Particiones.
Representación geométrica de particiones.
La función generadora de $p(n)$.
Otras funciones generadoras.
Dos teoremas de Euler.

Beihui Ye, Andreu Correa Casablanca

17 de Diciembre, 2010

Índice

1. Particiones

En este tema introduciremos el concepto de partición de un número natural n dado, así como las funciones que nos dan el número de particiones de n con y sin restricciones. Hablaremos también de algunos resultados teóricos que relacionarán las citadas funciones entre ellas. Empecemos entonces por algunas definiciones:

Definición 1. Una **partición** de un número natural n es una tupla $a \in \mathbb{N}^r$ para algún $r \in \mathbb{N}$ tal que si $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ entonces se cumple que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$ y además $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = n$.

La condición de orden se establece para simplificar la definición y no tener que establecer relaciones de equivalencia entre tuplas que tengan los mismos elementos pero con distinto orden. Intuitivamente, una partición viene a ser una forma de descomponer n como suma de números naturales más pequeños que n.

Definición 2. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $X(n)$ el conjunto de todas las particiones de n (del que fácilmente podemos ver que es necesariamente finito), entonces podemos definir la **función partición** como

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \sharp X(n) \end{array}$$

Por conveniencia, podremos extender la función partición para todos los enteros, estableciendo $p(0) = 1$ y $p(n) = 0 \;\; \forall n < 0$.

Ejemplo 3. Presentamos una tabla de los valores de p para los primeros 5 naturales:

n	$p(n)$	$X(n)$
1	1	$\{(1)\}$
2	2	$\{(1,1),(2)\}$
3	3	$\{(1,1,1),(2,1),(3)\}$
4	5	$\{(1,1,1,1),(2,1,1),(2,2),(3,1),(4)\}$
5	7	$\{(1,1,1,1,1),(2,1,1,1),(2,2,1),(3,1,1),(3,2),(4,1),(5)\}$

Es prácticamente obvio que la función p es creciente, pero es más interesante aún notar que su crecimiento es realmente rápido. Podemos comprobarlo en *Wolfram Mathematica*[1] con la función `PartitionP`, que se encuentra en el paquete *Combinatorica*, o en la aplicación online wolframalpha.com con la misma función. Con el software *SAGE*[2] podemos encontrar el conjunto de particiones de un número n dado, así como su cardinal mediante las expresiones `Partitions(n).list()` y `Partitions(n).cardinality()` respectivamente.

Como ejemplos del crecimiento de p, tenemos que $p(100) = 190569292$, $p(200) = 3972999029388$ y $p(1000) = 24061467864032622473692149727991$.

[1]Software científico orientado a manipulación de datos matemáticos creado por Stephen Wolfram, se trata de un producto que comercializa su empresa Wolfram

[2]SAGE es un sistema algebraico computacional escrito en lenguaje Python. Fue creado en el año 2005 con la intención de crear un subconjunto de la funcionalidad del software Magma en la Universidad de Washington, hoy en día aglutina una gran cantidad de funcionalidades y puede integrarse con muchas otras aplicaciones científicas. Se trata de software libre y puede ser encontrado en `http://www.sagemath.org`.

Lema 4. *La función partición p es creciente.*

Demostración. Sea $p(n) = \sharp X(n)$, entonces podemos construir un conjunto de Y con elementos $(a_1, \ldots, a_s, 1)$, donde $(a_1, \ldots, a_s) \in X(n)$. Claramente $Y \subset X(n+1)$ ya que $a_1 + \ldots + a_s + 1 = n + 1$, además, podemos afirmar que $\sharp Y = \sharp X(n)$. Como $(n+1) \notin Y$ y también $(n+1) \in X(n+1)$, deducimos que $\sharp X(n+1) > \sharp X(n)$. □

Ahora que ya conocemos la función partición y hemos visto algo sobre su crecimiento pasaremos a definir otras funciones partición, pero esta vez con ciertas restricciones.

Definición 5.

