



INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
TOULOUSE

5A ModIA

Rapport de TP

Modélisation de la température d'une maison en FEniCS

Elèves :

Karima GHAMNIA

Cassandra MUSSARD

Enseignant :

Jérôme MONNIER

22 décembre 2023

1 Lancer le code python

Pour exécuter le code Python fourni, veuillez utiliser la commande suivante : `python ghamnia_mussard.py <parametre_a_fournir>`.

Les paramètres valides sont les suivants :

- `stationnaire_carre` : maillage carré en mode stationnaire.
- `non_stationnaire_carre` : maillage carré en mode non stationnaire.
- `stationnaire_maison` : maillage d'une maison réaliste en mode stationnaire.
- `non_stationnaire_maison` : maillage d'une maison réaliste en mode non stationnaire.
- `stationnaire_maison_flux` : maillage d'une maison réaliste en mode stationnaire avec modélisation des flux.
- `non_stationnaire_maison_flux` : maillage d'une maison réaliste en mode non stationnaire avec modélisation des flux.

2 Introduction

Le but de ce TP consiste à simuler l'évolution de la température de l'air d'une petite maison avec les méthodes des éléments finis, en utilisant le package FEniCS de Python. Dans un premier temps, nous allons simplifier le problème en modélisant la maison avec un simple carré avec absence de fenêtres et de portes et une source de chaleur. Ensuite, nous allons considérer un modèle un peu plus compliqué qui ressemble davantage à une maison.

Pour les deux modèles, nous allons étudier différents cas : stationnaire et non stationnaire. Nous allons supposer dans tous les cas étudiés que la maison était inhabité, qu'on est en hiver et donc la température de base dans la maison est uniforme et nulle ($u_0 = 0^\circ C = 273^\circ K$).

3 Position du problème

Comme expliqué précédemment notre but est de modéliser l'évolution de la température de l'air d'une petite maison. Mathématiquement, ce problème se modélise comme ceci :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \text{div}(\mu \nabla u) + (\mathbf{w} \cdot \nabla u) = f$$

avec c le coefficient de conductivité thermique ($Wm^{-1}K^{-1}$), σ la constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5,6710^8(Wm^{-1}K^{-4})$, μ la diffusivité thermique ($\mu = 19(mm^2/s)$), f une source de chaleur (en $^\circ K$). On supposera dans toute la suite que $w = 0$

Nous avons une condition initiale $u_0 = 0^\circ C = 273^\circ K$ et deux conditions de Neumann qui s'écrivent :

$$-\mu \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \sigma(u^4 - u_{\text{fire}}^4)(x) \quad \text{on } \Gamma_{\text{fire}}$$

$$-\mu \nabla u(x, t) \cdot n(x) = c(x)u_f(x, t) \quad \text{sur } \Gamma_{\text{flux}}$$

4 Résolution du problème simplifié

Dans cette partie, nous avons modélisé la petite maison par un simple carré, où les 3 premiers côtés représentent les murs, et le dernier, qui est la base du carré est divisé en 2 parties égales avec la partie droite qui représente une source de chaleur, un feu avec $u_{\text{fire}} = 1073^\circ K$.

