

5A ModIA

Rapport de TP

Estimation bathymétrique des rivières à partir de mesures de surface

Elèves :

Karima GHAMNIA
Cassandra MUSSARD

Enseignant :

Jérôme MONNIER

5 mai 2024

1 Introduction

Nous considérons le modèle direct suivant :

$$-\Lambda_{ref}(\partial_x H_{ref}, b; H)(x) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial H}{\partial x}(x) = \frac{\partial b}{\partial x}(x) \quad \forall x \in [0, L]$$

avec :

$$\Lambda_{ref}(\partial_x H_{ref}, b; H) = \frac{3}{10} \frac{(H - b)(x)}{|\partial_x H_{ref}(x)|}$$

2 Modèle direct

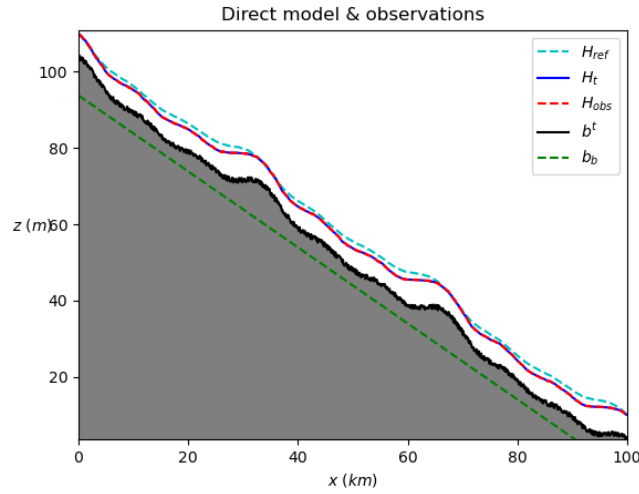


FIGURE 1 – L'estimation de l'élévation de la surface de l'eau obtenue avec le modèle direct

3 Modèle inverse et système optimal

La formulation faible du problème inverse est :

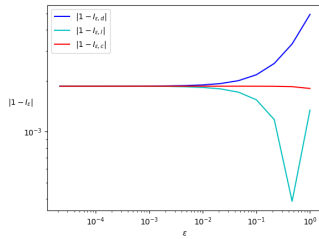
$$\begin{aligned} \partial_H a(b; H, p).z &= \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x}(x) p(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\Lambda_{obs}(\partial_x H^{obs}, b; H) p(x)) \frac{\partial z}{\partial x}(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{10} \frac{p(x) z(x)}{|\partial_x H^{obs}(x)|} \right) \frac{\partial H}{\partial x} dx \end{aligned}$$

3.1 Modèle adjoint

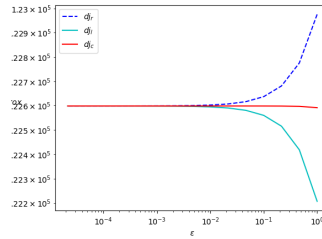
$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M 2(H(x_m) - H^{obs}(x_m)) &= \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x}(x) p(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\Lambda_{obs}(\partial_x H^{obs}, b; H) p(x)) \frac{\partial z}{\partial x}(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{10} \frac{p(x)}{|\partial_x H^{obs}(x)|} \right) \frac{\partial H}{\partial x} . z dx \end{aligned}$$

$$j'(b) . \delta b = 2 \langle b - b_b, \delta b \rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-3}{10} \frac{\delta b}{|\partial_x H^{obs}(x)|} p^b(x) \right) \frac{\partial H}{\partial x} dx + \int_{\Omega} \partial_x(\delta b)(x) p^b(x)$$

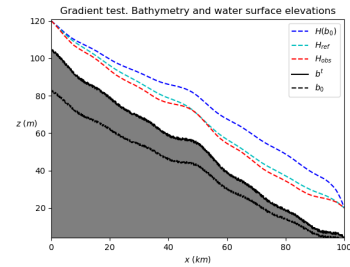
3.2 Analyse de la courbe du gradient



(a) Graphique de perturbation ϵ contre les dérivées



(b) Courbe des coûts normalisés



(c) Bathymétrie

La figure 2a représente l'erreur relative des approximations par différences finies du gradient par rapport au gradient calculé par le modèle adjoint (i_r, i_l, i_c). Nous remarquons que cette erreur relative diminue avec une valeur de ϵ faible. Les trois courbes se rejoignent à mesure que ϵ diminue nous pouvons donc affirmer que le calcul du gradient est robuste et que les erreurs dans l'approximation par différences finies deviennent négligeables. De plus, l'ordre de grandeur de l'erreur est assez faible (autour de 10^{-3}), ce qui indique une très bonne performance du modèle.

Nous pouvons dire de même pour la figure 2b qui représente les approximations du gradient calculées à droite, à gauche, et de manière centrée par différences finies.

Enfin la dernière figure 2c montre la bathymétrie initiale obtenue pour b_0 . On remarque que $H(b_0)$ s'approche assez bien de H_{ref} et H_{obs} lorsque x est petit et inversement quand x augmente. Cela signifie qu'il faudrait sûrement optimiser b_0 pour avoir de meilleurs résultats.

3.3 Cas géométrique

Pour générer un cas géométrique avec une faible densité d'observations incertaines, nous allons modifier les paramètres suivants du fichier `generate-case.py` :

- $n_wave_bathy = 2$
- $amp_wave_bathy = \frac{h_{ref}}{9}$

Le fait de diminuer le paramètre n_wave_bathy permet de réduire le nombre d'ondulations/vagues dans la géométrie de la rivière. En d'autres termes cela génère une géométrie simplifiée avec moins de variations dans le fond de la rivière.

Ensuite, la diminution du paramètre amp_wave_bathy permet de réduire l'amplitude des ondulations. Enfin cela peut rendre le modèle moins sensible aux erreurs de mesure ou aux variations dues au bruit, car les variations du fond sont moins extrêmes.

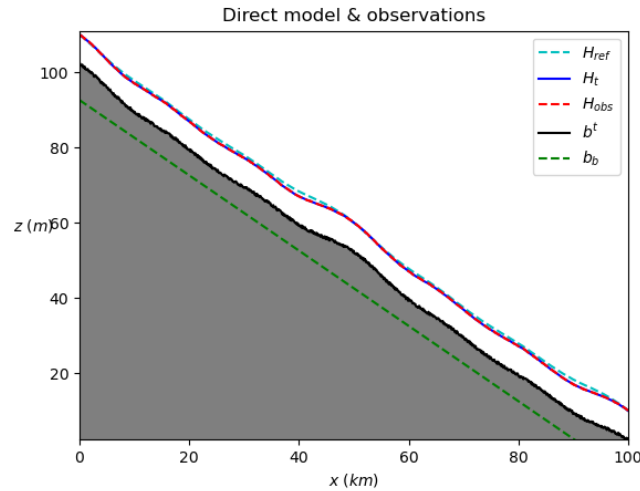


FIGURE 3 – Géométrie obtenue avec les paramètres sélectionnés

On voit bien sur cette figure qu'effectivement les ondulations et leur amplitudes sont assez faibles. Ici, H_{obs} colle bien à H_{ref} .

