Ing. Fredy Ruiz Ph.D. ruizf@javeriana.edu.co

Carrera de Ingeniería Electrónica Pontificia Universidad Javeriana 2013

Información general

- Horario:
 - Jueves 8 a 11 a.m., Ed. 54 Salón 104
 - Inicio 8:10
 - Pausa 9:30 a 9:40
 - Fin 11:00
- Contacto
 - Via correo electrónico: ruizf@javeriana.edu.co
 - Oficina: Depto de electrónica, Of. 415-2B
 - Horario de atención: lunes y miércoles 10am-12m.
- Monitor
 - Ángela cuadros, a.cuadros@javeriana.edu.co
 - Asesoría "por demanda"

PREREQUISITOS

- Análisis de circuitos
 - Teoría de sistemas: I-O, memoria, estabilidad.
 - Sistemas lineales: rta. impulso, función de transferencia, rta. en frecuencia.
- Física de fluidos, termología y ondas
 - Variables hidráulicas
 - Variables térmicas
 - Conducción, convección

Asignaturas del área de control

NUCLEO FUNDAMENTAL

- Circuitos eléctricos
- Circuitos en frecuencia
- Sistemas dinámicos
- Controles
- Máquinas eléctricas

Asignaturas del área de control

ÉNFASIS

- Laboratorio de control
- Automatización de edificios
- Control de procesos
- Control lógico y secuencial

MAESTRÍA

- Sistemas lineales
- Técnicas de optimización
- Instrumentación industrial
- Automatización industrial

•

PROGRAMA

Parte 1. Representación de sistemas

- 1. Variables de estado
- 2. Sistemas no lineales

Parte 2. Modelos de sistemas físicos

- 1. Mecánicos
- 2. Electromecánicos
- 3. Térmicos
- 4. Hidráulicos

PROGRAMA

Parte 3. Análisis de sistemas compuestos

- 1. Interconexión
- 2. Estabilidad
- 3. Retroalimentación

Parte 4. Sistemas en tiempo discreto

- 1. Propiedades
- 2. Solución
- 3. Análisis

METODOLOGÍA

- Preparación: lecturas previas como secciones indicadas del texto guía o artículos.
- Encuentros semanales: sesiones teóricas, ejemplos de aplicación, sesiones prácticas (Matlab).
- Refuerzo: verificación de demostraciones, ejercicios simulados, lectura de artículos técnicos, ...

BIBLIOGRAFÍA

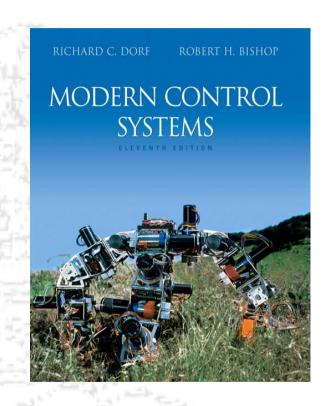
Libro de texto:

Modern control systems

Dorf, Richard Carl

Editor: Pearson/Prentice Hall

Fecha de pub: 2008.

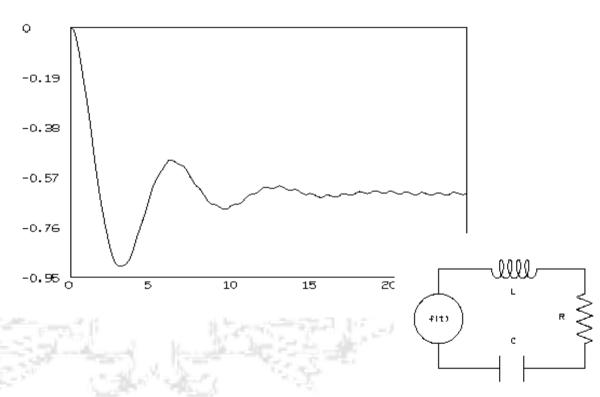


EVALUACIÓN

- 2 exámenes parciales (25% c/u): exámenes escritos individuales con preguntas teóricas y problemas, duración 1,5 horas
- Examen final (25%): examen escrito comprensivo de toda la temática vista.
- Tareas y trabajos (25%): Tareas con demostraciones y solución de problemas. Simulaciones, verificación de lectura de artículos técnicos tipo IEEE.

DINÁMICA: Análisis matemático del movimiento de los cuerpos y sus causas.





Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.)

- Mundo sublunar corruptible
- Mundo celeste perfecto
- Movimientos sin aceleración
- Debil poder predictivo



Predicción en las sociedades "antiguas"

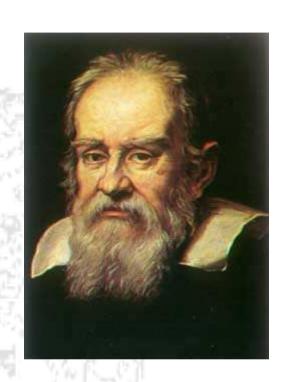


Introducción Galileo Galilei (1564-1642)

Método científico

- La naturaleza sigue leyes
- Las leyes de la naturaleza pueden expresarse en lenguaje matemático
- Las mismas leyes rigen el mundo sublunar y la esfera celeste
- Las cosas son lo que los sentidos perciben

"Conociendo la expresión matemática de una ley natural se tiene el mismo nivel de conocimento sobre ese fenómeno que el del Dios creador"



Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

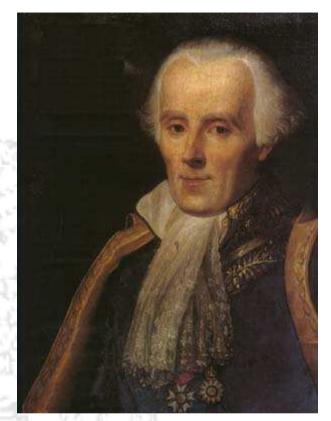
- Formulación de la cinemática
- Explica las causas del movimiento acelerado
- Crea el cálculo diferencial
- Plantea, mas no resuleve, la ecuación diferencial del movimiento de dos cuerpos (resuelta por Bernoulli)

Método de predecir el futuro: resolver las ecuaciones diferenciales que regulan los sistemas dinámicos.



Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

- Estudió las ecuaciones diferenciales de la mecánica celeste
- Transformada de Laplace



Determinismo: si una mente pudiera realizar millones de operaciones en un instante y conociera las condiciones iniciales y las leyes que rigen un sistema, podria conocer la evolución futura del sistema, y en esta forma el presente y el futuro estarian simultaneos en su mente.

Henri Poincaré (1854-1912)

- Problema de los tres cuerpos
- Teoría del caos
- Topología
- Análisis cualitativo de los sistemas dinámicos



No es posible resolver analiticamente las ecuaciones que regulan la dinámica del sistema de tres cuerpos.

"Inferring models from observations and studying their properties is really what science is about"

Lennart Ljung

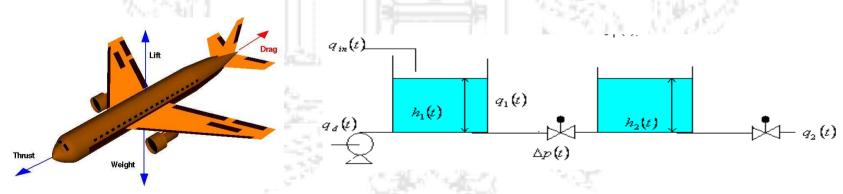
- Se quiere estudiar un sistema real con un objetivo definido:
 - Interpretación
 - Diseño
 - Predicción
 - Control
 - Detección de fallas

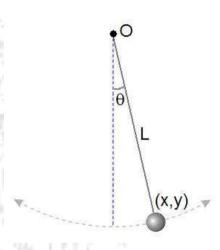
— ...

CAPÍTULO 1 GENERALIDADES DE SISTEMAS

¿Qué es un sistema dinámico?

- Un péndulo oscilando
- Una reacción química
- El sistema solar
- La población de zorros y conejos en un bosque





¿Qué es un sistema dinámico?

- Un péndulo oscilando
- Una reacción química
- El sistema solar
- La población de zorros y conejos en un bosque

¿QUÉ TIENE EN COMÚN ESTOS SISTEMAS?

- Sistema real
 - Parte del universo
 - Fronteras
 - Interacciones
- Sistema modelo
 - Invención humana
 - Construcción matemática
 - Representación simplificada
 - Capacidad predictiva

- Sistema es una colección de componentes que tienen dos propiedades fundamentales:
- Las componentes internas o subsistemas, interactúan entre si.
- Las fronteras del sistema separan a las componentes internas del mundo externo.



