

Présentation des TPs d'assimilation de données

Rémi Colin, Karima Ghamnia, Cassandra Mussard

13/12/2023

1 Présentation générale

Filtre de Kalman

Filtre de Kalman d'ensemble

2 II. Cas linéaire gaussien (TP1)

3 III. Cas non-linéaire TP2

4 IV. Cas non-linéaire TP3

Contexte

Assimilation de données

- Méthode "prédicteur/correction",
- Optimise la précision des prévisions,
- Intègre les observations dans le processus de modélisation.



Figure – Mathematic model



Figure – Real model

De l'estimateur des moindres carrés au filtre de Kalman

Moindres carrés récursive

- Estimateur linéaire basé sur le MAP
- **Limites** : système non dynamique

$$\hat{x} = x_b + \hat{B}H^T R^{-1}(y_{obs} - Hx_b)$$

$$\hat{B} = (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1}$$

De l'estimateur des moindres carrés au filtre de Kalman

Filtre de Kalman

- Estimer des paramètres d'un système **linéaire** évoluant dans le temps à partir de mesures bruitées



Figure – Guidance Computer



Figure – Apollo moon mission

Filtre de Kalman

Fonctionnement du filtre

- Étape de prédiction :

$$x_{k+1|k} = F_k x_{k|k}$$

$$P_{k+1|k} = Q_k + F_k P_{k|k} F_k^T$$

- Étape de mise à jour :

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + P_k H_k^T R_k^{-1} (y_k - H_k x_{k|k-1})$$

$$P_{k|k} = (P_{k|k}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)$$

Filtre de Kalman

Limites

- Fonctionne que pour les systèmes linéaires, principalement avec des bruits blancs
- Problème de stockage avec la matrice B

Filtre de Kalman d'ensemble

Contexte

- Les équations du filtre sont :

$$x = x_b + BH^T(R + HBH^T)^{-1}(y - Hx_b)$$

$$x = x_b + (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} (y - Hx_b)$$

- Problème : en météo, géophysique n très grand ($n > 10^9$).
- $B \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow$ problème de stockage de B (n^2)
- $B^{-1} \Rightarrow$ temps d'inversion très important

Filtre de Kalman d'ensemble

Approche utilisée

- Approche de B par des échantillons.
- Construction d'un vecteur $x_b^i, i = 1, \dots, N_{ens}$ des échantillons d'une $\mathcal{N}(x_b, B)$ avec $N_{ens} \ll n$.
- Approche de B par

$$\tilde{B} = \frac{1}{N_{ens} - 1} * \sum_{i=1}^{N_{ens}} (x_b^i - \bar{x}_b)(x_b^i - \bar{x}_b)^T$$

avec $\bar{x}_b = \frac{1}{N_{ens}} * \sum_{i=1}^{N_{ens}} x_b^i$

Filtre de Kalman d'ensemble

Approche utilisée

- Filtre approché :

$$x = x_b^i + \tilde{B}H^T(R + H\tilde{B}H^T)^{-1}(y - Hx_b^i)$$

$$x = x_b^i + (\tilde{B}^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} (y - Hx_b^i)$$

1 Présentation générale

2 II. Cas linéaire gaussien (TP1)

3 III. Cas non-linéaire TP2

4 IV. Cas non-linéaire TP3

Mise en place d'un système d'assimilation de données par filtre de Kalman

Equation des ondes 1D :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

Avec les conditions aux limites de dirichlet homogène.

Résolution numérique : θ -schéma

$$\begin{bmatrix} U^{n+1} \\ U^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}A & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^n \\ U^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U^1 = U^0$$

U^n : n-ième observation,

P_f : matrice de covariance d'erreur de prédiction associée à x_f .

