Criteris de divisibilitat

Problema 58.
Sigui f un polinomi amb coeficients enters. Si sabem que en el 0 i en el 2 el valor de f és 1, calculeu un enter x tal que $f(x) = 2$.

Solució.
Anem a veure algunes característiques que ha de tenir f per complir el que sabem per hipòtesi. Per començar, ens fixem que el polinomi no pot ser de grau 1 (doncs hauria de ser la constant 1, és a dir, seria de grau 0 i no podria prendre el valor 2 per cap $x \in \mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$). A més a més, tenim els següents dos punts:

(i) Donat que $f(0) = 1$, si escrivim $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ tenim que $a_0 = 1$ perquè els altres sumands s'anul·len quan $x = 0$.

(ii) Donat que $f(2) = 1 = 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 1 + x(a_1 + \cdots + a_nx^{n-1})$ deduïm que el polinomi $g(x) = a_1 + \cdots + a_nx^{n-1}$ s'anul·la al 2.

(iii) Com busquem x tal que $f(x) = 2$ i $f(x) = 1 + x(a_1 + \cdots + a_nx^{n-1})$ sabem que $x(a_1 + \cdots + a_nx^{n-1}) = 1$, i ja que $x \in \mathbb{Z}$ és clar que x només pot ser 1 o -1, i que a més a més $x = a_1 + \cdots + a_nx^{n-1}$.

Voldrem trobar un resultat el més general possible, però abans que res estudiarem els casos $n = 2$ i $n = 3$ per poder-nos fer una idea més intuitiva de com podem fer-ho.

Polinomis de segon grau ($n = 2$):

Si f és de segon grau aleshores el podem escriure com $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2$ per **(i)**, sabem que $a_1 = -2a_2$ per **(ii)**. Ara podem reescriure $f(x) = 1 - 2a_2x + a_2x^2$, si igualem a 2 ens queda la equació de segon grau per x:

$$1 - 2a_2x + a_2x^2 = 2$$
$$a_2x^2 - 2a_2x = 1$$
$$x(a_2x - 2a_2) = 1$$

Per **(iii)** sabem que x només pot ser 1 o -1. Si x fos 1 aleshores tenim que $a_2 - 2a_2 = 1$, que ens dona com a solució $a_2 = -1$, fet que respecta les nostres hipòtesis. Per tant pel polinomi $f(x) = 1 + 2x - x^2 = 2$ per $x = 1$.

¿Què passaria si $x = -1$? tindriem

$$-a_2 - 2a_2 = -1 \;\Rightarrow\; -3a_2 = -1 \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{1}{3}$$

cosa que no pot ser ja que contradiu la hipòtesi que ens diu que $a_2 \in \mathbb{Z}$.

Polinomis de tercer grau ($n = 3$):

Per **(ii)** tenim la identitat $a_1 = -2a_2 - 4a_3$. I per **(iii)** x és 1 o -1.

Fixem $x = 1$ i veiem si existeix alguna combinació de coeficients que compleixi $f(1) = 2$:

$$-2a_2 - 4a_3 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow a_2 = -3a_3 - 1$$

Efectivament, existeixen les combinacions, fixant $a_3 \in \mathbb{Z}$ ja ho tenim. Per exemple $(a_3 = 1)$:

$$f(x) = 1 + 4x - 4x^2 + x^3 \ , \ f(1) = 2$$

Veiem si també existeixen polinomis per $x = -1$:

$$-2a_2 - 4a_3 - a_2 + a_3 = -1 \Rightarrow -3a_2 - 3a_3 = -1 \Rightarrow a_2 = \frac{1 - 3a_3}{3}$$

Això no pot ser ja que, com $1 - 3a_3$ no pot ser múltiple de 3, a_2 no podria ser enter, cosa que contradiu les nostres hipòtesis.

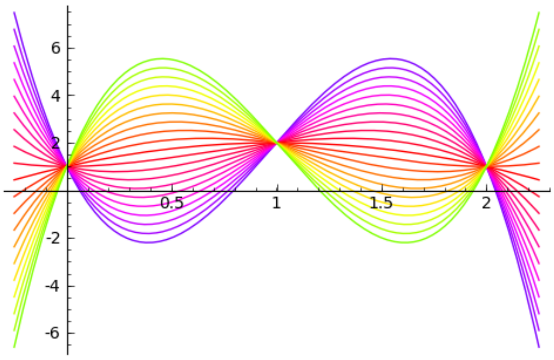

Figura 1: Polinomis de tercer grau complint les hipòtesis

Cas general ($n \geq 2$):

És fàcil veure que per veure quines x i quins polinomis tenen el comportament cercat ens limitem a trobar solucions per certes equacions, en particular per una equació que ens permet determinar el coeficient a_1 en funció dels coeficients que acompanyen a termes de grau major o igual a 2. Introduirem un petit lema.