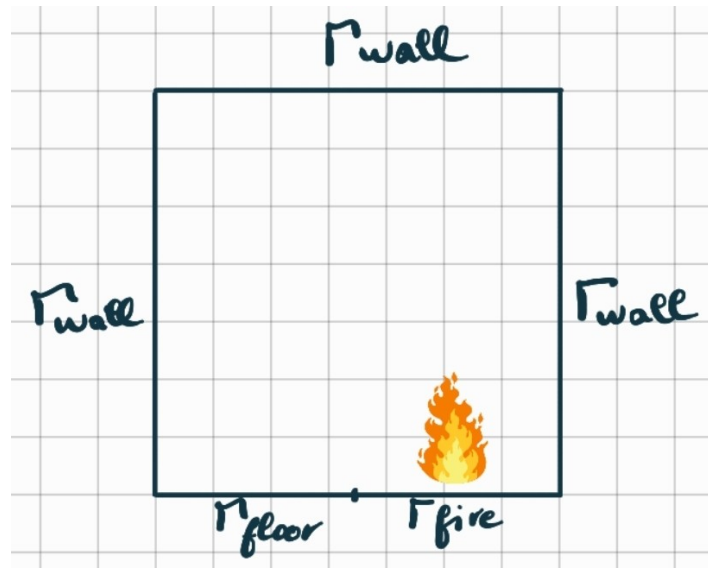


FIGURE 1 – Première modélisation simplifiée

En FEniCS nous avons modélisé ceci par un carré avec un maillage à 30 points comme nous pouvons le voir sur la figure 2

4.0.1 Cas stationnaire

Dans un premier temps pour simplifier davantage la modélisation nous avons considéré que l'EDP initiale était non stationnaire, que nous n'avions pas de conductivité thermique et pas de source de chaleur f . Le problème à résoudre était alors celui-ci :

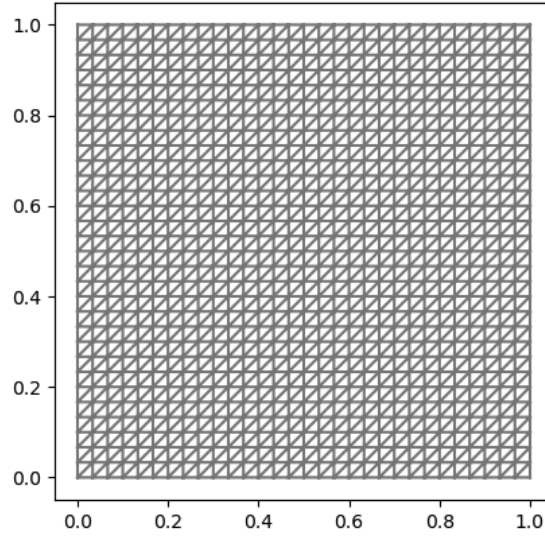


FIGURE 2 – Maillage carré

$$-\operatorname{div}(\mu \nabla u) = 0$$

avec la condition de Neumann non linéaire :

$$-\mu \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) = \sigma(u^4 - u_{\text{fire}}^4)(x) \quad \text{sur } \Gamma_{\text{fire}}$$

Nous avons calculé la forme variationnelle en utilisant la formule de Green et nous avons obtenu :

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_{\text{fire}}} \sigma u^4 v \, dx = - \int_{\Gamma_{\text{fire}}} u_{\text{fire}}^4 v \, ds$$

$\forall v \in V_0$ avec $V_0 = \{v \in H^1(\Omega), v = 0\}$

Nous remarquons que le terme en u^4 est non linéaire. Nous avons donc utilisé l'algorithme de Newton-Raphson pour linéariser la condition de Neumann avec une condition de Dirichlet homogène sur Γ_{floor} . Nous avons obtenu le résultat de la figure 3.

Ce résultat semble cohérent car nous observons qu'en bas à droite nous avons notre source de chaleur (feu) aux alentours de $1000^\circ K$ et cette source de chaleur se diffuse dans le reste du domaine. Cependant elle se propage assez mal sur le sol en bas à gauche où nous avons mis une condition de Dirichlet homogène. On remarque de plus, qu'il n'y a pas de perte de chaleur car notre carré est parfaitement isolé ($c = 0$).