3.4 VDA avec plusieurs priors différents

3.4.1 Prior de base avec $H_{ref} = 10$

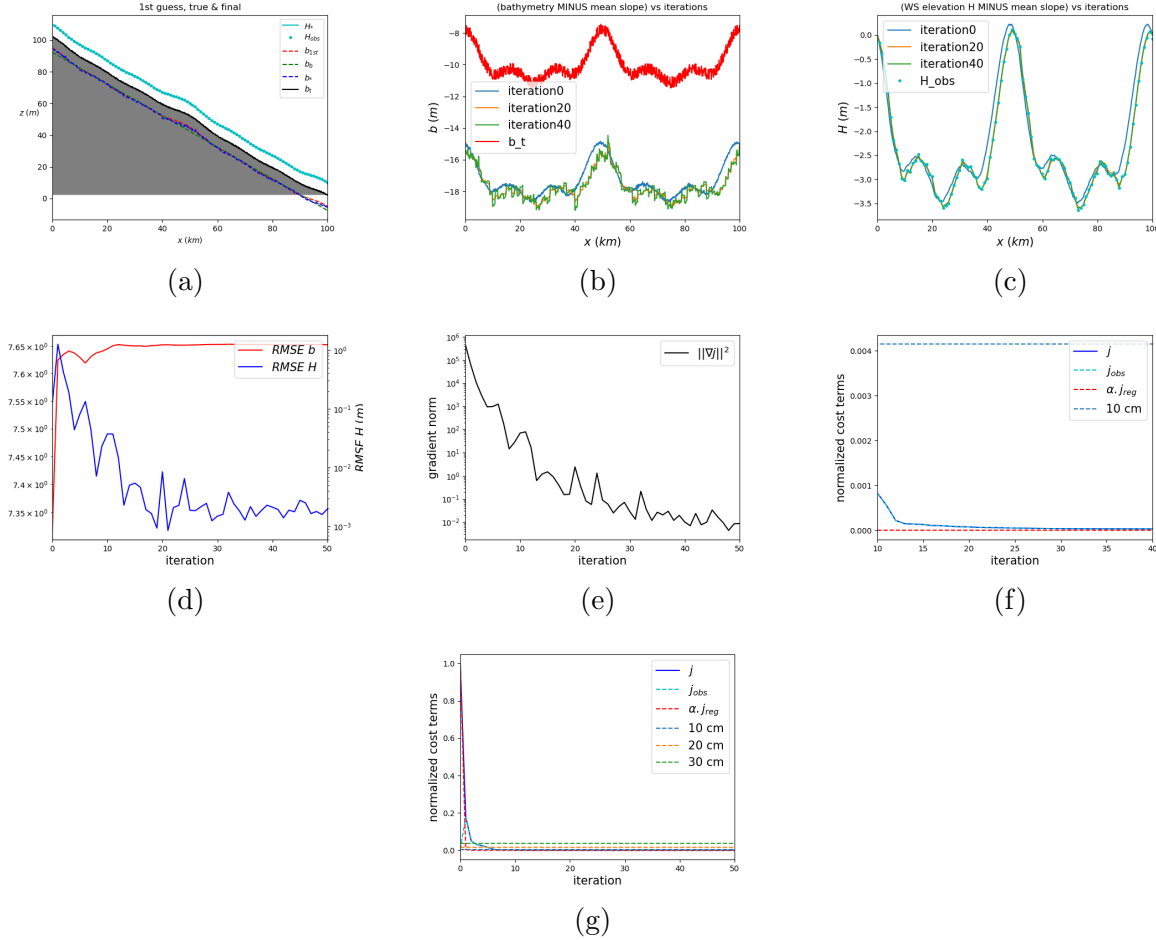


FIGURE 4 – Résultats de la VDA avec $H_{ref} = 10$

La figure 4a représente la bathymétrie le long de la rivière. On remarque que la bathymétrie estimée (b^*) se rapproche assez bien de la bathymétrie réelle (b_t) ce qui indique une bonne performance du modèle. Nous pouvons dire de même pour H^* qui s'aligne très bien avec les observations H_{obs} .

Ensuite, la figure 4b montre la bathymétrie ajustée (où l'on a soustrait la pente moyenne) à travers différentes itérations (0, 20, 40) par rapport à la bathymétrie réelle. On voit bien un ajustement du modèle pour converger vers la bathymétrie réelle (b_t).

Pour continuer, la figure 4c permet de voir les hauteurs d'eau corrigées pour la pente moyenne pour différentes itérations. On voit qu'à l'itération 40 le modèle s'est très bien ajusté pour correspondre aux observations.

La figure 4d trace l'erreur quadratique moyenne pour la bathymétrie (RMSE b) et la

hauteur d'eau (RMSE H) à travers les itérations. Les valeurs de RMSE diminuent pour la hauteur d'eau, indiquant une amélioration de l'exactitude des prévisions de la hauteur d'eau. Pour la bathymétrie, le RMSE reste relativement stable après une légère augmentation initiale. L'ordre de grandeur de l'erreur est quand même assez élevé.

La figure 4e affiche la norme du gradient de la fonction de coût. La norme du gradient converge à partir de 10^{-2} ce qui semble correct.

Les figures 4f et 4g montrent les termes de coût normalisés ($j, j_{obs}, \alpha, j_{reg}$) et des lignes de référence pour des seuils de précision (10 cm, 20 cm, 30 cm). La fonction de coût total ainsi que ses composantes observées et régularisées diminuent avec les itérations, suggérant une convergence efficace du processus d'optimisation. On peut cependant observer des "plateaux" pour la fonction de coût globale, cela pourrait être dû au fait que le problème est mal conditionné.

3.4.2 Prior de base avec ajout de bruit

Nous observons maintenant les mêmes courbes que précédemment mais cette fois-ci nous avons introduit du bruit à la bathymétrie initiale (`bathy_1st_np = Hobs_np - 1.5 * prior_depth + noise`).