$p_m(n)$	$=$	el número de particiones de n en sumandos menores que o bien iguales a m.
$p^o(n)$	$=$	el número de particiones de n en sumandos impares.
$p^d(n)$	$=$	el número de particiones de n en sumandos distintos.
$q^e(n)$	$=$	el número de particiones de n en un número par de sumandos distintos.
$q^o(n)$	$=$	el número de particiones de n en un número impar de sumandos distintos.

Tomaremos la convención $p_m(0) = p^o(0) = p^d(0) = q^e(0) = 1$, $q^o(0) = 0$ otra vez para facilitar cálculos posteriores.

Teorema 6. *Podemos afirmar lo siguiente:*

a) $p_m(n) = p(n)$ *si* $n \leq m$,

b) $p_m(n) \leq p(n)$ *para todo* $n \geq 0$,

c) $p_m(n) = p_{m-1}(n) + p_m(n-m)$ *si* $n \geq m > 1$,

d) $p^d(n) = q^e(n) + q^o(n)$.

Demostración. Tanto (a), como (b) como (d) son inmediatas a partir de las definiciones, fijémonos en el caso (c).

Observemos que cada una de las particiones de n contada por $p_m(n)$ puede tener el sumando m o bien no tenerlo, las segundas son contadas por $p_{m-1}(n)$, mientras que las primeras se pueden obtener añadiendo el entero m por la izquierda a las tuplas que cuenta $p_m(n-m)$ sin dejarnos ninguna. Así pues, la suma de ambas cantidades es precisamente $p_{m-1}(n) + p_m(n-m)$, como queríamos probar. □

El siguiente teorema nos servirá para establecer una equivalencia entre dos de las funciones que hemos definido anteriormente, lo que a su vez servirá para facilitar cálculos posteriores.

Teorema 7. *Si* $n \geq 1$ *entonces* $p^d(n) = p^o(n)$.

Demostración. La prueba consistirá en demostrar dos desigualdades no estrictas que dándose a la vez solo dejan como posibilidad que se cumpla $p^d(n) = p^o(n)$.

- ($p^o(n) \leq p^d(n)$): Consideremos cualquier partición contada por $p^o(n)$, que estará formada por sumandos impares. Esta partición estará formada por r_1 sumandos a_1, r_2 sumandos a_2, …, y r_s sumandos a_s donde los a_i son enteros impares distintos y

  $$n = \sum_{i=1}^{s} r_i a_i$$

  Podemos escribir ahora cada uno de los r_i como suma de potencias de 2, de la forma $r_i = \sum_j b_j^{(i)} 2^j$, donde $b_j^{(i)} = 0$ ó 1. Ahora esto nos permite expresar n como

  $$n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j} b_j^{(i)} 2^j a_i$$

  Esta fórmula nos proporciona una partición con sumandos $2^j a_i$ para cada partición con sumandos impares (escogiendo los sumandos de la fórmula con $b_j^{(i)} = 1$). Además, como todas las a_i son diferentes tenemos que los sumandos de esta nueva partición son todos diferentes entre sí.

  Para acabar esta parte hace falta añadir un pequeño inciso. Tenemos que comprobar que la correspondencia que hemos establecido es inyectiva. Supongamos que dos particiones a y b con sumandos impares son distintas, es decir, que alguno de sus sumandos a_i (que puede aparecer 0 o más veces) aparece más veces en una que en la otra. Escogemos el mayor de los sumandos en que difieran las dos particiones (en cuanto a número de apariciones). Sea a_i ese sumando y r_a y r_b los respectivos números de apariciones de éste en a y en b. Es claro entonces que sus expresiones como sumas de potencias de 2, que son diferentes, darán lugar a particiones diferentes.