Lema. Sigui f un polinomi de grau $n \geq 2$ amb coeficients enters tal que $f(0) = f(2) = 1$, aleshores el coeficient del terme de primer grau és:

$$a_1 = -\sum_{i=1}^{n-1} 2^i a_{i+1}$$

Demostració:

Agafem el polinomi $g(x)$ descrit a **(ii)**, l'avaluem a $x = 2$ per igualar-lo a 0 i aïllem a_1. $\square$

Tot seguit mostrem la primera proposició general que cercàvem, que ens assegura la existència de polinomis que compleixin els requisits que hem imposat, amb la seva respectiva demostració (que serà constructiva).

Proposició. Sigui $n \geq 2$, aleshores existeix un polinomi f de grau n tal que $f(0) = f(2) = 1$ i $f(1) = 2$, i si f és de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ aleshores

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = -\sum_{i=1}^{n-1} 2^i a_{i+1} \ , \text{ i } a_2 = -1 - \sum_{i=2}^{n-1}(2^i - 1)a_{i+1}$$

I a més a més, tots els polinomis f tals que $f(0) = f(2) = 1$ i $f(1)$ son d'aquesta forma.

Observació:

Fixem-nos en que aquesta proposició determina un únic polinomi de grau 2 (ja hem demostrat anteriorment que només n'hi ha un), i una familia de polinomis de grau 3 depenents de l'enter que escollim per a_3, que també és coherent amb els resultats anteriorment obtinguts.

Demostració:

Pels graus 2 i 3 ja ho hem vist, no els considerem en el que segueix de demostració per fer més llegible la manipulació dels subíndex dels coeficients. Per **(i)** tenim que tot f complint les hipòtesis compleix que $a_0 = 1$. La segona identitat la hem demostrat al lema anterior. Veiem la darrera identitat, si avaluem f en $x = 1$ i l'igualem a 2 obtindrem la següent equació:

$$f(1) = 1 + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} 2^i a_{i+1}\right) + a_2 + \cdots + a_n = 2$$

$$-a_2 - \sum_{i=2}^{n-1} 2^i a_{i+1} + a_3 + \cdots + a_n = 1 \ \Rightarrow \ -a_2 - \sum_{i=2}^{n-1}(2^i - 1)a_{i+1} = 1$$

$$a_2 = -1 - \sum_{i=2}^{n-1}(2^i - 1)a_{i+1}$$

I per acabar, veiem que fixant els coeficients $a_3, \ldots, a_n$ com a enters qualsevols, a_2 també ho serà. Si volem, podem establir una bijecció entre polinomis de grau n complint les notres hipòtesis amb el conjunt de $(n-2)$-tuples de nombres enters. $\square$

Per acabar, mostrarem una proposició que ens permet acabar de classificar els polinomis f tals que $f(0) = f(2) = 1$ amb coeficients enters i tals que existeix un enter x tal que $f(x) = 2$.

Proposició. No existeix cap polinomi amb coeficients enters tal que $f(0) = f(2) = 1$ i $f(-1) = 2$.

Demostració:

Suposem el contrari per intentar arribar a contradicció. Fins on sabem, f és de la forma

$$f(x) = 1 + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} 2^i a_{i+1} \right) x + a_2 x^2 + \cdots + a_n^n$$

Si avaluem $f(-1)$ i ho igualem a 2 obtindrem el següent:

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i a_{i+1} + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n = 2$$

$$3a_2 + \sum_{i=2}^{n-1} (2^i + (-1)^{i+1}) a_{i+1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1 - \sum_{i=2}^{n-1} (2^i + (-1)^{i+1}) a_{i+1}}{3}$$

Ara només cal veure que cada un dels termes del sumator és múltiple de 3 independentment del valor dels coeficients del polinomi, pel que el sumatori seria multiple de tres, com a_2 és aquell sumatori menys 1 (que ja no seria múltiple de 3) entre tres, no podria ser enter contradient les hipòtesis.

Per veure que cada un dels termes és múltiple de tres, fixem-nos només en $2^i + (-1)^{i+1}$. Mòdul 3 el nombre $-1 \equiv 2$, per tant $2^i \equiv (-1)^i$, i com la potencia de 2 i la potència de -1 tenen exponents amb paritat diferent, tindràn signe diferent mòdul 3 i s'anularan al sumar-se. És a dir, la suma de les dues potències serà congruent amb 0 i per tant cada sumand de la sèrie serà múltiple de 3 com volíem. $\square$