

# Teoria da Decisão

## Métodos Escalares de Otimização Vetorial e Tomada de Decisão Assistida

Rafael Carneiro de Castro

Engenharia de Sistemas - UFMG

Matrícula: 2013030210

Email: rafaelcarneiroget@hotmail.com

Davi Pinheiro Viana

Engenharia de Sistemas - UFMG

Matrícula: 2013029912

Email: daviviana22@gmail.com

**Resumo**—Abordagem de forma conjunta de grande parte dos conceitos vistos na disciplina "ELE088 - Teoria da Decisão", através de um problema de escalonamento de tarefas. O problema foi resolvido através de implementações mono e multiobjetivo e utilizando o método de auxílio à tomada de decisão Programação de Compromissos.

### I. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem o objetivo de resolver um problema de otimização, utilizando técnicas escalares de decisão assistida, estudadas em sala de aula, e colocar em prática grande parte dos conceitos da matéria.

O problema a ser resolvido é o seguinte: *Uma empresa possui um conjunto de  $M$  máquinas que devem ser utilizadas para processar  $N$  tarefas indivisíveis. Cada máquina  $i$  leva um tempo  $t_{ij}$  para processar uma tarefa  $j$  e pode processar uma única tarefa por vez. Todas as tarefas possuem uma mesma data ideal de entrega  $d$ , sendo que cada tarefa  $j$  sofre uma penalidade  $w_j$  proporcional a cada dia que ela é entregue adiantada ou atrasada em relação a  $d$ .*

Deve ser feita a formulação e resolução do problema nas versões mono e multiobjetivo e também utilização da técnica de análise de decisão Programação de Compromissos.

### II. DESENVOLVIMENTO

#### A. Formulação do Problema:

A formulação do problema foi dividida em duas partes, como é discutido a seguir:

1) *Minimização do Tempo Total de Entrega*: Em primeiro momento, é preciso construir uma função objetivo e suas eventuais restrições para minimização do tempo total de entrega de todas as tarefas. Considere  $C_i$  como sendo o tempo necessário para se terminar as tarefas executadas pela máquina  $i$ . Assim:

$$C_i = \sum_{j=1}^N t_{ij} \cdot x_{ij} \quad \forall i \in (1, \dots, M)$$

O objetivo então se torna:

$$\min C_{\max}$$

$$C_{\max} = \max(C_i) \quad \forall i \in (1, \dots, M)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1 \quad \forall j \in (1, \dots, M) \quad (1)$$

$$x_{ij} \in (0, 1)$$

A restrição contida na equação 1, garante que todas as tarefas serão cumpridas e, também, que cada tarefa será executada por uma única máquina. A matriz  $x$  é composta por zeros e uns. Cada uma das suas linhas, então, vai representar uma tarefa, e cada coluna, uma máquina. O número 1 em uma coluna representa qual máquina vai executar a tarefa daquela linha.

2) *Minimização da Soma Ponderada dos Atrasos e Adiantamentos*: Agora, uma função objetivo para tratar a minimização da soma ponderada dos atrasos e adiantamentos é formulada. O momento de término da tarefa  $j$  será chamado de  $e_j$ . Então:

$$e_j = \sum t_{ik} \quad \forall k \in \Omega_j$$

onde  $\Omega_j$  é o conjunto das tarefas até a tarefa  $j$  executadas por uma mesma máquina  $i$ . A função objetivo pode ser escrita como:

$$\min \sum_{j=1}^N w_j |e_j - d|$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = 1 \quad \forall j \in (1, \dots, N) \quad (2)$$

$$x_{ij} \in (0, 1)$$

onde, como já discutido,  $d$  é a data ideal de entrega das tarefas e  $w_j$  a penalidade proporcional a cada dia que a tarefa é entregue adiantada ou atrasada em relação a  $d$ .

A restrição contida na equação 2, garante que todas as tarefas serão cumpridas e, também, que cada tarefa será executada por uma única máquina

### B. Algoritmos de Solução:

Nesta seção serão discutidos e exibidos os algoritmos para solução dos problemas mono e multiobjetivo.

1) *Minimização do Tempo Total de Entrega*: O algoritmo de otimização utilizado aqui se baseia no *Simulated Annealing* (SA), método estudado em sala de aula de fácil implementação e convergência atrativa. Este método escapa de mínimos locais com a aceitação de alguns movimentos de piora na qualidade da solução. É inspirado no recozimento físico de sólidos, e possui um parâmetro conhecido como *temperatura*, que ajusta a probabilidade de um movimento de piora ser aceito. Um algoritmo simplificado para o *Simulated Annealing* pode ser visto na Figura 1.

---

#### Algoritmo 1: Simulated Annealing

---

```

1 Defina um contador  $k = 0$ ;
2 Defina uma temperatura inicial  $t_k \geq 0$ ;
3 Defina  $T_k$  (função que controla a variação da temperatura);
4 Defina  $M_k$  (no. de iterações executadas na temperatura  $t_k$ );
5 Selecione uma solução inicial  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;
6 while critério de parada não alcançado do
7   Defina o contador  $m = 0$ ;
8   while  $m \leq M_k$  do
9     Gere uma solução  $\mathbf{x}' \in \mathcal{N}(\mathbf{x})$ ;
10    Calcule  $\Delta E = f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})$ ;
11    if  $\Delta E \leq 0$  then
12       $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}'$ ;
13    else
14       $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}'$  com probabilidade  $\exp(-\Delta E/t_k)$ ;
15     $m \leftarrow m + 1$ ;
16   $t_{k+1} \leftarrow T_k(t_k)$ ;
17   $k \leftarrow k + 1$ ;

```

---

Figura 1. Algoritmo simplificado do SA.