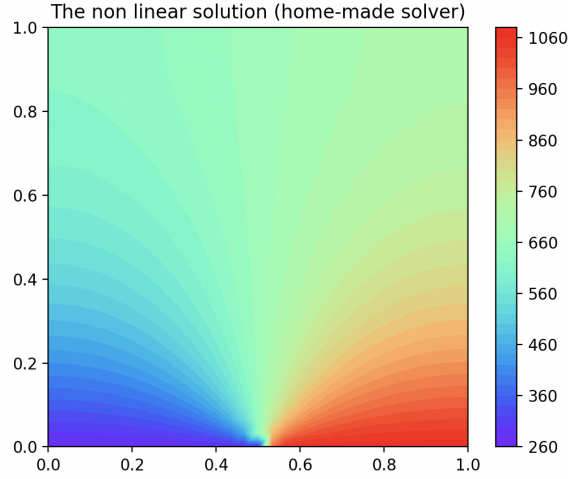


FIGURE 3 – Stationnaire avec maillage carré

4.1 Non stationnaire

Une fois que notre modélisation stationnaire était fonctionnelle, nous avons considéré le problème non stationnaire. Le problème se modélise alors de cette manière :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = 0$$

Cette fois-ci la forme variationnelle s'écrit :

$$\int_{\Omega} \partial_t u(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_{\text{fire}}} \sigma u^4 v dx = - \int_{\Gamma_{\text{fire}}} u_{\text{fire}}^4 v ds$$

$\forall v \in V_0$ avec $V_0 = \{v \in H^1(\Omega), v = 0\}$

Nous appliquons ensuite le schéma d'Euler implicite pour discrétiser l'équation.

Nous obtenons alors le problème discrétisé suivant :

$$\int_{\Omega} \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} v dx + \int_{\Omega} \mu \nabla u_{n+1} \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_{\text{fire}}} \sigma u_{n+1}^4 v dx = - \int_{\Gamma_{\text{fire}}} u_{\text{fire}}^4 v ds$$

Nous utilisons de nouveau l'algorithme de Newton-Raphson pour linéariser cette forme variationnelle avec des termes non linéaires. Dans toutes les études du cas non stationnaire qui suivent, nous avons considéré une durée de 150000 secondes ce qui est équivalent à environ 41 heures et 30 minutes et nous avons pris un pas de temps de 100. Nous obtenons les résultats des figures 4 et 5.

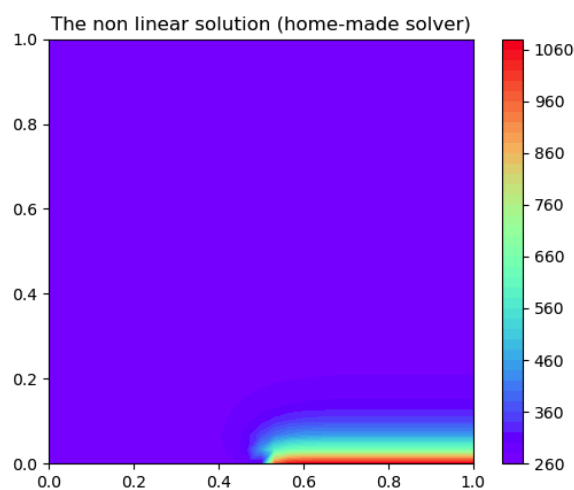


FIGURE 4 – Premier pas de temps

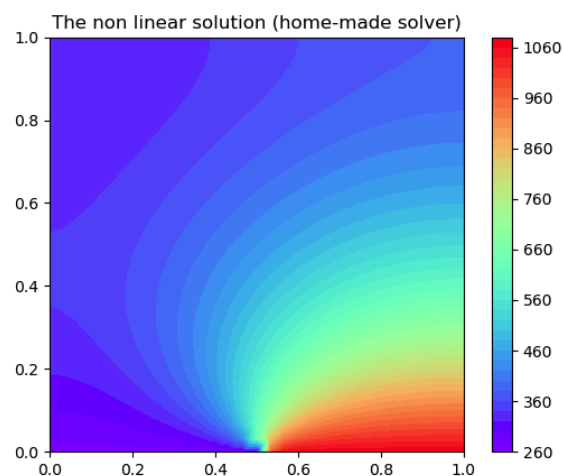


FIGURE 5 – Dernier pas de temps

Nous remarquons que l'algorithme converge pour le premier pas de temps en 16 itérations et puis pour tous les autres pas de temps il converge en 2 itérations.