- ($p^d(n) \leq p^o(n)$): Consideremos cualquier partición contada por $p^d(n)$, que estará formada por sumandos todos ellos diferentes entre sí. Tenemos que $n = \sum_{k=1}^{t} c_k$. Podemos escribir los c_k como $c_k = 2^{e_k} d_k$, con d_k impar. Escojamos de entre los $d_1, \ldots, d_t$ sólo aquellos que sean diferentes, y llamémosles $a_1, \ldots, a_s$.

  Podemos escribir $b_j^{(i)} = 1$ si $2^j a_i$ es igual a algún c_k, y en caso contrario $b_j^{(i)} = 0$. Así pues tenemos que

  $$n = \sum_{k=1}^{t} c_k = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j} b_j^{(i)} 2^j a_i$$

  Con lo que podemos regresar a la expresión de la forma $\sum_{i=1}^{s} r_i a_i$ con a_i impares y ya estamos. La inyectividad de la correspondencia es más clara en este paso que en el anterior.

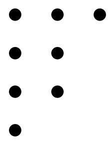
Así pues, queda demostrado el teorema. $\square$

2. Representación geométrica de particiones

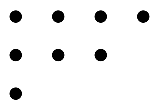
En este capítulo trataremos la representación gráfica de particiones, que nos ayudará, entre otras cosas, a intuir algunos resultados teóricos acerca de éstas.

Definición 8. Un **diagrama de Ferrers** de una partición $(a_1, \ldots, a_k)$ es un conjunto de puntos sobre un plano dispuestos equiespaciadamente en filas consecutivas también equiespaciadas, de forma que haya k filas, y en la fila i-éssima haya a_i puntos. Dichas filas generalmente estarán alineadas por la izquierda.

Ejemplo 9. Veamos algunos diagramas de Ferrers para algunas particiones. Sea $n = 8$ y $(3, 2, 2, 1)$ una de sus particiones, entonces su diagrama de Ferrers es:



fijémonos en que este diagrama a veces nos permite encontrar otra partición de forma automática, mirando las columnas en vez de en las filas.



Este ejemplo en particular nos permitirá introducir una nueva definición.

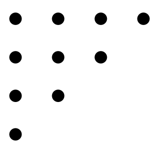
Definición 10. Decimos que una partición a es **conjugada** de otra partición b cuando el diagrama de Ferrers de b se corresponde con el diagrama traspuesto de a (entendiendo la transposición como en el caso de las matrices).

Teorema 11. *El número de particiones de n con m sumandos es el mismo que el número de particiones de n con el sumando máximo igual a m.*

Demostración. A partir de los diagramas de Ferrers podemos ver que unas son conjugadas de las otras, y que por tanto existe una correspondencia biyectiva entre ellas y su número es el mismo. □

Definición 12. Decimos que una partición es **autoconjugada** cuando es su propia conjugada.

Ejemplo 13. Veamos un ejemplo de partición autoconjugada. Escogeremos $n = 10$ y la partición $(4, 3, 2, 1)$.



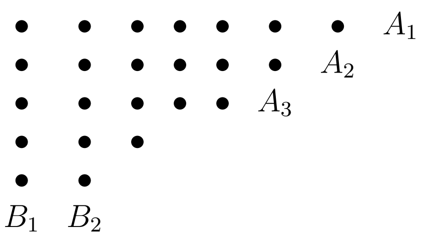
Veamos ahora un teorema menos intuitivo sobre el número de particiones con sumandos distintos, que demostraremos en parte gracias a la ayuda de los diagramas de Ferrers.

Teorema 14. *Sea $n \geq 0$, entonces*

$$q^e(n) - q^o(n) = \begin{cases} (-1)^j & \textit{si } n = \frac{3j^2 \pm j}{2} \textit{ para algún } j \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos en primer lugar el caso $n = 0$. Cogiendo $j = 0$ estamos en el primer caso, y $q^e(0) - q^o(0) = 1$.

