

Aplicação do algoritmo de colônia de formigas para resolução do Problema das Múltiplas Mochilas

Cassiano H. da Silva¹, Geovani S. Celebrim¹

¹ Departamento de Ciência da Computação – Instituto Multidisciplinar
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)
Nova Iguaçu – RJ – Brasil

cassianohsilva@ufrrj.br, geovanicelebrim@ufrrj.br

Abstract. *In the present work, we study the Multiple Knapsack Problem. In this problem, we consider a set of knapsacks of varied capacities and a set of items with varied weights and profit values. The goal is to maximize the total weight of the chosen items. Our objective of this work consists in solving the Multiple Knapsack Problem using the Ant Colony algorithm. This metaheuristic was inspired by the collective behavior of worker ants in a colony: when searching for food, they leave a pheromone trail. Here, the virtual ants walk past each of the items, checking if they can be put into each of the available knapsacks, and choose the most interesting combination. In order to measure the efficiency of the methodology, we have experimented with a set of 17 different instances, varying from 1 to 50 knapsacks and from 10 to 100 items; the results were compared with those given by an exact algorithm. Our algorithm reached the optimal solution on 90% of the runs. In the best case, its execution was 99,99% faster than a parallel implementation of the exact algorithm, while it also obtained the optimal solution.*

Resumo. *Neste trabalho, estudamos o Problema das Múltiplas Mochilas. Nesse problema, consideramos um conjunto de mochilas de diferentes capacidades e um conjunto de itens com pesos e valores variados. O objetivo é maximizar o valor total dos itens alocados nesses repositórios. Objetivamos, pois, aplicar o algoritmo de Colônias de Formigas para solucionar esse problema. Essa meta-heurística baseia-se no comportamento das formigas, que, ao buscar alimento, deixam um rastro de feromônios no caminho. Aqui, as formigas artificiais percorrem cada um dos itens, verificando a viabilidade de este ser adicionado a cada uma das mochilas e escolhendo a mais viável. Para avaliar a qualidade da aplicação dessa metodologia, realizamos uma série de experimentos com um conjunto de 17 instâncias, variando de 1 a 50 mochilas, e de 10 a 100 itens; os resultados obtidos foram comparados com o método exato. Como resultado, obtivemos a solução ótima em 90% das execuções. Em relação ao tempo ao método exato paralelizado, obtivemos uma melhora de 99,99% no melhor caso, e obtendo o resultado ótimo.*

1. Introdução

A ascensão da tecnologia, principalmente do âmbito computacional, torna palpável a resolução de problemas matemáticos complexos. Entretanto, existe ainda um conjunto de

problemas que possuem uma natureza complexa e, para que se obtenha com certeza sua melhor solução, é necessário analisar cada uma dentre todas as soluções possíveis para ele. Existem técnicas que buscam diminuir este espaço de busca, contudo, na maioria das vezes, ainda utilizando-se boas estratégias, o tempo até se chegar a solução ótima é inviável. O conjunto de problemas que possui essas características compõe a classe de problemas NP-Difícil.

Apesar de não serem muito notados, esses problemas estão muito presentes no nosso dia-a-dia, viabilizando o estudo de meios viáveis para se alcançar soluções com boa qualidade com custo aceitável. Existe uma série de problemas matemáticos se enquadram nessas características. Neste trabalho exploraremos o problema denominado Problema das Múltiplas Mochilas que é uma variante do clássico Problema da Mochila.

Alguns autores como [Thiago Lomas Bretas et al. 2013] afirmam que o Problema da Mochila é um dos problemas mais importantes e estudados em otimização combinatória, devido à grande aplicabilidade que este problema possui. Neste problema o objetivo é ocupar uma mochila com itens que possuem um valor e um peso de forma a agregar o maior valor possível sem ultrapassar a capacidade máxima da mochila. Encontrar um subconjunto de itens cujo peso não ultrapasse a capacidade máxima da mochila e ao mesmo tempo o valor agregado seja o maior valor possível corresponde a resolver o Problema da Mochila [Taha et al. 2008].

No Problema das Múltiplas Mochilas a ideia é similar. Nesta variante há uma quantidade variada de mochilas, cada uma com sua própria capacidade. O objetivo é preencher as mochilas com uma combinação de itens de forma que o somatório dos valores agregados de todas as mochilas seja o maior possível e a capacidade de cada uma das mochilas não seja extrapolada. Preencher as mochilas com a combinação de itens que maximize o somatório do valor agregado sem extrapolar a capacidade de nenhuma das mochilas, consiste em resolver o Problema das Múltiplas Mochilas.

