



5A ModIA

Rapport de TP

---

# Méthodes GMRES et FOM

---

*Elèves :*

Karima GHAMNIA  
Cassandra MUSSARD

*Enseignant :*

Ronan GUIVARCH

12 janvier 2025

# 1 Introduction

Dans ce premier TP, nous cherchons à résoudre le système linéaire :  $Ax = b$  en utilisant les deux méthodes GMRES et FOM. GMRES se concentre sur la construction d'une base de Krylov et l'utilisation d'une décomposition QR pour l'orthogonalisation, tandis que FOM réalise une orthogonalisation complète à chaque itération (une variante du processus de Gram-Schmidt). Nous nous intéressons à la convergence de l'erreur inverse définie par :

$$\eta_k^N(x_m) = \frac{\|b - Ax_m\|}{\|b\|}$$

Nous arrêterons les itérations lorsque  $\eta_k^N(x_m)$  sera inférieur à un seuil  $\epsilon$ , ou dès que le nombre d'itérations est dépassé.

# 2 Analyse et interprétation des résultats

Nous avons implémenté les deux méthodes GMRES et FOM dans une fonction "krylov" que nous avons testé ensuite sur 3 matrices différentes : mat1, hydcar, et pde225-5e-1.

Pour chaque matrice, nous avons testé la fonction avec plusieurs valeurs d'épsilon :  $\epsilon = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-10}, 10^{-12}$  ou  $10^{-15}$

## 2.1 Matrice 1 : "mat1"

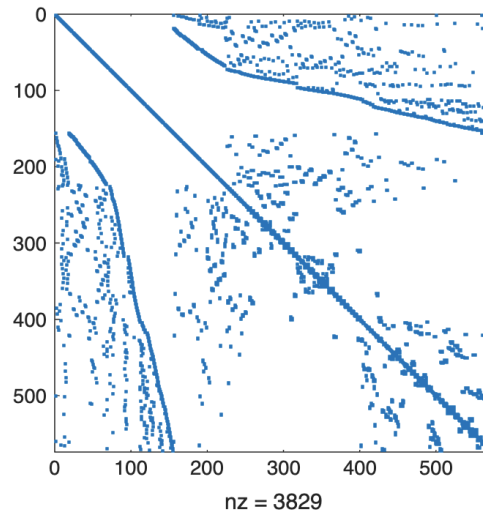


FIGURE 1 – Structure de la matrice creuse "mat1"

La matrice Mat1 est celle qui comporte le plus de non zéros et celle où les valeurs sont les plus éparpillées.

La figure 2 montre la convergence des deux méthodes itératives FOM et GMRES (notre implémentation + la méthode intégrée dans MATLAB) sur la matrice "mat1" (figure 1). Nous pouvons observer 3 résultats différents selon le critère d'arrêt ( $\epsilon$ ) choisi. Ces valeurs différentes influencent la précision de la solution.

**Pour  $\epsilon = 10^{-3}$**  Nous remarquons que les deux méthodes convergent relativement rapidement (avec un nombre réduit d'itérations) vers la solution. Cela indique que les deux méthodes sont très efficaces dans ce cas, même en considérant un critère d'arrêt très peu strict.

**Pour  $\epsilon = 10^{-6}$**  En réduisant  $\epsilon$ , nous augmentons d'avantage la précision requise par chaque méthode, ce qui nécessite généralement plus d'itérations. Nous pouvons remarquer que les méthodes continuent de montrer une bonne convergence, bien que GMRES MATLAB semble légèrement plus stable (moins de fluctuations) comparé à notre implémentation.

**Pour  $\epsilon = 10^{-10}$**  Nous pouvons remarquer qu'aucune méthode converge pour cette valeur de  $\epsilon$ . Ceci peut être dû au fait que les deux algorithmes ne sont pas adaptés aux matrices avec cette valeur de  $\epsilon$ . Une solution pour limiter cela pourrait être d'utiliser des préconditionneurs.

