

# Energia do Ponto Zero

Cássio dos Santos Sousa

20 de dezembro de 2015

## 1 Introdução

Todos os estados energéticos de uma partícula podem ser deduzidos a partir da equação de Planck:

$$\epsilon = \frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} \quad (1)$$

No entanto, o que se percebe é que, no chamado **ponto zero**, onde uma partícula não se encontra deslocada da origem nem se movimentando, ela possui sim energia. Isso concorda com a **Equação de Schrödinger**, que diz que toda partícula possui uma incerteza mínima em sua posição e velocidade:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} \quad (2)$$

Vamos então descobrir qual é o valor dessa energia a partir da Equação de Schrödinger.

## 2 Prova utilizando o Princípio da Incerteza

A posição e o momento linear de uma partícula são dados por meio de um valor médio e de uma incerteza:

$$p = \bar{p} + \Delta p \quad (3)$$

$$x = \bar{x} + \Delta x \quad (4)$$

Se, pela definição do ponto zero, a partícula não se encontra deslocada da origem nem se movimentando, então, no caso médio:

$$\bar{p} = \bar{x} = 0 \quad (5)$$

Logo, no ponto zero:

$$p = \Delta p \quad (6)$$

$$x = \Delta x \quad (7)$$

Do operador Hamiltoniano, temos que a energia de uma partícula de massa  $m$  com uma frequência natural  $\omega_0$  é dada por:

$$H = V_0 + \frac{kx^2}{2} + \frac{p^2}{2m} \quad (8)$$

Onde:

$$k = m\omega_0^2 \quad (9)$$

Por conta das equações (6) e (7), teremos:

$$H = V_0 + \frac{k\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta p^2}{2m} \quad (10)$$

No entanto, pelo Princípio da Incerteza descrito em (2), temos que:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \quad (11)$$

Utilizando (11) em (10):

$$H \geq V_0 + \frac{k\Delta x^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8m\Delta x^2} \quad (12)$$

É sempre possível derivar esta expressão e encontrar seu valor mínimo. No entanto, vamos reescrevê-la um pouco antes:

$$H \geq V_0 + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} \left( \frac{2\Delta x^2 \sqrt{km}}{\hbar} + \frac{\hbar}{2\Delta x^2 \sqrt{km}} \right) \quad (13)$$

Nesta equação, vemos que  $H$  é maior ou igual à soma de um número com seu inverso. No entanto, sabemos que o quadrado de qualquer número real é maior ou igual a zero. Logo, se utilizarmos  $w > 0$ :

$$\left( \sqrt{w} - \sqrt{\frac{1}{w}} \right)^2 \geq 0 \quad (14)$$

Desenvolvendo esta equação, podemos obter que:

$$w + \frac{1}{w} \geq 2 \quad (15)$$

Ou seja, se  $w > 0$ , a soma de  $w$  com seu inverso será sempre maior ou igual a 2. Logo, tomando:

$$w = \frac{2\Delta x^2 \sqrt{km}}{\hbar} \quad (16)$$

E utilizando a eq. (15) na eq. (13), temos que:

$$H \geq V_0 + \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (17)$$

Utilizando agora a relação da eq. (9), chegamos que:

$$H \geq V_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (18)$$

O termo  $\frac{\hbar\omega_0}{2}$  é chamado de **energia do ponto zero**.