Signal

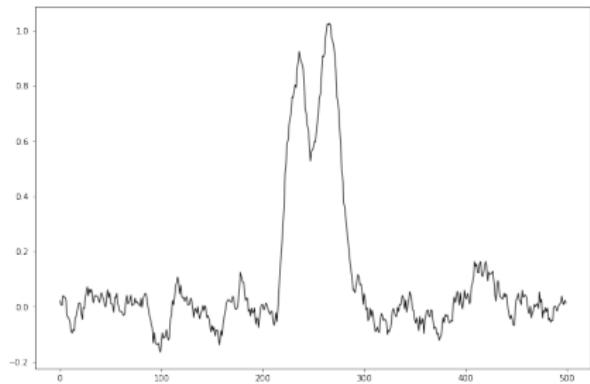


Figure – Signal de référence

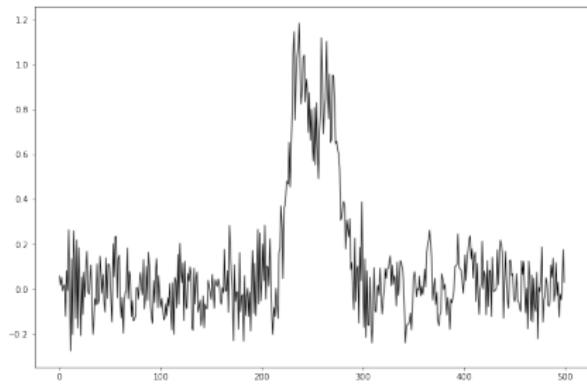


Figure – Signal bruité : $\sigma = 10^{-4}$

Hyperparamètres

Hyperparamètres utilisés

- Intervalle d'assimilation : entre 100 et 300sec,
- Pas de temps entre les assimilations : 10,
- Taille de H = 50 (taille des observations),
- SigmaR : 10^{-4} (bruit sur les observations).