O presente trabalho utiliza uma estratégia bem conhecida denominada Colônia de Formigas para resolver o Problema das Múltiplas Mochilas. Também é realizado uma análise entre os resultados obtidos com a heurística e os resultados obtidos com um método exato. Este trabalho está organizado em sete seções principais, onde na segunda seção é realizado um apanhado teórico, apresentado melhor o problema da mochila e suas diferentes abordagens e variações encontradas na literatura. A terceira seção apresenta diferentes pesquisas e aplicações relacionadas à este trabalho. A quarta seção, discorre sobre o Problema das Múltiplas Mochilas. Na quinta seção é apresentado a meta-heurística colônia de formigas, detalhando seu funcionamento e suas características. Na sexta seção, é explicitado a metodologia empregada para solucionar o problema apresentado. A sétima seção apresenta os resultados obtidos com a estratégia empregada, mostrando que ela é uma boa escolha para solucionar este problema. Por fim, a oitava seção sumariza o trabalho trazendo suas conclusões e trabalhos futuros.

2. Abordagens e variações

Na literatura é possível encontrar fontes que afirmam que o problema da mochila teve sua origem no contexto militar, onde os soldados buscavam otimizar o uso da mochila carregando itens que agregassem mais valor, respeitando suas restrições físicas. Segundo [Taha et al. 2008], o problema da mochila cabe perfeitamente na clássica dúvida sobre

que item um soldado deve inserir na mala. A figura 1 ilustra o problema, que consiste basicamente em preencher uma mochila sem ultrapassar sua capacidade, buscando otimizar o valor do produto carregado.

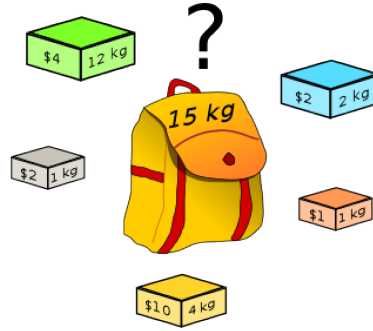


Figura 1. Ilustração do problema da mochila.

De acordo com [Leão et al. 2014] o problema da mochila é caracterizado por modelos que contém uma única mochila de capacidade fixa L e m itens contendo um peso p_i e um valor v_i . Podemos considerar que a variável x_i seja uma variável de decisão que define se o item i será alocado na mochila, ou seja, quando $x_i = 0$ o item não está na mochila e quando $x_i = 1$ o item está na mochila. Uma definição matemática para este problema pode ser dada pela equação 1.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_i \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^m p_i x_i \leq L \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{1}$$

Além da definição clássica, o problema da mochila possui algumas variações. Alguns autores definem essas variações como sendo subcategorias do problema clássico. No geral, a essência do problema é mantida, alterando-se apenas alguns detalhes para que a abordagem possa se adequar melhor à diferentes situações. Abaixo é apresentado algumas variações do problema clássico encontradas na literatura, acompanhada de uma breve descrição.

- **Problema da mochila compartimentada:** [Marques and Arenales 2002] apresenta o problema da mochila compartimentada através de uma situação hipotética onde um alpinista deve carregar sua mochila com possíveis itens de seu interesse. Cada item possui um peso e um valor, além de pertencer a um agrupamento distinto, como alimento, medicamento, utensílio, etc., e, portanto, deve estar em compartimentos separados na mochila. Os compartimentos da mochila são flexíveis e possuem capacidades limitadas. A inclusão de um compartimento tem um custo fixo que depende do agrupamento com que foi preenchido, além de introduzir uma perda da capacidade da mochila. O problema consiste em determinar as capacidades que melhor se adequam a cada compartimento e com quais itens estarão

preenchidos de forma que o valor de utilidade total seja maximizado, descontado o custo de incluir compartimentos.

- **Problema das Múltiplas Mochilas:** Este modelo pode ser definido como um conjunto de itens i que podem ser inseridos em várias mochilas m de capacidades diferentes c_i . Cada um dos itens possui um valor v_i e um peso p_i . O objetivo neste caso é definir quais itens serão inseridos em quais mochilas, de forma que não seja extrapolada a capacidade máxima de nenhuma das mochilas e o somatório do valor agregado seja maximizado. Esse problema pode ser aplicado a diversos segmentos, como carregamento de contêineres e cortes nas indústrias de papel e aço, por exemplo [Arenales et al. 2015]. Esta foi a abordagem explorada neste trabalho e portanto, é mais detalhada na seção quatro.