Supongamos ahora $n \geq 1$ y consideremos la partición $n = a_1 + \cdots + a_r$ en sumandos distintos. En la gráfica de la partición daremos nombre a algunos puntos; al punto situado más a la derecha de la fila superior le daremos el nombre A_1, y iremos nombrando a los puntos situados más a la derecha de las filas anteriores mientras su número de puntos sea igual al número de puntos de la fila anterior menos uno. Así tendremos un conjunto de puntos $A_1, \ldots, A_s$ con cardinal menor o igual al número de filas de la gráfica. También daremos nombre a los puntos de la última fila, empezando por el de más a la izquierda y avanzando hacia la derecha, los llamaremos $B_1, \ldots, B_t$.

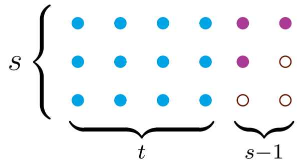


Ahora podríamos contemplar la posibilidad de construir una nueva partición en sumandos distintos mediante transformaciones en el diagrama de Ferrers. En particular una posible forma consiste en tomar los puntos $B_1, \ldots, B_t$ y colocarlos a la derecha de los puntos $A_1, \ldots, A_t$, B_1 a la derecha de A_1, B_2 a la derecha de A_2 y así sucesivamente. Es claro que esto no puede hacerse si $t > s$, ni tampoco si $t = s$ y además $A_s = B_t$, podrá hacerse si $t < s$ o bien $t = s$ y $A_s \neq B_t$. Otra forma de conseguir una partición en sumandos distintos puede ser tomar los puntos $A_1, \ldots, A_s$ y ponerlos debajo de los puntos $B_1, \ldots, B_s$, lo que podremos hacer si y solo si $s < t - 1$ o bién $s = t - 1$ y $B_t \neq A_s$. Observando las condiciones podemos ver fácilmente que dada una partición en sumandos distintos, los dos cambios son incompatibles y solo podremos hacer uno de ellos, o bién ninguno en el caso $(A_s = B_t) \wedge ((s = t) \vee (s = t - 1))$.

Además, en caso de poder hacer uno de los cambios a una partición P dada, a la partición P' obtenida se le puede aplicar el cambio contrario, y una de ellas tendrá un sumando más que la otra, por lo que la paridad también diferirá. Esto significa que solo deberemos fijarnos en las particiones en sumandos distintos a las que no se les pueda aplicar este cambio.

En las particiones en sumandos distintos a las que no se les puede aplicar el cambio se cumple que $A_s = B_t$, por lo que es claro que tienen s sumandos. La fila inferior tiene t puntos, así que $a_r = t$, como $A_s = B_t$ se deduce que $a_i = t + r - i$, y por tanto

$$n = \sum_{i=1}^{r} a_i = st + \frac{(s-1)s}{2}$$



En caso de ser $s = t$ entonces $n = \frac{3s^2-s}{2}$, y si $s = t-1$ entonces se cumple $n = \frac{3s^2+s}{2}$. Podemos ver muy fácilmente que para cada $s \in \mathbb{N}$ y para cada fórmula se obtienen números diferentes, por lo que n solo podrá ser igualada a una de las dos fórmulas evaluadas en una sola s, lo que se puede interpretar como que para cada $n \in \mathbb{N}$ sólo hay como mucho una partición a la que no se le pueda aplicar la transformación descrita anteriormente (que no tiene otra partición con paridad diferente asociada). Como s da la paridad del número de sumandos de la partición, el teorema queda demostrado. □

Para aquellos que quieran ver en más detalle por qué no hay naturales diferentes tales que den el mismo número con esas fórmulas aquí hay una pequeña demostración. Empecemos por comparar las mismas fórmulas entre sí. Supongamos que existen $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ tales que se cumple $\frac{3s_1^2-s_1}{2} = \frac{3s_2^2-s_2}{2}$. Por ser $s_2 \neq s_1$ podemos escribir $s_2 = s_1 + d$. En lo que sigue escribiremos s y no s_1.