Para tratar o problema da minimização do tempo de entrega, é importante ter em mente a representação de uma possível solução. Esta representação, como discutido na seção A.1, é uma matriz de zeros e uns, onde o 1 representa qual máquina faz dada tarefa.

A primeira etapa foi criar um algoritmo que gera uma solução inicial. Este código está no arquivo `initialSolTE.m`. Uma solução é inicializada como sendo uma matriz de zeros. Então, para cada linha (tarefa), um número randômico entre 1 e a quantidade de máquinas é gerado, representado qual é a máquina escolhida para executar a tarefa daquela linha. Um número

1 é colocado na posição da linha do número randômico gerado. Repare que esta solução gerada nunca viola a restrição de que a soma dos valores de uma linha deve ser sempre 1.

Em seguida, criou-se um código que é responsável por avaliar uma dada solução na função objetivo, algoritmo este que está no arquivo `fobjTE.m`. Este arquivo define a função `fobjTE` que recebe como entrada a solução que se deseja avaliar e uma matriz com o tempo que cada máquina demora para executar cada tarefa (estes tempos são carregados do arquivo `i5x25.mat` disponibilizado pelo professor). Pela multiplicação vetorial de cada linha da matriz dos tempos com cada coluna da matriz  $x$  (solução), tem-se o tempo de operação de cada máquina. A avaliação da solução na função objetivo é, como já visto, o maior dentre os tempos de operação das máquinas.

Antes de implementar o SA propriamente dito, foi necessário também criar funções que geram novas soluções em dada vizinhança. Para este problema, duas funções de vizinhança foram criadas. A primeira, para uma dada solução  $x$ , gera uma nova solução  $y$  trocando aleatoriamente as máquinas que executam  $n$  tarefas ( $n$  também é um parâmetro da função), e está no arquivo `neighbor1TE.m`. Repare que aqui não ocorre necessariamente uma troca entre máquinas. A outra função de vizinhança recebe uma solução  $x$  e gera uma nova solução  $y$  escolhendo duas linhas aleatoriamente (duas tarefas), e trocando-as, de forma que duas máquinas trocam as tarefas entre si. Está no arquivo `neighbor2TE.m`. Com estas funções de vizinhança, a restrição de que cada linha pode ter apenas um número 1 (cada tarefa só pode ser executada por uma máquina) ainda é atendida.

O algoritmo de otimização foi implementado no arquivo `minTempoEntrega.m`, que tem a função de mesmo nome. Utiliza a estratégia do *Simulated Annealing* e também, como auxílio, todos os outros algoritmos apresentados até aqui para o problema em questão. A função `minTempoEntrega` implementada no arquivo possui dois argumentos, o que vai facilitar, posteriormente, no ajuste de parâmetros do método implementado. Este ajuste será apresentado na seção de resultados.

2) *Minimização da Soma Ponderada dos Atrasos e Adiantamentos*: O algoritmo de otimização utilizado aqui também se baseia no *Simulated Annealing*, ilustrado na Figura 1.

Para a representação de uma possível solução, a estrutura de dados é dividida em duas partes. Uma delas é a própria matriz  $x$  usada no primeiro problema e discutida na seção A.1. Esta matriz contém as informações de qual máquina executa as tarefas. A informação adicional que este problema exige é a ordenação das tarefas em cada máquina. Por questão de simplicidade de código,

as tarefas receberam a ordem em um único vetor, com todas as 25. Se uma tarefa antecede a outra neste vetor, mas elas não são da mesma máquina, não significa que uma começou a ser executada antes que a outra, já que elas são de máquinas diferentes. A ordem só vai ser importante quando se olhar as tarefas de uma mesma máquina.

Para a geração de uma solução inicial, cria-se uma matriz  $x$  com a chamada do código que está em `initialSolTE.m`, que é o código do exemplo anterior. Agora, para se gerar uma ordenação, basta chamar a função `randperm` do MatLAB, para criar uma permutação randômica de 1 até  $N$ , onde  $N$  é a quantidade de tarefas. Tanto  $x$  quanto a ordem são retornados pela função, que está no arquivo `initialSolSPA.m`.

Em seguida, criou-se um código que é responsável por avaliar uma dada solução na função objetivo, algoritmo este que está no arquivo `fobjSPA.m`. Este arquivo define a função `fobjSPA` que recebe como entrada: a solução (matriz  $x$ ) que se deseja avaliar, um vetor contendo a ordem de execução das tarefas, uma matriz com o tempo que cada máquina demora para executar cada tarefa, um vetor com o custo do atraso ou adiantamento de cada tarefa, e o dia de entrega ótimo das tarefas. Estes dados são carregados do arquivo `i5x25.mat` disponibilizado pelo professor. Todas as tarefas de uma dada máquina são percorridas e o tempo de término de cada uma é calculado, adicionando ao resultado final a penalidade proveniente de cada tarefa.

Antes de implementar o SA propriamente dito, foi necessário também criar funções que geram novas soluções em dada vizinhança. Para este problema, três funções de vizinhança foram criadas.

A primeira, para uma dada solução  $x$ , gera uma nova solução  $y$  trocando, aleatoriamente, a máquina que executa uma determinada tarefa. A implementação dessa estrutura de vizinhança está no arquivo `neighbor1SPA.m`. Repare que aqui não ocorre necessariamente uma troca entre as máquinas sendo que, na nova solução gerada, uma das máquinas pode ficar sem executar nenhuma tarefa, por exemplo.