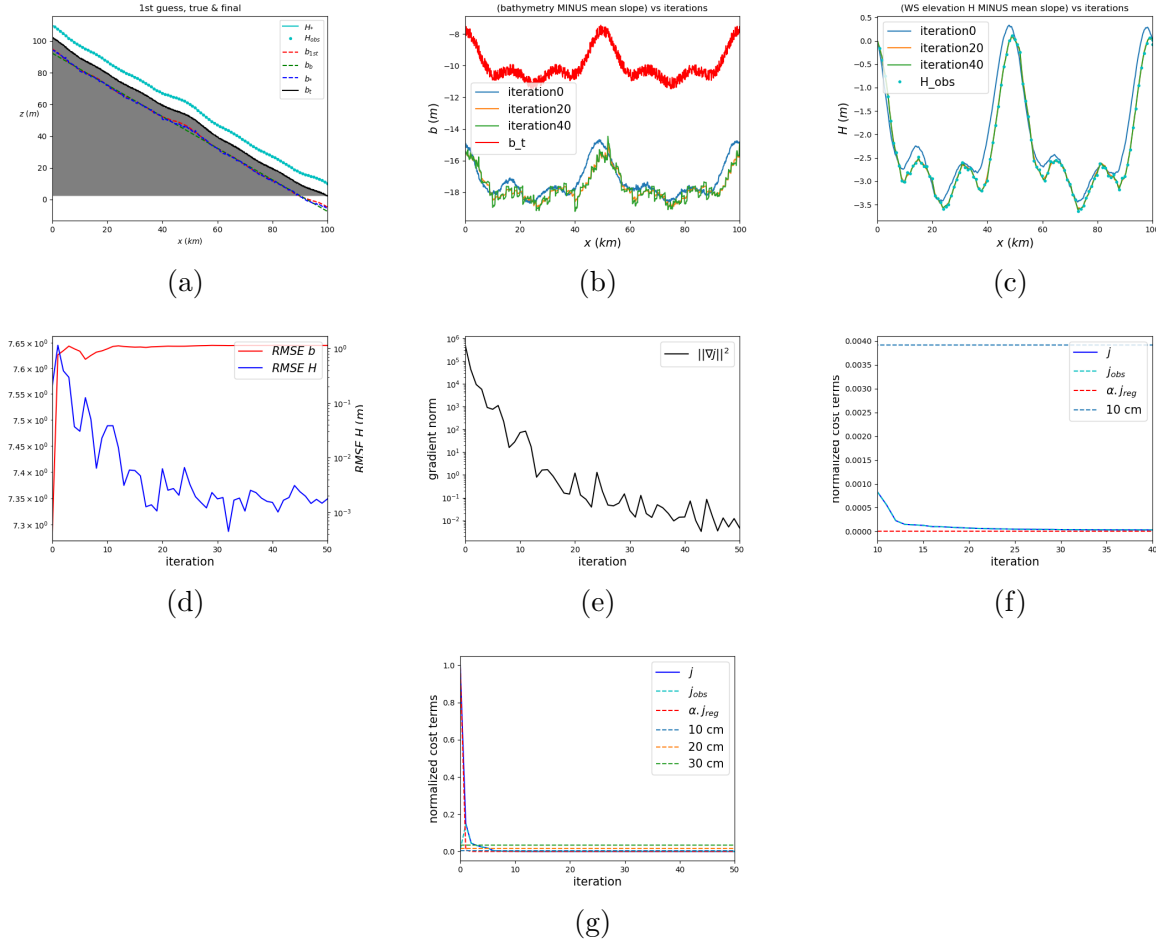


FIGURE 5 – Résultats de la VDA avec ajout de bruit sur le prior

Les figures obtenues correspondent étroitement à ce que nous avons obtenu sans bruit. Cela suggère une bonne robustesse du modèle.

3.4.3 Prior de base avec ajout d'un sinus

Ensuite, nous avons ajouté à la bathymétrie initiale un sinus :

$$H_{obs_np} - 0.75 * \text{prior_depth} + 0.2 * \text{prior_depth} * \text{np.sin}(\omega * \text{np.linspace}(0, L, \text{nb_cell}))$$

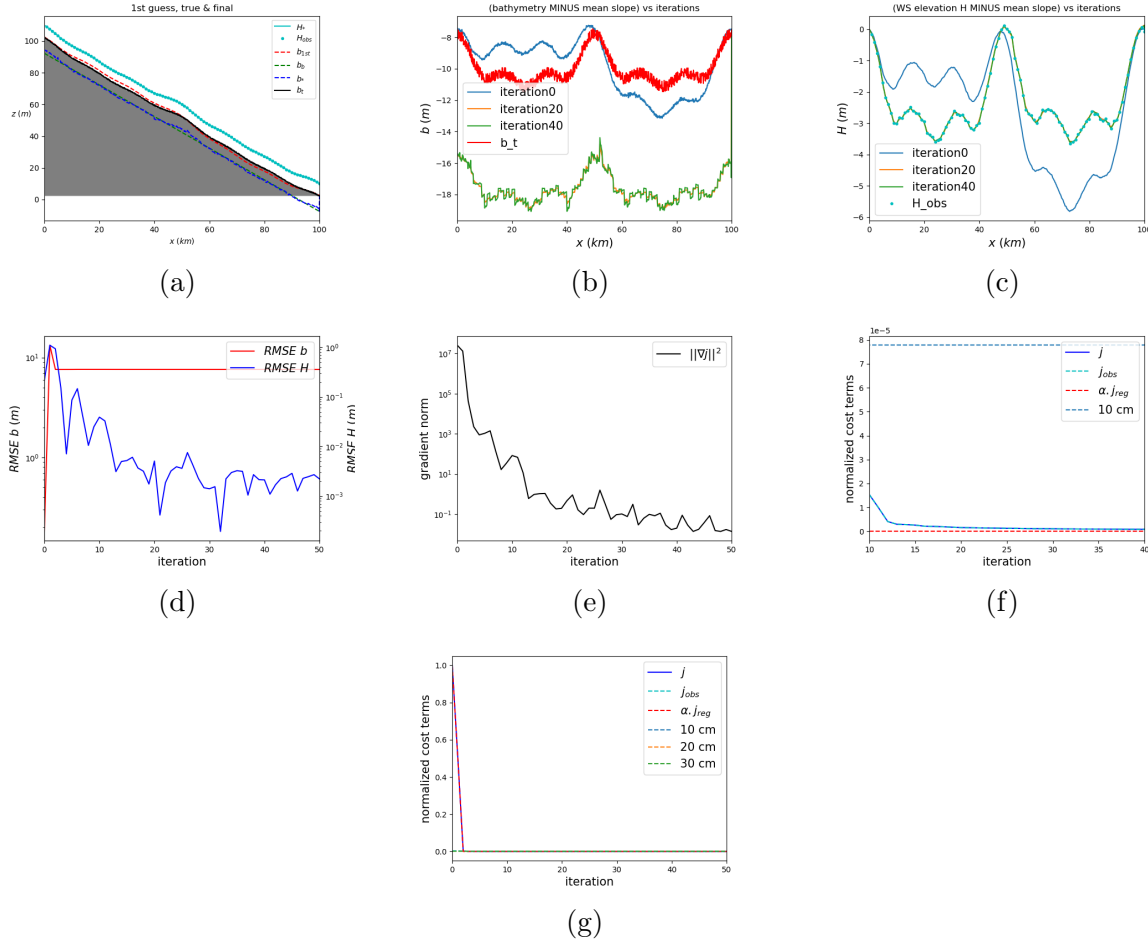


FIGURE 6 – Résultats de la VDA avec un prior de forme sinusoïdale

Pour l'ajout d'un sinus, nous remarquons que l'estimation de la bathymétrie b est similaire à celle trouvée initialement. Par contre, nous remarquons sur la figure 6a que l'estimation de b à la première itération n'est pas très bonne mais s'améliore ensuite à l'itération 40 (on voit sur la figure 6c qu'elle passe pas toutes les observations). Ensuite, nous retrouvons les mêmes commentaires sur la RMSE, les gradients et la fonction coût.