$$\begin{aligned} \tfrac{3s^2-s}{2} = \tfrac{3(s+d)^2-(s+d)}{2} &\Rightarrow 3(s^2-(s+d)^2) + ((s+d)-s) = 0 \\ \Rightarrow \quad -3d^2 - 6sd + d = 0 &\Rightarrow d = \tfrac{6s \pm \sqrt{36s^2+12}}{-6} \end{aligned}$$

Pero el siguiente cuadrado de 36 es 49 y los que le siguen tienen una diferencia entre ellos mayor a 12, por lo que la única solución entera para d es 0. No Para los demás casos procederíamos de forma similar. □

3. La función generadora de $p(n)$

En este tema trataremos el cálculo de $p(n)$ mediante fórmulas analíticas, lo que nos evitará realizar el conteo de particiones cada vez qie queramos saber su valor. Empecemos estudiando el concepto función generadora.

Definición 15. Una **función generadora** (o función generatriz) g de una función f es una función cuya expresión $g(x)$ es una serie de poténcias tal que sus coeficientes se calculan evaluando f en la posición donde se encuentran:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

Las funciones generadoras también pueden ser definidas en base a una sucesión, cambiando los términos $f(n)$ por a_n, siendo (a_n) una sucesión.

La función generadora de $p(n)$ fue encontrada por Euler, y es

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$$

Daremos una idea intuitiva de como llegar a este resultado, aunque una prueba púramente formal requiere la introducción de muchos conceptos que nos alejarían demasiado de la temática de este texto.

Demostración. Podemos expresar $(1-x^n)^{-1} = \frac{1}{1-x^n}$ como $\sum_{k=0}^{\infty} x^{kn}$, ya que $\sum_{k=0}^{\infty} x^{kn} = \lim_{N\to\infty} \frac{(x^n)^N-1}{x^n-1} = \frac{-1}{x^n-1}$ (para $|x| \leq 1$). Así pues, podremos escribir

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1} = (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\ldots$$

Ahora, antes de continuar, introduciremos brevemente el producto de séries de Cauchy, aunque no justificaremos nada sobre la convergencia del producto ni porqué el producto de Cauchy de séries se corresponde con el producto de las funciones generadoras asociadas a las series, así como tampoco otras propiedades básicas tales como su conmutatividad o asociatividad.

Definición 16. El **producto de Cauchy** de dos séries formales[3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

se define como

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ donde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

[3]La definición de série formal es, vágamente hablando, una generalización del concepto de série ideada para aprovechar la teoría (y notación) analítica de séries en otros campos. En el caso de séries formales, asuntos como la convergencia pasan a no tener importancia (la tendrán solo los coeficientes), de forma que se puede pensar en ellas como en sucesiones cuyos elementos son los coeficientes de la série.

Afirmaremos sin demostrar que el producto de séries de Cauchy de dos séries de poténcias a y b da como resultado una série de potencias con función generadora asociada igual al producto de las funciones generadoras asociadas a a y b.

Así pues, podemos escribir:

$$\prod_{n=1}^{m}(1-x^n)^{-1} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{j_m=0}^{\infty} x^{j_1\cdot 1+j_2\cdot 2+\cdots+j_m\cdot m} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

donde c_j es el número de soluciones de la ecuación m variables $1\cdot j_1+2\cdot j_2+\cdots+m\cdot j_m = n$ en los enteros no negativos. Lo que también se puede entender como $c_j = p_m(j)$. Por lo que podemos afirmar

$$\prod_{n=1}^{m}(1-x^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)x^n$$

Es claro que siempre se cumple $p_m(n) \leq p(n)$, y que $p_m(n) \to p(m)$ cuando $m \to \infty$, si escribimos la expresión anterior (la función generadora de p_m) como

$$F_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(x)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{m} p(x)x^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} p_m(x)x^n$$

y a la función generadora de p la llamamos F, podemos establecer la siguiente desigualdad:

$$1 + \sum_{n=1}^{m} p(x)x^n < F_m(x) < F(x)$$

es fácil ver que el lado izquierdo de la igualdad se puede hacer tender a $F(x)$ haciendo tender m a infinito, dado que $F_m(x)$ está en medio tiene que tender también a $F(x)$, o lo que es lo mismo:

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}(1-x^n)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} p(x)x^n$$

como queríamos. $\square$

4. Otras funciones generadoras

De igual forma que en el capítulo anterior, en éste trataremos las funciones generadoras relacionadas con el número de particiones bajo ciertas restricciones.