A outra função de vizinhança recebe uma solução  $x$  e gera uma nova solução  $y$ , trocando a ordem de duas tarefas aleatórias, em uma mesma máquina, escolhida também de maneira aleatória. A implementação dessa estrutura está no arquivo `neighbor2SPA.m`.

A última função de vizinhança troca todas as tarefas de duas máquinas entre si, não alterando a ordem que elas são executadas na máquina. Nessa estrutura, se certo número de estágios estagnados for alcançado, são geradas soluções mais espaçadas de forma a explorar uma região mais distante. A implementação encontra-se no arquivo `neighbor3SPA.m`.

Em todas as estruturas de vizinhança criadas, a

restrição de que cada linha pode ter apenas um número 1 (cada tarefa só pode ser executada por uma máquina) é atendida.

O algoritmo de otimização foi implementado no arquivo `minAtrasoAdiantamento.m`, que tem a função de mesmo nome. Utiliza a estratégia do *Simulated Annealing* e também, como auxílio, todos os outros algoritmos apresentados até aqui para o problema em questão. A função `minAtrasoAdiantamento` implementada no arquivo possui um argumento, o que vai facilitar, posteriormente, no ajuste de parâmetros do método implementado. Este ajuste será apresentado na seção de resultados.

3) *Otimização multiobjetivo - Soma ponderada*: Uma versão de resolução do problema apontado anteriormente é a otimização dos dois objetivos ao mesmo tempo (multiobjetivo). Ou seja, ao mesmo tempo em que se minimiza o *tempo total de entrega*, minimiza-se também a *soma ponderada dos atrasos e adiantamentos*. Essa versão do problema é mais próxima da situação real em que sempre se busca os dois objetivos.

O primeiro método aplicado para resolução da versão mutiobjetivo foi a *Soma Ponderada*. Nele, as duas funções objetivos são agrupadas em uma única função. A nova função objetivo é composta de um somatório ponderado das funções anteriores e as restrições são as mesmas dos dois problemas. Assim, a função objetivo transformada se torna a seguinte:

$$\min p_1 \cdot C_{\max} + p_2 \cdot \left( \sum_{j=1}^N w_j |e_j - d| \right)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = 1 \quad \forall j \in (1, \dots, N) \quad (3)$$

$$x_{ij} \in (0, 1)$$

$$p_1 \geq 0$$

$$p_2 \geq 0$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Em que  $p_1$  e  $p_2$  são os pesos dados às funções objetivos originais. A função objetivo transformada pode ser resolvida por qualquer método de otimização não linear.

No trabalho, foi utilizado um algoritmo também baseado no *Simulated Annealing*, já citado anteriormente. Tanto para geração de solução inicial, como para estruturas de vizinhança, foram utilizados os mesmos métodos implementados para resolução da *Soma ponderada dos atrasos e adiantamentos*. Os métodos foram reutilizados por se tratarem da mesma estrutura de algoritmo e por

gerarem solução e vizinhança que atendem aos dois problemas.

No algoritmo, primeiramente é gerada uma solução inicial utilizando a função presente no arquivo `initialSolSPA.m`. Após, é repetido o seguinte processo: gera-se valores aleatórios de  $p_1$  e  $p_2$  e resolve-se o problema da função transformada utilizando algoritmo SA. A solução pareto-ótima encontrada é armazenada. Foi feita implementação para que sejam encontradas 100 (cem) soluções por execução do algoritmo.

O método da soma ponderada foi escolhido por ser simples e fácil de programar e, também, pelo fato da função transformada possuir apenas dois objetivos, já que, para o método da solução ponderada, não são indicadas funções com muitos objetivos pela dificuldade de controlar a diversidade das soluções encontradas. A implementação da resolução do problema pode ser encontrada no arquivo `somaPonderada.m`. Nele, foi criada a função `somaPonderada` que recebe os mesmos parâmetros da função `minTempoEntrega` para o ajuste de parâmetros.

4) *Otimização multiobjetivo -  $\epsilon$ -restrito*: O segundo método aplicado para resolução da versão multiobjetivo foi o  $\epsilon$ -restrito. Nele, escolhe-se uma das funções objetivos para se minimizar e as demais se tornam restrições de desigualdade para o problema transformado. No trabalho, foi escolhido minimizar a função *somatório dos atrasos e adiantamentos* e a função *tempo total de entrega* se tornou uma restrição. Assim, a função objetivo transformada se tornou a seguinte:

$$\min \sum_{j=1}^N w_j |e_j - d|$$

sujeito a:

$$C_{\max} \leq \epsilon_1 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = 1 \quad \forall j \in (1, \dots, N) \quad (5)$$

$$x_{ij} \in (0, 1)$$

A função objetivo transformada pode ser resolvida por qualquer método de otimização não linear. No trabalho, foi utilizado novamente um algoritmo baseado no *Simulated Annealing* (SA), já citado anteriormente. Assim como na *Soma ponderada*, foram utilizados os métodos de geração de solução inicial e de vizinhança do método da *Soma dos atrasos e adiantamentos*.

O algoritmo gera uma solução inicial e repete o método SA para encontrar o conjunto de soluções pareto-ótimas, variando o valor de  $\epsilon_1$ . No trabalho foram encontradas 100 (cem) soluções por execução do algoritmo.

