ISSN 2304-120X
Концепт научно-методический электронный журнал
Акимова И. Я., Ахметова Ф. Х. Заметки о геометрии Лобачевского // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 6 (июнь). – 0,3 п. л. – URL: http://e-koncept.ru/2016/16123.htm.

ART 16123 УДК 372.851:514.132.01

Акимова Ирина Яковлевна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
irina_akimova19@mail.ru

Ахметова Фания Харисовна,
кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва
dobrich2@mail.ru

Заметки о геометрии Лобачевского

Аннотация. *Статья посвящена вопросам исторического развития геометрии. Цель исследования – показать, что кроме геометрии, которую изучают в школе и вузах, существует еще одна геометрия, геометрия Лобачевского, которая значительно отличается от евклидовой. Исходя из поставленной цели, в работе определены следующие задачи: рассмотрены основные положения геометрии Евклида и основы геометрии Лобачевского, показана непротиворечивость геометрии Лобачевского. Статья будет полезна студентам физико-математических факультетов университетов и педагогических высших учебных заведений. Она может быть использована преподавателями и учащимися в классах с углубленным изучением математики.*
Ключевые слова: *геометрия Евклида, геометрия Лобачевского, абсолютная геометрия.*
Раздел: *(01) педагогика; история педагогики и образования; теория и методика обучения и воспитания (по предметным областям).*

Геометрия Лобачевского – это интересный, необычный раздел современной геометрии. Она дает материал для размышлений – в ней не всё так просто, не всё так ясно с первого взгляда; чтобы ее понять, нужно обладать фантазией и пространственным воображением.

Геометрия Лобачевского, как ее теперь называют, является крупнейшим завоеванием науки и составляет целую эпоху в развитии математики и смежных с ней наук. Деятельность Лобачевского вызывает изумление. Наряду с большой административной и педагогической работой он не покладая рук занимался и наукой. Лобачевскому было всего 34 года, когда он решил «многовековую» проблему *пятого* постулата из «Начал» Евклида и построил свою, неевклидову геометрию. Имя Лобачевского известно всему миру. Он вошел в историю математики как революционер в науке и «Коперник геометрии». Николай Иванович Лобачевский решил проблему, над которой человечество бесплодно билось более двух тысяч лет. Анализируя попытки доказать пятый постулат, Лобачевский сделал чрезвычайно смелый вывод о его недоказуемости. Раз пятый постулат недоказуем как теорема, то принципиально возможна другая геометрия, отличная от евклидовой,– неевклидова геометрия, отправной точкой которой является отрицание пятого постулата.

В развитии геометрии можно указать четыре основных периода, переходы между которыми обозначали качественное изменение этой науки [1, 2].

Первый – период зарождения геометрии как математической науки протекал в Древнем Египте, Вавилоне и Греции примерно до V в. до н. э. Первичные геометрические сведения появляются на самых ранних ступенях развития общества. Зачатками науки следует считать установление первых общих закономерностей, в данном случае – зависимостей между геометрическими величинами.

Второй период развития геометрии связан с ее становлением как самостоятельной математической науки: появились систематические изложения, где ее предложения последовательно доказывались. Примерно в 300 г. до н. э. свет увидел труд, ставший основой всей современной геометрии, – «Начала» Евклида. В «Началах» собраны все геометрические сведения, полученные трудами десятков математиков античности, живших до Евклида. Этот труд, состоящий из тридцати больших томов, на два тысячелетия стал единственным учебником, по которому можно было изучить геометрию. И «Начала» прекрасно описывают пространство, в котором мы живем, благодаря чему эту геометрию назвали *геометрией Евклида.*

Третий период выделяют с 1-й половины XVII в., и связан он с Р. Декартом, который ввел в геометрию метод координат. Этот метод позволил связать геометрию с развивавшейся тогда алгеброй и зарождающимся анализом. Применение методов этих наук в геометрии породило аналитическую геометрию, а потом и дифференциальную.

Четвертый период в развитии геометрии открывается построением Н. И. Лобачевским в 1826 г. новой, неевклидовой геометрии, называемой теперь *геометрией Лобачевского.*

История создания геометрии Лобачевского одновременно является историей попыток доказать пятый постулат Евклида. Этот постулат представляет собой одну из аксиом, положенных Евклидом в основу изложения геометрии.