Da mesma forma que o clássico problema da mochila, suas variações também apresentam uma natureza complexa, dificultando o processo de obter a melhor solução. Métodos capazes de encontrar a solução exata podem demandar muito custo computacional, a depender do tamanho da instância do problema. Alguns autores como [Taha et al. 2008] e [Caldas 2004], apresentam os resultados obtidos na solução de problemas similares através de métodos exatos.

Alternativamente, com o intuito de trazer respostas de boa qualidade com um menor custo computacional, é comum o uso de meta-heurísticas para resolver esses tipos de problemas. Muitos autores apresentam na literatura resultados obtidos com meta-heurísticas como [Singh 2011], [Zorzal et al.] e [Liu et al. 2006], que aplicaram Algoritmos Genéticos, Busca Tabu e *Simulated Annealing*, respectivamente, para solucionar problemas semelhantes ao abordado neste trabalho. Em especial, [Shi 2006] utiliza a meta-heurística de Colônia de Formigas (CF) para resolver o problema da mochila binária. A CF foi a estratégia escolhida neste trabalho para resolver o Problema das Múltiplas Mochilas.

3. Trabalhos Relacionados

[Rennard 2006] apresenta pesquisas computacionais inspiradas na natureza. Um dos temas abordados neste livro é um estudo do problema das múltiplas mochilas utilizando o algoritmo de colônia de formigas, detalhando cada passo do procedimento de melhora da solução. Entretanto, sua definição do problema difere da de outros autores.

[Krause et al.] realiza uma análise sobre o comportamento de diversos algoritmos aplicados ao problema das múltiplas mochilas e apresenta quais algoritmos mais se adequaram a cada cenário. Em sua pesquisa é possível encontrar desde a modelagem matemática até as estratégias de implementação utilizadas.

[Bischoff 2011] utiliza a abordagem das Múltiplas Mochilas para modelar um problema de alocação de recursos de redes de telecomunicação. É apresentada uma análise que afirma que este modelo apresenta bons resultados quando a necessidade é maximizar a qualidade geral do uso dos recursos. Afirma ainda que sua principal desvantagem se deve ao fato de o universo de pesquisas para esta variação do problema da mochila ainda ser pequeno, se comparado às outras variações do problema.

[Camati et al. 2014] propuseram uma estratégia para solucionar o problema de alocação de recursos para máquinas virtuais. O problema real foi modelado como um

problema de múltiplas mochilas multidimensional, onde dado um conjunto inicial de máquinas virtuais de diferentes custos e recursos, um subconjunto desse conjunto é retirado e alocado em um grupo de servidores com o objetivo de otimizar o uso dos recursos de cada servidor, evitando que ele fique ocioso e, conseqüentemente, minimizando os gastos, como o consumo de energia elétrica.

[Modenesi 2008] aplica uma variação do Problema das Múltiplas Mochilas ao problema em balanceamento de carga entre recursos computacionais. A heurística desenvolvida e acrescentada ao algoritmo paralelo trata o problema da distribuição das partições por processadores como equivalente à solução do problema da mochila. Neste caso, o objetivo é preencher o menor número de mochilas, que representam as filas de processamento, com itens, que representam as partições, de forma a respeitar uma dada capacidade computacional média calculada para o processamento. Com isso, espera-se otimizar o uso dos recursos disponíveis.

[Khuri et al. 1994] propõe a utilização de algoritmos genéticos para solucionar o Problema das Múltiplas Mochilas. Seu algoritmo foi aplicado em algumas instâncias obtidas na literatura e obteve bons resultados, mostrando que utilizar a técnica dos algoritmos genéticos pode apresentar bons resultados em problemas que possuem características semelhantes às deste problema.

Em [Kong et al. 2008] é proposto um algoritmo baseado na meta-heurística de Colônia de Formigas para o Problema de Mochila Multidimensional. Foi mostrado que o algoritmo proposto é capaz de alcançar bons resultados em quase todos os casos, mostrando-se mais eficiente que outras meta-heurísticas aplicadas ao mesmo problema.

4. O Problema das Múltiplas Mochilas

O Problema das Múltiplas Mochilas, que também é referenciado na literatura por nomes diferentes, como *Multiconstraint Knapsack Problem* ou *0/1 Multidimensional Knapsack Problem* [Khuri et al. 1994], é uma generalização ou variação do problema da mochila simples, apresentado na segunda seção. Neste modelo, o problema da mochila comum é estendido, passando a possuir agora não uma, mas um conjunto de mochilas de capacidades variadas, como é apresentado na figura 2.