En ce qui concerne les résultats visuels, nous voyons qu'au cours du temps la chaleur se propage bien dans le reste de la maison. Comme pour le stationnaire, cela se propage moins sur le sol en bas à gauche où nous avons imposé une condition de dirichlet homogène. Nous atteignons au maximum une température de $1060^{\circ}K$ ce qui correspond à la température de notre feu et au minimum nous avons $260^{\circ}K$ sur le sol en bas à gauche ou nous avons imposé dirichlet homogène.

5 Problème plus complexe

Dans cette partie, nous avons considéré une modélisation plus complexe et réaliste par rapport à celle d'avant, et nous avons représenté la maison par un polygone constitué de 12 arêtes : des murs, un plafond, une source de feu, une cheminée et une fenêtre à droite. Nous avons réalisé un maillage à 50 comme nous pouvons l'observer sur la figure 6 :

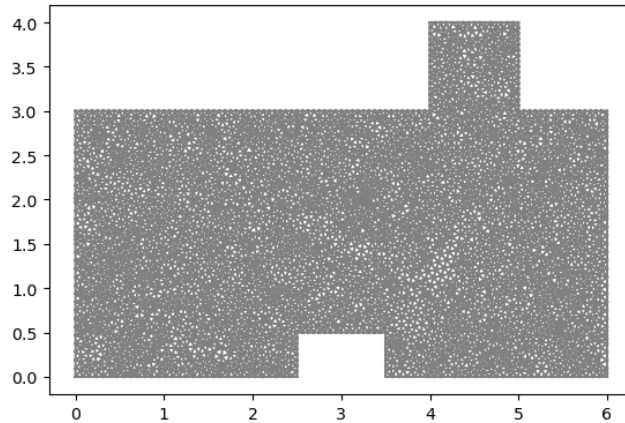


FIGURE 6 – Maillage du modèle complexe

Nous allons étudier le cas stationnaire ainsi que le non-stationnaire et pour chaque partie nous considérons deux cas :

- $c = 0$ et $f = 0$, avec c qui correspond à une maison parfaitement isolée, et f qui représente une seconde source de chaleur.
- $c \neq 0$ et $f \neq 0$, où la valeur de c représente la conductivité thermique d'un matériau et f la température de la seconde source de chaleur.

5.1 Stationnaire

Dans cette partie nous nous positionnons dans le cas stationnaire. Nous cherchons à résoudre la même EDP que dans le modèle simplifié (carré).

5.1.1 Cas avec $c = 0$ et $f = 0$

Ce cas est similaire à celui vu en section 4.0.1, où on retrouve un terme non linéaire dans la condition de Neumann. Nous avons donc utilisé encore une fois l'algorithme

de Newton-Raphson afin de résoudre ce problème non linéaire, avec une condition de Dirichlet homogène sur le plancher. Nous avons obtenu le résultat suivant :

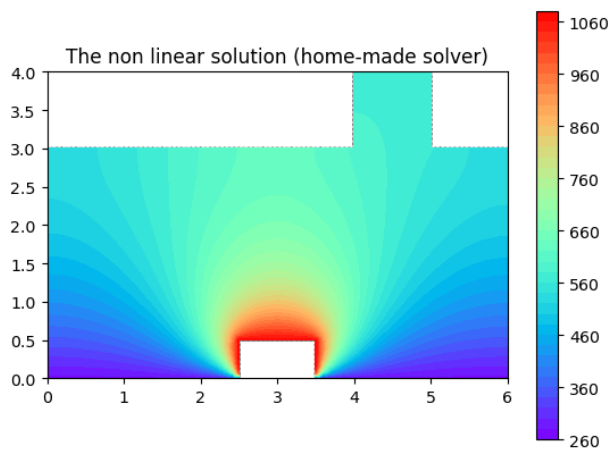


FIGURE 7 – Stationnaire avec maillage réaliste

Dans la figure 7, nous pouvons observer une source de chaleur au milieu avec une température $u_{fire} = 1073^\circ K$, cette chaleur se diffuse dans le reste de la maison sauf sur le reste du plancher où nous avons posé une condition de Dirichlet homogène.

