

# Repaso de MCG

Gustavo A. García

[ggarci24@eafit.edu.co](mailto:ggarci24@eafit.edu.co)

Econometría II

Programa de Economía

Universidad EAFIT

Link slides en formato **html**

Link slides en formato **PDF**

## En este tema

- Introducción
- Consecuencias sobre los estimadores por MCO
- El estimador MCG
- Ejercicio aplicado en R: heteroscedasticidad

# Lecturas

- Wooldridge, J. (2013). *Introducción a la econometría*. 5a edición, Cengage Learning. [Cap 8](#)
- Gujarati, D. y Porter, D. (2010). *Econometría*. 5a edición, Mc Graw Hill. [Cap 11](#)

# Introducción

- Se extenderá el modelo de regresión múltiple para permitir que las perturbaciones no cumplan el supuesto de perturbaciones esféricas: [heteroscedasticidad](#) y [autocorrelación](#)
- El [modelo de regresión lineal generalizado](#) es

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$$

$$E(\mathbf{u}) = 0$$

$$Cov(\mathbf{u}) = E(\mathbf{uu}') = \sigma_u^2 \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Sigma}$$

donde  $\mathbf{\Omega}$  es una matriz definida positiva

- Los dos casos con los que se incumple el supuesto de perturbaciones esféricas son [heteroscedasticidad](#) y [autocorrelación](#)

# Introducción

Perturbaciones heteroscedásticas: diferente varianza

- La heteroscedasticidad normalmente aparece datos de [sección cruzada](#) (datos microeconómicos) y series de tiempo muy volátiles de alta frecuencia (datos diarios del mercado financiero)
- Las perturbaciones se asumen aún incorrelacionadas entre observaciones, por tanto  $\sigma_u^2 \mathbf{\Omega}$  sería

$$\sigma_u^2 \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{u_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{u_n}^2 \end{bmatrix}$$

# Introducción

**Perturbaciones autocorrelacionadas:** correlacionadas entre unas y otras

- La autocorrelación normalmente se encuentra en datos de series de tiempo. Las series de tiempo económicas frecuentemente presentan una **memoria** puesto que la variación alrededor de la función de regresión no es independiente entre un período y el siguiente
- Se asume homocedasticidad, por lo que  $\sigma_u^2 \mathbf{\Omega}$  sería

$$\sigma_u^2 \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

# Consecuencias sobre los estimadores por MCO

- Los resultados esenciales para el modelo clásico con perturbaciones esféricas

$$E(\mathbf{u}) = 0$$

$$Cov(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma_u^2 \mathbf{I}$$

- El estimado MCO

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

es el mejor estimador lineal insesgado, consistente y distribuido asintóticamente como una normal (CAN)

- Los estimadores MCO mantienen sólo algunas de las propiedades deseables en este modelo. Los estimadores MCO permanecen **insesgados**, **consistentes**, y con **distribución asintótica normal**. No serán **eficientes** y los procedimientos normales de **inferencia no son ya apropiados**



# Consecuencias sobre los estimadores por MCO

## Propiedades en muestras finitas de los MCO

- Insesgadez

$$E(\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{B} + E((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}) = \mathbf{B}$$

- Matriz de covarianzas de  $\hat{\mathbf{B}}$

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\mathbf{B}}) &= E[(\hat{\mathbf{B}} - E(\hat{\mathbf{B}}))(\hat{\mathbf{B}} - E(\hat{\mathbf{B}}))'] \\ &= E[(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})'] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma_u^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \frac{\sigma_u^2}{n}(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}\mathbf{X})(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \neq \sigma_u^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