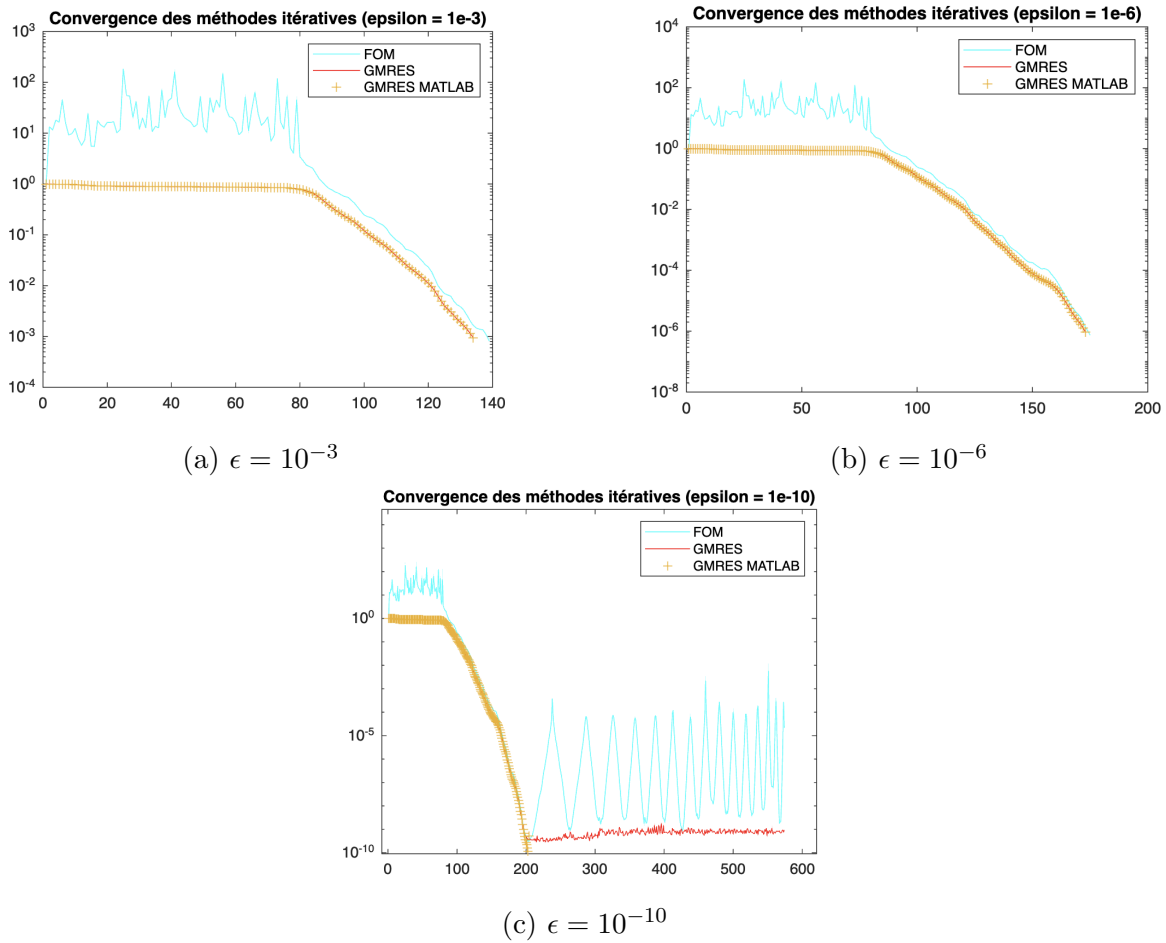


FIGURE 2 – La convergence des différentes méthodes appliquées sur "mat1" avec différentes valeurs d'  $\epsilon$

Le tableau 1 montre le nombre d'itérations pour chaque valeur de epsilon. On remarque que généralement, l'algorithme FOM réalise quelques itérations supplémentaires par rapport à l'algorithme GMRES. Pour  $\epsilon = 10^{-10}$  l'algorithme ne converge pas et réalise 573 itérations (taille de la matrice A) avant de s'arrêter. L'algorithme GMRES de Matlab s'arrête avant les 573 itérations sûrement dû au fait que le résidu stagne.

TABLE 1 – Nombre d'itérations pour une certaine valeur de  $\epsilon$  en fonction de la méthode choisie

	FOM	GMRES	GMRES (Matlab)
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 3$ )	138	133	133
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 6$ )	174	173	173
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 10$ )	573 (pas de convergence)	573 (pas de convergence)	202 (pas de convergence)

## 2.2 Matrice 2 : "pde"

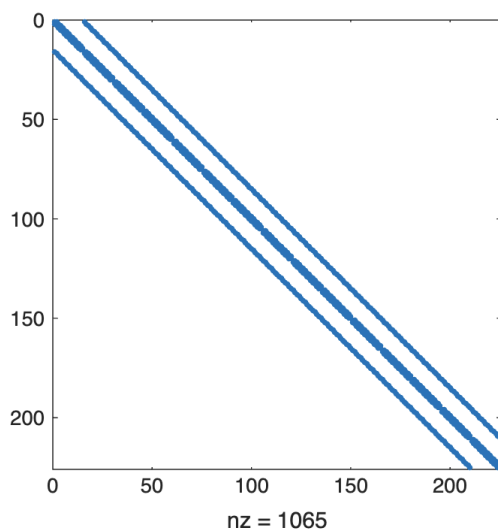


FIGURE 3 – Structure de la matrice "pde225-5e-1".