Esse método foi escolhido por ser mais robusto que a *Soma Ponderada* e pelo fato de se ter apenas dois objetivos, já que o  $\epsilon$ -restrito, para resolução

de problemas com mais de dois objetivos, pode gerar funções transformadas infactíveis. A implementação da resolução do problema pode ser encontrada no arquivo `epsilonRestrito.m`.

5) *Programação de Compromisso*: Além dos métodos utilizados para resolver o problema multiobjetivo, foi implementado o método *Programação de Compromisso*. Essa é uma técnica de análise de decisão multicritério que visa encontrar a melhor solução de compromisso para um problema de otimização com múltiplos objetivos.

A análise para encontrar a solução de compromisso consiste no decisor definir valores aceitáveis para as funções objetivo do problema e então, é feita a minimização encontrando soluções que atendam aos valores definidos.

Para aplicar a técnica, foi feita a seguinte transformação no problema multiobjetivo:

$$\min [w_1 \cdot |f_1(x) - f_1^*|^r + w_2 \cdot |f_2(x) - f_2^*|^r]^{\frac{1}{r}}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = 1 \quad \forall j \in (1, \dots, N) \quad (6)$$

$$1 \leq r \leq \infty$$

Em que  $w_1$  e  $w_2$  são pesos que caracterizam a preferência do decisor,  $f_1(x)$  é a função objetivo do problema do *Tempo Total de entrega*,  $f_2(x)$  é a função objetivo do problema da *Soma Ponderada dos Atrasos e Adiantamentos*,  $r$  é um parâmetro variável que define se será feita a minimização da soma dos desvios ou do máximo desvio e  $f_1^*$  e  $f_2^*$  são parâmetros que o decisor define como sendo valores aceitáveis das funções objetivos. No caso do problema a ser resolvido,  $f_1^*$  define o tempo total de entrega aceitável e  $f_2^*$  define a soma ponderada dos atrasos e adiantamentos aceitável.

A função da *Programação de Compromisso* também pode ser resolvida por qualquer método de otimização não linear e para resolução dela foi utilizado o algoritmo baseado no *Simulated Annealing*. Também foram utilizados os métodos de geração de solução inicial e de vizinhança do método da *Soma dos atrasos e adiantamentos*.

O algoritmo gera uma solução inicial e repete o método SA para encontrar o conjunto de soluções pareto-ótimas variando os valores de  $w_1$  e  $w_2$ . Foi feita essa implementação pelo fato dos alunos não terem conhecimento suficiente do problema para escolher valores de pesos precisos para o problema. Além disso, baseado nas execuções dos métodos *Soma Ponderada* e  $\epsilon$ -restrito foi escolhido o valor de 14 para o parâmetro  $f_1^*$  e 400 para o parâmetro  $f_2^*$ . Esses

parâmetros podem ser facilmente alterados no arquivo com a implementação do algoritmo. O último parâmetro do método é o  $r$  que, após algumas execuções do algoritmo, foi escolhido o valor 0,5. A implementação da *Programação de Compromisso* pode ser encontrada no arquivo `programacaoDeCompromisso.m`.

### C. Resultados:

Nesta sessão serão apresentados os resultados dos algoritmos.

1) *Minimização do Tempo Total de Entrega*: Como já mencionado, o algoritmo de otimização foi baseado no *Simulated Annealing*. Esta abordagem exige o ajuste de alguns parâmetros, dentre eles, o multiplicador  $\alpha$  de temperatura, que é um valor entre 0 e 1, que vai diminuir gradualmente a temperatura do algoritmo: probabilidade de se aceitar um movimento de piora na busca pela melhor solução. Outro parâmetro que deve ser ajustado é a quantidade  $n$  de tarefas que terão a máquina aleatoriamente trocada, na primeira função de vizinhança. Os dados para execução do problema foram disponibilizados pelo professor, são carregados pelo arquivo `i5x25.mat` e podem ser vistos na tabela da Figura 2.

Tarefa	Máquina					Peso
	1	2	3	4	5	
1	2	1	4	7	8	8
2	8	3	2	1	5	5
3	8	8	8	4	1	7
4	4	9	10	4	5	10
5	9	10	7	5	3	2
6	3	3	4	3	8	5
7	9	1	1	8	3	2
8	10	6	4	9	6	8
9	9	8	1	1	9	10
10	6	1	4	10	6	6
11	10	10	6	5	9	3
12	4	7	6	2	6	7
13	9	5	3	6	2	2
14	4	7	3	8	1	7
15	2	9	10	8	6	2
16	5	8	2	6	9	10
17	7	8	7	1	8	1
18	6	9	1	8	9	1
19	1	5	8	8	10	6
20	3	2	7	9	4	1
21	1	6	7	9	10	1
22	10	8	4	4	9	9
23	6	2	9	3	8	5
24	2	1	1	6	5	10
25	1	9	3	10	8	3
DueDate	6					

Figura 2. Tabela de dados para execução dos algoritmos.

Para demonstrar os efeitos da temperatura (parâmetro  $\alpha$ ), uma primeira instancia foi executada, utilizando como parâmetros  $\alpha = 0.5$  e  $n = 3$ . A Figura 3 mostra um primeiro resultado desta execução, plotando a avaliação da solução aceita por cada iteração. Como se pode notar, no início do algoritmo, muitas soluções de piora são

aceitas, e aos poucos são aceitos, cada vez mais, apenas movimentos de melhora. Esta execução passou por 2141 iterações e a melhor solução encontrada possui avaliação na função objetivo igual a 20.