• Estático

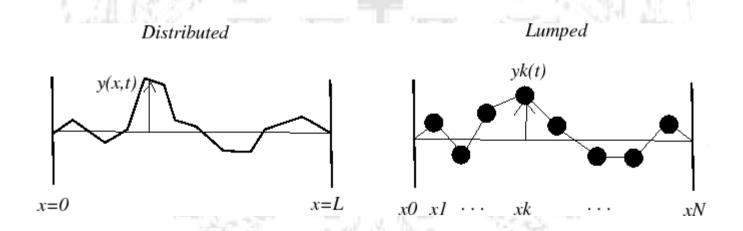
$$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

• Dinámico

$$\frac{d^{n}y(t)}{dt^{n}} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{1}\frac{dy(t)}{dt} + a_{0}y(t) = f(t)$$

• Distribuido:
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

• Concentrado:
$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n, t)$$



• Causal

• No-causal

• Tiempo invariante

• Variante con el tiempo



• SISO

• MIMO

Ejemplos

$$\ddot{y}(t) + 3e^{-t}\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-t} u(t-\tau) d\tau$$

Propiedes de sistemas

- Lineal
 - Homogeneidad
 - Aditividad

$$y = mx + b$$

- No-lineal
 - Alternativas de solución????

Representación de sistemas dinámicos

- Ecuaciones diferenciales
- Transformada de Laplace
 - Solución de ecuaciones diferenciales
 - Cuándo se puede aplicar?
 - Propiedades fundamentales
- Función de transferencia
 - Significado
 - Condiciones iniciales ?

SISTEMAS LTI

• Transformada de Laplace

$$F(s) = \int_{0^{-}}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\lbrace f(t)\rbrace.$$

• Existe si:

$$\int_{0^{-}}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$$

Tabla 2-1 Teoremas de la transformada de Laplace

Multiplicación por una constante

 $\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$

Suma y resta

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

Diferenciación

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0)$$

$$-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

en donde

$$f^{(k)}(0) = \frac{df(i)}{dt^k}$$

$$f^{(k)}(0) = \frac{d f(i)}{dt^k} \Big|_{t=0}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_n} f(\tau) d\tau dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

Traslación en tiempo

Integración

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-Ts}F(s)$$

Teorema de valor inicial

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to \infty} sF(s)$$

Teorema de valor final

 $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$ si sF(s) no tiene polos en/o a la derecha del

eie imaginario en el nlano s

Solución - Respuesta

- Dadas:
 - La ecuación dinámica

$$\frac{d^{n}y(t)}{dt^{n}} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{1}\frac{dy(t)}{dt} + a_{0}y(t) = f(t)$$

- La entrada u(t) para todo t
- Un instante inicial t₀
- Las condiciones iniciales $y(t_0)$, $y'(t_0)$, ...

La respuesta del sistema es una función y(t) que satisface la ecuación diferencial.

Solución - Respuesta

•Respuesta entrada cero

•Respuesta estado cero

DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS LTI

- □ Entrada Salida:
 - Ecuación Integro Diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

Respuesta a entrada cero se obtiene a partir de las *n* condiciones iniciales.

Solución homogénea

DESCRIPCION DE SISTEMAS LTI

 Respuesta en estado cero: depende únicamente de la entrada.

Solución particular

 También se puede evaluar empleando la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t h(t)u(t-\tau)d\tau$$

DESCRIPCION DE SISTEMAS LTI

□ Para sistema MIMO: $\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$ H(t) matriz de $(q\mathbf{x}p)$

$$H(t-\tau) = \begin{pmatrix} h_{11}(t-\tau) & h_{12}(t-\tau) & h_{1p}(t-\tau) \\ h_{q1}(t-\tau) & h_{qp}(t-\tau) \end{pmatrix}$$

Para un sistema con p entradas y q salidas.

DESCRIPCION DE SISTEMAS LTI

 Función de transferencia – Transformada de Laplace

Respuestas estado cero

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Solución - Respuesta

•Respuesta transitoria

•Respuesta en estado estable

- □ Estado de un sistema [x]: en un instante to es la mínima cantidad de información que junto con la entrada $u[t_0, \infty)$ determina la respuesta del sistema para todo $t \ge t_0$.
- El estado resume la información pasada requerida para determinar el comportamiento futuro del sistema.

