x^3+b_2x^2+b_1x+b_0=0$ 的解

$$\Big\downarrow\ (代入)$$

$x=\alpha$ 是 $x^3-b_2x^2+b_1x-b_0=0$ 的解

如果將ε_1 調為 -ε_1 ，<u>此方程式的作圖參數會和原方程式相等。</u>

因此，可以從軌跡曲線的另外一支找到三次方程式的負根。

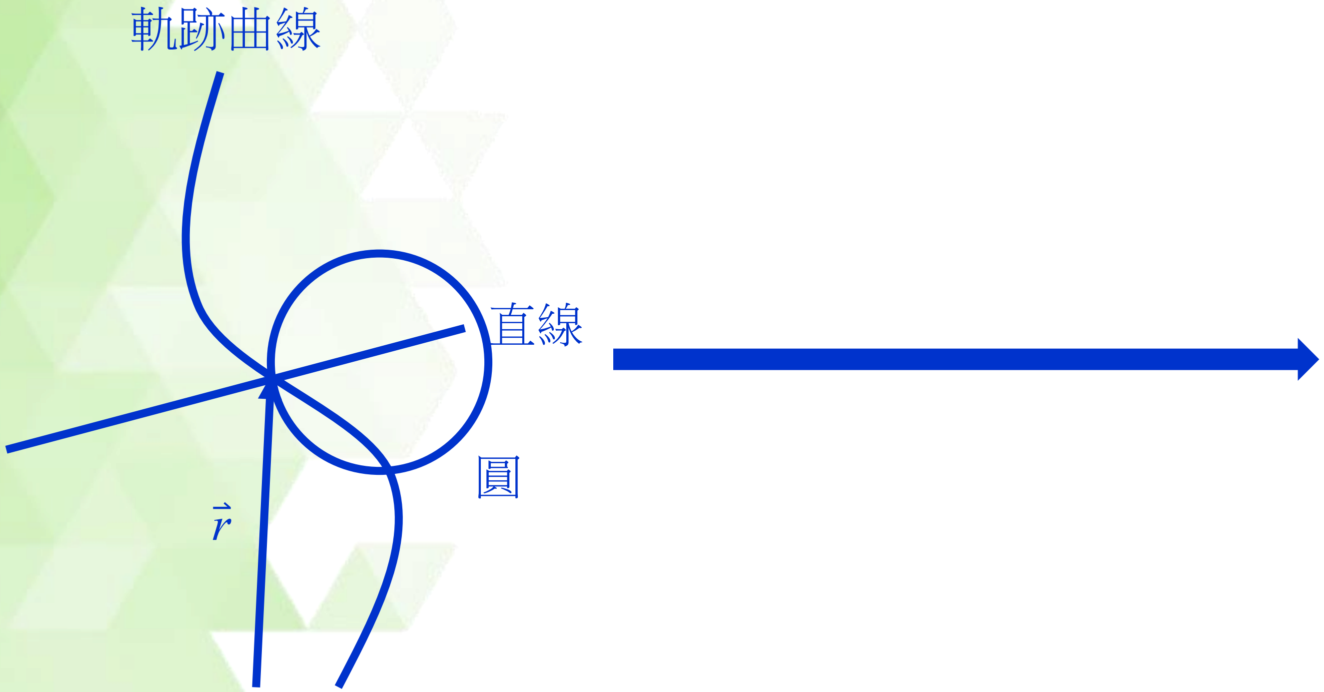
定理一

如果係數在限制條件之內，給定一個三次方程式

$$x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$$

可以透過設計一個「二刻尺作圖法步驟」解出。

猜測二



r 的二次方程

能解幾次方程式？

$$\begin{cases} r = a\sec\theta + \varepsilon_1 b \\ r^2 - 2r_0 r\cos(\theta-\phi) + r_0^2 - s^2 = 0 \end{cases}$$

（直線的軌跡曲線）

（圓）

$\Big\downarrow$（消去$\boldsymbol{\theta}$）

r 的六次方程式

$$r^6 + 2\varepsilon_1 b r^5 + \left(b^2 - 4f + 2g - 4h^2\right)r^4 + \left(-4\varepsilon_1 b\right)\left(f - g + 2h^2\right)r^3$$
$$+\left(4i^2 + 2b^2 g - 4b^2h^2 - 4fg + g^2\right)r^2 + \left(-2\varepsilon_1 b\right)\left(2fg - g^2\right)r + b^2g^2 = 0$$