- Dado que la varianza del estimador MCO no es  $\sigma_u^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ , cualquier inferencia basada  $\hat{\sigma}_u^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  llevará probablemente a conclusiones erróneas
- No solamente ésta es la matriz errónea, sino que  $\hat{\sigma}_u^2$  puede ser un estimador sesgado de  $\sigma_u^2$
- Normalmente no hay forma de conocer si  $\sigma_u^2$  es mayor o menor que la verdadera varianza de  $\hat{\mathbf{B}}$  por lo que incluso con un buen estimador de  $\sigma_u^2$ , el estimador convencional de  $Cov(\hat{\mathbf{B}})$  puede no ser particularmente útil
- Dado que hemos prescindido de supuesto fundamental subyacente, los procedimientos de inferencia habituales basados en las distribuciones F y t no serán ahora apropiados

# El estimador MCG

La idea es transformar el modelo (los datos y la perturbación aleatoria) de tal forma que la perturbación aleatoria del modelo transformado, tenga esfericidad y se puedan aplicar MCO a los datos del modelo transformado

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$$

$$E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$E(\mathbf{X}'\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$Cov(\mathbf{u}) = E(\mathbf{uu}') = \sigma_u^2 \mathbf{\Omega}$$

Siendo  $\mathbf{\Omega}$  una matriz definida positiva, pues se trata de varianzas

Las matrices definidas positivas pueden descomponerse como:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{PP}'$$

Siendo  $\mathbf{P}$  una matriz no singular (  $\mathbf{P}^{-1}$  existe). En el mundo matricial, dadas las probabilidades de la inversión de matrices, se da que:

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = (\mathbf{PP}')^{-1} = \mathbf{P}'^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1'}\mathbf{P}^{-1}$$

La propuesta de los MCG es premultiplicar todo el modelo por  $\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{XB} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}^*\mathbf{B} + \mathbf{u}^*$$

# El estimador MCG

Si la perturbación  $\mathbf{u}^*$  es esférica se puede aplicar MCO al modelo con base en  $\mathbf{Y}^*$  y  $\mathbf{X}^*$ . Hay que ver los supuestos para  $\mathbf{u}^*$

$$E(\mathbf{u}^*) = E(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{P}^{-1}E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{u}^*) &= E((\mathbf{u}^* - E(\mathbf{u}^*))(\mathbf{u}^* - E(\mathbf{u}^*))') = E(\mathbf{u}^*\mathbf{u}^{*'}) \\ &= E(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{P}^{-1'}) = \mathbf{P}^{-1}E(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{P}^{-1'} \\ &= \sigma_u^2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}^{-1'} \\ &= \sigma_u^2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{P}'\mathbf{P}^{-1'} \\ &= \sigma_u^2\mathbf{I} \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el modelo  $\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}^*\mathbf{B} + \mathbf{u}^*$  se cumple la hipótesis de perturbaciones esféricas y se puede aplicar MCO al modelo transformado, dando como resultado  $\hat{\mathbf{B}}_{MCG}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_{MCG} &= (\mathbf{X}^{*'}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*'}\mathbf{Y}^* \\ &= ((\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X})'(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}))^{-1}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X})'\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}^{-1'}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}^{-1'}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Y} \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{B}}_{MCO}$  son un caso particular cuando  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{I}$

Es inmediato plantear que en el modelo transformado

$$Cov(\hat{\mathbf{B}}_{MCG}) = \sigma_u^2(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

Para obtener  $\mathbf{\Omega}$  hay que modelar el tipo de situación específica que se quiere resolver: heteroscedasticidad y/o autocorrelación

# Ejercicio aplicado en R: heteroscedasticidad

Cuando  $\Omega$  es una matriz diagonal de varianzas de error no iguales, estamos ante problemas de heteroscedasticidad, así que  $\hat{\mathbf{B}}_{MCG}$  será el estimador de *mínimos cuadrados ponderados* (MCP)

```
library(foreign); library(lmtest); library(sandwich)
data <- read.dta("https://stats.idre.ucla.edu/stat/stata/webbooks/reg/elemap12.dta")

ols <- lm(api00 ~ meals + ell + emer, data=data, subset = data$meals>0)
```

Probando la existencia de heteroscedasticidad a partir del test de Breuch-Pagan ( $H_0$  : homoscedasticidad)

```
bptest(ols)
```

studentized Breusch-Pagan test

```
data:  ols
BP = 8.442, df = 3, p-value = 0.03771
```

