

# Teoria da Decisão

## Projeto Prático Assistido Por Otimização Multiobjetivo e Métodos de Auxílio à Tomada de Decisão

Rafael Carneiro de Castro

Vinícius Felicíssimo Campos

Davi Pinheiro Viana

Eng. de Sistemas - UFMG  
Matrícula: 2013030210

Eng. de Controle e Automação - UFMG  
Matrícula: 2015035235

Eng. de Sistemas - UFMG  
Matrícula: 2013029912

Email: rafaelcarneiroget@hotmail.com

Email: viniciusfc95@gmail.com

Email: daviviana22@gmail.com

**Resumo**—Abordagem de forma conjunta de grande parte dos conceitos vistos na disciplina "ELE088 - Teoria da Decisão", através de um problema relacionado ao gerenciamento ótimo da política de manutenção de um conjunto de equipamentos de uma empresa. O problema foi resolvido através de modelagem e implementação multiobjetivo e, para verificar a resolução do problema, é apresentado um indicador de qualidade. Além disso, foram utilizados alguns métodos de auxílio à tomada de decisão.

### I. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem o objetivo de resolver um problema de otimização multiobjetivo e, utilizando técnicas escalares de decisão assistida estudadas em sala de aula, encontrar a melhor solução para este problema, colocando em prática grande parte dos conceitos da matéria.

O problema a ser resolvido é o seguinte: *Deseja-se determinar a política de manutenção ótima para cada um dos 500 equipamentos de uma empresa, considerando-se a minimização do custo de manutenção e a minimização do custo de falha esperado.*

No problema, o custo de manutenção total é a soma dos custos dos planos de manutenção adotados para todos os equipamentos. Sendo que, o valor do custo de cada plano de manutenção é dado. O custo esperado de falha de cada equipamento  $i$ , sob o plano de manutenção  $j$ , é o produto da probabilidade de falha ( $p_{i,j}$ ) e o custo de falha do equipamento (este último é dado). O custo esperado de falha total é a soma dos custos esperados de falha de todos os equipamentos.

Deve ser feita a formulação e resolução do problema multiobjetivo e o resultado encontrado deve ser avaliado baseado no indicador de qualidade hipervolume (s-metric). Esse indicador é utilizado para mensurar as propriedades de convergência e diversidade da fronteira Pareto "aproximada" obtida.

Além disso, deve ser aplicada também a utilização de técnicas de análise de decisão ELECTRE II, PROMETHEE II fuzzy e AHP para decidir qual a melhor solução dentre as encontradas para o problema.

### II. DESENVOLVIMENTO

#### A. Formulação do Problema:

A formulação do problema foi dividida em duas partes, como é discutido a seguir:

1) *Minimização do custo de manutenção total:* Em primeiro momento, é preciso construir uma função objetivo e suas eventuais restrições para minimização do custo de manutenção total. Considerando  $C_{m_i}(x_i)$  como o custo de manutenção do equipamento  $i$  em função do plano de manutenção  $x_i$ , têm-se a seguinte formulação:

$$\min \sum_{i=1}^n C_{m_i}(x_i) \quad (1)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (2)$$

$$C_{m_i} \in \mathcal{C}_m \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (3)$$

Em que  $n$  é o número de equipamentos que, no caso do problema a ser resolvido, é igual a 500. A equação 17 representa o custo de manutenção total que é o somatório dos custos de manutenção de cada equipamento  $i$ . A restrição 2 indica que cada equipamento  $i$  pode ter um plano de manutenção  $x_i$  que esteja dentro do conjunto  $\mathcal{X}$  de planos pré-definidos, no caso do problema,  $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ . A restrição 3 indica que o custo de manutenção de cada equipamento também deve estar dentro de um conjunto pré-definido  $\mathcal{C}_m$ , sendo que o valor depende do plano de manutenção.