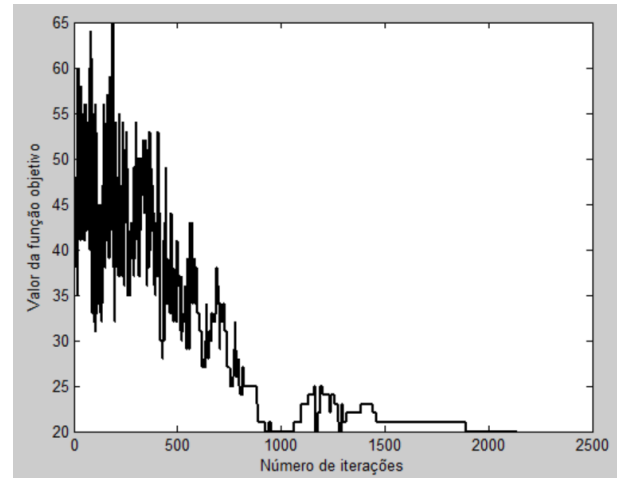


Figura 3. Primeiro resultado para execução com  $\alpha = 0.5$  e  $n = 3$ .

Executando mais uma vez, mas agora para  $\alpha = 0.1$  e  $n = 3$ , obtemos o resultado mostrado na Figura 4. Como se pode notar, agora menos movimentos de piora são aceitos nas iterações iniciais. Neste caso foram executadas 2488 iterações, com um valor ótimo igual a 14. Ao custo de mais iterações, obteve-se um ponto de ótimo local melhor.

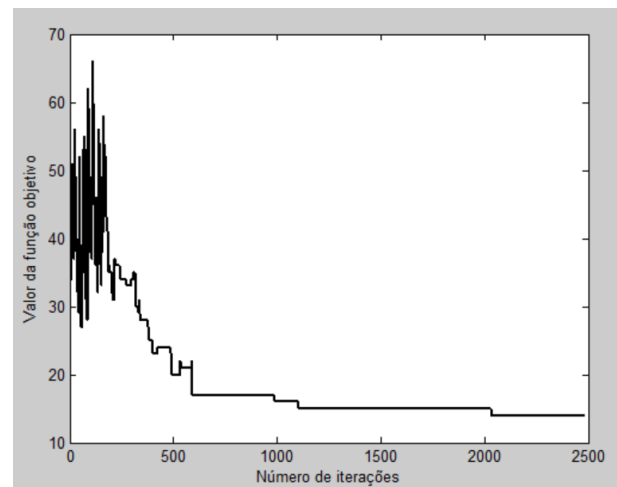


Figura 4. Primeiro resultado para execução com  $\alpha = 0.1$  e  $n = 3$ .

É necessário então escolher quais serão os parâmetros utilizados, e ainda qual será a função de vizinhança usada. Para tanto, um script de execução foi criado e está no arquivo `multirunTE.m`. Neste, o código é executado uma quantidade de vezes desejada, e os valores de ótimo e quantidade de iterações para cada execução são

plotados. Ajustando o algoritmo para  $\alpha = 0.5$  e  $n = 3$ , após 100 execuções obtemos o resultado mostrado na Figura 5. A linha preta no meio dos gráficos representa a média dos valores. Encontrou-se valor ótimo médio igual a 17,83 e valor médio da quantidade de iterações igual a 2209,1.

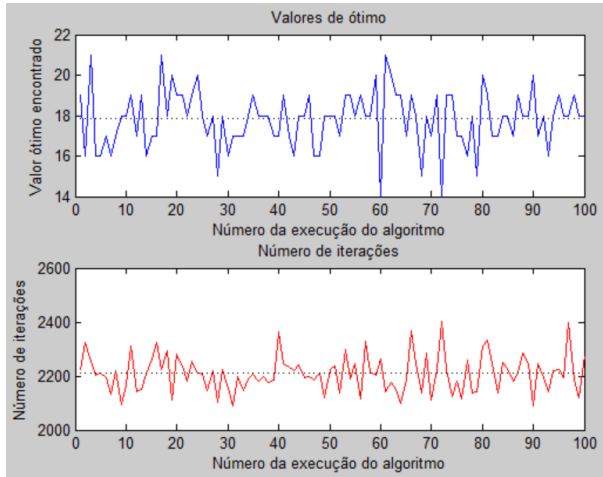


Figura 5. 100 execuções com  $\alpha = 0.5$  e  $n = 3$ .

Foi experimentado também a execução do algoritmo com  $\alpha = 0.1$  e  $\alpha = 0.01$ , ambos mantendo  $n = 3$ . Os resultados podem ser vistos nas Figuras 6 e 7, respectivamente. Para o primeiro caso, a média do valor ótimo foi 14,87 (com mínimo em 12 e máximo em 21) e a média da quantidade de iterações foi 2253,6 (com mínimo em 2001 e máximo em 2623). Para o segundo caso, a média do valor ótimo foi 15,95 (com mínimo em 13 e máximo em 19) e a média da quantidade de iterações foi 2509,4 (com mínimo em 2299 e máximo em 2581). Optou-se então por manter o algoritmo ajustado a  $\alpha = 0.1$ , por ter uma média de valor ótimo alcançado melhor.