На самом деле геометрия Лобачевского не слишком сильно отличается от привычной нам евклидовой. Дело в том, что из пяти постулатов Евклида четыре первых Лобачевский оставил без изменения. Иными словами, он согласен с Евклидом в том, что между двумя любыми точками можно провести прямую, что ее всегда можно продолжить до бесконечности, что из любого центра можно провести окружность с любым радиусом и что все прямые углы равны между собой. Не согласился Лобачевский только с пятым, наиболее сомнительным, с его точки зрения, постулатом Евклида о параллельных. Таким образом, все теоремы, не зависящие от этого пятого постулата, являются общими для обеих геометрий; они образуют так называемую *абсолютную геометрию* [3, 4].

История создания геометрии Лобачевского одновременно является историей попыток доказать пятый постулат Евклида. Этот постулат представляет собой одну из аксиом, положенных Евклидом в основу изложения геометрии. Пятый постулат – последнее и самое сложное из предложений, включенных Евклидом в его аксиоматику геометрии. Напомним формулировку этого пятого постулата: если две прямые пересекаются третьей так, что по какую-либо сторону от нее сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то по эту же сторону исходные прямые пересекаются [5, 6].

Звучит его формулировка чрезвычайно сложно, но если переводить ее на понятный простому человеку язык, то получается, что, по мнению Евклида, две непараллельные прямые обязательно пересекутся. Лобачевский сумел доказать ложность этого посыла.

23 февраля 1826 г. российский математик Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) на заседании физико-математического факультета Казанского университета провозгласил о создании новой геометрии, названной им «воображаемой геометрией». Эта

геометрия была основана на тех же традиционных постулатах и аксиомах геометрии, как и у Евклида, но с заменой его пятого постулата о параллельных.

Таким образом, геометрия Лобачевского – один из видов неевклидовой геометрии, то есть геометрическая теория, основанная на тех же основных посылках, что и обычная геометрия, за исключением 11-й аксиомы (пятый постулат), которая заменяется на аксиому о параллельных Лобачевского: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее. Иными словами, для одной прямой можно провести как минимум две прямые через одну точку, которые не будут ее пересекать, то есть в этом постулате Лобачевского речи о параллельных прямых вообще не идет. Говорится лишь о существовании нескольких непересекающихся прямых на одной плоскости. Таким образом, предположение о пересечении параллельных прямых родилось из-за банального незнания сути теории великого российского математика. Ведь при ближайшем рассмотрении оказывается, что в неевклидовой геометрии не только не говорится о пересечении параллельных прямых, но и не говорится о параллельных прямых вообще – разговор здесь идет именно о непересекающихся прямых, находящихся на одной плоскости [7, 8].

Чтобы понять это, необходимо сделать одно очень важное уточнение: геометрия Лобачевского описывает не плоское пространство, как это делает геометрия Евклида, а оперирует понятиями гиперболического пространства. В геометрии Лобачевского пространство не плоско, оно имеет некоторую отрицательную кривизну. Представить это достаточно сложно, но хорошей моделью такого пространства являются геометрические тела, похожие на воронку и седло. И все сказанное выше относится именно к поверхностям этих фигур. Геометрия Лобачевского на первый взгляд не согласуется с нашими привычными представлениями о геометрии пространства. Например, в геометрии Лобачевского сумма углов у каждого треугольника своя и всегда меньше 180 градусов (рис. 1) [9]. Однако геометрия Евклида получается из геометрии Лобачевского предельным переходом при стремлении кривизны поверхности к нулю.

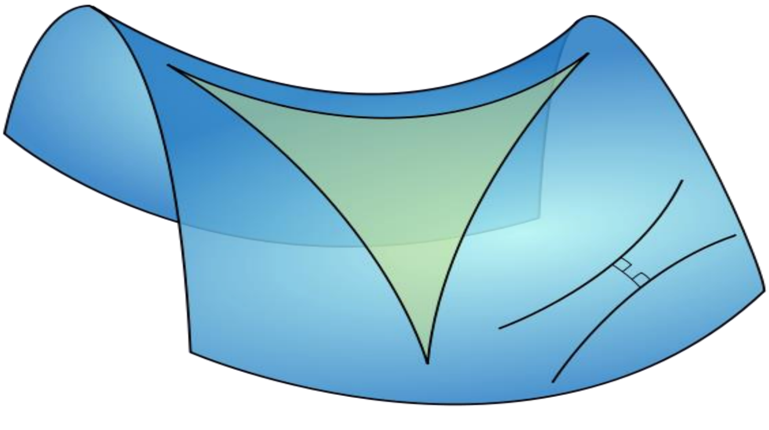

Рис. 1. «Треугольник» по Лобачевскому, у которого сумма углов менее 180°

Необходимо избавиться от превратных понятий о геометрии Лобачевского и понять, что она может применяться только по отношению к миру с искривленным пространством. Однако космология (наука, изучающая Вселенную) в последние годы приходит к выходу, что пространство, в котором мы живем, может обладать отрицательной кривизной, наилучшим образом описываемой именно геометрией Лобачевского.