## 2) Minimização do custo esperado de falha total:

Agora, uma função objetivo para tratar a minimização do custo esperado de falha total é formulada. Considerando  $C_{f_i}(x_i)$  como o custo de falha do equipamento  $i$  em função do plano de manutenção  $x_i$ , têm-se a seguinte formulação:

$$C_{f_i} = p_{i,x_i} \cdot c_{f_i} \quad (4)$$

Onde  $p_{i,x_i}$  é a probabilidade de falha de um equipamento  $i$ , sob o plano de manutenção  $x_i$ , até um dado horizonte de planejamento da manutenção  $\Delta t$ . Ela é estimada pela equação 5 que determina a probabilidade de falha de um equipamento até  $\Delta t$  dado que ele não falhou até a data atual ( $t_0$ ). No caso do problema, será utilizado  $\Delta t = 5$  anos.

$$p_{i,x_i} = \frac{F_i(t_0 + x_i \Delta t) - F_i(t_0)}{1 - F_i(t_0)} \quad (5)$$

Em que:

$$F_i(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_i} \right)^{\beta_i} \right] \quad (6)$$

Os parâmetros  $\eta$ ,  $\beta$  dependem também do plano de manutenção  $i$  e são dados. Com isso, têm-se o seguinte modelo:

$$\min \sum_{i=1, n} C_{f_i}(x_i) \quad (7)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (8)$$

$$c_{f_i} \in \mathcal{C}_f \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\beta_i \in \mathcal{B} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (10)$$

$$\eta_i \in \mathcal{N} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (11)$$

Em que  $n$  é o número de equipamentos que, no caso do problema a ser resolvido, é igual a 500. A equação 7 representa o custo esperado de falha total que é o somatório dos custos esperados de falha de cada equipamento  $i$ . A restrição 8 indica que cada equipamento  $i$  pode ter um plano de manutenção  $x_i$  que esteja dentro do conjunto  $\mathcal{X}$  de planos pré-definidos, no caso do problema,  $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ . As restrições 9, 10 e 11 indicam, respectivamente que  $c_{f_i}$ ,  $\beta_i$ ,  $\eta_i$  devem estar dentro de conjuntos pré-definidos, sendo que o valor depende do plano de manutenção.

3) *Minimização de ambos os custos*: O problema a ser resolvido envolve a minimização do custo de manutenção total e também do custo de falha total, logo, é necessária a formulação de um problema biobjetivo para o problema. Para a formulação, foi escolhido o método *Soma Ponderada*. Nele, a função biobjetivo é formada por uma

soma das funções objetivos anteriores, sendo cada uma multiplicada por um peso. A variação desses pesos é que faz com que a fronteira Pareto seja formada. Esse método foi escolhido por ser de fácil implementação. Com isso, a formulação do problema biobjetivo é a seguinte:

$$\min w_1 \cdot \sum_{i=1, n} C_{m_i}(x_i) + w_2 \cdot \sum_{i=1, n} C_{f_i}(x_i) \quad (12)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (13)$$

$$c_{f_i} \in \mathcal{C}_f \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (14)$$

$$\beta_i \in \mathcal{B} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\eta_i \in \mathcal{N} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (16)$$

## B. Algoritmo de Solução:

Nesta seção serão discutidos e exibidos os algoritmos para solução do problema multiobjetivo.

Olhando para a equação 12 é possível perceber que, minimizando o custo de cada equipamento, minimiza-se também o somatório dos custos. Assim, para resolução do problema biobjetivo foi utilizada uma estratégia gulosa. Nela, para cada equipamento, é feito um teste com cada um dos planos de manutenção e é escolhido aquele que gera menor custo. Têm-se então, um algoritmo cuja complexidade é  $O(n \cdot m)$  em que  $n$  é o número de equipamentos e  $m$  é o número de planos de manutenção. No caso do problema a ser resolvido no trabalho, para cada par de pesos escolhido (encontrar solução da fronteira Pareto), são feitas 1500 avaliações da função objetivo. Segue, abaixo, um pseudocódigo do funcionamento do algoritmo:

---

### Algorithm 1 Estratégia gulosa

---

```

1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:    $cBest = w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_1) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_1)$ 
3:    $x_i = \mathcal{X}_1$ 
4:   for  $j = 2$  to  $m$  do
5:     if  $(w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_j) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_j)) < cBest$  then
6:        $cBest = w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_j) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_j)$ 
7:        $x_i = \mathcal{X}_j$ 
8:     end if
9:   end for
10: end for

```

---

O algoritmo que utiliza a estratégia gulosa para resolver a função objetivo pode ser encontrado no arquivo `Guloso.m` e o algoritmo que implementa a *Soma Ponderada* variando os pesos da função objetivo pode ser encontrado no arquivo `SomaPonderada.m`, ambos no mesmo diretório deste relatório.

