

# Cheat Sheet Series de Tiempo

Por Marcelo Moreno - Universidad Rey Juan Carlos  
Como parte del Econometrics Cheat Sheet Project

## Conceptos básicos

### Definiciones

**Serie temporal** - es una sucesión de observaciones cuantitativas de un fenómeno ordenadas en el tiempo.

Hay algunas variaciones de serie temporal:

- **Datos de panel** - consiste en una serie temporal para cada observación de una sección cruzada.
- **Secciones transversales agrupadas** - combina secciones cruzadas de diferentes periodos de tiempo.

**Proceso estocástico** - es una secuencia de variables aleatorias que están indexadas en el tiempo.

### Componentes de una serie temporal

- **Tendencia** - es el movimiento general a l/p de una serie.
- **Variaciones estacionales** - son oscilaciones periódicas que son producidas en un período igual o inferior al año, y pueden ser fácilmente identificadas en diferentes años (usualmente son el resultado de la climatología).
- **Ciclo** - son oscilaciones periódicas que se producen en un periodo mayor al año (son resultado del ciclo económico).
- **Variaciones residuales** - son movimientos que no siguen una oscilación periódica identificable (resultado de fenómenos eventuales no permanentes que pueden afectar a la variable estudiada en un momento dado).

### Tipos de modelos de series temporales

- **Modelos estáticos** - la relación entre  $y$  y  $x$ 's es contemporánea. Conceptualmente:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

- **Modelos de rezagos distribuidos** - la relación entre  $y$  y  $x$ 's no es contemporánea. Conceptualmente:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \dots + \beta_s x_{t-(s-1)} + u_t$$

El efecto acumulado a largo plazo en  $y$  cuando  $\Delta x$  es:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s$$

- **Modelos dinámicos** - un rezago de la variable dependiente es parte de las variables independientes (endogeneidad). Conceptualmente:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_s y_{t-s} + u_t$$

- Combinaciones de lo anterior, como modelos de rezagos distribuidos racionales (rezagos distribuidos + dinámicos).

## Supuestos y propiedades

### Supuestos MCO bajo series temporales

Bajo estos supuestos, los estimadores de los parámetros MCO presentarán buenas propiedades. **Supuestos Gauss-Markov** extendidos en series temporales:

- st1. **Linealidad de parámetros y dependencia débil.**
- $y_t$  debe ser una función lineal de  $\beta$ 's.
  - El proceso estocástico  $\{(x_t, y_t) : t = 1, 2, \dots, T\}$  es estacionario y débilmente dependiente.
- st2. **No colinealidad perfecta.**
- No hay variables independientes que sean constantes:  $\text{Var}(x_j) \neq 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$ .
  - No hay una relación lineal exacta entre variables dependientes.
- st3. **Media condicional cero y correlación cero.**
- No hay errores sistemáticos:  $E(u|x_1, \dots, x_k) = E(u) = 0 \rightarrow$  **exogeneidad fuerte** (a implica b).
  - No hay variables relevantes no incluidas en el modelo:  $\text{Cov}(x_j, u) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \rightarrow$  **exogeneidad débil**.
- st4. **Homocedasticidad.** La variabilidad de los resid. es igual para cualquier nivel de  $x$ :  $\text{Var}(u|x_1, \dots, x_k) = \sigma_u^2$
- st5. **No autocorrelación.** Los residuos no contienen información sobre otros residuos:  $\text{Corr}(u_t, u_s|x_1, \dots, x_k) = 0 \quad \forall t \neq s$ .
- st6. **Normalidad.** Los residuos son independientes e idénticamente distribuidos (**i.i.d.**):  $u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$
- st7. **Tamaño de datos.** El número de observaciones disponibles debe ser mayor a  $(k+1)$  parámetros a estimar. (Ya satisfecho bajo situaciones asintóticas)

### Propiedades asintóticas de MCO

Bajo los supuestos del modelo econométrico y el Teorema Central del Límite:

- De (1) a (3a): MCO es **insesgado**.  $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$
- De (1) a (3): MCO es **consistente**.  $\text{plim}(\hat{\beta}_j) = \beta_j$  (a (3b) sin (3a), exogeneidad débil, insesg. y consistente).
- De (1) a (5): **normalidad asintótica** de MCO (entonces, (6) es necesariamente satisfecho):  $u \sim_a \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$
- De (1) a (5): **estimador insesgado** de  $\sigma_u^2$ .  $E(\hat{\sigma}_u^2) = \sigma_u^2$
- De (1) a (5): MCO es **MELI** (Mejor Estimador Lineal Insesgado) or **eficiente**.
- De (1) a (6): contrastes de hipótesis e intervalos de confianza son fiables.