Résultats

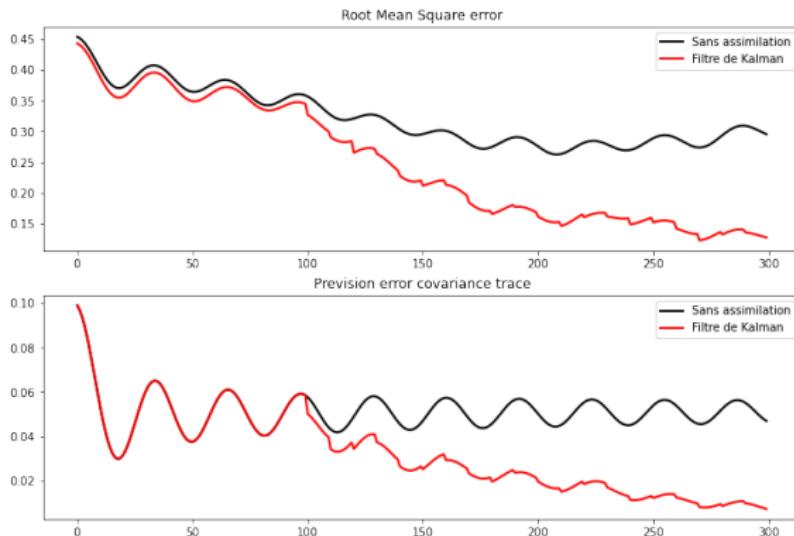


Figure – Erreur en fonction du temps

Variation de l'erreur sur les observations

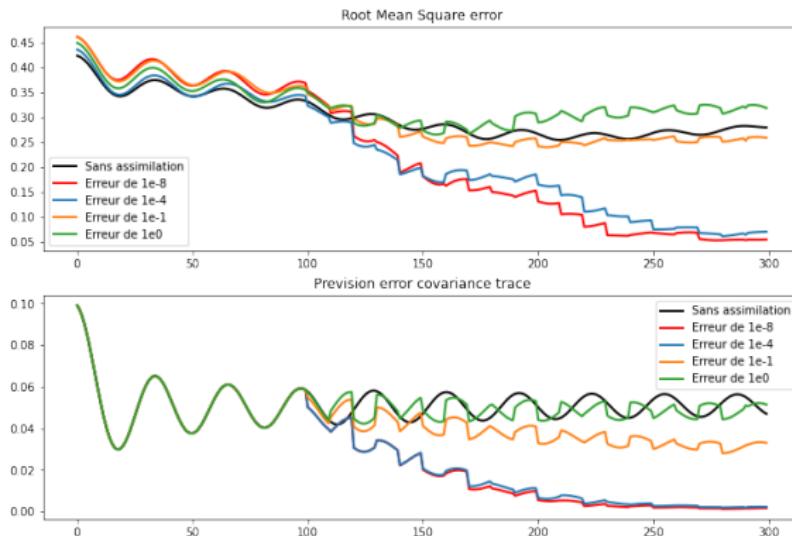


Figure – Erreur en fonction de l'erreur sur les observations

Variation du nombre d'itérations entre les assimilations

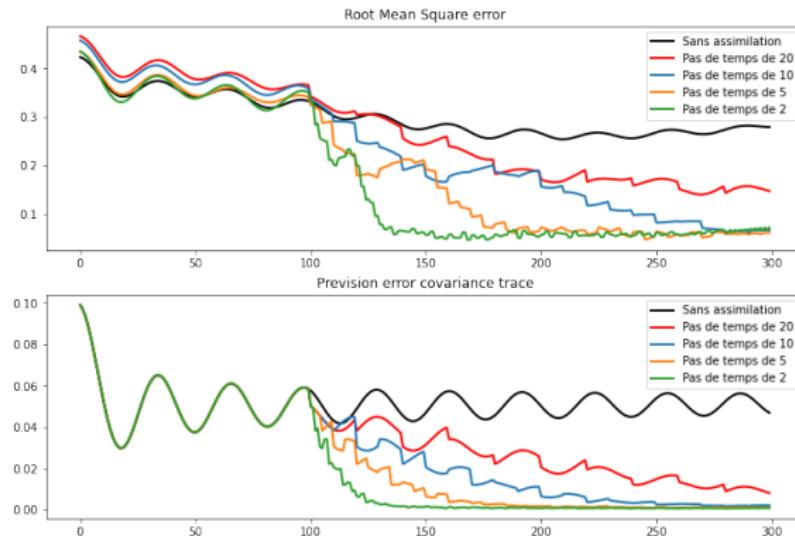


Figure – Erreur en fonction du pas de temps

Variation du nombre de points assimilés

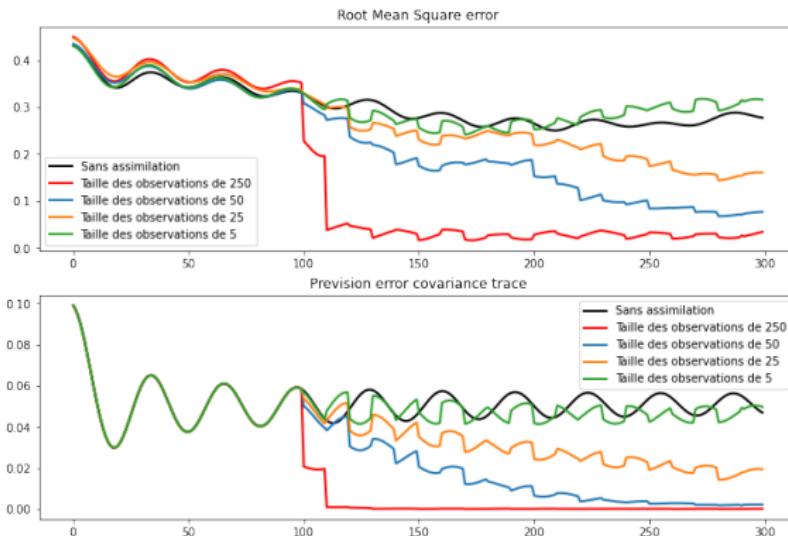


Figure – Erreur en fonction du nombre de points assimilés

Conclusion et limites

Conclusion

- Bonne approximation des systèmes linéaires par rapport à une méthode sans assimilation.

Limites

- Taille de la matrice d'états,
- Que pour des systèmes linéaires,
- Taille de $H = 50$ (taille des observations).

