Energia do Ponto Zero

Cássio dos Santos Sousa

19 de dezembro de 2015

1 Introdução

Todos os estados energéticos de uma partícula podem ser deduzidos a partir da **equação de Planck**:

$$\epsilon = \frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1} \tag{1}$$

No entanto, o que se percebe é que, no chamado **ponto zero**, onde uma partícula não se encontra deslocada da origem nem se movimentando, ela possui sim energia. Isso concorda com a **Equação de Schrödinger**, que diz que toda partícula possui uma incerteza mínima em sua posição e velocidade:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} \tag{2}$$

Vamos então descobrir qual é o valor dessa energia a partir da Equação de Schrödinger.

2 Prova utilizando o Princípio da Incerteza

A posição e o momento linear de uma partícula são dados por meio de um valor médio e de uma incerteza:

$$p = \bar{p} + \Delta p \tag{3}$$
$$x = \bar{x} + \Delta x \tag{4}$$

Se, pela definição do ponto zero, a partícula não se encontra deslocada da origem nem se movimentando, então, no caso médio:

$$\bar{p} = \bar{x} = 0 \tag{5}$$

Logo, no ponto zero:

$$p = \Delta p \tag{6}$$
$$x = \Delta x \tag{7}$$

Do operador Hamiltoniano, temos que a energia de uma partícula de massa m com uma frequência natural ω_0 é dada por:

$$H = V_0 + \frac{kx^2}{2} + \frac{p^2}{2m} \tag{8}$$

Onde:

$$k = m{\omega_0}^2 \tag{9}$$

Por conta das equações (6) e (7), teremos:

$$H = V_0 + \frac{k\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta p^2}{2m} \tag{10}$$

No entanto, pelo Princípio da Incerteza descrito em (2), temos que:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \tag{11}$$

Utilizando (11) em (10):

$$H \geq V_0 + \frac{k\Delta x^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8m\Delta x^2} \tag{12}$$

É sempre possível derivar esta expressão e encontrar seu valor mínimo. No entanto, vamos reescrevê-la um pouco antes:

$$H \geq V_0 + \frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\frac{2\Delta x^2\sqrt{km}}{\hbar} + \frac{\hbar}{2\Delta x^2\sqrt{km}}\right) \tag{13}$$

Nesta equação, vemos que H é maior ou igual à soma de um número com seu inverso. No entanto, sabemos que o quadrado de qualquer número real é maior ou igual a zero. Logo, se utilizarmos $w > 0$:

$$\left(\sqrt{w} - \sqrt{\frac{1}{w}}\right)^2 \geq 0 \tag{14}$$

Desenvolvendo esta equação, podemos obter que:

$$w + \frac{1}{w} \geq 2 \tag{15}$$

Ou seja, se $w > 0$, a soma de w com seu inverso será sempre maior ou igual a 2. Logo, tomando:

$$w = \frac{2\Delta x^2\sqrt{km}}{\hbar} \tag{16}$$

E utilizando a eq. (15) na eq. (13), temos que:

$$H \geq V_0 + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{17}$$

Utilizando agora a relação da eq. (9), chegamos que:

$$H \geq V_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2} \tag{18}$$

O termo $\frac{\hbar\omega_0}{2}$ é chamado de **energia do ponto zero**.