Nombres perfectes

Problema 32.
Demostreu que si n fos un nombre perfecte senar, aleshores

(i) $3, 5, 7$ no serien simultàniament divisors de n.

(ii) n tindria tres divisors primers, com a mínim.

(iii) n tindria quatre divisors primers, com a mínim.

Solució.

(i) Abans de continuar, farem dues petites definició i introduirem un lema que ens facilitarà molt la feina.

Definició. Direm que un nombre natural n és **abundant** quan la suma dels seus divisors (inclós ell mateix) sigui major que $2n$.

Definició. Direm que un nombre natural n és **deficient** quan la suma dels seus divisors (inclós ell mateix) sigui menor que $2n$.

Lema. Sigui n un nombre abundant, aleshores qualsevol múltiple de n és també abundant. És a dir, qualsevol nombre natural de la forma $m = a \cdot n$ (amb $a \in \mathbb{N}$), és tal que $\sigma_1(m) > 2m$.

Demostració: Sigui n un número abundant i m un múltiple seu de la forma $m = a \cdot n$.

Denotem els conjunts de divisors d'un nombre d de la forma D_d. En particular, $n \in D_n$ i $a \in D_a$, i $D_n \subset D_m$, $D_a \subset D_m$. Sigui $\eta_{(d,k)}$ el k-éssim element de D_d (enumerats en ordre creixent, començant pel 0), aleshores podem descriure (amb una excepció que mostraré tot seguit) $\sigma_1(m)$ com:

$$\sigma_1(m) = (1 + \eta_{(n,1)} + \eta_{(n,2)} + \ldots + n) \cdot (1 + \eta_{(a,1)} + \eta_{(a,2)} + \ldots + a)$$

Bé, això seria cert si a i n fossin coprimers, en cas de no ser-ho, hi haurà sumands repetits, però en aquest cas tenim sort i no ens hem de preocupar per aquest fet, perquè escollirem alguns sumands en particular que no ens donaran problemes.

És clar que els nombres $a \cdot 1, a \cdot \eta_{(n,1)}, \ldots, a \cdot n$ son tots diferents i tots ells divideixen a m, a més:

$$\sigma_1(m) > a \sum_{i=0}^{\sharp D_n} \eta_{(n,i)}$$

I a més, podem escriure aquell sumatori com

$$a \sum_{i=0}^{\sharp D_n} \eta_{(n,i)} = a \cdot n + a \sum_{i=0}^{\sharp D_n - 1} \eta_{(n,i)} \geq m + a(n+1) > 2m$$

Per tant, ja està. $\square$

Continuem, doncs, amb la demostració anterior.

El nombre $3^3 \cdot 5 \cdot 7$ és abundant, ja que $\sigma_1(3^3 \cdot 5 \cdot 7) = 1920 > 2 \cdot 945 = 1890$, per tant tots els seus múltiples son abundants i no poden ser perfectes. Però hem de conseguir afirmar quelcom semblant amb una multiplicitat per a 3 més petita.

El nombre $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ és abundant, ja que $\sigma_1(3^2 \cdot 5^2 \cdot 7) = 3224 > 2 \cdot 1575 = 3150$, per tant tots els seus múltiples son abundants i no poden ser perfectes.

El nombre $3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ és abundant, ja que $\sigma_1(3^2 \cdot 5 \cdot 7^2) = 4446 > 2 \cdot 2205 = 4410$, per tant tots els seus múltiples son abundants i no poden ser perfectes.

Ara, abans de continuar amb tots els múltiples de 105, o el que és el mateix, de 3, 5, i 7, ens fixarem només en els que només els tenen a ells com a factors primers.

El número $3^2 \cdot 5 \cdot 7$ és deficient ja que $\sigma_1(3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 624 < 2 \cdot 315 = 630$.

Ara veurem que tots els números de la forma $3 \cdot 5^a \cdot 7^b$ per qualsevols $a, b \in \mathbb{N}$ son deficients, i que per tant (tenint en compte el que hem trobat anteriorment) cap número de la forma $3^a 5^b 7^c$ pot ser perfecte.