Se definen variables de estado en sistemas con almacenamiento de energía; no aplica para sistemas instantáneos.

Modelos en variables de estado

• Estado: conjunto de variables que, junto con la entrada, determinan la configuración futura y las salidas del sistema.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

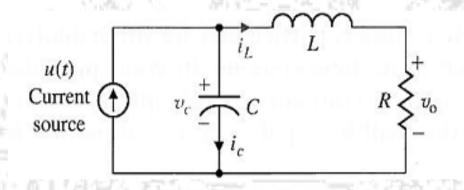
SISTEMAS DINÁMICOS

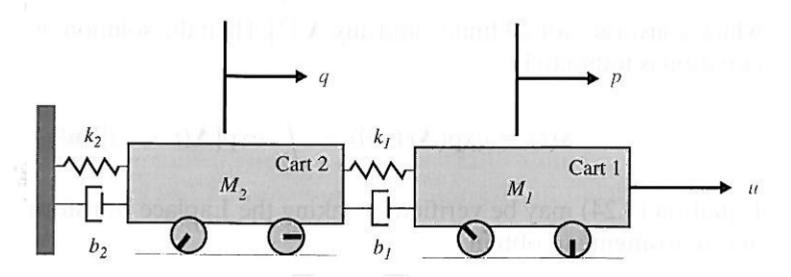
- Modelo matemático
 - Variable independiente "tiempo", t o k
 - Parámetros, $\mu:=(\mu_1, \mu_2,...\mu_p)$
 - Variables dependientes, $x:=(x_1, x_2,...x_n)$
 - Ecuaciones de movimiento:

$$dx/dt = F(x(t), t; \mu)$$

$$x(k+1)=G(x(k),k;\mu)$$

Ejemplos





Un sistema Lineal de parámetros concentrados se puede representar como:

$$X_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + ... + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + ... + b_{1p}(t)u_p(t)$$

.

.

$$X_n(t) = a_{nl}(t)x_l(t) + ... + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{nl}(t)u_l(t) + ... + b_{np}(t)u_p(t)$$

n ecuaciones diferenciales de primer orden

Las variables de salida se pueden representar como *q* combinaciones lineales de los estados y las entradas:

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + ... + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + ... + d_{1p}(t)u_p(t)$$

.

.

.

$$y_{q}(t) = c_{q1}(t)x_{1}(t) + ... + c_{qn}(t)x_{n}(t) + d_{q1}(t)u_{1}(t) + ... + d_{qp}(t)u_{p}(t)$$

q ecuaciones lineales INSTANTANEAS!!

$$\begin{array}{l} \overset{\bullet}{X}(t) = \overset{\bullet}{A}(t)X(t) + B(t)U(t) \\ & \overset{\bullet}{X}(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \end{array} \right\} \quad \text{Ecuación dinámica de estado, sistema LVT}$$

- X (t) vector de variables de estado del sistema (n x 1)
- A (t) matriz del sistema (n x n)
- B (t) matriz de entrada (n x p)
- U (t) vector de variables de entrada (p x 1)
- □ Y (t) vector de variables de salida (q x 1)
- □ **C** (t) matriz de salida (q x n)
- D (t) matriz de transmisión directa (q x p)

47

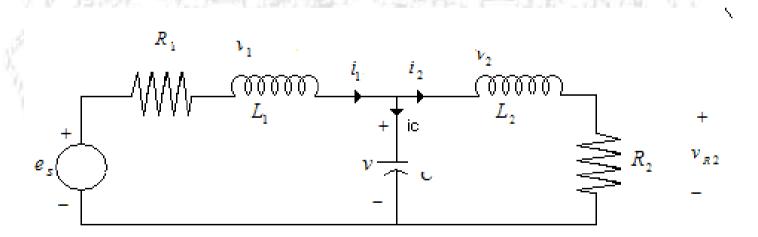
- Selección no es única
- El conjunto de variables de estado debe ser linealmente independiente.
- Sistema invariante con el tiempo: A, B, C, D son constantes
- La representación de estado se puede emplear para sistemas: lineales, no lineales, variantes, invariantes, continuos, discretos, SISO y MIMO