Enumeraremos algunas de ellas sin escribir el proceso de cálculo que nos lleva a poder establecerlas.

- La función generadora de $p(n)$, escrita en forma de fracción, la volvemos a escribir para hacer notar las similitudes entre ésta y las que siguen.

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1}$$

- La función generadora del número de particiones de n en sumandos impares.

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^{2n-1}\right)^{-1}$$

- La función generadora del número de particiones de n en sumandos pares.

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^{2n}\right)^{-1}$$

- La función generadora del número de particiones de n en sumandos diferentes.

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$$

- La función generadora del número de particiones de n en sumandos diferentes e impares.

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + x^{2n-1}\right)$$

- La función generadora del número de particiones de n en sumandos de la forma $5m+1$ o $5m+4$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$F(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - x^{5n+1}\right)^{-1} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - x^{5n+4}\right)^{-1}$$

Estas fórmulas pueden ser recordadas fácilmente si nos fijamos en el patrón que siguen. Los factores están elevados a -1 si no se exige que los sumandos de las particiones sean diferentes entre sí, mientras que de exigirse eso, no se elevan los factores. Además, el signo que acompaña a la x que aparece dentro de los factores también cambia en ese caso, siendo positivo para particiones con sumandos diferentes, y negativo para el caso contrario. Otra ayuda que podemos encontrar es el exponente de las x que aparecen en los factores, que siguen las mismas restricciones que los factores, exponentes pares si los sumandos son pares, exponentes impares si los sumandos son impares, etc.

Introduciremos una última función generadora que nos servirá para demostrar un teorema en el capítulo posterior.

$$F(x) = x^N \prod_{n=1}^{m} \left(1 - x^{2n}\right)^{-1} \tag{17}$$

Ésta es la función generadora de la función que cuenta el número de particiones de $n-N$ con sumandos pares menores o iguales que $2m$, o bién (por el teorema 11) el número de particiones de $\frac{1}{2}(n-N)$ en como mucho m sumandos.

Veamos en más detalle por qué el teorema 11 nos da otra forma de entender la función generadora. El teorema 11 nos permite establecer una correspondencia biyectiva entre las particiones con como mucho m sumandos y las particiones con sumandos no mayores que m. Así pues, en virtud de dicho teorema podemos establecer una relación biyectiva entre particiones de $n-N$ en sumandos pares no mayores que $2m$ y particiones de $n-N$ en un número par de sumandos no mayor que $2m$. Como en las particiones los sumandos estan ordenados, y en este caso particular los podemos agrupar en pares de sumandos iguales, si quitamos uno por pareja tenemos una partición de $\frac{1}{2}(n-N)$ con no más de m sumandos, como queríamos ver.

5. Dos teoremas de Euler

En éste último capítulo trataremos dos identidades dadas por Euler que nos daran una idea sobre los métodos necesarios para demostrar que las expresiones dadas para las funciones generadoras mencionadas anteriormente son efectivamente correctas.

Antes de llegar a las identidades que buscamos pasaremos por algunos resultados previos.

Teorema 18.

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots = 1+\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}+\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}+\ldots$$

Teorema 19.