La figure 4 montre la convergence des deux méthodes itératives FOM et GMRES (notre implémentation + la méthode intégrée dans MATLAB) sur la matrice "pde" (figure 1). Nous pouvons observer 3 résultats différents selon le critère d'arrêt ( $\epsilon$ ) choisi. Ces valeurs différentes influencent la précision de la solution.

Pour  $\epsilon = 10^{-3}, 10^{-6}$  on retrouve les mêmes commentaires que pour la matrice "mat1".

**Pour  $\epsilon = 10^{-15}$**  Pour cette matrice, nous pouvons remarquer également qu'aucune méthode converge pour cette valeur de epsilon (trop petite).

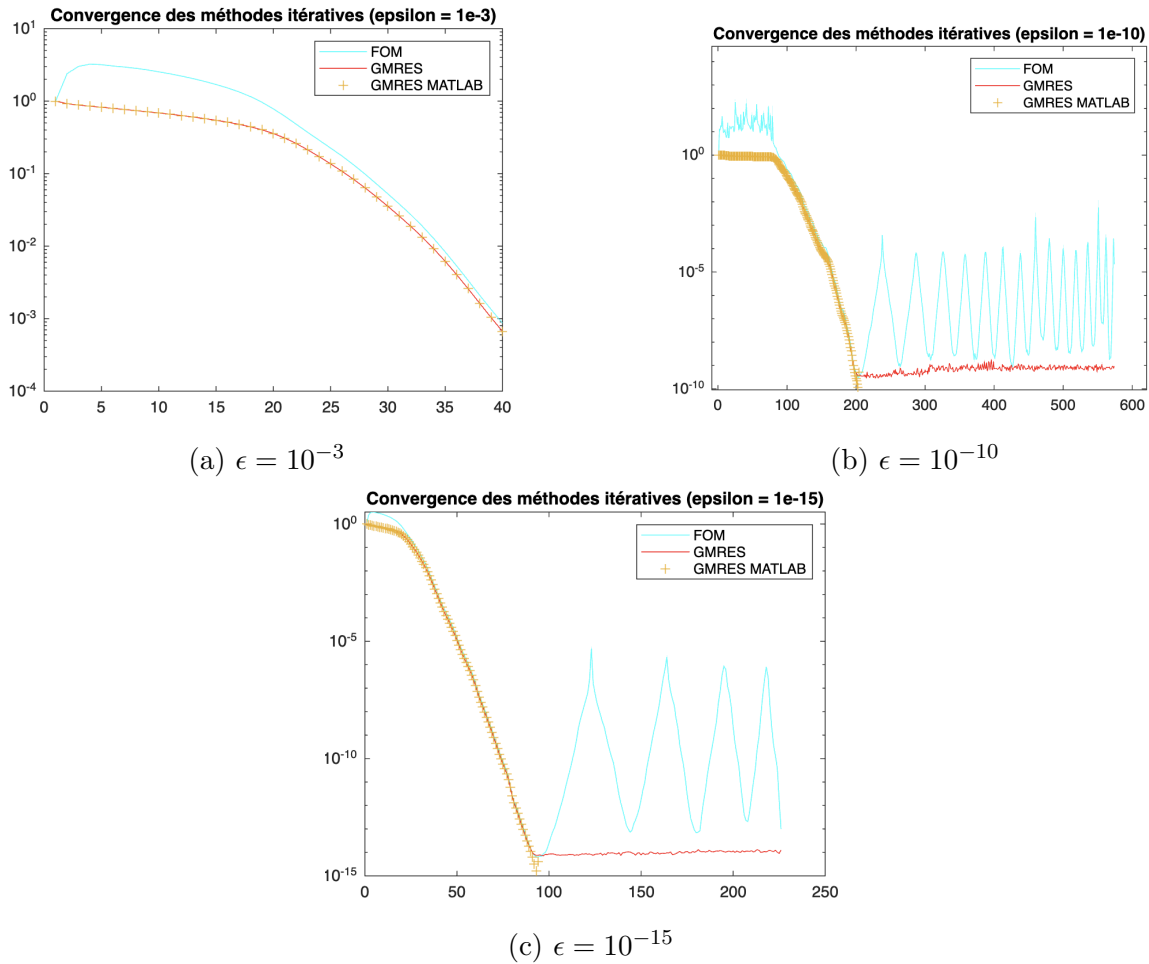


FIGURE 4 – La convergence des différentes méthodes appliquées sur "pde225-5e-1" avec différentes valeurs d'  $\epsilon$