① Présentation générale

② II. Cas linéaire gaussien (TP1)

③ III. Cas non-linéaire TP2

④ IV. Cas non-linéaire TP3

Lorenz 63

Un système chaotique

- Modèle très simplifié des équations de Navier-Stokes
- Grande sensibilité aux conditions initiales des solutions

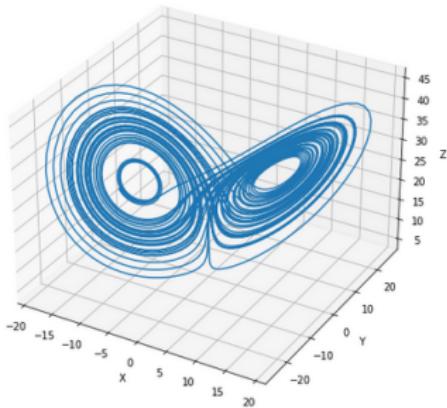


Figure – Système de Lorenz en 3D

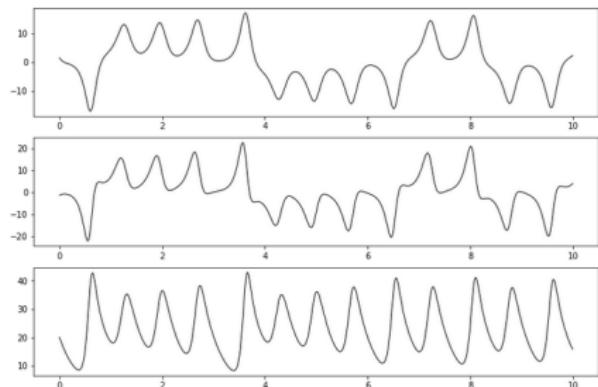


Figure – Les 3 variables du système de Lorenz

Lorenz 63

Équations du système

- On considère $\rho = 28$ pour exhiber un comportement chaotique
- Pour des valeurs de ρ en dessous de ce seuil, le système peut présenter un comportement plus régulier, voire périodique

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z.\end{aligned}$$

EnKF vs ETKF

EnKF

- Utilise directement l'ensemble des échantillons pour la mise à jour

ETKF

- Applique une transformation sur l'ensemble des échantillons pour calculer une matrice de covariance tronquée avant la mise à jour
- Généralement plus précise que l'EnKF pour une taille d'ensemble donnée