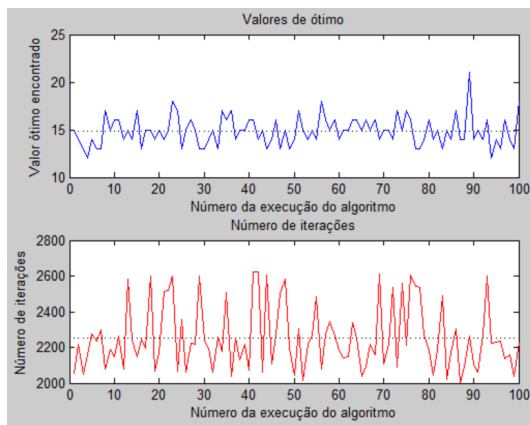


Figura 6. 100 execuções com  $\alpha = 0.1$  e  $n = 3$ .

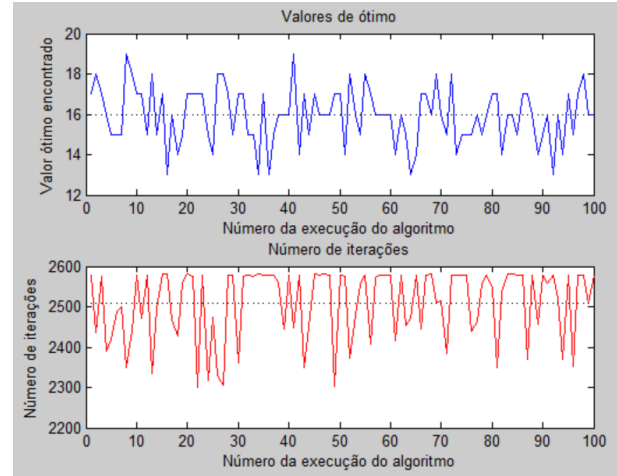


Figura 7. 100 execuções com  $\alpha = 0.01$  e  $n = 3$ .

Como todos estes resultados foram obtidos executando o algoritmo com a primeira forma de vizinhança (*neighborITE*), precisamos também decidir um valor para  $n$ . Mantendo  $\alpha = 0.1$ , *multirunTE.m* foi executado para  $n = 5$  e  $n = 1$ . Os resultados podem ser vistos nas Figuras 8 e 9, respectivamente. Para o primeiro caso, a média do valor ótimo foi 18,29 (com mínimo em 15 e máximo em 22) e a média da quantidade de iterações foi 2059 (com mínimo em 2044 e máximo em 2085). Para o segundo caso, a média do valor ótimo foi 14,77 (com mínimo em 12 e máximo em 20) e a média da quantidade de iterações foi 2260,8 (com mínimo em 2003 e máximo em 2622). Escolhemos então manter  $n = 1$ .

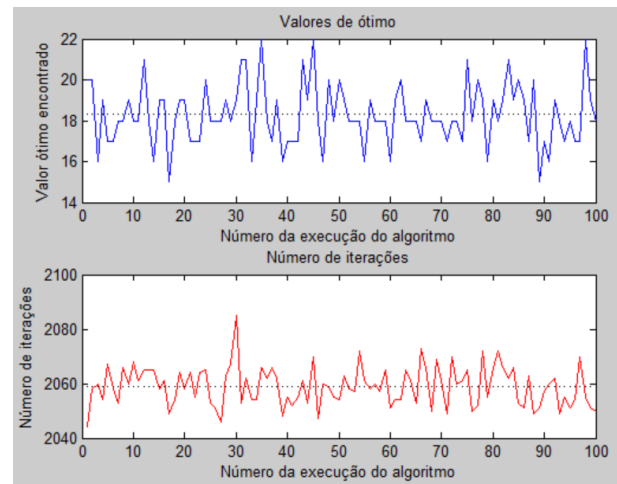


Figura 8. 100 execuções com  $\alpha = 0.1$  e  $n = 5$ .

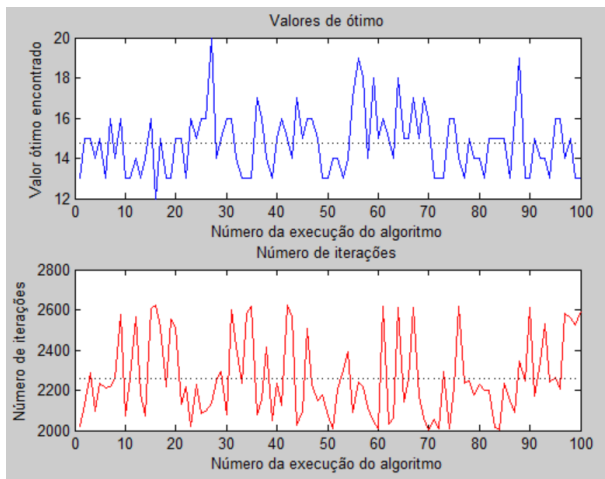


Figura 9. 100 execuções com  $\alpha = 0.1$  e  $n = 1$ .

Todos os resultados vistos até aqui foram com o algoritmo rodando apenas com a função de vizinhança *neighbor1TE*. Agora será incorporado ao algoritmo a função *neighbor2TE* de forma que os dois processos de vizinhança serão executados, um seguido do outro, para se alcançar maior região de busca. Com o auxílio do *multirunTE.m*, o código foi mais uma vez executado 100 vezes com  $\alpha = 0.1$  e  $n = 1$ , e os resultados podem ser vistos na Figura 10. A média do valor ótimo foi 14,12 (com mínimo em 12 e máximo em 16) e a média da quantidade de iterações foi 2356,5 (com mínimo em 2043 e máximo em 2568). O desempenho foi perceptivelmente melhorado, já que uma maior região de busca é considerada, e melhores ótimos locais são alcançados.