3.5 Étude de l'impact du terme de régularisation

3.6 Cas où b^* est connu en x_0

Si b^* est connu à une localisation x_0 donné, nous pouvons imposer cette nouvelle information de deux façons différentes :

- Considérer l'information qu'on possède sur b^* comme une nouvelle contrainte pour ajuster la solution.
- Trouver la solution générale sans prendre en considération le b^* connu, pour ensuite obtenir la vraie solution du cas particulier en décalant la solution générale par b^* .

4 Changement de métrique en utilisant un changement de variable

Dans cette partie nous activons le changement de variables qui consiste à introduire une régularisation et à convexifier la fonction de coût.

4.1 Analyse des courbes de validation

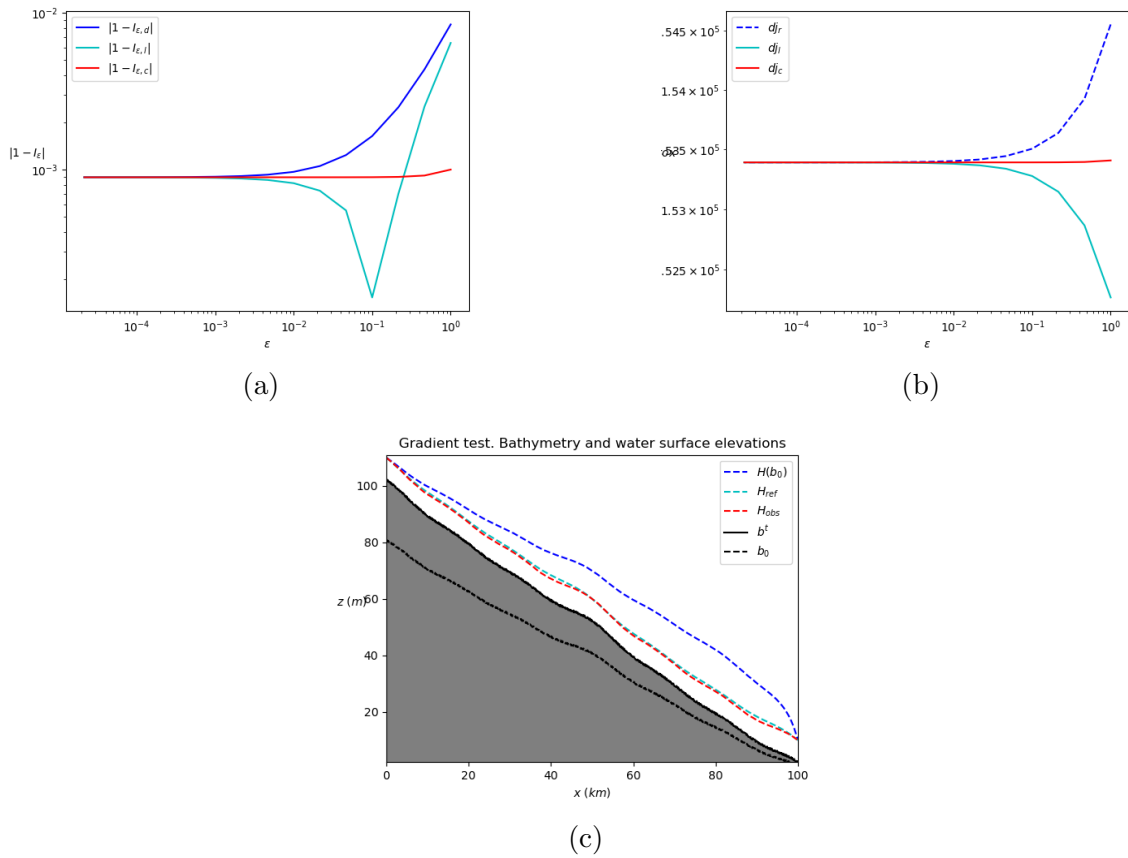


FIGURE 7

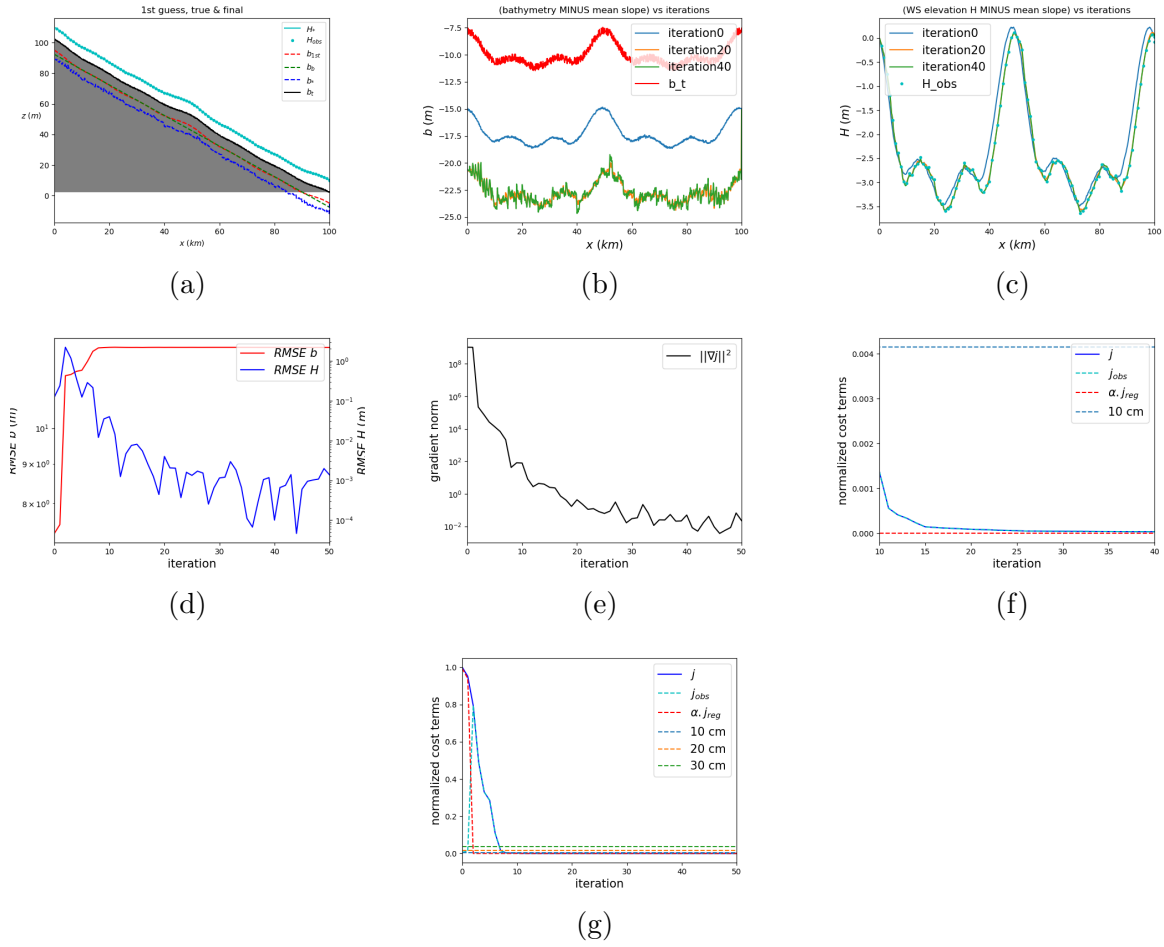
Avec l'activation de ce changement de variable il y a uniquement la figure [7a](#) qui change. En effet, on remarque que les courbes des erreurs relatives des approximations par différences finies décentrées à droite et à gauche deviennent similaires. En d'autres termes, l'impact du choix de la direction pour le calcul du gradient (à droite ou à gauche du point d'intérêt) devient négligeable lorsque le pas ϵ est suffisamment grand. En ce qui concerne l'ordre de grandeur, nous sommes toujours aux alentours de 10^{-2} comme précédemment, ce qui indique toujours une bonne performance du modèle.