其中 $f = r_0 a\cos\phi,\ g = r_0^2 - s^2,\ h = r_0\sin\phi, i = r_0 a$

解幾次方程式？

係數與作圖參數的關係

$$x^6 + 2\varepsilon_1 b x^5 + \left(b^2 - 4f + 2g - 4h^2\right)x^4 + \left(-4\varepsilon_1 b\right)\left(f - g + 2h^2\right)x^3$$
$$+\left(4i^2 + 2b^2 g - 4b^2 h^2 - 4fg + g^2\right)x^2 + \left(-2\varepsilon_1 b\right)\left(2fg - g^2\right)x + b^2 g^2 = 0$$

幾乎已經固定的五次項係數

比較係數……

$$\left(x^5 + b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0\right)\left[x + \left(2\varepsilon_1 b - b_4\right)\right]$$
$$= x^6 + 2\varepsilon_1 x^5 + \left[b_4\left(2\varepsilon_1 b - b_4\right) + b_3\right]x^4 + \left[b_3\left(2\varepsilon_1 b - b_4\right) + b_2\right]x^3$$
$$+\left[b_2\left(2\varepsilon_1 b - b_4\right) + b_1\right]x^2 + \left[b_1\left(2\varepsilon_1 b - b_4\right) + b_0\right]x + \left(2\varepsilon_1 b - b_4\right)b_0 = 0$$

因此，至多能解五次方程式

解五次方程式-
係數與作圖參數的關係

$$
\begin{cases}
b_4\left(2\varepsilon_1 b-b_4\right)+b_3=b^2-4f+2g-4h^2 \\
b_3\left(2\varepsilon_1 b-b_4\right)+b_2=\left(-4\varepsilon_1 b\right)\left(f-g+2h^2\right) \\
b_2\left(2\varepsilon_1 b-b_4\right)+b_1=4i^2+2b^2g-4b^2h^2-4fg+g^2 \\
b_1\left(2\varepsilon_1 b-b_4\right)+b_0=\left(-2\varepsilon_1 b\right)\left(2fg-g^2\right) \\
\left(2\varepsilon_1 b-b_4\right)b_0=b^2g^2
\end{cases}
$$

$$
b_0\left(-\varepsilon_1 b_3 b_4+\varepsilon_1 b_2-4\varepsilon_1 b_4 b^2+2b_4^2 b+2b^3\right)^2\left(2\varepsilon_1 b-b_4\right)=\left(-2b_1 b^2+3\varepsilon_1 b_0 b-2b_0 b_4+\varepsilon_1 b_1 b_4 b\right)^2
$$

b 的七次方程！？

解五次方程式-
係數與作圖參數的關係

假設$b = b_{\mathrm{k}}$……

引理五-以係數表達作圖參數

如果 b 存在合理且二刻尺可作的解 b_k，則作圖參數的解如下：

$$a=\frac{\varepsilon_3 i}{h}\sqrt{\frac{i^2-f^2}{i^2}},\ b=b_k,\ r_0=\varepsilon_3 h\sqrt{\frac{i^2}{i^2-f^2}},\ \cos\phi=\frac{f}{i},\ s=\sqrt{\frac{h^2i^2-gi^2+gf^2}{i^2-f^2}}$$

引理五-以係數表達作圖參數

其中

$$b = b_k,$$

$$f = \frac{-\varepsilon_1 b_3 b_4 + \varepsilon_1 b_2 - 4\varepsilon_1 b_4 b_k^2 + 2b_4^2 b_k + 2b_k^3}{4b_k},$$

$$g = \frac{-2b_1 b_k^2 + 3\varepsilon_1 b_0 b_k - 2b_0 b_4 + \varepsilon_1 b_1 b_4 b_k}{-\varepsilon_1 b_3 b_4 b_k + \varepsilon_1 b_2 b_k - 4\varepsilon_1 b_4 b_k^3 + 2b_4^2 b_k^2 + 2b_k^4},$$