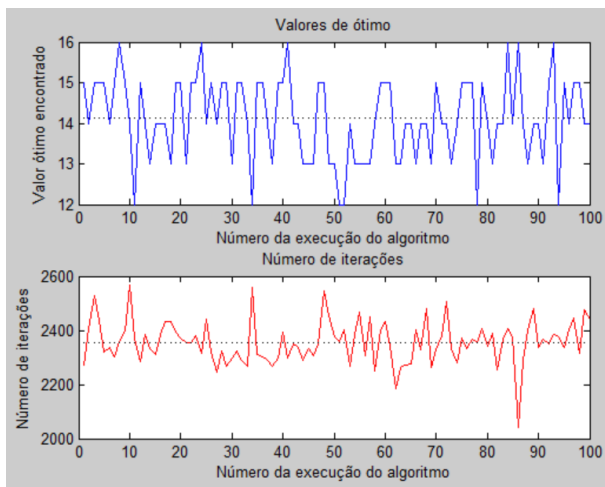


Figura 10. 100 execuções com  $\alpha = 0.1$ ,  $n = 1$  e vizinhança *neighbor2TE* adicionada ao código.

Com todos os ajustes feitos, o algoritmo foi executado

mais 5 vezes, e o resultado sumarizado pode ser visto na Figura 11. Os resultados numéricos são apresentados na Tabela 1.

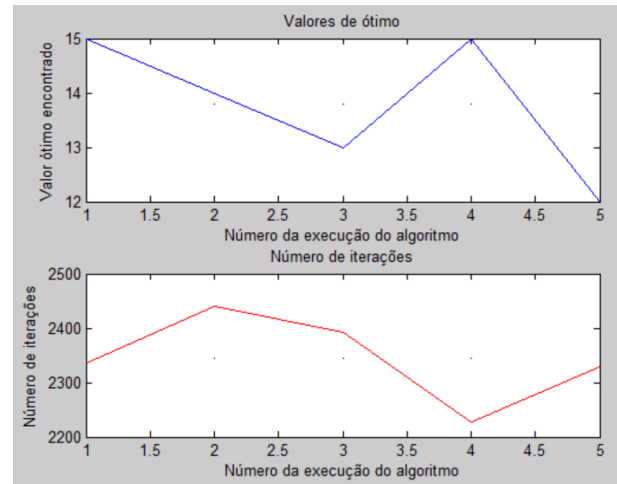


Figura 11. Resultado final para 5 iterações - Minimização do Tempo de Entrega.

Ótimo Encontrado	Iterações
15	2336
14	2440
13	2392
15	2228
12	2330

Tabela 1  
RESULTADOS NUMÉRICOS - MINIMIZAÇÃO DO TEMPO DE ENTREGA.

2) *Minimização da Soma Ponderada dos Atrasos e Adiantamentos*: Para este problema também é necessário fazer o ajuste do parâmetro de temperatura  $\alpha$ , que é o parâmetro de multiplicação do decaimento da temperatura, como já mencionado. Para ilustrar o efeito deste parâmetro no problema, executou-se uma vez com  $\alpha = 0.9$ . Vendo na Figura 12, é possível notar que as iterações iniciais do algoritmo permitem muitos movimentos de piora. Agora, se o algoritmo for executado com  $\alpha = 0.1$ , como pode ser visto na Figura 13, uma menor quantidade de movimentos de piora é aceita, já que a temperatura decai mais rapidamente.

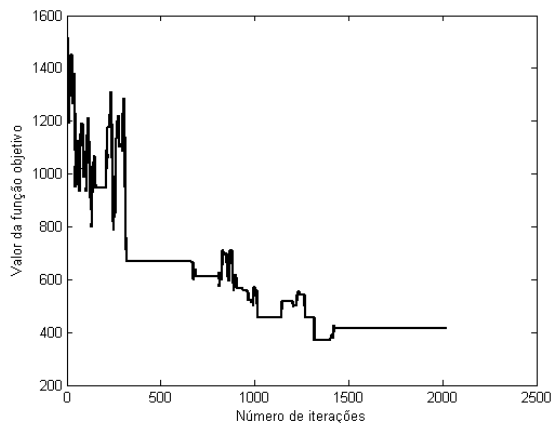


Figura 12. Primeiro resultado para execução com  $\alpha = 0.9$ .

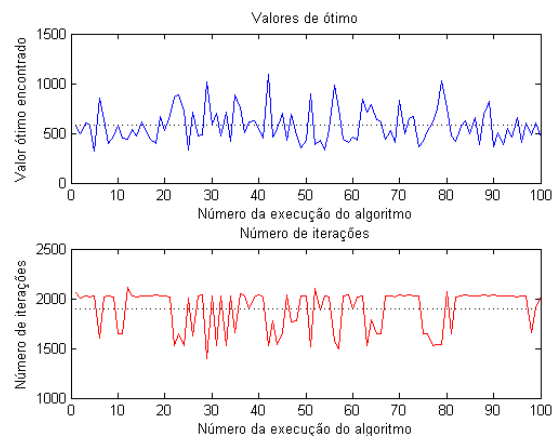


Figura 14. 100 execuções com  $\alpha = 0.1$ .

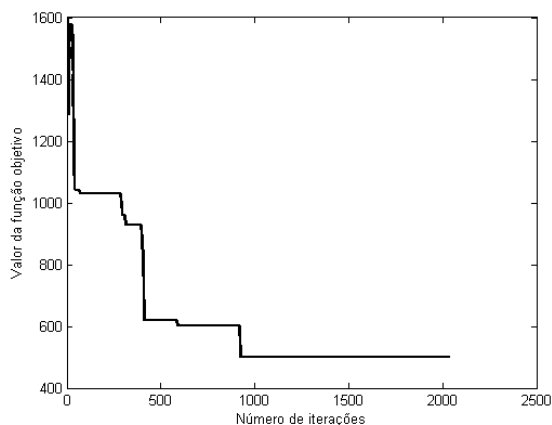


Figura 13. Primeiro resultado para execução com  $\alpha = 0.1$ .