Résultats

- Pour $N_{ens} = 50$

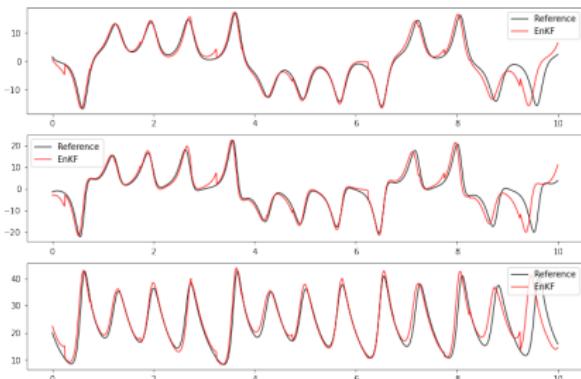


Figure – EnKF

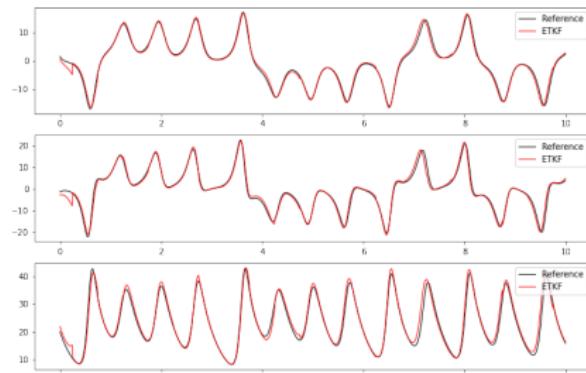


Figure – ETKF

Résultats

- Pour $N_{ens} = 200$

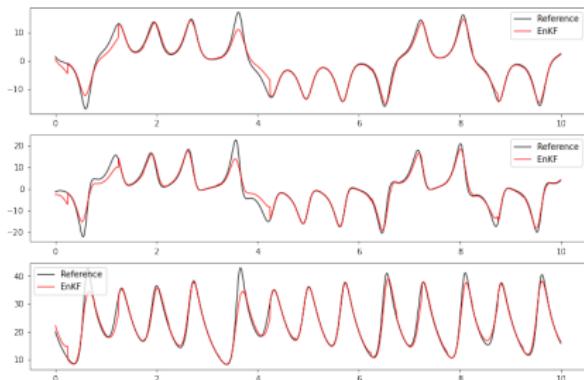


Figure – EnKF

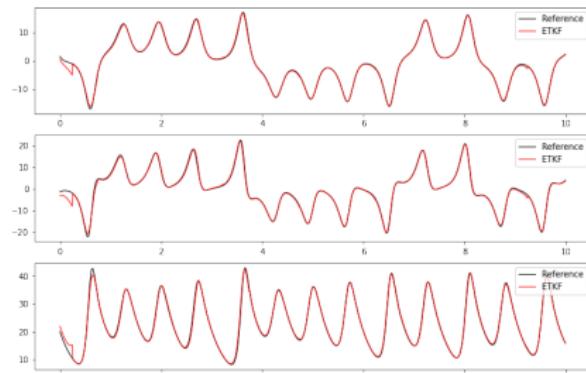


Figure – ETKF

Résultats

- EnKF avec $N_{ens} = 50$ et $N_{ens} = 200$:

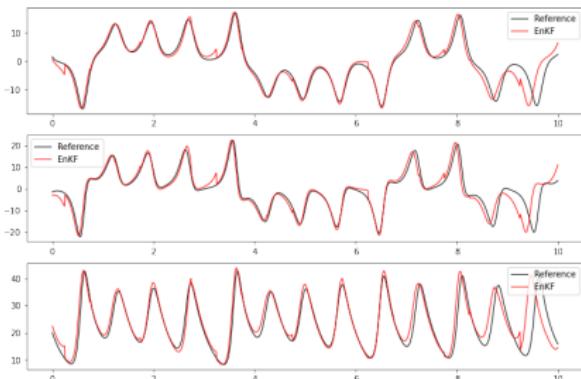


Figure – EnKF $N_{ens} = 50$

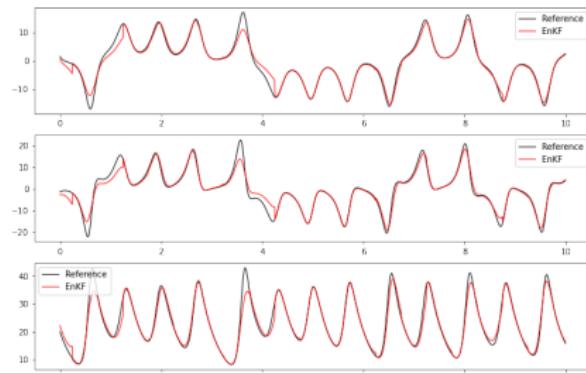


Figure – EnKF $N_{ens} = 200$

Résultats

- ETKF avec $N_{ens} = 50$ et $N_{ens} = 200$:

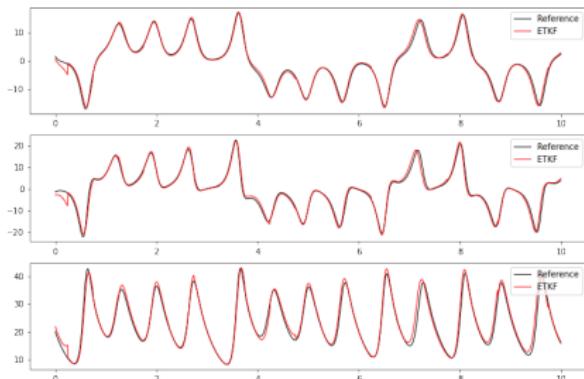


Figure – ETKF $N_{ens} = 50$

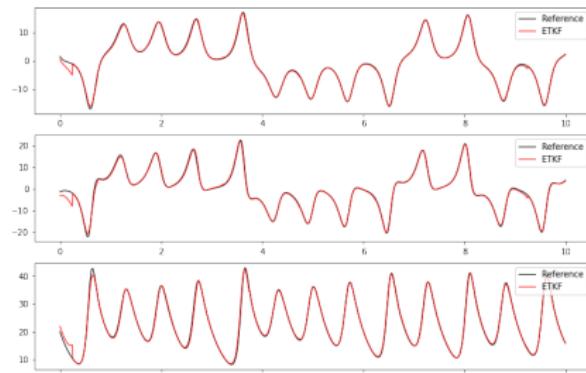


Figure – ETKF $N_{ens} = 200$

① Présentation générale

② II. Cas linéaire gaussien (TP1)

③ III. Cas non-linéaire TP2

④ IV. Cas non-linéaire TP3

TP3

Contexte

- But : Étudier l'impact de l'erreur d'échantillonage sur la matrice P .
- On se place dans un domaine périodique 1D avec une EDP à une variable.