TABLE 2 – Nombre d'itérations pour une certaine valeur de  $\epsilon$  en fonction de la méthode choisie "pde"

	FOM	GMRES	GMRES (Matlab)
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 3$ )	39	39	39
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 10$ )	74	73	73
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 15$ )	225 (pas de convergence)	225 (pas de convergence)	92 (pas de convergence)

Le tableau 2 montre le nombre d'itérations pour chaque valeur de epsilon. On remarque que malgré le fait que la matrice A soit plus petite (de taille 225x225), le nombre d'itérations pour converger est assez faible. En effet, la matrice étant tri-diagonale, les deux algorithmes sont beaucoup plus rapides pour converger.

### 2.3 Matrice 3 : "hydcars"

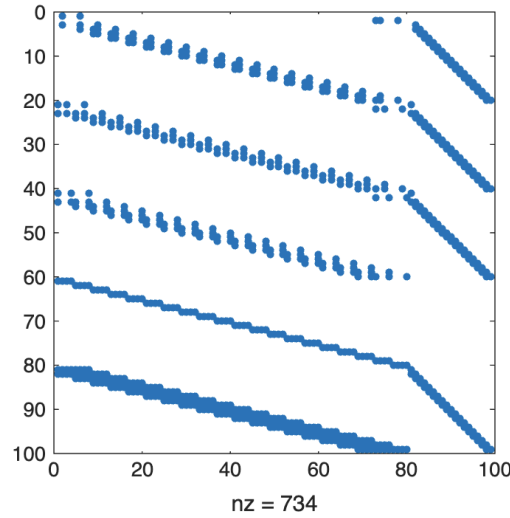


FIGURE 5 – Structure de la matrice "hydcars20".

La convergence des méthodes FOM et GMRES est illustrée par la figure 5, sur la matrice "hydcars" selon le critère d'arrêt ( $\epsilon$ ) choisi. On remarque que dans cette matrice on a une structure assez répétitive.

Les observations sur le comportement des deux méthodes sur ce système linéaire sont similaires à celles vues pour les deux systèmes étudiés précédemment, notamment pour  $\epsilon = 10^{-3}, 10^{-6}$ .

**Pour  $\epsilon = 10^{-12}$**  Pour cette valeur de  $\epsilon$ , aucune des méthodes ne parvient à converger mais cette fois-ci pour une valeur de  $\epsilon = 10^{-12}$ .