Неевклидовы геометрии – это целый пласт теорий в математике, где основой является отличный от Евклидова пятый постулат. Лобачевский, в отличие от Евклида, к примеру, описывает гиперболическое пространство. Существует еще теория, описывающая сферическое пространство, – это геометрия Римана. Вот в ней-то как раз параллельные прямые пересекаются. Классический тому пример из школьной программы – меридианы на глобусе. Если посмотреть на лекало глобуса, то окажется, что все меридианы параллельны. Меж тем стоит нанести лекало на сферу, как мы видим, что все ранее параллельные меридианы сходятся в двух точках – у полюсов. Вместе теории Евклида, Лобачевского и Римана называют «три великих геометрии». Таким образом, нулевая кривизна соответствует евклидовой геометрии, положительная – сферической геометрии Римана, отрицательная – геометрии Лобачевского (рис. 2) [10].

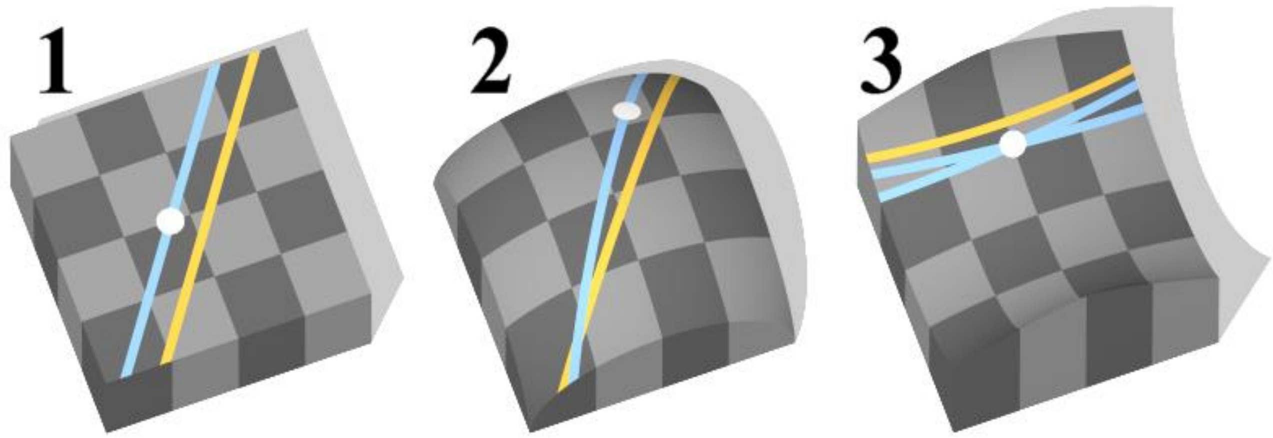

Рис. 2 (1) – геометрия Евклида; (2) – геометрия Римана; (3) – геометрия Лобачевского

Независимо от Лобачевского к подобным идеям пришел венгерский математик Янош Бойяи (1802–1860), опубликовавший свою работу на три года позже Лобачевского (1832), и выдающийся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), у которого после его смерти были найдены отдельные неопубликованные наброски начальных положений неевклидовой геометрии. Однако труды Яноша не были замечены широкой публикой, а Карл Гаусс и вовсе предпочел не издаваться. Поэтому именно наш ученый считается первопроходцем в этой теории. Однако существует несколько парадоксальная точка зрения, что первым неевклидову геометрию придумал сам Евклид. Дело в том, что он самокритично считал свой пятый постулат не очевидным, поэтому большую часть из своих теорем он доказал, не прибегая к нему.

Полное признание и широкое распространение геометрия Лобачевского получила через 12 лет после его смерти, когда стало понятно, что научная теория, построенная на базе некоторой системы аксиом (исходных положений, принимаемых без доказательства), считается только тогда полностью завершенной, когда эта система аксиом удовлетворяет трем условиям: независимости, непротиворечивости и полноты. Именно этим свойствам и удовлетворяет геометрия Лобачевского.