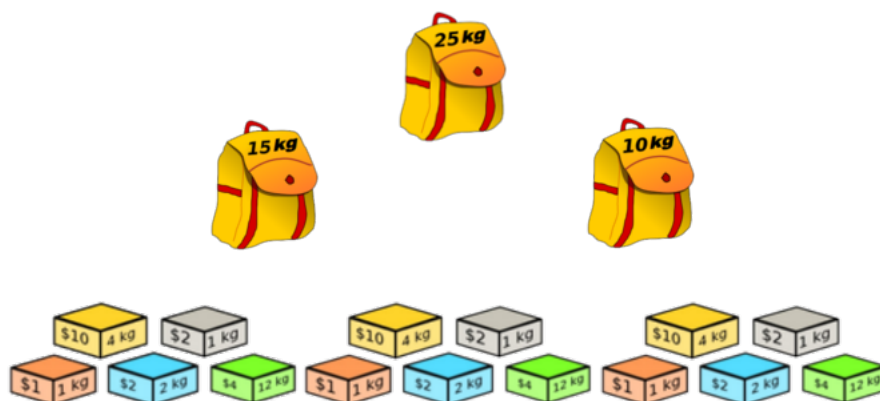


Figura 2. Ilustração do problema das múltiplas mochilas.

O Problema das Múltiplas Mochilas pode ser definido como um conjunto de m itens para serem alocados em n mochilas. Cada item m_i possui um peso p_i e um valor v_i . As mochilas possuem capacidades L_i e podem ser variadas. O problema consiste em inserir os itens nas mochilas de modo a maximizar o valor total e não ultrapassar a capacidade máxima de nenhuma das mochilas. Esse problema possui aplicações em esquema de criptografia pública [Diffie and Hellman 1976], problemas de tolerância a falhas [Sinha and Zoltners 1979], problemas de alocação e escalonamento de recursos, entre outros. [Martello and Toth 1990] apresenta a formulação matemática deste problema de acordo com a função de maximização apresentada na equação 2.

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^m p_i x_{ij} \leq L_j, j = 1, \dots, n \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, i = 1, \dots, m \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2}$$

onde:

- x_{ij} : indice se o item i está ($x_{ij} = 1$), ou não ($x_{ij} = 0$), na mochila j ;
- L_j : capacidade da mochila j ;
- m : número de itens;
- n : número de mochilas;
- p_i : peso do item i ;
- v_i : valor do item i ;

A equação 2 maximiza o valor total obtido inserindo os elementos nas mochilas, sem exceder a capacidade máxima de nenhuma delas. Outra restrição imposta é que um item pode estar em apenas uma mochila, ou seja, se ele está na mochila A, não pode estar em nenhuma outra ao mesmo tempo. A seção seguinte apresenta a estratégia baseada em colônia de formigas, que foi o mecanismo utilizado para resolver o Problema das Múltiplas Mochilas neste trabalho.

5. Meta-heurística Colônia de formigas

Meta-heurísticas são métodos utilizados para solucionar problemas principalmente da área de otimização. Grande parte das meta-heurísticas são baseadas em comportamento dos animais, seja de forma individual ou em seu convívio coletivo. Neste trabalho foi escolhido a otimização por colônia de formigas, que em [BOZDOĞAN et al. 2010], onde foi comparado com o desempenho de outras meta-heurísticas, apresentou o melhor desempenho. A seguir é apresentado como se dá o funcionamento das colônias de formigas reais para que seja apresentado como a meta-heurística funciona.

5.1. Colônias de formigas reais

As colônias de formigas caracterizam-se pelo modo cooperativo em que as formigas realizam tarefas para manter suas colônias. Uma característica desses insetos é a capacidade

de adaptação a novos ambientes [Hölldobler and Wilson 1990]. Como pode ser observado na figura 3, quando uma rota de uma formiga já existente (figura 3-a) é interceptada (figura 3-b), as formigas encontram um novo caminho (figura 3-c). O mais interessante é que elas são capazes de determinar a melhor rota entre dois pontos. Apesar de algumas formigas tomarem o caminho pela esquerda (mais longo), a grande maioria é capaz de determinar a rota mais curta após a mudança do cenário.

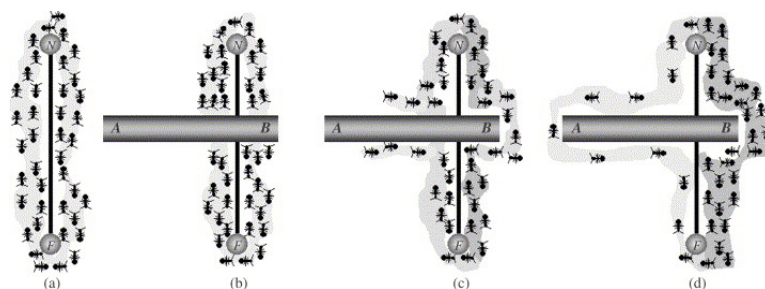


Figura 3. Ilustração do comportamento das formigas [Zecchin et al. 2006].