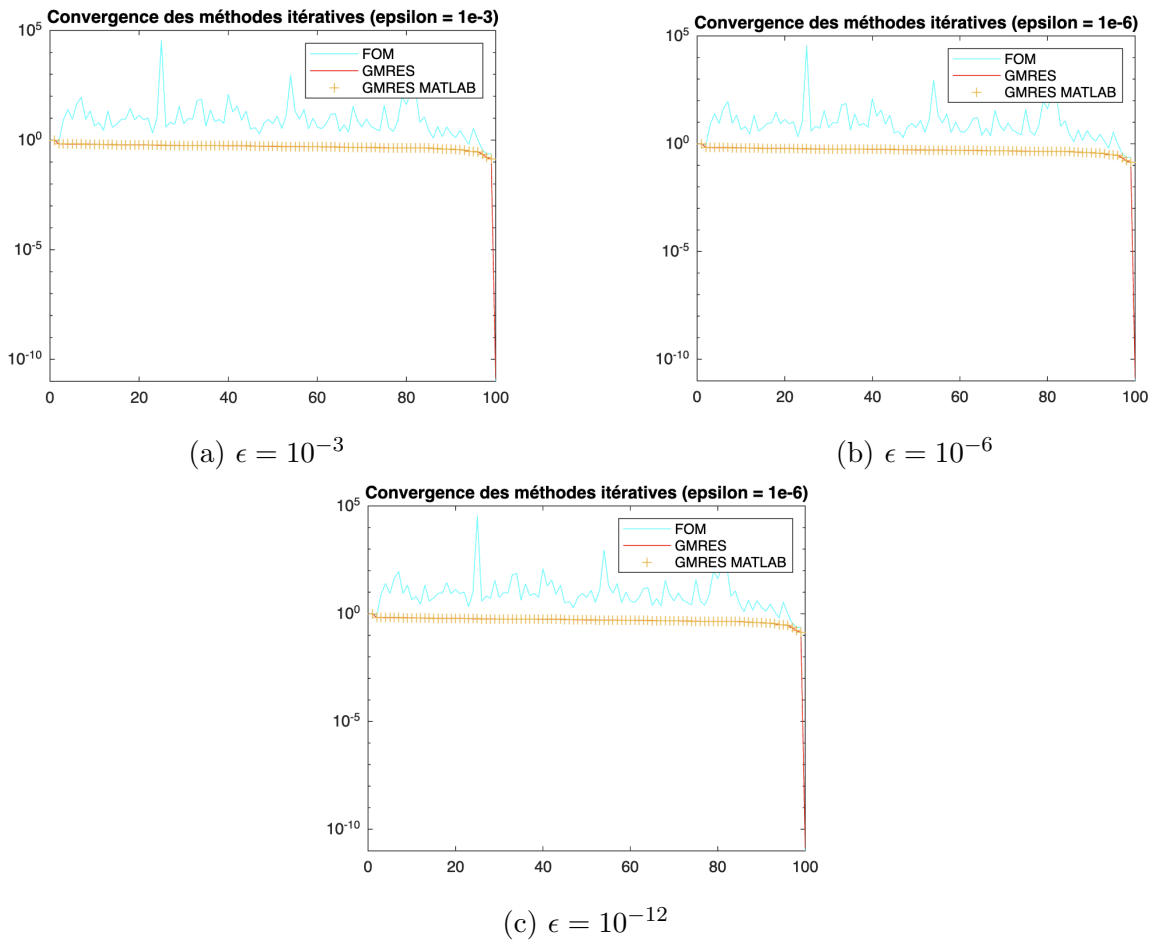


FIGURE 6 – La convergence des différentes méthodes appliquées sur "hydcars" avec différentes valeurs d' $\epsilon$ .

TABLE 3 – Nombre d'itérations pour une certaine valeur de  $\epsilon$  en fonction de la méthode choisie "hydcars"

	FOM	GMRES	GMRES (Matlab)
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 3$ )	99	99	99
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 6$ )	99	99	99
nb itérations avec ( $\epsilon = 1e - 12$ )	99 (pas de convergence)	99 (pas de convergence)	99 (pas de convergence)

Le tableau 3 montre le nombre d'itérations pour chaque valeurs de epsilon. Cependant, on peut noter que pour cette matrice la convergence est atteinte pour 99 itérations qui correspond exactement à la taille de A.

Enfin, on pourrait se dire que pour  $\epsilon = 10^{-12}$  on ne converge pas car on a pas assez d'itérations, mais en augmentant le nombre d'itérations maximal à 200 on ne converge toujours pas.



Conclusion intermédiaire sur les matrices : On voit donc que la matrice Mat1 est celle où on a le plus de mal à converger puisque la non convergence est atteinte pour une valeur de  $\epsilon (= 10^{-10})$  plus grande que les autres matrices. Cela paraît logique car c'est à la fois la matrice la plus grande, celle avec le plus de non zéros et celle où l'on ne retrouve pas de schémas particulier.

## 2.4 Précision

La précision de chaque méthode est définie par l'erreur inverse à la dernière itération. Nous obtenons les valeurs suivantes pour  $\epsilon = 10^{-6}$  :

TABLE 4 – Précision des 3 méthodes sur les 3 systèmes linéaires en considérant  $\epsilon = 10^{-6}$

	mat1	pde	hydcar
FOM	$5 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-10}$	$7 \times 10^{-10}$
GMRES	$5 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-10}$	$7 \times 10^{-10}$
GMRES(MATLAB)	$5 \times 10^{-6}$	$7 \times 10^{-10}$	$7 \times 10^{-10}$

Nous pouvons constater que toutes les méthodes montrent une précision assez similaire sur les différents systèmes linéaires étudiés, avec une légère différence concernant le système de la matrice "mat1". Dans ce cas, l'erreur inverse est plus élevée comparée à celle de "pde" et "hydcar". Cette différence peut être expliquée par le fait que, comme nous l'avons vu précédemment, la structure de "mat1" est caractérisée par le plus grand nombre de non-nuls et les valeurs les plus dispersées.

## 3 Conclusion

En conclusion, l'analyse des trois matrices étudiées permet de généraliser que les deux méthodes convergent efficacement pour des tolérances petites à moyennes (exprimées par la valeur de  $\epsilon$ ). Toutefois, lorsque la tolérance est très élevée, les méthodes échouent à converger. Dans ce cas, l'utilisation de préconditionneurs pourrait être envisagée.

Nous avons également constaté que l'erreur relative est une métrique pertinente pour évaluer ces méthodes.