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots = 1+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^4)}+\frac{x^{12}}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}+\ldots$$

Aquí los exponentes son de la forma $1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ \ldots$

Demostración. Demostraremos éstas identidades añadiendo un segundo parámetro a, lo haremos de dos formas distintas:

(i) Escribimos

$$K(a) = K(a,x) = (1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\cdots = 1 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots$$

donde $c_n = c_n(x)$ es independiante de a. Más brevemente:

$$K(a) = (1+ax)K(ax^2)$$

o bién $1 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots = (1+ax)(1 + c_1 a x^2 + c_2 a^2 x^4 + \cdots)$. Ahora, si igualamos coeficientes obtendremos las siguientes expresiones para c_i:

$$\begin{array}{rcl} c_1 & = & x + c_1 x^2 \\ c_2 & = & c_1 x^3 + c_2 x^4 \\ & \cdots & \\ c_m & = & c_{m-1} x^{2m-1} + c_m x^{2m} \\ & \cdots & \end{array}$$

con lo que podemos definirlos de forma que dependan de los anteriores:

$$\begin{array}{rcccl} c_m & = & \frac{x^{2m-1}}{1-x^{2m}} c_{m-1} & = & \frac{x^{1+3+\ldots+(2m-1)}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2m})} \\ & & & = & \frac{x^{m^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2m})} \end{array}$$

De lo que se sigue que

$$(1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\cdots = 1 + \frac{ax}{1-x^2} + \frac{a^2x^4}{(1-x^2)(1-x^4)} + \cdots$$

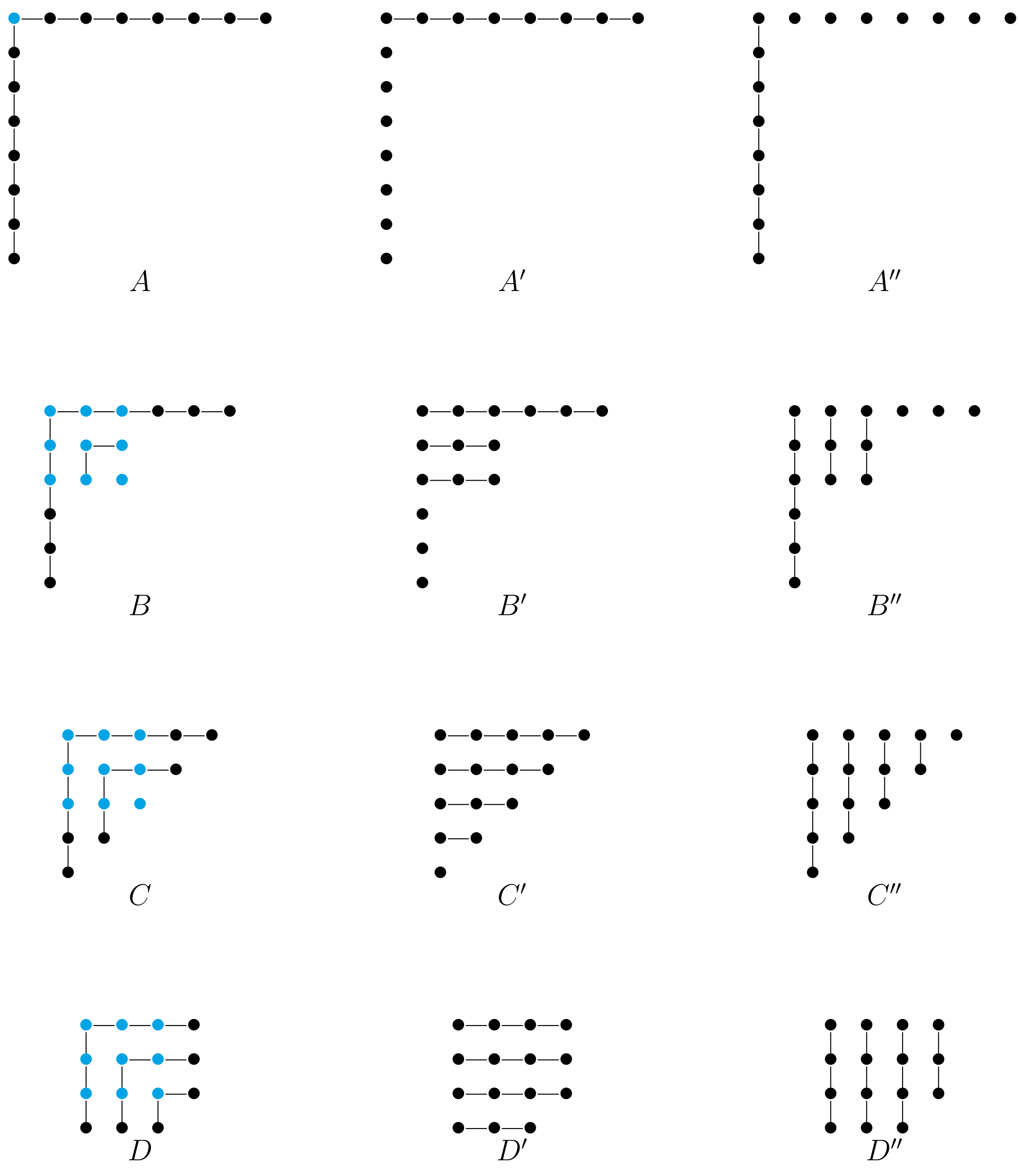
y los teoremas 18 y 19 son casos particulares de esto, con $a = 1$ y $a = x$.