A forma que as formigas conseguem alcançar esse trajeto ótimo é relativamente simples. Inicialmente elas seguem trajetos aleatórios, buscando fontes de alimentos. Enquanto buscam, elas vão depositando uma substância denominada feromônio. A quantidade do feromônio depositado está relacionada à qualidade e à quantidade do alimento encontrado. Desta forma, quando outras formigas saem em busca de alimentos, essas podem se orientar pelos feromônios depositados nos caminhos. Quanto maior a quantidade de feromônio presente em um caminho, melhor é aquela rota. Isso se dá pois outra característica do feromônio é a evaporação. Dessa forma, nos caminhos mais longos, o feromônio acaba ficando enfraquecido mais rapidamente, enquanto nos caminhos menores ele é reforçado com mais frequência, demorando mais a desaparecer. Como uma reação em cadeia, mais formigas passam por aquele caminho aumentando ainda mais a quantidade de feromônio.

Uma vez que as colônias de formigas naturalmente resolvem problemas de otimização de forma instintiva, seu comportamento passou a ser observado e tentaram ser simulados na meta-heurística atualmente conhecida de Colônia de Formigas (CF). A seguir será apresentado como é feita a analogia das colônias de formigas reais para as artificiais.

5.2. Colônia de formigas artificiais

[Dorigo et al. 1996] propõe uma meta-heurística baseada no comportamento das colônias de formigas forrageiras denominada sistema de formigas. Esta meta-heurística, como as demais, não garante uma solução ótima, mas traz boas soluções em grande parte dos casos.

O funcionamento do algoritmo introduzido em [Dorigo et al. 2006] é dado da seguinte forma: a cada iteração as formigas são criadas para explorar o ambiente de soluções do problema utilizando o feromônio e assim gerando uma possível solução. Em cada solução gerada pode-se, opcionalmente, realizar uma busca local a partir da solução encontrada buscando melhorar a solução. Por fim, é realizada a atualização dos feromônios de acordo com a solução encontrada. Esse processo se repete até que as condições de saída sejam satisfeitas. A seguir é apresentado o algoritmo que implementa as funcionalidades apresentadas.

Algoritmo 1: Algoritmo básico da meta-heurística de colônia de formigas.

Entrada: Instância de um problema de otimização.

Saída: Solução otimizada para o problema de entrada.

```
1 início
2   Configuração de parâmetros, inicialização das soluções e dos feromônios;
3   Melhor solução = 0;
4   enquanto critério de parada não é satisfeito faça
5       para cada Formiga ∈ Colônia faça
6           Solução atual = Constrói uma solução;
7           Atualiza o feromônio;
8           se Solução atual é melhor que a Melhor solução então
9               Melhor solução = Solução atual;
10          fim
11      fim
12  fim
13 fim
14 retorna Melhor solução
```

No passo 2 do algoritmo 1 é realizada a configuração dos parâmetros, inicialização dos feromônios e a inicialização de uma solução aleatória para cada formiga. No passo 6, as soluções são construídas através de métodos probabilísticos. A solução é montada incrementalmente, respeitando as restrições do problema. Por fim, os feromônios são atualizados de acordo com as soluções obtidas e a próxima iteração é realizada, caso o critério de parada ainda não tenha sido satisfeito.

6. Metodologia

Para utilizar a colônia de formigas para no problema das múltiplas mochilas, foi necessário adaptar o algoritmo para que uma solução viável do fosse um “caminho” percorrido pela formiga artificial. Nessa técnica, cada formiga constrói sua própria solução inserindo itens nas mochilas de acordo com a equação probabilística. A trilha de feromônio muda dinamicamente, em tempo de execução do algoritmo. Nestas mudanças, os feromônios das melhores soluções são reforçados, fazendo com que as formigas tenham uma tendência a explorar soluções próximas às melhores soluções.

Inicialmente, é atribuída uma solução válida aleatória para cada mochila. Posteriormente, a cada iteração, as formigas escolhem um item i de valor v e peso p para inserir em uma mochila M_n de capacidade C_{m_n} . A probabilidade da formiga k que adicionou o item i de escolher o item j é dada pela fórmula equação 3.

$$p_{ij}^k = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{l \in N_j^k} \tau_{il}^\alpha \eta_{il}^\beta}, \text{ quando } j \in N_i^k \quad (3)$$

onde:

- τ_{ij} é o feromônio associado aos itens (i, j) ;
- α e β controlam a influência do feromônio e da informação heurística;
- N_j^k é o conjunto de itens não inseridos pela formiga k .