VARIABLES DE ESTADO CIRCUITOS ELECTRICOS

Variables generalizadas	Variable Eléctrica	Unidades SI
Esfuerzo, e	Voltaje, v	V = N-m/C
Flujo, f	Corriente, i	A = C/s
Momentum, I	Flujo, φ	V-s
Desplazamiento, δ	Carga, <i>q</i>	C = A-s
Potencia, p	v(t)i(t)	W = N-m/s
Energía <i>, E</i>	$\int_{0}^{q} vdq; \int_{0}^{q} id\phi$	J = V-A-s = W-s = N-m

EJEMPLO

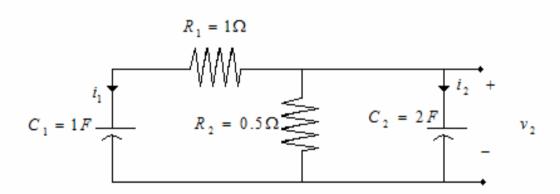
 $\ \square$ Plantear el conjunto de ecuaciones de estado que describe al sistema. Tomar como salida v_{R2}



EJEMPLO

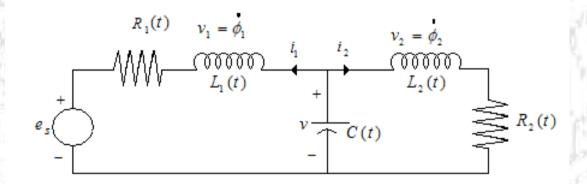
Plantear el modelo en variables de estado tomando como variables de estado:

- a. La carga
- b. El voltaje
- c. Encontrar la relación entre los dos modelos.



EJEMPLO: SISTEMA VARIANTE

 Plantear las ecuaciones de estado para un sistema Lineal Variante con el tiempo.



□ Sistema LIT:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$

$$Y = CX + DU$$

Obtener la solución de la ecuación.

Al tablero!!!!!

□ Sistema LIT:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

Empleando transformada de Laplace:

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{\text{ENTRADA CERO}} + \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)}_{\text{ESTADO CERO}}$$

Solución en tiempo:

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau$$

Se define la matriz de transición de estados:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\mathcal{I}}^{-1} \{ \mathbf{\Phi}(s) \}$$

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Comparando las soluciones en el tiempo y la frecuencia:

$$X(t) = \underbrace{\Phi(t)X(0)}_{\text{Respuesta no forzada}} + \underbrace{\int_{0}^{t} \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau}_{\text{Respuesta forzada o en estado cero}}$$

 \Box $\Phi(t)$ relaciona el estado en cualquier tiempo t con el estado en el instante inicial.

La respuesta estado cero:

$$\mathbf{X}_{estado cero}(t) = \int_{0}^{t} \mathbf{\Phi}(t-\tau) \mathbf{BU}(\tau) d\tau$$
Respuesta forzada o en estado cero

 En frecuencia equivale a la función de transferencia:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La función de transferencia es:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- \Box det(sI A) determina los polos
- □ SISO: función escalar, racional
- MIMO: arreglo matricial pxq, elementos racionales

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

- Sólo existe una representación entrada salida: la respuesta impulso y la función de transferencia son únicas.
- La función de transferencia que se obtiene es racional.
- Si D = 0, la función de transferencia es estrictamente propia

Ejemplo

Consideremos la ecuación:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

La solución está dada por la ecuación

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Para calcular e^{At} , se evalúa la inversa de sI - A

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (s+2)/(s+1)^2 & -1/(s+1)^2 \\ 1/(s+1)^2 & s/(s+1)^2 \end{bmatrix}$$

Solución de la Ecuación de Estado

Empleando la expansión en fracciones simples y usando una tabla de transformada Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{(s+2)}{(s+1)^2} & \frac{-1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

La solución completa es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t}x_1(0) - te^{-t}x_2(0) \\ te^{-t}x_1(0) + (1-t)e^{-t}x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \\ \int_0^t [1-(t-\tau)]e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

ANÁLISIS MODAL

La solución homogénea del sistema es:

$$x(t) = \Phi(t)x(0)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \mathbf{v}_{i} e^{\lambda_{i}t}$$

Donde:

- v_i Son los autovectores de la matriz A
- λ_i los autovaloes de A
- α_i depende de las condiciones iniciales

VARIABLES DE ESTADO

Realizando un cambito de variable

$$X = PZ$$

- P es la relación entre los dos conjuntos de variables de estado.