5.1.2 Cas avec $c \neq 0$ et $f \neq 0$

Maintenant, nous allons considérer que chaque matériau dont la maison est constituée a un coefficient de conductivité thermique propre à lui, comme nous pouvons l'observer sur la figure :

	sec	hum.		Conductivité thermique des matériaux λ en W/m.K
Matériaux isolants	0,028		polyuréthane	
	0,040		laine minérale, liège	
	0,058		vermiculite	
	0,065		perlite	
Bois et dérivés	0,17	0,19	feuillus durs	
	0,12	0,13	résineux	
Maçonneries	0,27	0,41	briques 700-1000 kg/m ³	
	0,54	0,75	briques 1000-1600 kg/m ³	
	0,90	1,1	briques 1600-2100 kg/m ³	
Verre	1,0	1,0		
Béton armé	1,7	2,2		
Pierres naturelles	1,40	1,69	tuft, pierre tendre	
	2,91	3,49	granit, marbres	
Métaux		45	acier	
		203	aluminium	
		384	cuivre	

FIGURE 8 – Conductivité thermique des matériaux

Nous considérons alors les coefficients suivant :

- $c_{wall} = c_{plafond} = c_{chimney} = 1.1$ car nous supposons que les murs, la cheminée et le plafond de la maison sont en briques.
- $c_{plancher} = 0.17$ car nous supposons que le plancher est en bois.
- $c_{window} = 3$ car même si la fenêtre est en verre, nous supposons qu'elle a un coefficient de conductivité plus grand si elle est un peu ouverte.

Nous supposons également la présence d'une deuxième source de chaleur avec une température : $f = 293^\circ K$.

Nous avons donc la condition de Neumann suivante :

$$-\mu \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) = c(x) \sigma (u^4 - u_{\text{fire}}^4)(x) \quad \text{sur } \Gamma_{\text{fire}}$$

et la forme variationnelle générale suivante :

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \sigma u^4 v \, ds + \int_{\Gamma} c \sigma u v \, ds = - \int_{\Gamma} u_{\text{fire}}^4 v \, ds - \int_{\Gamma} c \sigma u_0 v \, ds$$

Nous avons encore utilisé l'algorithme de Newton-Raphson pour résoudre ce problème non linéaire sans condition de Dirichlet. Nous obtenons le résultat dans la figure 9.

Nous observons toujours une source de chaleur au milieu avec une température $u_{\text{fire}} = 1073^\circ K$, qui dans ce cas se propage partout dans la maison mais pas de la même façon, selon le matériau. Nous observons également à droite, une propagation plus forte vers la fenêtre ce qui paraît logique vu que notre c_{window} est plus grand.