4.2 Étude de l'impact du noyau de covariance

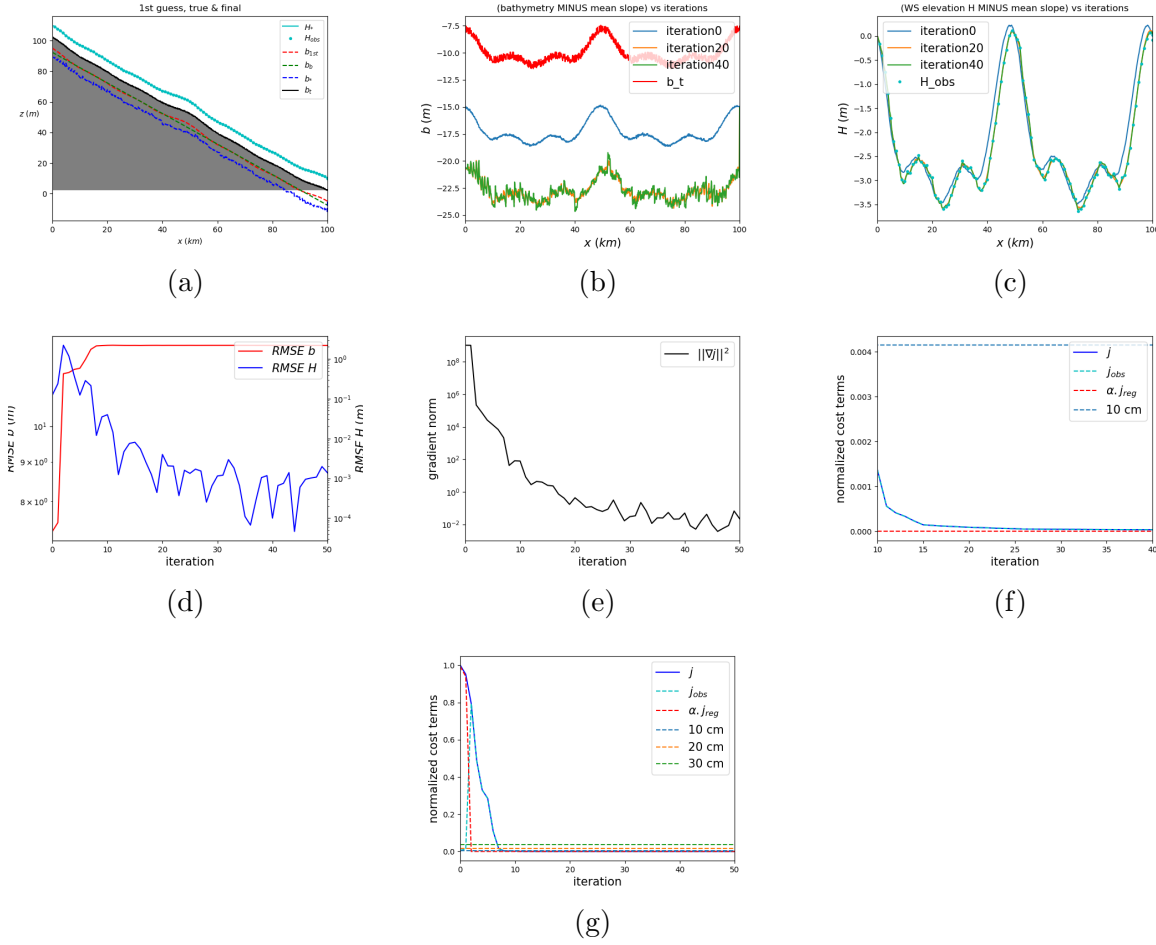
Dans cette partie nous allons tester plusieurs matrices de décomposition de Cholesky C avec plusieurs valeurs de L . Le paramètre L représente une échelle de longueur caractéristique qui définit l'échelle de régularisation. Le changement de cette matrice C devrait permettre une convergence plus rapide et/ou plus robuste.