A atualização do feromônio τ_{ij} associado ao item (i, j) ocorre em dois eventos: evaporação e depósito de feromônio. A evaporação evita que o feromônio acumulado cresça infinitamente, permitindo esquecer soluções ruins do passado e tornando possível a busca por novas soluções. O depósito é necessário para que boas soluções se tornem mais “atrativas” para as formigas. A atualização do feromônio é dada pela equação 4.

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} + (1 - \rho)\tau_0 \quad (4)$$

onde:

- τ_0 é o valor inicial do feromônio;
- ρ é a taxa de evaporação do feromônio;
- τ_{ij} é o feromônio associado aos itens (i, j) .

Como critério de parada para o algoritmo, foi adotada a combinação de duas estratégias, onde a primeira é a estagnação, ou seja, quando quando as soluções passam a não variar mais a cada iteração, mostrando que o algoritmo convergiu para uma solução ótima local. O segundo critério é um número máximo de iterações que podem ser executadas pelo algoritmo. Por fim, para testar a performance da estratégia proposta, foi construído um algoritmo capaz de gerar instâncias de tamanhos variados, sendo estes tamanhos parâmetro para o algoritmo. A seção seguinte apresenta os resultados obtidos através dos testes executados.

7. Resultados

Para analisar a acurácia da estratégia utilizada, foi implementado um algoritmo para encontrar o resultado exato do Problema das Múltiplas Mochilas. Este algoritmo explora o paralelismo em CPU para que seja possível executar os experimentos em tempo viável, visto que a complexidade deste problema cresce abruptamente com um pequeno crescimento da instância. Na implementação exata é realizado o produto cartesiano das N possibilidades que um item pode se encontrar. Assim, são geradas todas as combinações de soluções possíveis para o problema. Para diminuir o espaço de busca, quando as soluções com um determinado prefixo são inviáveis, todas as resultantes daquele prefixo são ignoradas. O paralelismo se deu dividindo esse conjunto de soluções em partes e entregando cada parte a uma unidade de processamento.

A tabela 1 apresenta resultados exatos obtidos para 10 instâncias, todas com 10 itens, bem como sua relação com o resultado obtido com o algoritmo de Colônia de Formigas (CF) e o tempo gasto em cada método para cada uma das instâncias. Para estes experimentos, a CF tinha como parâmetro 10 formigas, $\rho = 0.9$, α e $\beta = 1$, tendo como critério de parada 50 iterações sem melhora. Todos os testes para o método exato foram realizados utilizando uma máquina com 64 núcleos Intel Xeon® E5-2676 v3 (Haswell) de 2,4 GHz e 256 GB de memória RAM. Na tabela é apresentado o tempo gasto pelo método exato para cada instância (TE). Já os testes utilizando a CF foram realizados em uma máquina com processador Intel® Core™ i3 com 2 núcleos de 3.3 GHz e 4 GB de memória RAM. Nos casos de teste da CF, o algoritmo foi executado 10 vezes para cada instância, sendo apresentado na tabela, para cada instância, o tempo médio gasto (TM), o pior resultado obtido (PO), o melhor resultado obtido (MO), a média (MED) e a porcentagem de vezes em que o algoritmo atingiu o resultado ótimo (AC).

Mochilas	TE (s)	Ótimo	TM (s)	PO	MO	MED	AC (%)
1	0.000285844	2537	0.0152537	2537	2537	2537	100
2	0.00297991	2377	0.0126714	2377	2377	2377	100
3	0.0307576	2825	0.0194751	2809	2825	2823.4	90
4	0.299833	1895	0.0203384	1895	1895	1895	100
5	1.8184	1887	0.0189687	1887	1887	1887	100
6	9.0451	2462	0.019309	2462	2462	2462	100
7	32.8973	2499	0.0194778	2499	2499	2499	100
8	105.849	2170	0.0186281	2170	2170	2170	100
9	300.601	1497	0.0122216	1497	1497	1497	100
10	785.315	2435	0.0204477	2435	2435	2435	100

Tabela 1. Resultados exatos X Meta-heurística

Uma vez que para instâncias relativamente pequenas a heurística obteve ótimos resultados com uma pequena quantidade de formigas, ela foi submetida a testes mais extremos. O tamanho das instâncias, número de itens e resultados obtidos podem ser observados na tabela 2. Para estes testes os parâmetros também foram 10 formigas, $\rho = 0.9$, α e $\beta = 1$. Como estas instâncias possuem um número muito grande de combinações, é inviável realizar testes com algoritmo exato implementado. Mesmo utilizando o paralelismo, o algoritmo demoraria, no mínimo, alguns dias para achar a solução.