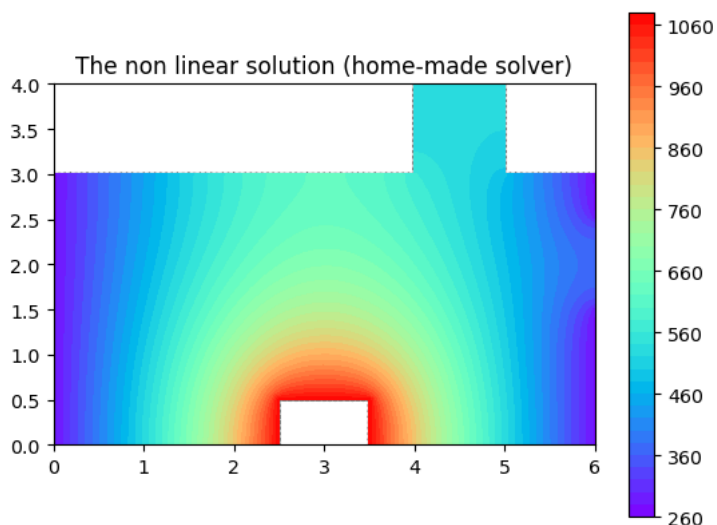


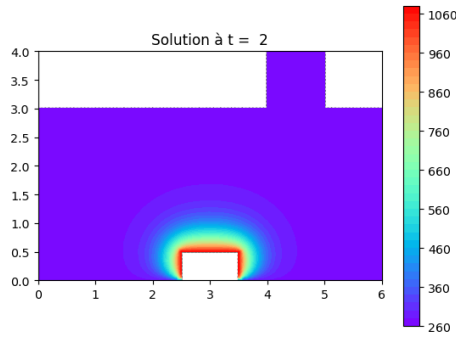
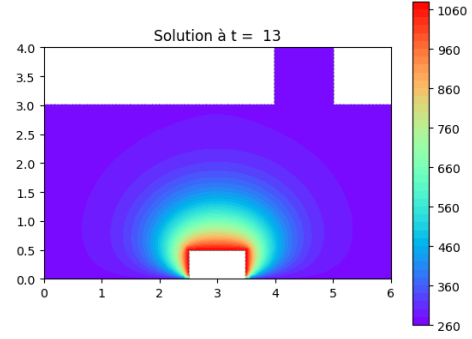
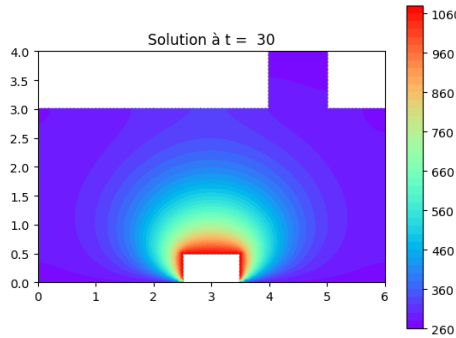
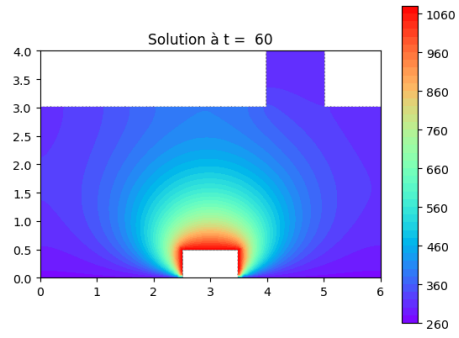
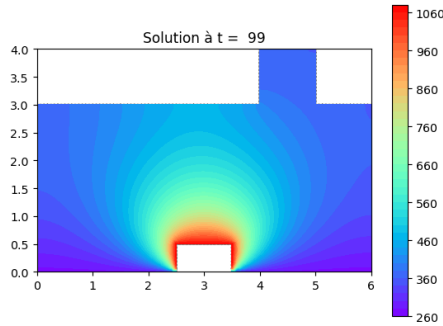
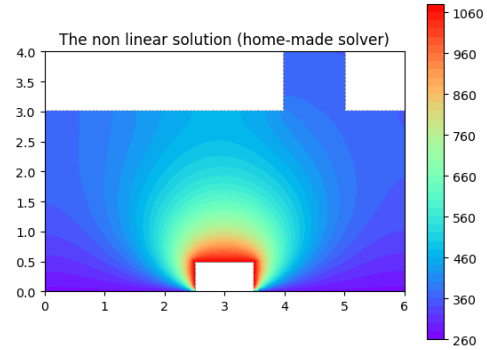
FIGURE 9 – Stationnaire avec flux et conductivité non nuls

5.2 Non stationnaire

Dans cette partie nous nous positionnons dans le cas non-stationnaire, nous avons donc une evolution dans le temps. Nous cherchons à résoudre la même EDP que dans le cas stationnaire de la section 4.1 avec une condition de Dirichlet homogène.