## Tendencia y estacionalidad

**Regresión espuria** - es cuando la relación entre  $y$  y  $x$  es debida a factores que afectan a  $y$  y que tienen correlación con  $x$ ,  $\text{Corr}(x, u) \neq 0$ . Es el **incumplimiento de st3**.

### Tendencia

Dos series temporales pueden tener la misma (o contraria) tendencia, lo que lleva a altos niveles de correlación. Esto provoca una falsa apariencia de causalidad, el problema es **regresión espuria**. Dado el modelo:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

donde:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Tendencia} + v_t$$

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 \text{Tendencia} + v_t$$

Añadir una tendencia al modelo puede resolver el problema:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 \text{Tendencia} + u_t$$

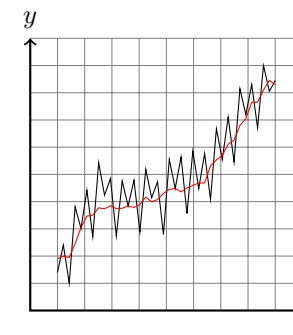
Una tendencia puede ser lineal o no lineal (cuadrática, cúbica, exponencial, etc.)

Otra manera, es hacer uso del **filtro Hodrick-Prescott** y extraer la tendencia (suavizado) y el componente cíclico.

### Estacionalidad

Una serie temporal puede manifestar estacionalidad.

Esto es, que la serie está sujeta a variaciones estacionales o patrones usualmente relacionados al clima. Por ejemplo, el PIB (negro) es usualmente mayor en verano y menor en invierno. Serie ajustada estacionalmente (rojo) en comparación.



- Este problema es **regresión espuria**. Un ajuste estacional puede solucionarlo.

Un **ajuste estacional** sencillo es crear variables estacionales binarias y añadirlas al modelo. Por ejemplo, una serie trimestral ( $Q_{qt}$  son variables binarias):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 Q_{2t} + \beta_2 Q_{3t} + \beta_3 Q_{4t} + \beta_4 x_{1t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

Otro método es ajustar estacionalmente (sa) las variables, y entonces, hacer la regresión con las variables ajustadas:

$$z_t = \beta_0 + \beta_1 Q_{2t} + \beta_2 Q_{3t} + \beta_3 Q_{4t} + v_t \rightarrow \hat{v}_t + E(z_t) = \hat{z}_t^{sa}$$
$$\hat{y}_t^{sa} = \beta_0 + \beta_1 \hat{x}_{1t}^{sa} + \dots + \beta_k \hat{x}_{kt}^{sa} + u_t$$

Hay métodos mucho mejores y complejos para ajustar estacionalmente, como el **X-13ARIMA-SEATS**.

# Autocorrelación

El residuo de cualquier observación,  $u_t$ , está correlacionado con el residuo de cualquier otra observación. Las observaciones no son independientes. Es el **incumplimiento** de st5.

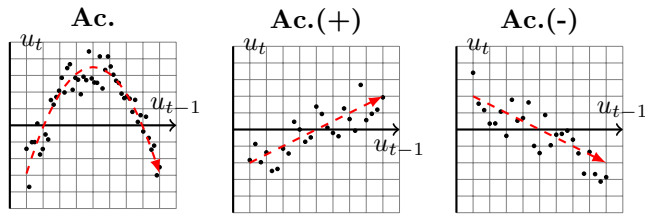
$$\text{Corr}(u_t, u_s | x_1, \dots, x_k) = \text{Corr}(u_t, u_s) \neq 0 \quad \forall t \neq s$$

## Consecuencias

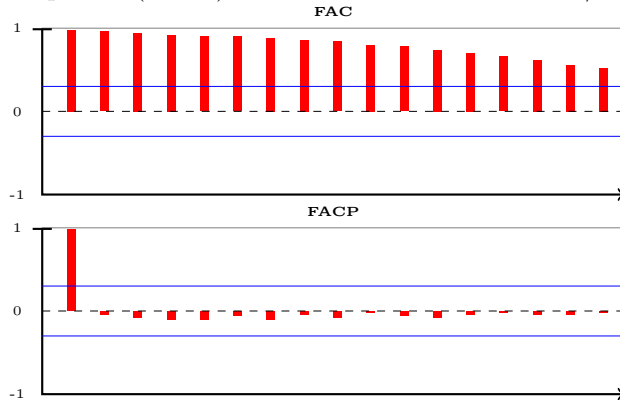
- Estimadores MCO son insesgados.
- Estimadores MCO son consistentes.
- MCO ya **no es eficiente**, pero sigue siendo ELI (Estimador Lineal Insesgado).
- La **estimación de la varianza** de los estimadores es **sesgada**: la construcción de intervalos de confianza y contraste de hipótesis no son fiables.