Itens	Mochilas	TM (s)	Resultado (CF)
20	10	0.198137	5772
40	20	1.00368	22171
60	30	3.4042	31848
80	40	8.48763	39363
100	50	17.393	47810

Tabela 2. Resultados para instâncias maiores obtidos com a CF

Também foi realizado um estudo sobre as instâncias e a dificuldade de se encontrar soluções ótimas ou próximas às ótimas. Neste estudo foi possível perceber que aumentar o número de mochilas de uma instância aumenta o espaço de busca. Entretanto, se o número de itens permanece o mesmo, o problema passa a ter mais soluções viáveis, tornando o espaço de busca menos esparsa e, consequentemente, aumentando as chances de se alcançar o resultado ótimo. Por outro lado, aumentar apenas o número de itens, além de aumentar em uma proporção muito maior o espaço de busca, faz com que, com alta probabilidade, o número de soluções viáveis diminua, tornando o espaço de busca extremamente esparsa. Isso aumenta as chances de a heurística ficar presa em uma solução ótima local por não haver soluções viáveis em sua vizinhança.

Para demonstrar essa relação, foram geradas duas instâncias: instância *A*, com 2 mochilas e 12 itens e a instância *B* com 80 mochilas e 3 itens. Ambas as instâncias apresentam 531441 combinações possíveis. Com o auxílio de uma modificação no algoritmo de solução exata, que conta a quantidade de soluções viáveis, é possível observar que a instância *A* apresenta 28620 soluções viáveis, ou seja, pouco mais de 5% do espaço de busca é viável. Enquanto a instância *B* apresenta 332312 soluções viáveis, represen-

tando mais de 62% do espaço de busca. Com isso, é possível observar que a instância *A* apresenta um espaço de busca extremamente esparsa em relação à instância *B*. Ambas as instâncias foram submetidas a testes para verificar a qualidade dos resultados obtidos com o método CF. Da mesma forma que o experimento anterior, para cada instância o algoritmo CF foi executado 10 vezes. A tabela 3 apresenta o número de itens (*I*) e de mochilas (*M*), o tempo gasto pelo algoritmo exato (*TE*) bem como o resultado ótimo (*OT*), o tempo médio gasto pela CF (*TM*), o pior resultado das 10 execuções da CF (*PO*), o melhor resultado obtido (*MO*), a média (*MED*) e a porcentagem de vezes em que o algoritmo alcançou o resultado ótimo (*AC*).

Instância	I	M	TE (s)	OT	TM (s)	PO	MO	MED	AC (%)
A	12	2	1.49818	2189	0.004092	1763	2189	2038.1	40
B	3	80	0.832769	899	0.014738	899	899	899	100

Tabela 3. Resultados obtidos para as instâncias

Através dos resultados apresentados na tabela 3, é possível observar que quando há um espaço de busca mais esparsa, no caso da instância *A*, existe uma certa dificuldade para se encontrar a solução ótima, como pode ser observado na porcentagem de vezes que o algoritmo encontrou o resultado ótimo, em relação a instância *B*.

8. Conclusões

Neste trabalho foi apresentada a meta-heurística de colônia de formigas para resolver o problema de otimização combinatória denominado Problema das Múltiplas Mochilas, uma variação do problema da mochila clássico e que possui aplicações em diversas áreas de estudo.

Pôde-se observar através dos resultados que a meta-heurística se mostrou muito eficiente para solucionar esse problema, apresentando ótimos resultados em todos os casos. A qualidade dos resultados pôde ser analisada graças ao algoritmo exato paralelo implementado. Esta implementação apresentou um ganho de tempo quase que proporcional ao número de unidades de processamento utilizadas, sendo capaz de resolver problemas com grandes possibilidades em poucos segundos.

Foram apresentados resultados obtidos com a meta-heurística implementada para instâncias muito grandes, como uma instância com 50 mochilas e 100 itens, apresentando 51^{100} combinações possíveis. O resultado exato para estas instâncias não foi computado devido à sua grande complexidade, que faz com que o tempo gasto para sua solução seja impraticável.

Também foi analisado que existem instâncias que apresentam mais dificuldade para serem resolvidas do que outras, ainda que estas possuam a mesma quantidade de combinações possíveis. Esta característica pode ajudar a qualificar resultados obtidos de instâncias muito grandes, onde se é inviável o cálculo exato da solução.