### C. Resultados:

Nesta sessão serão apresentados os resultados dos algoritmos.

### D. Análise baseada no Hipervolume:

#### III. TOMADA DE DECISÃO ASSISTIDA:

##### A. Electre II:

##### B. Promethee II Fuzzy:

##### C. AHP:

O método AHP utilizado aqui é o mesmo que o estudado em sala de aula. Para tanto, escolheu-se 5 soluções da fronteira de Pareto encontrada na otimização biobjetivo. Chamaremos aqui de *c1* (critério 1) o custo de manutenção total, e de *c2* (critério 2) o custo esperado de falha total. Os valores destes critérios para as 5 soluções escolhidas podem ser vistos na tabela a seguir.

Alternativa	c1	c2
a1	1000	1048,2
a2	622	1184,3
a3	396	1340,9
a4	40	1695,3
a5	0	1745,5

Tabela I

AValiação das Alternativas nos Critérios.

Agora, para a definição das prioridades de cada alternativa em cada critério, faz-se as tabelas de prioridade dando notas às alternativas. Para o primeiro critério, a tabela construída é:

c1	a1	a2	a3	a4	a5	Prioridades
a1	1	0.333	0.2	0.143	0.111	0.0348
a2	3	1	0.333	0.2	0.143	0.0678
a3	5	3	1	0.333	0.2	0.1343
a4	7	5	3	1	0.333	0.2602
a5	9	7	5	3	1	0.5028

Tabela II

Prioridades Critério 1.

Para o segundo critério, a tabela construída é:

c1	a1	a2	a3	a4	a5	Prioridades
a1	1	3	5	8	9	0.5029
a2	0.333	1	3	6	7	0.2623
a3	0.2	0.333	1	4	5	0.1395
a4	0.125	0.167	0.25	1	3	0.0610
a5	0.111	0.143	0.2	0.333	1	0.0344

Tabela III

Prioridades Critério 2.

Como visto em sala de aula, as prioridades são calculadas a partir da normalização dos termos nas colunas,

tirando a média de cada linha. Agora escolhendo o peso do custo de manutenção total como sendo 0.4 e o peso do custo esperado de falha total como sendo 0.6 (consideramos que o custo de falha tem maior impacto), para cada alternativa basta multiplicar pelos pesos dos critérios cada uma de suas prioridades e somar, comparando assim o resultado obtido para todas:

$$p_i = \sum_{j=1}^2 w_j * P_{ij} \quad (17)$$

O código do arquivo AHP.m lê as matrizes de prioridade dos arquivos *AHPcritério1.csv* e *AHPcritério2.csv*, faz os cálculos de prioridade apresentados e calcula o somatório para as comparações finais. Este somatório para cada alternativa pode ser visto na tabela seguinte:

Alternativa	Prioridade Final
a1	0.2688
a2	0.1650
a3	0.1369
a4	0.1606
a5	0.2686

Tabela IV

Prioridades Critério 2.

Como se pode notar, para os pesos escolhidos para os dois critérios, a alternativa 1 se mostrou a mais promissora, mas a alternativa 5 também está muito próxima desta. Um ajuste dos pesos poderia trazer um resultado final diferente.

### IV. CONCLUSÃO:

Estratégias de decisão multiobjetivo são ferramentas muito úteis e poderosas para a tomada de decisões. Muitas abordagens e formulações podem ser seguidas, e concluímos que atingimos de forma satisfatória os objetivos buscados com a abordagem apresentada para o problema discutido. Obstáculos foram encontrados sobretudo na definição de métodos para a soluções do problema de otimização multiobjetivo, mas todos estes obstáculos foram superados para se chegar ao resultado final.

### REFERÊNCIAS

- [1] Notas de aula do professor Lucas Batista da disciplina *ELE088 Teoria da Decisão*. 2017.
- [2] ARENALES, Marcos et al. Pesquisa operacional: para cursos de engenharia. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007