Sigui n un número perfecte de la forma $3 \cdot 5^a \cdot 7^b$, aleshores compleix el següent:

$$\sigma_n(3 \cdot 5^a \cdot 7^b) = (1+3)(1+5+\cdots+5^a)(1+7+\cdots+7^b) = 2 \cdot 3 \cdot 5^a \cdot 7^b$$

Si ara dividim per $3 \cdot 5^a \cdot 7^b$ tindrem la següent igualtat:

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5^a})(1+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{7^b}) = 2$$

És clar que si escollim $a' > a$ o $b' > b$ obtindriem un número més gran (a la primera particular de la igualtat anterior), apliquem-ho:

$$\frac{4}{3}\sum_{i=0}^{a}\frac{1}{5^i}\sum_{i=0}^{b}\frac{1}{7^i} \leq \frac{4}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{5^i}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{7^i} = \frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{7}{6} = \frac{35}{18} < 2$$

Per tant no hi ha cap $a, b \in \mathbb{N}$ que compleixi la igualtat, i no hi ha cap nombre perfecte amb aquella forma.

De moment ens queda veure que tot i que hi hagués algun altre factor primer, n seguiria éssent un nombre no perfecte.

Tenim una prova que fa innecessaris molts dels raonaments anteriors, però es basa en el primer punt de l'exercici 33 i hem intentat ometre el seu ús ja que a priori no sabem si per la seva demostració es fan servir les proposicions de l'exercici 32.

La prova és la següent. Sigui n un nombre perfecte senar, aleshores pel primer punt de l'exercici 33 és de la forma $n = p^a \cdot x^2$ on $p \equiv a \equiv 1 \pmod 4$, on mcd$(p, x) = 1$. Si n tingués els factors 3,5, i 7, és clar que ni 3 ni 7 podrien ser p, per tant son factors de x i els seus exponents son com a mínim parells, per tant $3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ dividiria a n, però com hem vist anteriorment, aquest nombre és abundant, i tots els seus múltiples ho son també, per tant n no pot ser perfecte senar si és múltiple de 105, com volíem. □

(ii) Abans de provar que n té com a mínim 3 divisors primers provarem que en té com a minim 2, no és estrictament necessari, però ens ajuda a sentir que trepitjem terra ferma en els següents passos.

Suposem que n es divisible per un sol nombre primer, intentarem arribar a contradicció. Si n és divisible per un primer p, aleshores $n = p^k$ per un cert $k \in \mathbb{N}$. Tenim així que

$$\sigma_1(n) = (1 + p + \ldots + p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} = 2n = 2p^k$$

Agafem el darrer i tercer terme per la dreta de les igualtats anteriors i passem multiplicant el divisors del terme esquerre cap al cantó dret:

$$p^{k+1} - 1 = 2p^k(p - 1) = 2p^{k+1} - 2p^k$$

Restem a banda i banda p^{k+1}, i obtenim:

$$-1 = p^{k+1} - 2p^k$$

Aquesta igualtat ens diu que $p| - 1$, o el que és el mateix, $p|1$, i per tant p només pot ser una unitat i no primer. Així doncs, hem arribat a contradicció. Per tant n ha de tenir com a mínim 2 divisors primers.

Anem a demostrar el que realment volíem. Suposem que existeix n perfecte tal que només es divisible per 2 primers, p i q. Així doncs, $n = p^s q^t$ per certs $s, t \in \mathbb{N}$.

En particular, es donen les següents igualtats:

$$\sigma_1(n) = (1 + p + \ldots + p^s)(1 + q + \ldots + q^t) = 2n = 2p^s q^t$$

Si dividim per $p^s q^t$ les dues bandes de la equació obtenim:

$$\frac{1 + p + \ldots + p^s}{p^s} \cdot \frac{1 + q + \ldots + q^t}{q^t} = 2$$

Expressat més convenientment com:

$$\left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^s}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^t}\right) = 2$$

Com p i q son diferents entre ells i diferents de 2 per ser n senar, podem assumir que $p \geq 3$ i $q \geq 5$. Per tant podem establir la següent desigualtat:

$$\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{p^i} \sum_{i=0}^{t} \frac{1}{q^i} \leq \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{3^i} \sum_{i=0}^{t} \frac{1}{5^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{5^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{15}{8} < 2$$

Pero per hipòtesi el terme esquerre de la desigualtat era igual a 2, per tant hem arrivat a contradicció i hem demostrat el que volíem. □

(iii) En aquest cas volem demostrar que un número té com a mínim 4 divisors. Se'ns podria passar pel cap fer servir la estratègia anterior, però per certs nombres primers no conseguiriem la desigualtat estricta que ens ha permés arribar a contradicció.

És clar que si els factors primers fossin prou grans, les sumes de les inverses de les seves potencies es poden aproximar prou a 1 com perque el seu producte sigui menor que 2. Així doncs, ens dedicarem a descartar els pocs nombres primers petits que ens impedeixen fer la demostració directament.