4.3 Avec $C = \text{Identité}$

Premier cas $L = 100$, $C = \text{Id}$

FIGURE 8 – Résultats de la VDA $L = 100$ et $C = Id$

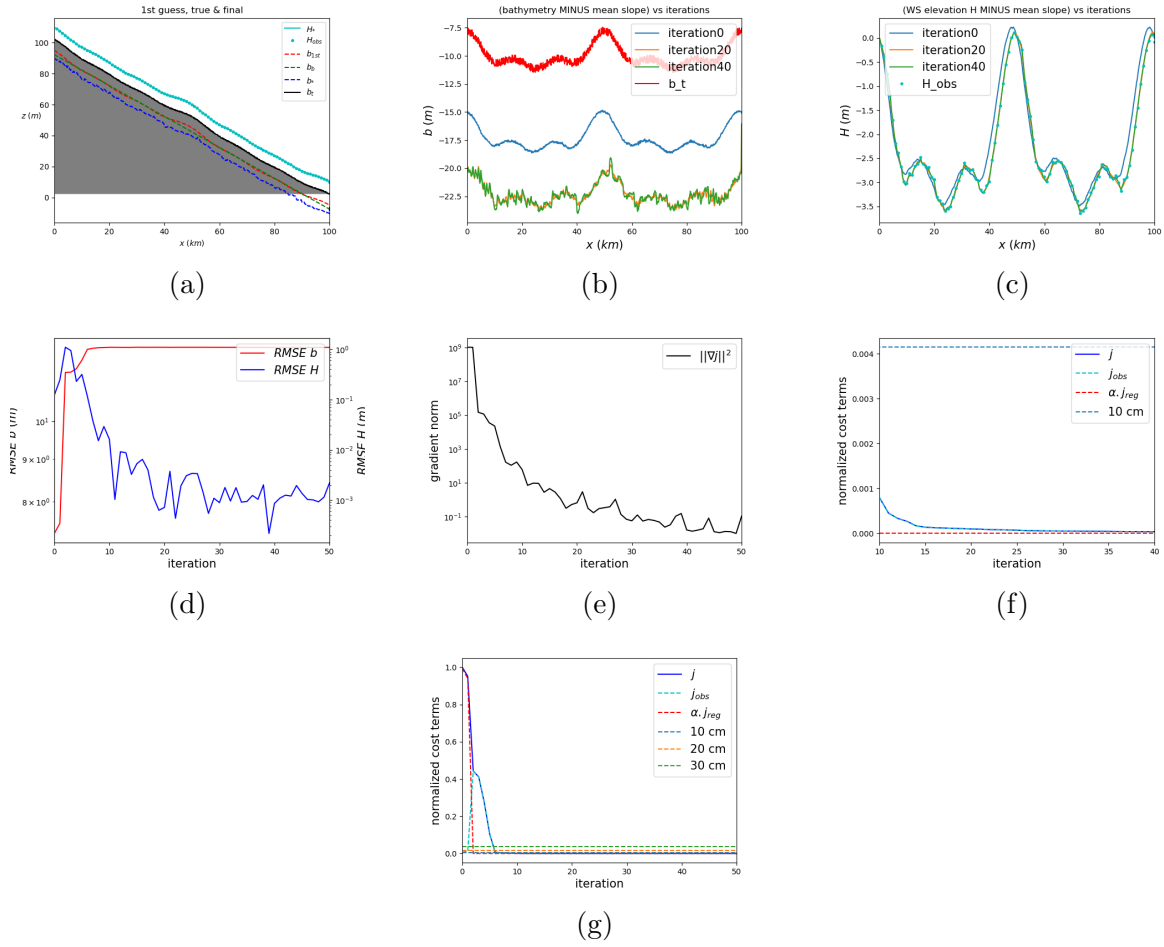
Deuxième cas $L = 1000$, $C = Id$ (figures de la partie 3.4.1)

FIGURE 9 – Résultats de la VDA $L = 1000$ et $C = Id$

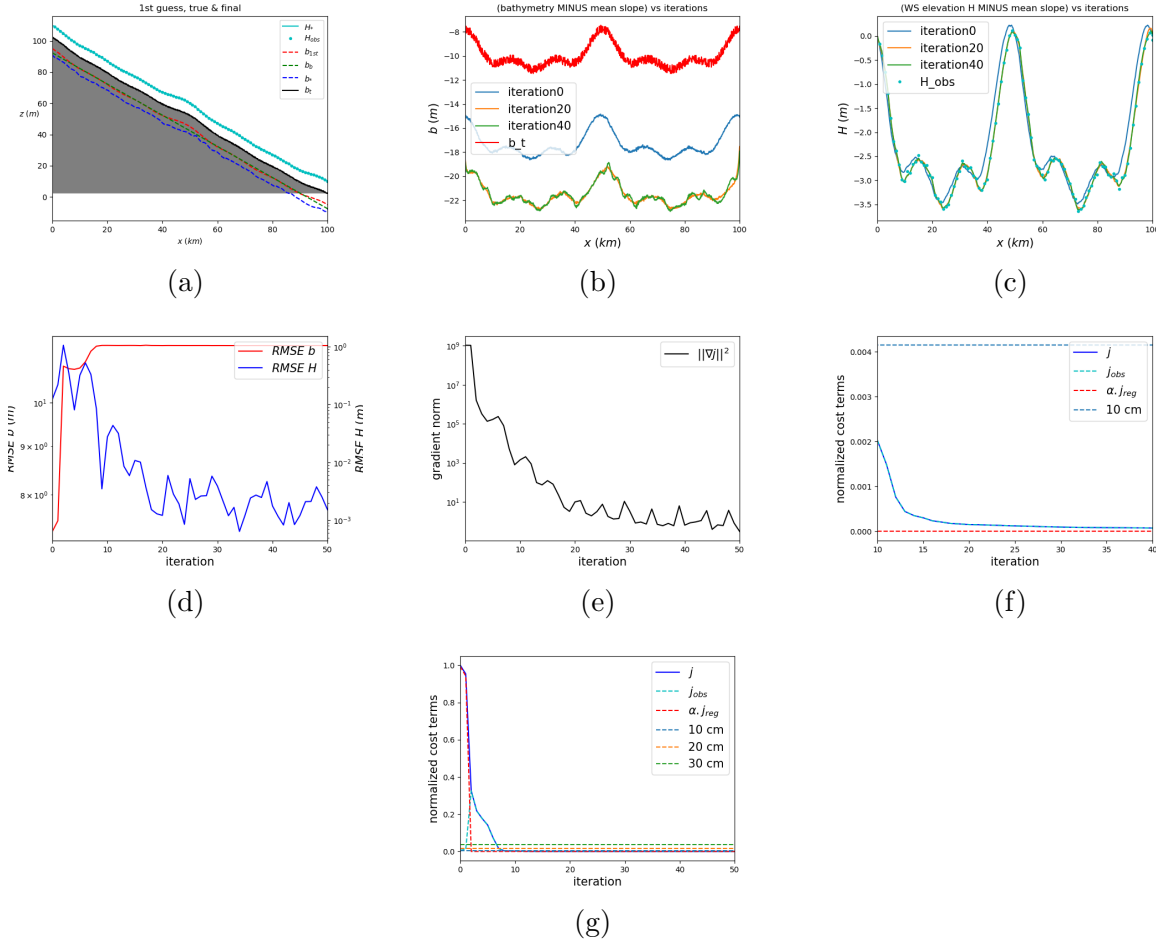
Dans le cas où $C = \text{identité}$, on ne voit pas de véritable différence pour les deux valeurs de L . En effet, dans les deux cas la norme du gradient converge en 40 itérations avec un ordre de grandeur de 10^{-2} .