¿Cómo resulta el sistema de ecuaciones para el nuevo vector de estado?

VARIABLES DE ESTADO

Resulta

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{Z} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{Y} = \hat{C}\mathbf{Z} + D\mathbf{U}$$

Realizando las transformaciones similares:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$$

¿Cuál es la relación entre las funciones de transferencia?

CONTROLABILIDAD

"La ecuación de estado de un sistema es completamente controlable si existe una entrada U(t), que pueda transferir cualquier estado inicial a cualquier estado final en un tiempo finito, en caso contrario no es controlable"

$$\mathbb{C} = (B \vdots AB \vdots \dots \vdots A^{n-1}B)$$

□ Sistema controlable si y sólo si rango ℂ = n,

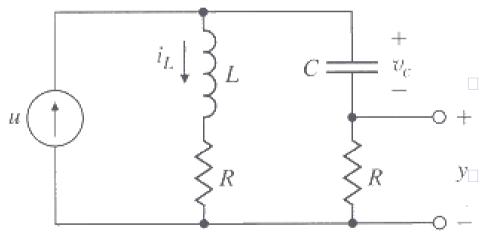
OBSERVABILIDAD

"Un sistema es completamente observable si y solo si existe un tiempo finito t, tal que el estado inicial se puede determinar a partir de las salidas y de las entradas."

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

□ Sistema observable si y sólo si rango Ô = n

CONTROLABILIDAD & OBSERVABILIDAD



Plantear las ecuaciones de estado. La entrada u(t) es una fuente de corriente y la salida y es le voltaje sobre el condensador. Tomar:

$$i_L = X_1 ; V_c = X_2$$

¿Qué condiciones sobre R, L y C garantizan que el sistema es controlable?

Qué condiciones sobre R, L y C garantizan que el sistema es observable?

¿Qué pasa con la función de transferencia en esos casos?

Dada la función de transferencia, cómo obtener una representación en espacio de estados?

 Caso 1: Realización de la función G(s)=bo/D(s) o función "solo polos".

$$G(s) = \frac{bo}{s^{n} + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_{1}s^{1} + a_{0}} = \frac{bo}{D(s)} \qquad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

□ Forma "Companion" – Variables tipo fase

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy}{dt} = x_1(t)$$

$$x_3(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = x_2(t)$$

•••••

$$x_n(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = x_{n-1}(t)$$

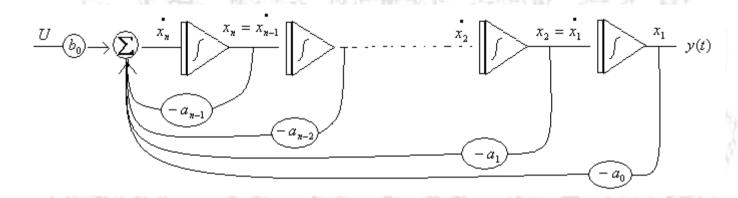
$$\dot{x}_n(t) = \frac{d^n y}{dt^n} = -a_{n-1}x_n(t) - \dots - a_2x_3(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t) = b_0u(t)$$

□ Representación matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

□ Diagrama de bloques:



Resolviendo las ecuaciones:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0\left(\frac{1}{s^n}\right)}{1 - \left(-\frac{a_{n-1}}{s} - \frac{a_{n-2}}{s^2} - \dots - \frac{a_0}{s^n}\right)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}$$

□ Caso 2: Realización de la función propia n = m:

$$G(s) = \frac{b_{n}'s^{n} + b'_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_{0}'}{a'_{n}s^{n} + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_{0}} = \left(\frac{b'_{n}}{a'_{n}}\right) + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_{0}}{s^{n} + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_{0}}$$

$$G(s) = d' + \frac{N(s)}{D(s)}$$

 El residuo es estrictamente propio, y el cociente corresponde al término d de la ecuación de salida

$$\frac{\lim}{s \to \infty} \left[c \left(SI - A \right)^{-1} + d \right] = \frac{\lim}{s \to \infty} \left[d' + \frac{N(s)}{D(s)} \right]$$

$$d = d'$$

Es necesario realizar la función estrictamente propia:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots a_0}$$

- Extensión forma Companion
- Fracciones parciales

Ejemplos

Obtener realizaciones de:

$$G(s) = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$