Asumiendo que la variable *meals* es la cuasante de la heteroscedasticidad y que la estructura de la heteroscedasticidad es  $Var(u) = \sigma^2 meals$ , el modelo corregido por MCP será

```
mcp <- lm(api00 ~ meals + ell + emer, weight = 1/meals, data=data, subset = data$meals>0)
summary(mcp)
```

Call:

```
lm(formula = api00 ~ meals + ell + emer, data = data, subset = data$meals >
    0, weights = 1/meals)
```

Weighted Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-36.769	-5.402	-0.483	5.576	29.636

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	884.4189	2.9546	299.336	< 2e-16 ***

# Ejercicio aplicado en R: heteroscedasticidad

En las aplicaciones reales la matriz de covarianzas  $\Omega$  es desconocida, y debe ser estimada de los datos en conjunto con los coeficientes de regresión  $\beta$ . Sin embargo,  $\Omega$  tiene hasta  $n(n+1)/2$  elementos libres, así que el modelo puede tener más parámetros que datos. Es por esto que se requieren restricciones sobre los elementos de  $\Omega$

Otra forma de corregir el problema de heteroscedasticidad son el calculo de errores estándar robustos a la heteroscedasticidad o corrección HC (o HAC para heteroscedasticidad y autocorrelación) (*Heteroskedasticity consistent (HC) and heteroskedasticity and autocorrelation consistent (HAC) covariance matrix estimators*)

## El estimador HC

Se asume que  $\Omega$  es una matriz diagonal (no autocorrelación). Un estimador complementario para  $Var(\hat{\mathbf{B}}|\mathbf{X})$  podría usar  $\hat{\Omega} = diag(w_1, \dots, w_n)$  con:

const:	$w_i = \hat{\sigma}^2$	estimador estándar para errores homoscedásticos
HC0:	$w_i = \hat{u}_i^2$	estimador básico Eicker-Huber-White
HC1:	$w_i = \frac{n}{n-k} \hat{u}_i^2$	mejoras en muestras pequeñas
HC2:	$w_i = \frac{\hat{u}_i^2}{1 - h_{ii}}$	mejoras en muestras pequeñas
HC3:	$w_i = \frac{\hat{u}_i^2}{(1 - h_{ii})^2}$	mejoras en muestras pequeñas
HC4:	$w_i = \frac{\hat{u}_i^2}{(1 - h_{ii})^{\delta_i}}$	mejoras en muestras pequeñas, en el caso de outliers

donde  $h_{ii}$  son los valores estimados,  $\delta_i = \min\{4, h_{ii}/\bar{h}\}$

# Ejercicio aplicado en R: heteroscedasticidad

```
hc_const <- coeftest(ols, vcov = vcovHC(ols, "const"))
hc_const
```

t test of coefficients:

```
              Estimate Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 886.04379    6.29806 140.6852 < 2.2e-16 ***
meals        -3.14890    0.15014 -20.9736 < 2.2e-16 ***
ell          -0.91383    0.18471  -4.9474 1.115e-06 ***
emer        -1.57162    0.29315  -5.3612 1.409e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
hc0 <- coeftest(ols, vcov = vcovHC(ols, "HC0"))
hc0
```

t test of coefficients:

```
              Estimate Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 886.04379    5.11156 173.3413 < 2.2e-16 ***
meals        -3.14890    0.13953 -22.5679 < 2.2e-16 ***
ell          -0.91383    0.18072  -5.0566 6.547e-07 ***
emer        -1.57162    0.32857  -4.7833 2.439e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
hc1 <- coeftest(ols, vcov = vcovHC(ols, "HC1"))
hc1
```

t test of coefficients:

```
              Estimate Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 886.04379    5.13737 172.4702 < 2.2e-16 ***
meals        -3.14890    0.14023 -22.4545 < 2.2e-16 ***
ell          -0.91383    0.18163  -5.0312 7.417e-07 ***
```