Por fim, com a finalidade de qualificar os resultados obtidos com o algoritmo de Colônia de Formigas para instâncias maiores, temos como trabalhos futuros a implementação em GPU do algoritmo exato, minimizando o tempo para se encontrar a solução ótima do problema.

Referências

- Arenales, M., Armentano, V., Morabito, R., and Yanasse, H. (2015). *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Elsevier Brasil.
- Bischoff, E. (2011). Estudo da utilização de algoritmos genéticos para seleção de redes de acesso.
- BOZDOĞAN, A. Ö., Yilmaz, A. E., and Efe, M. (2010). Performance analysis of swarm optimization approaches for the generalized assignment problem in multi-target tracking applications. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 18(6):1059–1078.
- Caldas, R. B. (2004). Projeto e análise de algoritmos. *Universidade Federal de Minas Gerais*.
- Camati, R. S., Calsavara, A., and Lima Jr, L. (2014). Solving the virtual machine placement problem as a multiple multidimensional knapsack problem. *ICN 2014*, page 264.
- Diffie, W. and Hellman, M. (1976). New directions in cryptography. *IEEE transactions on Information Theory*, 22(6):644–654.
- Dorigo, M., Birattari, M., and Stutzle, T. (2006). Ant colony optimization. *IEEE computational intelligence magazine*, 1(4):28–39.
- Dorigo, M., Maniezzo, V., and Colorni, A. (1996). Ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 26(1):29–41.
- Hölldobler, B. and Wilson, E. O. (1990). *The ants*. Harvard University Press.
- Khuri, S., Bäck, T., and Heitkötter, J. (1994). The zero/one multiple knapsack problem and genetic algorithms. In *Proceedings of the 1994 ACM symposium on Applied computing*, pages 188–193. ACM.
- Kong, M., Tian, P., and Kao, Y. (2008). A new ant colony optimization algorithm for the multidimensional knapsack problem. *Computers & Operations Research*, 35(8):2672–2683.
- Krause, J., Cordeiro, J. A., and Lopes, H. S. Comparação de métodos de computação evolucionária para o problema da mochila multidimensional. *Meta-Heurísticas em Pesquisa Operacional*, pages 87–98.
- Leão, A. A., Cherri, L. H., and Arenales, M. N. (2014). Determining the k-best solutions of knapsack problems. *Computers & Operations Research*, 49:71–82.
- Liu, A., Wang, J., Han, G., Wang, S., and Wen, J. (2006). Improved simulated annealing algorithm solving for 0/1 knapsack problem. In *Intelligent Systems Design and Applications, 2006. ISDA'06. Sixth International Conference on*, volume 2, pages 1159–1164. IEEE.
- Marques, F. d. P. and Arenales, M. N. (2002). O problema da mochila compartimentada e aplicações. *Pesquisa Operacional*, 22(3):285–304.
- Martello, S. and Toth, P. (1990). *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc.

- Modenesi, M. V. (2008). *Análise de agrupamentos FCM utilizando processamento paralelo*. PhD thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO.
- Rennard, J.-P. (2006). *Handbook of research on nature-inspired computing for economics and management*. IGI Global.
- Shi, H. (2006). Solution to 0/1 knapsack problem based on improved ant colony algorithm. In *Information Acquisition, 2006 IEEE International Conference on*, pages 1062–1066. IEEE.
- Singh, R. P. (2011). Solving 0–1 knapsack problem using genetic algorithms. In *Communication Software and Networks (ICCSN), 2011 IEEE 3rd International Conference on*, pages 591–595. IEEE.
- Sinha, P. and Zoltners, A. A. (1979). The multiple-choice knapsack problem. *Operations Research*, 27(3):503–515.
- Taha, H. A., Marques, A. S., and Scarpel, R. A. (2008). *Pesquisa operacional*. Pearson Education do Brasil.
- Thiago Lomas Bretas, R., André Luis, A. A., and Guilherme, P. (2013). Problema da mochila inteira aplicado em decisões de compra de aparelhos de atividades desportivas: Modelo e aplicação. *X OPTIMA*.
- Zecchin, A. C., Simpson, A. R., Maier, H. R., Leonard, M., Roberts, A. J., and Berrisford, M. J. (2006). Application of two ant colony optimisation algorithms to water distribution system optimisation. *Mathematical and Computer Modelling*, 44(5):451–468.
- Zorzal, E. R., Silva, L. F., Cardoso, A., Kirner, C., Júnior, E. L., and Yamanaka, K. Associando realidade virtual e o algoritmo de busca tabu para o problema de carregamento de veículos.