Sistemes de numeració

Problema 18.
Observeu que si p, q són primers diferents, els divisors de $p^2\, q^3$ coincideixen amb els $3 \cdot 4 = 12$ termes de l'expansió del producte

$$(1 + p + p^2)(1 + q + q^2 + q^3),$$

i que aquest producte és igual a la suma de tots els divisors de $p^2\, q^3$.

Donat un enter n, considerem les funcions

$$\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k, \quad k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0.$$

Sigui $n = p_1^{a_1}\, p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ la descomposició de n en factors primers.

(i) Expliqueu el significat de les funcions σ_k, per a $k = 0, 1, > 1$.

(ii) Demostreu la fórmula
$$\sigma_1(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

(iii) Demostreu la fórmula
$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{(a_i+1)k} - 1}{p_i^k - 1},$$
per a tot $k \geq 1$.

Solució.

(i) Les funcions $\sigma_k(n)$ son la suma de tots els divisor de n elevats a la potència k.

(ii) Sabem que $\sigma_1(n)$ és la suma de tots els divisors de n. Anem a veure quina forma tenen aquests divisors i veurem que la seva suma coincideix amb la fórmula donada.

Els divisors de n son el número 1, els seus factors primers p_i (amb $i \in \{1 \dots r\}$) elevats a les potències $1, \dots, a_i$ respectivament i, finalment, totes les combinacions dels productes d'aquests (sense repetir).

Anem a desenvolupar el productori per comprovar que obtenim com a sumands els divisors esmentats (podem establir la primera igualtat degut a la fórmula de les sèries geomètriques).

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{r} (1 + \dots + p_i^{a_i})$$

Quan expandim el producte, donat que tots els elements del productori tenen el sumand 1, tindrem que també apareixeran com a sumands de la expresió expandida els factors primers elevats a potencies menors o igual a a_i (éssent a_i la multiplicitat del factor primer a_i en la descomposició en producte de primers de n).A més a més també apareixeran totes les combinacions possibles de productes entre les potències de primers diferents (que clarament divideixen a n).

(iii) En aquest cas volem demostrar la següent fórmula:

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{(a_i+1)k} - 1}{p_i^k - 1},$$

La demostració serà pràcticament anàloga a la del punt anterior:

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{(a_i+1)k} - 1}{p_i^k - 1} = \prod_{i=1}^{r} \frac{(p_i^k)^{a_i+1} - 1}{(p_i^k) - 1} = \prod_{i=1}^{r} (1^k + \cdots + (p_i^k)^{a_i})$$

Tornant a expandir, ens trobarem amb un conjunt de sumands similars tals que tots ells estaran formats per certs factors elevats a la potencia, amb aquesta forma:

$$(p_{i_1}^{a_{i_1}})^k \cdots (p_{i_t}^{a_{i_t}})^k \text{ (per } 1 \geq t \geq r)$$

Ara, podem treure fora la potencia k de forma que ens queda un divisor de n elevat a la potencia k, el que coincideix amb la definició de $\sigma_k(n)$, i ja estem. $\square$