5.2.1 Cas avec $c = 0$ et $f = 0$

Ce cas est similaire à celui vu en section 4.1, nous avons une EDP qui dépend du temps et qui contient un terme non linéaire. Nous avons utilisé l'algorithme de Newton-Raphson et un θ -schéma avec $\theta = 1$ qui correspond à un Euler Implicite (voir 4.1). L'algorithme converge pour le premier pas de temps en 16 itérations, et en 2 itérations pour les autres pas de temps. Nous obtenons le résultat suivant :

(a) Non stationnaire à $t = 2$ (b) Non stationnaire à $t = 13$ (c) Non stationnaire à $t = 30$ (d) Non stationnaire à $t = 60$ (e) Non stationnaire à $t = 99$ 

(f) Non stationnaire finale

FIGURE 10 – Non stationnaire avec maillage réaliste

En observant la figure 10, nous visualisons bien la propagation de la chaleur au cours du temps. Pour les premiers pas de temps, la température maximale $u_{fire} = 1073^\circ K$ reste concentrée dans la partie où nous avons la source de chaleur, et avec le temps nous remarquons que la température augmente au fur et à mesure dans la maison sauf dans la partie plancher où nous avons défini une condition de Dirichlet homogène. Au

dernier pas de temps, nous avons une température maximale u_{fire} à la source, et une température minimale nulle d'environ $273^\circ K$ dans les parties de la maison que la chaleur de la source n'a pas pu atteindre.

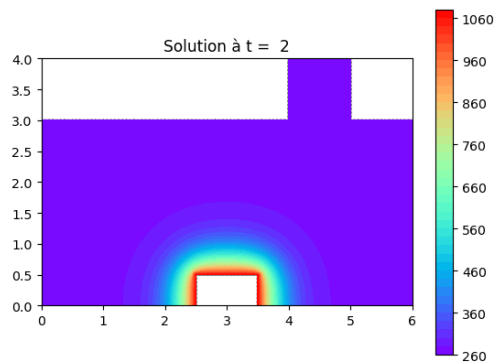
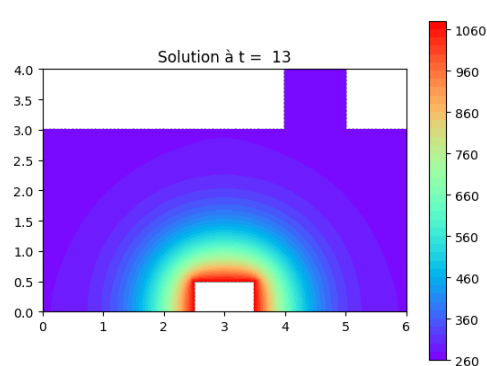
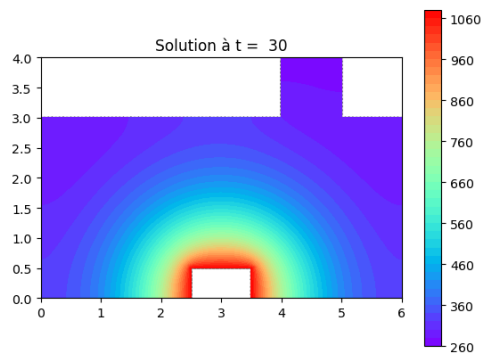
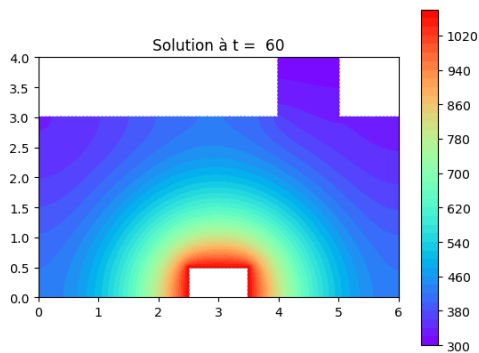
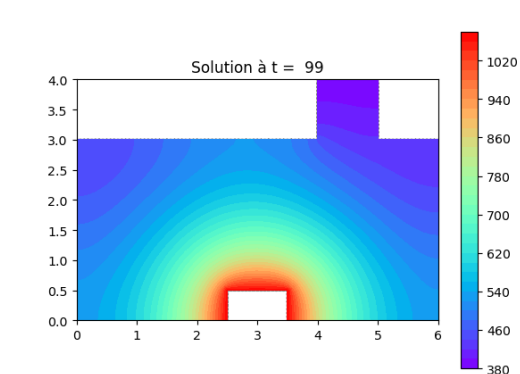
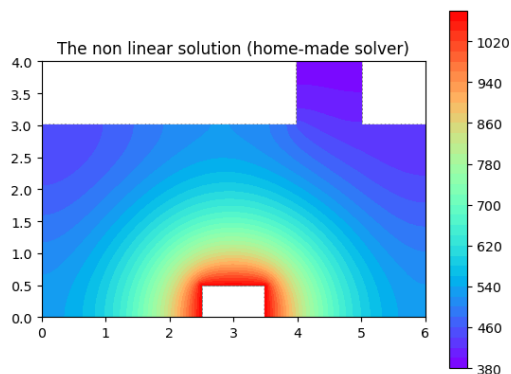
5.2.2 Cas avec $c \neq 0$ et $f \neq 0$