## Detección

- **Gráficos de dispersión** - buscar patrones de dispersión en  $u_{t-1}$  vs.  $u_t$ .



- **Correlograma** - com- Eje Y: correlación [-1,1]. puesto de la función de - Eje X: número de re-autocorrelación (FAC) y el tardo. FAC parcial (FACP). - Líneas azules:  $\pm 1.96/T^{0.5}$



Conclusiones difieren entre procesos de autocorrelación.

- **Proceso MA(q)**. **FAC**: sólo los  $q$  primeros coeficientes son significativos, el resto se anulan bruscamente. **FACP**: decrecimiento rápido exponencial atenuado u ondas sinusoidales.
- **Proceso AR(p)**. **FAC**: decrecimiento rápido exponencial atenuado u ondas sinusoidales. **FACP**: sólo los  $p$  primeros coeficientes son significativos, el resto se anulan bruscamente.
- **Proceso ARMA(p,q)**. **FAC** y **FACP**: los coeficientes no se anulan bruscamente y presentan un decrecimiento rápido.

Si los coeficientes de la FAC no decaen rápidamente, hay claro indicio de falta de estacionariedad en media, lo que llevaría a tomar primeras diferencias en la serie original.

- **Formal tests** - Generalmente,  $H_0$ : No autocorrelación. Suponiendo que  $u_t$  sigue un proceso AR(1):

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde  $\varepsilon_t$  es ruido blanco.

- **Prueba t AR(1)** (regresores exógenos):

$$t = \frac{\hat{\rho}_1}{\text{ee}(\hat{\rho}_1)} \sim t_{T-k-1, \alpha/2}$$

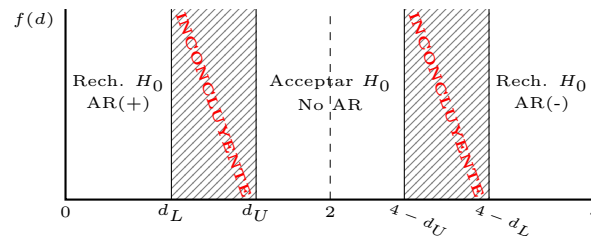
- \*  $H_1$ : Autocorrelación de orden uno, AR(1).

- **Estadístico Durbin-Watson** (regresores exógenos y normalidad de residuos):

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2} \approx 2 \cdot (1 - \hat{\rho}_1), \quad 0 \leq d \leq 4$$

- \*  $H_1$ : Autocorrelación de orden uno, AR(1).

$d =$	0	2	4
$\rho \approx$	1	0	-1



- **h de Durbin** (regresores endógenos):

$$h = \hat{\rho} \cdot \sqrt{\frac{T}{1-T \cdot v}}$$

donde  $v$  es la varianza estimada del coeficiente asociado a la variable endógena.

- \*  $H_1$ : Autocorrelación de orden uno, AR(1).
- **Prueba Breusch-Godfrey** (regresores endógenos): puede detectar procesos MA(q) y AR(p) ( $\varepsilon_t$  ruido b.):
- \* MA(q):  $u_t = \varepsilon_t - m_1 u_{t-1} - \dots - m_q u_{t-q}$
- \* AR(p):  $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \dots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$

Bajo  $H_0$ : No autocorrelación:

$$T \cdot R_{\hat{u}_t}^2 \underset{a}{\sim} \chi_q^2 \quad \text{or} \quad T \cdot R_{\hat{u}_t}^2 \underset{a}{\sim} \chi_p^2$$

- \*  $H_1$ : Autocorrelación de orden  $q$  (ó  $p$ ).

- **Prueba Ljung-Box Q**:

- \*  $H_1$ : Existe autocorrelación.