$$h = \varepsilon_3 \sqrt{\frac{-b_3 b_k + \varepsilon_1 b_3 b_4 - \varepsilon_1 b_2 + 2\varepsilon_1 b_4 b_k^2 - b_4^2 b_k - b_k^3}{4b_k} + \frac{-2b_1 b_k^2 + 3\varepsilon_1 b_0 b_k - 2b_0 b_4 + \varepsilon_1 b_1 b_4 b_k}{-2\varepsilon_1 b_3 b_4 b_k + 2\varepsilon_1 b_2 b_k - 8\varepsilon_1 b_4 b_k^3 + 4b_4^2 b_k^2 + 4b_k^4}},$$

$$i = \varepsilon_4 \sqrt{2\varepsilon_1 b_2 b_k - b_2 b_4 + b_1 - 2b_k^2 g + 4b_k^2 h^2 + 4fg + g^2}$$

引理六-限制條件

同樣利用三角函數與根號的性質，可以二刻尺作圖法解出的保守限制條件。

$$g < \frac{h^2 i^2}{i^2 - f^2}, i^2 - f^2 > 0, 2\varepsilon_1 b_2 b_{\mathrm{k}} - b_2 b_4 + b_1 - 2b_{\mathrm{k}}^2 g + 4b_{\mathrm{k}}^2 h^2 + 4fg + g^2 > 0$$

$$\frac{-b_3 b_{\mathrm{k}} + \varepsilon_1 b_3 b_4 - \varepsilon_1 b_2 + 2\varepsilon_1 b_4 b_{\mathrm{k}}^2 - b_4^2 b_{\mathrm{k}} - b_{\mathrm{k}}^3}{4b_{\mathrm{k}}} + \frac{-2b_1 b_{\mathrm{k}}^2 + 3\varepsilon_1 b_0 b_{\mathrm{k}} - 2b_0 b_4 + \varepsilon_1 b_1 b_4 b_{\mathrm{k}}}{-2\varepsilon_1 b_3 b_4 b_{\mathrm{k}} + 2\varepsilon_1 b_2 b_{\mathrm{k}} - 8\varepsilon_1 b_4 b_{\mathrm{k}}^3 + 4b_4^2 b_{\mathrm{k}}^2 + 4b_{\mathrm{k}}^4} \geq 0$$

引理七-ε的討論

ε	意義	是否影響解方程式	原因
ε_1	蚌線的內外兩支	是，但可自由選擇	出現在引理一的式子中
ε_2	θ 的象限	否	推導過程中會被消去
ε_3	φ 的象限	否	推導過程中會被消去
ε_4	a 的正負	否	對稱性

引理八-五次方程式的負根

$x=-\alpha\ (\alpha>0)$ 是 $x^5+b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0=0$ 的解

$$\Big\downarrow \text{（代入）}$$

$x=\alpha$ 是 $x^5-b_4x^4+b_3x^3-b_2x^2+b_1x-b_0=0$ 的解

如果將ε_1 調為 -ε_1 ，此方程式的作圖參數會和原方程式相等。

因此，可以從軌跡曲線的另外一支找到五次方程式的負根。

定理二

給定一個五次方程式

$$x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$$

無法用二刻尺解出。除非解出作圖參數的七次方程有合理的解，且係數亦在限制條件之內，方可用二刻尺解出。

結論與未來展望

結論

- 係數如果在限制條件內，可以透過設計「二刻尺作圖法步驟」，解出三次方程式。
- 解出作圖參數的七次方程有合理的解，且係數亦在限制條件之內，五次方程式方可用二刻尺解出。

未來展望

一、可以找出更多的途徑求解方程式。

二、將此對應應用在證明正多邊形的二刻尺可作。

三、學習更多的代數幾何、抽象代數，給出更完整的解釋與整理。

感謝

- 指導老師：姚志鴻老師、施翔仁老師
- 一起在數專奮鬥的同學們
- 數資班的同學們
- 父母與親友們
- 一路相挺的專題好夥伴
- 攝影機前的所有觀眾們

報告到此結束。

以二刻尺作圖解方程式

邱巖盛

指導老師： 姚志鴻老師