Nombres triangulars

Problema 39.
Sigui $f(X) = \sum_0^n a_i X^i$ un polinomi de coeficients enters, de grau $n \geq 1$. Demostreu que sempre existeix un enter y tal que $f(y)$ és un nombre compost. *Indicació:* Si $f(x) = p$ és primer, aleshores $p \mid f(x + kp)$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$.

Solució. Suposem que tenim un polinomi f arbitrari de grau n que compleix les hipòtesis de l'enunciat. Escollim un x enter tal que $f(x)$ no sigui una unitat de $\mathbb{Z}$ (podem fer-ho ja que tot polinomi amb coeficients reals de grau finit té un nombre finit de màxims i mínims, i la seva funció associada és monòtona per tot x situat més enllà de l'interval on son aquests màxims i minims).

Si $f(x)$ fos compost, ja estariem. Si $f(x) = p$ fos primer, podem aplicar el resultat de la indicació. Així doncs, només hem de demostrar la proposició de la indicació.

Suposem, per hipòtesi, que $f(x) = p$, és a dir:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = p$$

fem $y = x + kp$ i veiem que succeeix:

$$f(y) = f(x + kp) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x + kp)^i = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^{i-j} (kp)^j \right)$$

Com $\binom{i}{0} = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}$, podem reescriure això com:

$$\begin{aligned} f(x + kp) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} x^{i-j} (kp)^j \right) \\ &= p + pQ(x) = p(1 + Q(x)) \end{aligned}$$

on $Q(x)$ és un polinomi amb coeficients enters amb variable x. (És clar que cada un dels sumands del sumatori té com a minim una p multiplicant amb grau com a mínim 1, per tant podem treure factor comú). Així doncs, queda demostrat, com volíem. $\square$