## Corrección

- Usar MCO con un estimador de la matriz de varianzas-covarianzas **robusto a la heterocedasticidad y autocorrelación** (HAC), por ejemplo, la propuesta de **Newey-West**.
- Usar **Mínimos Cuadrados Generalizados** (MCG). Suponiendo  $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$ , con  $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ , donde  $|\rho| < 1$  y  $\varepsilon_t$  es **ruido blanco**.
  - Si  $\rho$  es **conocido**, usar **modelo cuasi-diferenciado**:  

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + u_t - \rho u_{t-1}$$

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_t^* + \varepsilon_t$$
 donde  $\beta_1^* = \beta_1$ ; y estimarlo por MCO.
  - Si  $\rho$  es **desconocido**, estimarlo -por ejemplo- el **método iterativo de Cochrane-Orcutt** (el método de Prais-Winsten también es bueno):
    1. Obtener  $\hat{u}_t$  del modelo original.
    2. Estimar  $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$  y obtener  $\hat{\rho}$ .
    3. Crear un modelo cuasi-diferenciado:  

$$y_t - \hat{\rho} y_{t-1} = \beta_0(1 - \hat{\rho}) + \beta_1(x_t - \hat{\rho} x_{t-1}) + u_t - \hat{\rho} u_{t-1}$$

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_t^* + \varepsilon_t$$
 donde  $\beta_1^* = \beta_1$ ; y estimarlo por MCO.
    4. Obtener  $\hat{u}_t^* = y_t - (\hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_t) \neq y_t - (\hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_t^*)$ .
    5. Repetir desde el paso 2. El método termina cuando los parámetros estimados varían muy poco entre iteraciones.
- Si no se arregla, buscar **fuerte dependencia** en la serie.

## Estacionariedad y dependencia débil

Estacionariedad es estabilidad de las distribuciones conjuntas de probabilidad de un proceso a medida que este progresa el tiempo. Permite identificar correctamente las relaciones -inalteradas en el tiempo- entre variables.

## Procesos estacionarios y no estacionarios

- **Proceso estacionario** (estacionariedad fuerte) - la dist. de prob. es estable en el tiempo: si se toma cualquier colección de variables aleatorias, y se mueven  $h$  periodos, la dist. conjunta de prob. debe permanecer inalterada.

- **Proceso no estacionario** - por ejemplo, una serie con tendencia, donde al menos la media cambia con el tiempo.
- **Proceso estacionario en covarianza** - es una forma más débil de estacionariedad:
  - $E(x_t)$  es constante.
  - $\text{Var}(x_t)$  es constante.
  - Para cualquier  $t, h \geq 1$ , la  $\text{Cov}(x_t, x_{t+h})$  depende sólo de  $h$ , no de  $t$ .

### Series temporales de dependencia débil

Es importante porque reemplaza el requisito de muestreo aleatorio, dando por supuesto la validez del Teorema Central del Límite (requiere estacionariedad y una forma de dependencia débil). Los procesos débilmente dependientes también se conocen como, **integrado de orden cero**,  $I(0)$ .

- **Dependencia débil** - restringe cuán cercana la relación entre  $x_t$  y  $x_{t+h}$  puede ser a medida que la distancia temporal entre las series aumenta ( $h$ ).

Un **proceso estacionario**  $\{x_t : t = 1, 2, \dots, T\}$  es débilmente dependiente cuando  $x_t$  y  $x_{t+h}$  son casi independientes a medida que  $h$  aumenta sin límite.

Un **proceso estacionario en covarianza** es débilmente dependiente si la correlación entre  $x_t$  y  $x_{t+h}$  tiende a 0 lo suficientemente rápido cuando  $h \rightarrow \infty$  (no están asintóticamente correlacionados).

Algunos ejemplos de series estacionarias y débilmente dependientes:

- **Media móvil** -  $\{x_t\}$  es una media móvil de orden uno  $MA(q)$ :

$$x_t = e_t + m_1 e_{t-1} + \dots + m_q e_{t-q}$$

donde  $\{e_t : t = 0, 1, \dots, T\}$  es una secuencia *i.i.d.* con media cero y varianza  $\sigma_e^2$ .

- **Proceso autorregresivo** -  $\{x_t\}$  es un proceso autorregresivo de orden uno  $AR(p)$ :

$$x_t = \rho_1 x_{t-1} + \dots + \rho_p x_{t-p} + e_t$$

donde  $\{e_t : t = 0, 1, \dots, T\}$  es una secuencia *i.i.d.* con media cero y varianza  $\sigma_e^2$ .

Si  $|\rho_1| < 1$ , entonces  $\{x_t\}$  es un proceso  $AR(1)$  que es débilmente dependiente. Es estacionario en covarianza,  $\text{Corr}(x_t, x_{t-1}) = \rho_1$ .

- **Proceso ARMA** - es una combinación de los dos anteriores.  $\{x_t\}$  es un  $ARMA(p, q)$ :

$$x_t = e_t + m_1 e_{t-1} + \dots + m_q e_{t-q} + \rho_1 x_{t-1} + \dots + \rho_p x_{t-p}$$

Una serie con tendencia no puede ser estacionaria, pero puede ser débilmente dependiente (y estacionaria si la serie es filtrada de tendencia).