TP3

Construction des matrices de covariance

- Construction de la matrice de référence P_t
- Construction de la matrice approchée P_e :
 - Les échantillons $[x_1, \dots, x_{Nens}]$ suivent $\mathcal{N}(0, P_t)$.
 - La moyenne des échantillons est : $\sum_{i=1}^{Nens} x_i$
 - Construction de P_e :

$$P_e = \frac{1}{Nens - 1} AA^T.$$

avec $A = [x_1 - \bar{x}, \dots, x_{Nens} - \bar{x}]$

TP3

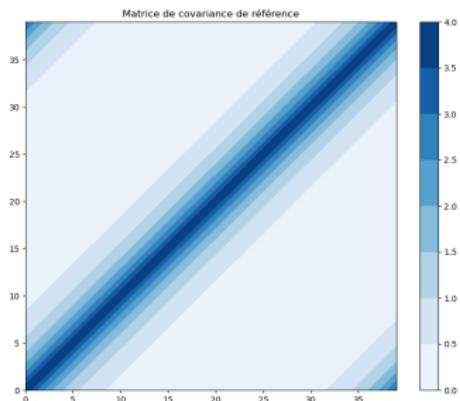


Figure – Matrice de référence

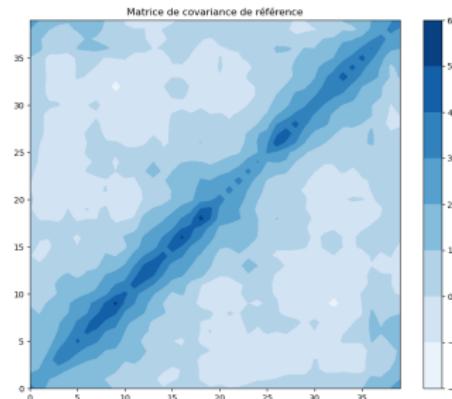


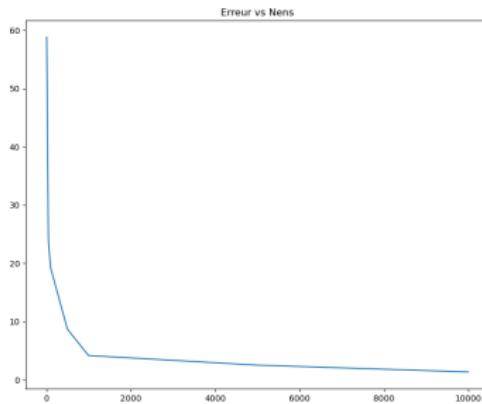
Figure – Matrice estimée P_e avec
 $N_{ens} = 100$

TP3

Variation de l'erreur en fonction de N_{ens}

- Variation de N_{ens} entre [10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000]
- Calcul de l'erreur entre la matrice de référence P_t et estimée P_e :

$$Erreur = \|P_t - P_e\|_F$$



TP3

Localisation

- But : Atténuer les corrélations élevées entre des points éloignés.
- Fonctions de localisation utilisées (indicatrice et Gaspari et Cohn).

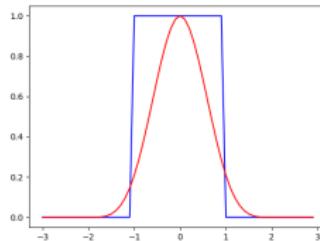


Figure – Les deux fonctions de localisation

Résultats de la localisation

- Entre deux points de la grille ($x(i)$ et $x(j)$) :