Современная наука приходит к пониманию, что евклидова геометрия лишь частный случай геометрии Лобачевского и что реальный мир точнее описывается именно формулами русского ученого. Сильнейшим толчком к дальнейшему развитию геометрии Лобачевского стала теория относительности Альберта Эйнштейна, которая показала, что само пространство нашей Вселенной не является линейным, а представляет собой гиперболическую сферу. Между тем сам Лобачевский, несмотря на то, что всю жизнь работал над развитием своей теории, называл ее «воображаемой геометрией».

Можно сказать, что Лобачевский на полстолетия опередил математическую мысль XIX в. Геометрия Лобачевского представляет теорию, богатую содержанием и имеющую применение как в математике, так и в физике. Ее историческое значение состоит в том, что ее построением Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало новую эпоху в развитии геометрии и математики. Геометрия Лобачевского не только имеет большое значение для абстрактной математики как одна из возможных геометрий, но и непосредственно связана с приложениями математики к физике. Оказалось, что взаимосвязь пространства и времени, открытая в работах Х. Лоренца, А. Пуанкаре, А. Эйнштейна, Г. Минковского и описываемая в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского. Например, в расчетах современных синхрофазотронов используются формулы геометрии Лобачевского.

Ссылки на источники

1. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия: общедоступные очерки. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 305 с.
2. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского: учеб. пособие. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 80 с.
3. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского. – М.: Просвещение, 2001. – 336 с.
4. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского: учеб. электронное издание. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 464 с.
5. Каган В. Ф. Указ. соч.
6. Широков П. А. Указ. соч.
7. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского. – М.: Просвещение, 2001. – 336 с.
8. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 464 с.
9. Hyperbolic triangle sandlines: Wikipedia Commons. – [Б. и.], 2007. – URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hyperbolic_triangle.svg?uselang=ru, свободный.
10. Euclidian and non euclidian geometry: Wikipedia Commons. – [<. и.], 2005. – URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclidian_and_non_euclidian_geometry.png, свободный.

Irina Akimova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
irina_akimova19@mail.ru
Faniya Akhmetova,
Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow
dobrich2@mail.ru

Notes about the Lobachevskian geometry

Abstract. The paper is devoted to the historical development of geometry. The purpose of the research is to show that apart from the geometry, which is taught in schools and universities, there is another geometry, called Lobachevskian geometry. It significantly differs from the Euclidean geometry. Coming from delivered purposes, the following major objectives are identified in this work: the main provisions of Euclidean geometry and the foundations of the Lobachevskian geometry, the consistency of Lobachevskian geometry. The paper will be useful to students of physical and mathematical departments of universities and pedagogic institutions of higher education. It can be used by lecturers and students in classes with profound study of mathematics.

Key words: Euclidean geometry, Lobachevskian geometry, absolute geometry.

References

1. Kagan, V. F. (1955). *Lobachevskij i ego geometrija: obshhedostupnye ocherki*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury, Moscow, 305 p. (in Russian).
2. Shirokov, P. A. (1955). *Kratkij ocherk osnov geometrii Lobachevskogo: ucheb. posobie*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury, Moscow, 80 p. (in Russian).

3. Atanasjan, L. S. (2001). *Geometrija Lobachevskogo,* Prosveshhenie, Moscow, 336 p. (in Russian).
4. Atanasjan, L. S. (2014). *Geometrija Lobachevskogo: ucheb. jelektronnoe izdanie*, BINOM. Laboratorija znanij, Moscow, 464 p. (in Russian).
5. Kagan, V. F. (1955). Op. cit.
6. Shirokov, P. A. (1955).). Op. cit.
7. Atanasjan, L. S. (2001).). Op. cit.
8. Atanasjan, L. S. (2014).). Op. cit.
9. (2007). *Hyperbolic triangle sandlines: Wikipedia Commons*. Available at: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hyperbolic_triangle.svg?uselang=ru, svobodnyj (in Russian).
10. (2005). *Euclidian and non euclidian geometry: Wikipedia Commons.* Available at: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euclidian_ad_non_euclidian_geometry.png, svobodnyj (in Russian).

Рекомендовано к публикации:
Горевым П. М., кандидатом педагогических наук,
главным редактором журнала «Концепт»

Поступила в редакцию *Received*	16.05.16	Получена положительная рецензия *Received a positive review*	18.05.16
Принята к публикации *Accepted for publication*	18.05.16	Опубликована *Published*	30.06.16

ISSN 2304-120X
www.e-koncept.ru