## Series temporales de depend. fuerte

La mayoría del tiempo, las series económicas presentan dependencia fuerte (o fuerte persistencia temporal). Algunos casos especiales de procesos de **raíz unitaria**,  $I(1)$ :

- **Paseo aleatorio** - un proceso  $AR(1)$  con  $\rho_1 = 1$ .

$$y_t = y_{t-1} + e_t$$

donde  $\{e_t : t = 1, 2, \dots, T\}$  es una secuencia *i.i.d.* con media cero y varianza  $\sigma_e^2$  (la última cambia con el tiempo). El proceso no es estacionario, es persistente.

- **Paseo aleatorio con deriva** - un proceso  $AR(1)$  con  $\rho_1 = 1$  y una constante.

$$y_t = \beta_0 + y_{t-1} + e_t$$

donde  $\{e_t : t = 1, 2, \dots, T\}$  es una secuencia *i.i.d.* con media cero y varianza  $\sigma_e^2$ .

El proceso no es estacionario, es persistente.

### Detección de $I(1)$

- **Prueba aumentada de Dickey-Fuller** (ADF) - donde  $H_0$ : el proceso es raíz unitaria,  $I(1)$ .
- **Prueba Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin** (KPSS) - donde  $H_0$ : el proceso no es raíz unitaria,  $I(0)$ .

### Transformar raíz unitaria a depend. débil

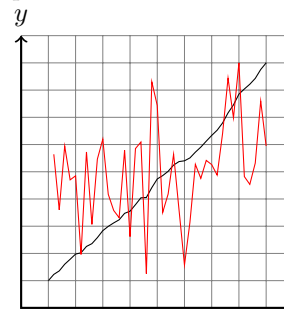
Los procesos de **raíz unitaria** son **integrados de orden uno**,  $I(1)$ . Esto significa que la **primera diferencia** del proceso es **débilmente dependiente** ó  $I(0)$  (y usualmente, estacionaria). Por ejemplo, un paseo aleatorio:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = e_t$$

donde  $\{e_t\} = \{\Delta y_t\}$  es *i.i.d.*

Tomar la primera diferencia de una serie también elimina su tendencia.

Por ejemplo, una serie con tendencia (negro), y su primera diferencia (rojo).



Cuando una serie  $I(1)$  es estrictamente positiva, se suele transformar a logaritmos antes de tomar primeras diferencias. Esto es, para obtener el cambio porcentual (aprox.) de la serie:

$$\Delta \log(y_t) = \log(y_t) - \log(y_{t-1}) \approx \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$$

## Cointegración

Cuando **dos series son  $I(1)$ , pero una combinación lineal de estas es  $I(0)$** . Si es el caso, la regresión de una serie sobre la otra no es espuria, sino que expresa algo sobre la relación a largo plazo. Se llama cointegradas a las variables que tienen una tendencia estocástica común.

Por ejemplo:  $\{x_t\}$  y  $\{y_t\}$  son  $I(1)$ , pero  $y_t - \beta x_t = u_t$  donde  $\{u_t\}$  es  $I(0)$ . ( $\beta$  toma el nombre de parámetro cointegrador).

## Heterocedasticidad en series temp.

Afecta al **supuesto st4**, lo que lleva a que **MCO no sea eficiente**.

Algunas pruebas que funcionan pueden ser la de Breusch-Pagan o la de White, donde  $H_0$ : No heterocedasticidad. Es **importante** que **no** haya **autocorrelación** para el correcto funcionamiento de las pruebas (así que, primero es imperativo probar la existencia de autocorrelación).

### ARCH

Heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH), es un modelo para analizar una forma de heteroced. dinámica, donde la varianza del error sigue un proceso  $AR(p)$ .

Dado el modelo:  $y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t$  donde, hay  $AR(1)$  y heterocedasticidad:

$$E(u_t^2 | u_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

### GARCH

La heterocedasticidad condicional autorregresiva general (GARCH), es un modelo similar a ARCH, pero en este caso, la varianza del error sigue un proceso  $ARMA(p, q)$ .

## Suavizado exponencial

$$f_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) f_{t-1}$$

donde  $0 < \alpha < 1$  es el parámetro de suavizado.

## Predicciones

Dos tipos de predicciones:

- Valor medio de  $y$  para un valor específico de  $x$ .
  - Valor individual de  $y$  para un valor específico de  $x$ .
- Si los valores de las variables ( $x$ ) se aproximan al valor medio ( $\bar{x}$ ), la amplitud del intervalo de confianza de la predicción será menor.