$$[\rho]_{i,j} = f\left(\frac{|x(i) - x(j)|}{L}\right),$$

TP3

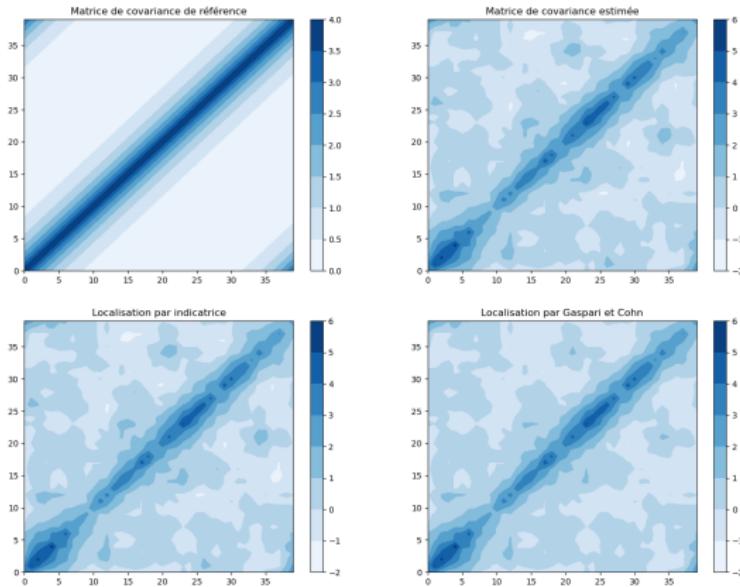


Figure – Résultats de la localisation avec $L = 30$

TP3

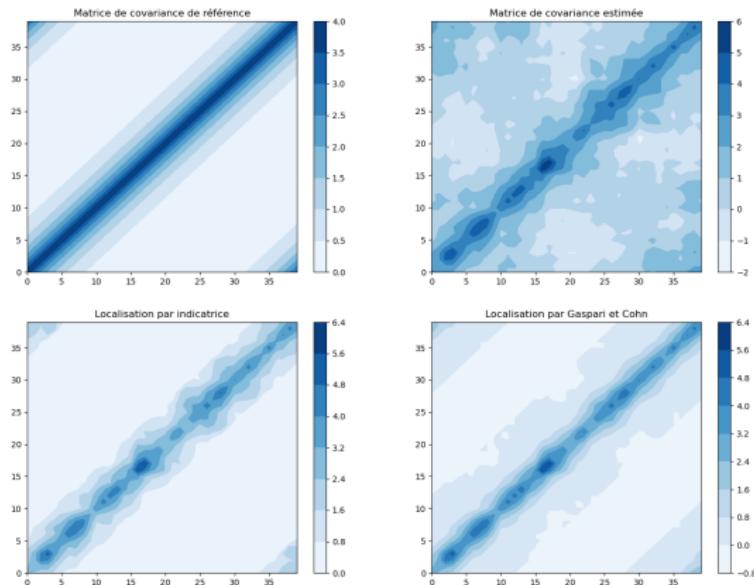


Figure – Résultats de la localisation avec $L = 6$

TP3

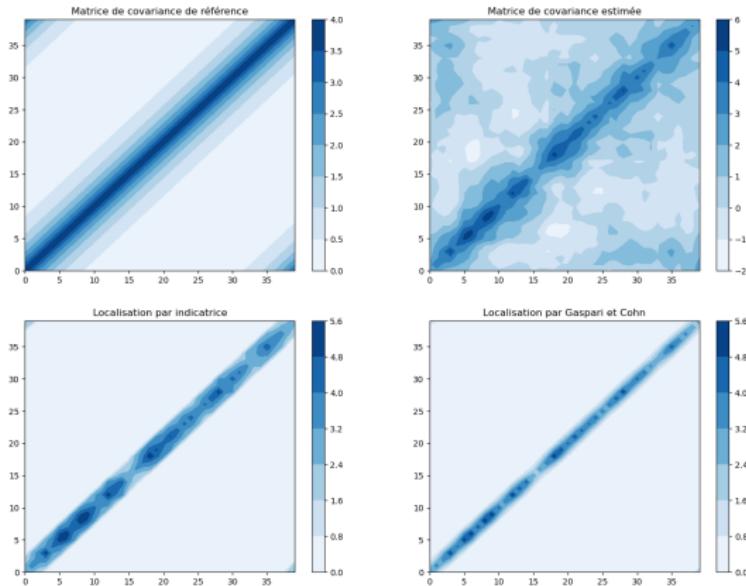


Figure – Résultats de la localisation avec $L = 2$