Per aconseguir descartar els nombres primers farem servir la mateixa estratègia que hem fet servir al primer apartat. Veiem quins nombres hem de descartar abans de tot (agafem 3 i 5 com a possibles divisors per ser els més baixos possibles, així doncs podem estar segurs que no se'ns escaparà cap combinació que ens doni un resultat superior a 2):

Les taules son les següents:

- Anem a fixar-nos en la combinació 3,5,11.
  - Si el factor 3 té exponent 2, aleshores per tot $a, b \in \mathbb{N}$ es compleix que el número és deficient, i conseqüentment, també si el factor 3 té exponent 1. Veiem-ho:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right) \sum_{i=0}^{a} \frac{1}{5^i} \sum_{i=0}^{b} \frac{1}{11^i} \leq \frac{13}{9} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{5^i} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{11^i}$$

$$\frac{13}{9} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{5^i} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{11^i} = \frac{13}{9}\frac{5}{4}\frac{11}{10} = \frac{143}{72} < 2$$

  - Si el factor 3 té exponent 3, aleshores si l'exponent de 5 és major o igual que 2 es tindrà que n és abundant: $\sigma_1(3^3 \cdot 5^2 \cdot 11) = 14880 > 2 \cdot 7425 = 14850$.
  - Si l'exponent de 5 és 1, aleshores el nombre és deficient:

$$\sum_{i=0}^{a} \frac{1}{3^i} \cdot \frac{6}{5} \sum_{i=0}^{b} \frac{1}{11^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} \cdot \frac{6}{5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{11^i} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 1110 = \frac{99}{50} < 2$$

Amb aquestes 3 observacions podem concloure que siguin quins siguin els exponents de 3,5 i 11 el nombre n serà o bé abundant o bé deficient.

– Anem a fixar-nos en la combinació 5,7,11. Veurem que siguins quins siguin els exponents d'aquests factors primers, tindrem un nombre deficient (i per tant també ho serà qualsevol combinació de factors primers on es canvii algun d'aquests per un de més gran).

$$\left(\sum_{i=0}^{a}\frac{1}{5^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{b}\frac{1}{7^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{c}\frac{1}{11^i}\right) \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{5^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{7^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{11^i}\right)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{5^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{7^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{11^i}\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10} = \frac{77}{48} < 2$$

– Anem a fixar-nos en la combinació 3,5,13.

  * Si el factor 3 té exponent 2, aleshores per tot $a, b \in \mathbb{N}$ es compleix que el número $n = 3^2 \cdot 5^a \cdot 13^b$ és deficient, i conseqüentment, també si el factor 3 té exponent 1. Això és clar ja que $13 > 11$ i amb el factor 11 ja succeïa això mateix. (Obviament també és vàlid si l'exponent de 3 és 1 ja que el producte que comparem amb 2 serà menor)
  * Si el factor 5 té exponent 1, aleshores per tot $a, b \in \mathbb{N}$ es compleix que el número $n = 3^a \cdot 5 \cdot 13^b$ és deficient. Això també es clar per la mateixa raó que abans.
  * Si el factor 3 té exponent 3 i el factor 5 té exponent 2, aleshores el nombre n és deficient:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\right)\sum_{i=0}^{a}\frac{1}{13^i}$$

$$\leq \frac{40}{27}\cdot\frac{31}{25}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{13^i} = \frac{40}{27}\cdot\frac{31}{25}\cdot\frac{13}{12} = \frac{806}{405} < 2$$

  * Es trivial comprovar que $n = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 13$ no és perfecte, fixem-nos en el nombre $n = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 13^2$, veure que és abundant i conseqüentment tots els seus múltiples també, i així haurem acabat amb totes els nombres múltiples de 3,5 i 13 amb només tres factors primers.

$$\sigma_1(3^3 \cdot 5^3 \cdot 13^2) = 1141920 > 2 \cdot 570375 = 1140750$$

– Només ens queda el cas 3,5,17. Veurem que qualsevol nombre amb només aquests tres factors primers serà necessariament deficient i per tant no perfecte (i també tots els demés nombres amb 3 factors primers on alguns d'ells siguin iguals o majors a 3,5,17):

$$\left(\sum_{i=0}^{a}\frac{1}{3^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{b}\frac{1}{5^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{c}\frac{1}{17^i}\right)\leq\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{5^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{17^i}\right)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{5^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{17^i}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}=\frac{255}{128}<2$$

Així doncs, queda demostrat que tot nombre perfecte senar ha de tenir com a mínim 4 factors primers. $\square$