(ii) La segunda forma es algo más visual y no necesita usar teoría de séries infinitas. Este tipo de pruebas suelen ser descritas como “combinatorias”. Veámos el caso del teorema 18

Sabemos que la parte de la izquierda de la igualdad enumera las particiones en partes impares y diferentes (se trata de una función generadora), por ejemplo, 15 tiene 4 de esas particiones:

$$15 = 11 + 3 + 1 = 9 + 5 + 1 = 7 + 5 + 3$$

podemos representar estas particiones uniendo los puntos de diagramas de Ferrers asociados a particiones autoconjugadas tal como vemos en los diagramas A, B, C y D.



Con la ayuda de estos diagramas podemos ver que hay una correspondencia directa entre las particiones en sumandos impares distintos y las particiones autoconjugadas. La parte izquierda de la igualdad es exactamente la función generadora del número de particiones de n en sumandos distintos e impares, así pues nos quedará ver que la parte derecha de la igualdad se corresponde con la función generadora del número de particiones autoconjugadas de n.

Podemos leer los diagramas de una forma ligeramente distinta, fijémonos en que están formados por un cuadrado de m^2 puntos (color azul) con dos colas que a su vez podrían representar particiones de $\frac{1}{2}(n - m^2)$, lo que nos pone en situación de poder usar la última función generadora explicada en el capítulo anterior (17).

Sustituimos N por m^2 y m juega el mismo papel que en (17), quedando:

$$x^{m^2} \prod_{n=1}^{m} \left(1 - x^{2n}\right)^{-1} = \frac{x^{m^2}}{(1 - x^2)(1 - x^4) \cdots (1 - x^{2m})}$$

Esta fórmula es la función generadora del número de particiones de $\frac{1}{2}(n - m^2)$ en como mucho m sumandos, cada una de las cuales se corresponde con una partición autoconjugada de n. Ahora, si consideramos la suma con respecto m (para considerar todos los cuadrados que vemos en las particiones autoconjugadas, no confundir con hacer variar la cantidad máxima de sumandos) tendremos lo que queríamos:

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1 - x^2)(1 - x^4) \cdots (1 - x^{2m})}$$

□

Corolario 20. *El número de particiones de n en sumandos impares y distintos es igual al número de particiones autoconjugadas de n.*

Referencias

[1] Ferrers diagram. http://mathworld.wolfram.com/FerrersDiagram.html.

[2] Partition. http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory).

[3] G.H. Hardy and Wright E.M. *An introduction to the theory of numbers. Sixth edition. Revised by D.R. Heath-Brown and J.H. Silverman.* Oxford University Press, Oxford, 2008.

[4] I. Niven and H.S. Zuckerman. *Introducción a la teoría de los números.* Limusa, 1976.