4.4 Avec $C = \text{CovExpo}$

Premier cas $L = 100$, $C = \text{CovExpo}$

FIGURE 10 – Résultats de la VDA $L = 100$ et $C = CovExpo$

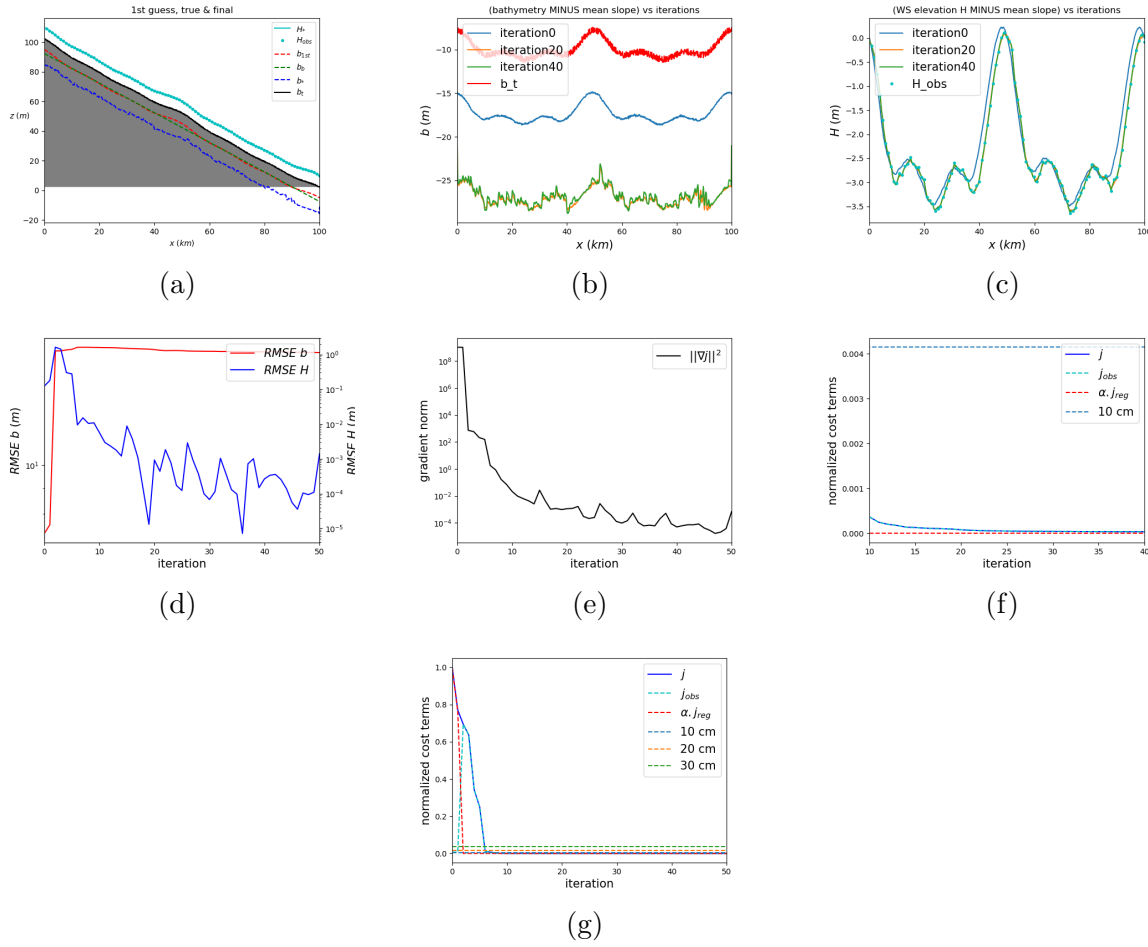
Deuxième cas $L = 1000$, $C = CovExpo$

FIGURE 11 – Résultats de la VDA $L = 1000$ et $C = CovExpo$

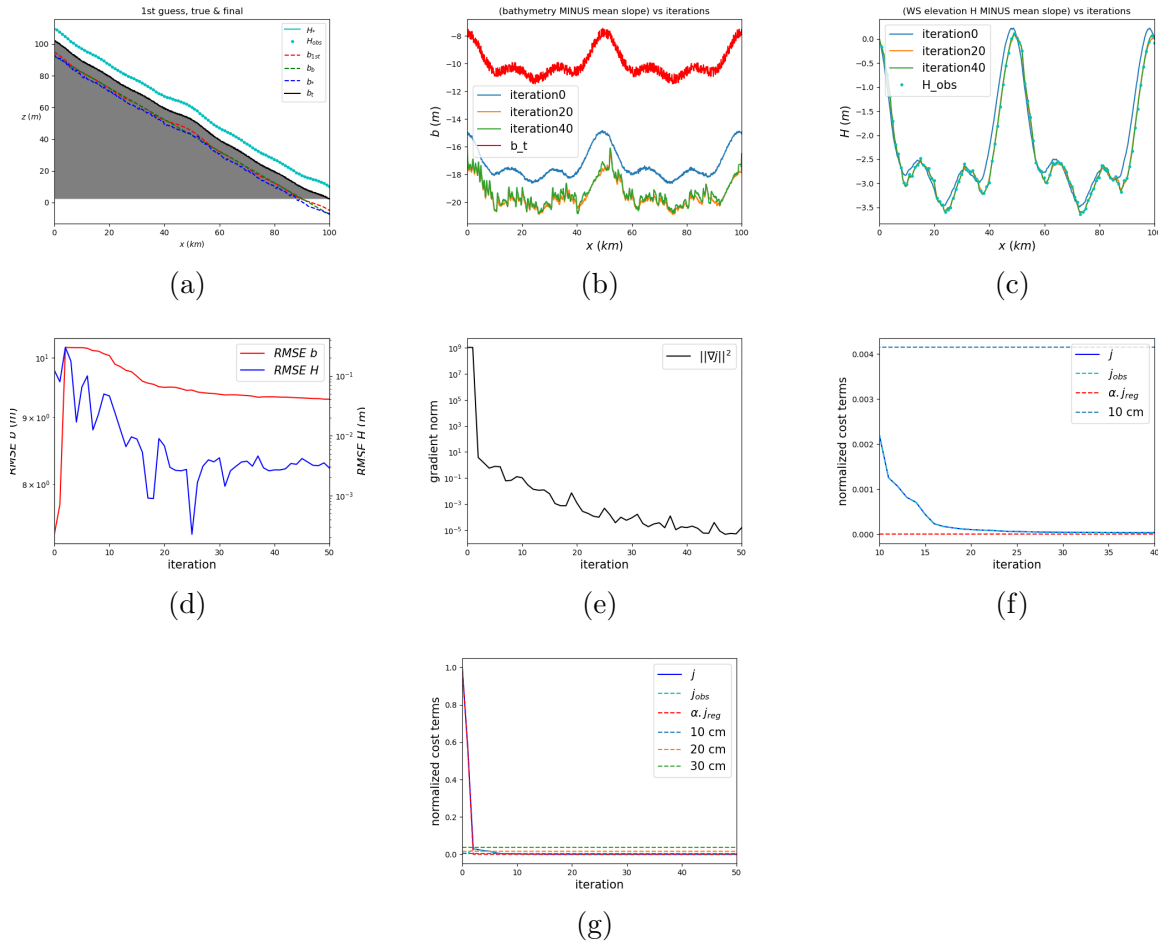
Lorsqu'on observe la courbe de la norme du gradient on voit que plus L augmente plus la valeur de cette norme est grande. En effet, pour $L = 100$ elle atteint 10^{-1} à la 50ème itération contre 10^1 lorsque $L = 1000$. Dans ce cas, plus L augmente moins on est robuste. Pour la rapidité de convergence, on peut voir une légère différence entre les deux valeurs de L . Il semblerait que pour L grand, on converge plus rapidement (en se basant sur la courbe de la norme du gradient) car pour $L = 1000$ on converge en 30 itérations contre 40 pour $L=100$.