Dans cette partie, nous considérons les mêmes coefficients et la même seconde source que dans 5.1.2, et nous cherchons à résoudre la même EDP qui dépend du temps, cette fois-ci sans la condition de Dirichlet.

Nous avons utilisé l'algorithme de Newton-Raphson et un θ -schéma avec $\theta = 1$ (Euler implicite). L'algorithme converge pour le premier pas de temps en 16 itérations, et en 2 itérations pour les autres pas de temps.

Nous obtenons le résultat affiché dans la figure 11, et en l'observant nous remarquons que similairement à la partie précédente, la température augmente au fur et à mesure dans la maison même dans la partie plancher car nous avons pas de condition de Dirichlet.

Au dernier pas de temps, nous avons une température maximale u_{fire} à la source, et une température minimale d'environ $400^\circ K$ dans les parties de la maison les plus éloignées de la source de chaleur.

(a) Non stationnaire avec flux à $t = 2$ (b) Non stationnaire avec flux à $t = 13$ (c) Non stationnaire avec flux à $t = 30$ (d) Non stationnaire avec flux à $t = 60$ (e) Non stationnaire avec flux à $t = 99$ 

(f) Non stationnaire avec flux finale

FIGURE 11 – Non stationnaire avec flux et un maillage réaliste

6 Ordre de notre code

Premièrement, nous considérons la solution exacte défini par :

$$u_{ex}(x_1, x_2) = \cos(\omega_1 * x_1) \sin(\omega_2 * x_2)$$

Nous allons d'abord décrire comment nous retrouvons le terme source f à partir de la solution exacte, nous savons que sur Ω :

$$-div(\mu \nabla u_{ex}) = f(x, t)$$

Donc on en déduit que

$$f(x, t) = -\mu(\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos(\omega_1 x_1) * \sin(\omega_2 x_2)$$

Ensuite, sur $\partial\Omega$, on a :

$$-\mu \nabla u_{ex} n = \sigma(u^4 - u_{fire}^4)$$

Ceci devient :

$$\mu (\omega_1 \sin(\omega_1 x_1) \sin(\omega_2 x_2) \cdot n_1 - \omega_2 \cos(\omega_1 x_1) \cos(\omega_2 x_2) \cdot n_2) = \sigma (\cos^4(\omega_1 x_1) \sin^4(\omega_2 x_2) - u_{fire}^4)$$

On en déduit alors que :

$$f_{fire}(x, t) = \sigma (\cos^4(\omega_1 * x_1) \sin^4(\omega_2 * x_2) - u_{fire}^4)$$

Par manque de temps nous n'avons pas pu faire la suite de cette partie. Cependant, nous savons que comme nous avons utilisé un schéma d'Euler implicite nous devrions trouver une droite sur la courbe de convergence.

7 Conclusion

Ce TP nous a offert une expérience enrichissante dans la modélisation de phénomènes physiques et la simulation numérique associée. Il nous a également permis de manipuler le package "FEniCS" qui est très utile pour l'application des méthodes des éléments finis.