4.5 Avec $C = CovGauss$

Premier cas $L = 100$, $C = CovGaussian$

FIGURE 12 – Résultats de la VDA $L = 100$ et $C = CovGaussian$

Deuxième cas $L = 1000$, $C = CovGaussian$, pas de résultats car la matrice n'est pas définie positive.

4.6 $\sigma = 0.1$ FIGURE 13 – Résultats de la VDA $\sigma = 0.1$ et $C = \text{CovGaussian}$

4.7 $\sigma = 0.5$

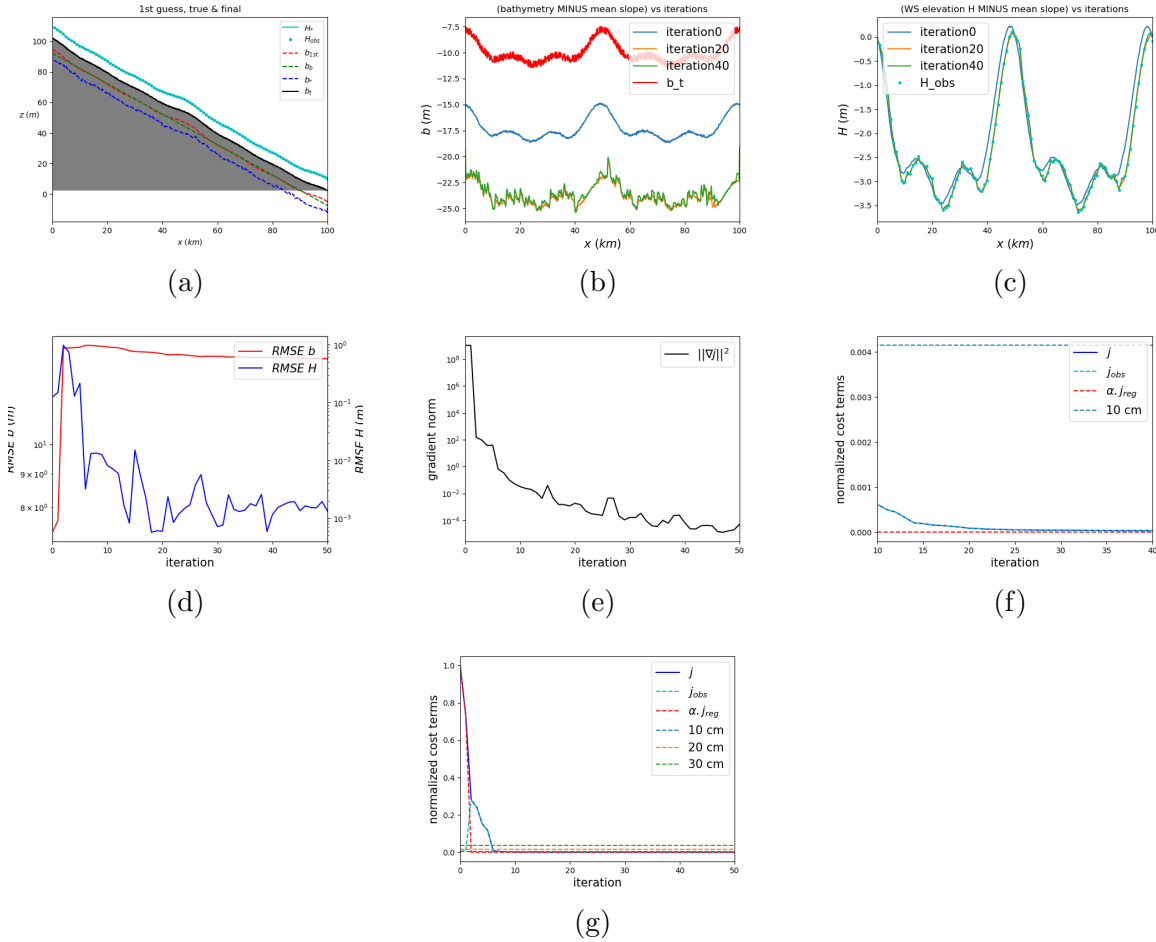


FIGURE 14 – Résultats de la VDA $\sigma = 0.5$ et $C = \text{CovGaussian}$

Influence du paramètre σ :

Les figures 13 et 14 montrent les résultats de la VDA obtenus avec deux valeurs différentes de σ . Nous remarquons que plus la valeur de σ est petite, meilleure est l'estimation. En effet, ce paramètre représente la variance du bruit des observations, et une variance plus faible implique une meilleure estimation.

4.7.1 Conclusion sur l'influence du paramètre L

Ce que nous remarquons est que lorsque L est grand l'estimation de la bathymétrie s'éloigne de b^* , de b_{1st} et $b.b$ (figures 9a, 11a). De plus, ce paramètre a tendance à lisser la bathymétrie. Cela se voit extrêmement bien lorsqu'on compare les figures 10b et 11b.

On peut noter aussi que lorsque L est petit il vaut mieux utiliser $C = \text{CovGauss}$ et lorsque L est grand il faut utiliser $C = \text{identité}$.

4.7.2 Conclusion sur l'influence de C

On remarque que le meilleur cas est obtenu pour $C = \text{CovGauss}$. En effet, c'est le cas où la régularisation est la meilleure. On arrive à ce que la norme du gradient atteigne un ordre de grandeur de 10^{-4} ce qui nous indique une très bonne robustesse du modèle. Ensuite, concernant $C = \text{CovExpo}$ on observe une convergence plus rapide si on utilise un L grand par contre on ne régularise pas bien car l'erreur est trop importante. L'identité se comporte généralement mieux que $C = \text{CovExpo}$.

5 Conclusion

En conclusion, nous pouvons dire que pour toutes les méthodes de régularisation testées ($C = \text{identité}$, $C = \text{CovExpo}$, $C = \text{CovGauss}$), la meilleure robustesse est obtenue pour $C = \text{CovGauss}$. Cependant, en ce qui concerne la rapidité de convergence elle reste la même pour les 3 méthodes utilisées.