Mais uma vez 100 execuções foram feitas, mas com  $\alpha = 0.0001$ . A Figura 15 ilustra os resultados. A média do valor ótimo foi 581,45 (com mínimo em 357 e máximo em 1068) e a média da quantidade de iterações foi 1941,2 (com mínimo em 1517 e máximo em 2116).

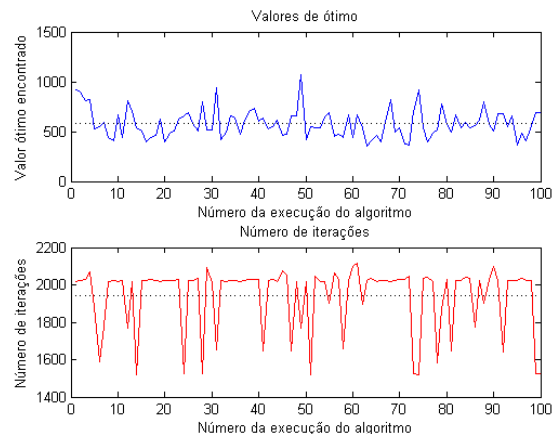


Figura 15. 100 execuções com  $\alpha = 0.0001$ .

Agora para escolher um ajuste de  $\alpha$ , o algoritmo de otimização do problema foi executado 100 vezes, com auxílio do script `multirunSPA.m` com  $\alpha = 0.1$ . O resultado das 100 execuções pode ser visto na Figura 14. A média do valor ótimo foi 580,2 (com mínimo em 321 e máximo em 1095) e a média da quantidade de iterações foi 1893 (com mínimo em 1397 e máximo em 2113).

Por último, 100 execuções foram feitas com  $\alpha = 0.9$ . A Figura 16 ilustra os resultados. A média do valor ótimo foi 495,6 (com mínimo em 308 e máximo em 786) e a média da quantidade de iterações foi 1895,8 (com mínimo em 910 e máximo em 2124). Com este ajuste de parâmetro, melhor média de valor ótimo foi alcançada, e ainda o teto do ótimo foi reduzido. Por isso, esta será adotada como parametrização final.



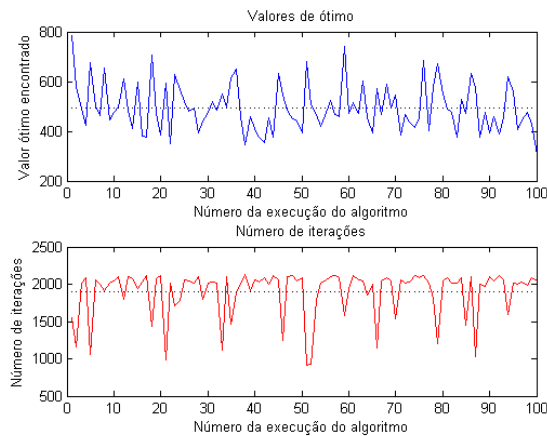


Figura 16. 100 execuções com  $\alpha = 0.9$ .

Com as decisões de parâmetros tomada, o algoritmo foi executado mais 5 vezes, e o resultado sumarizado pode ser visto na Figura 17. Os resultados numéricos são apresentados na Tabela 2.

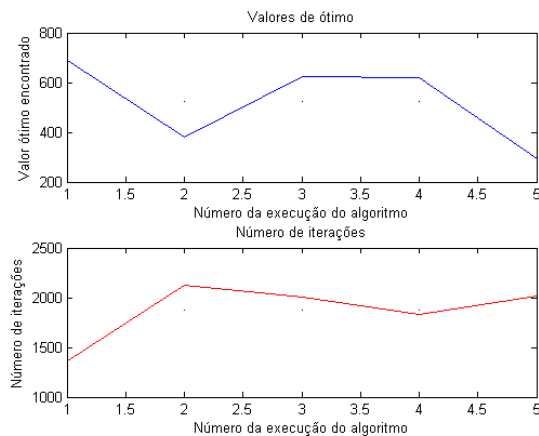


Figura 17. 5 execuções finais com  $\alpha = 0.9$ .

Ótimo Encontrado	Iterações
691	1359
381	2124
624	2010
619	1835
294	2020

Tabela II

RESULTADOS NUMÉRICOS - MINIMIZAÇÃO DA SOMA PONDERADA DOS ATRASOS E ADIANTAMENTOS.

3) *Otimização multiobjetivo - Soma ponderada*: Para a execução do algoritmo da Soma Ponderada, presente no arquivo `somaPonderada.m`, é preciso definir também o valor do parâmetro  $\alpha$ . Com o histórico das execuções

feitas até aqui, e por este ser um algoritmo baseado nos outros, de mesma estrutura e representações, foi decidido usar  $\alpha = 0,1$ . Com 100 execuções, variando-se os pesos das funções para se obter as soluções pareto-ótimas, obtém-se o resultado ilustrado na Figura 18. Como se pode notar, as soluções ficaram concentradas no meio do gráfico. Inclusive foi encontrado um ótimo com  $f1 = 14$  e  $f2$  a baixo de 400.

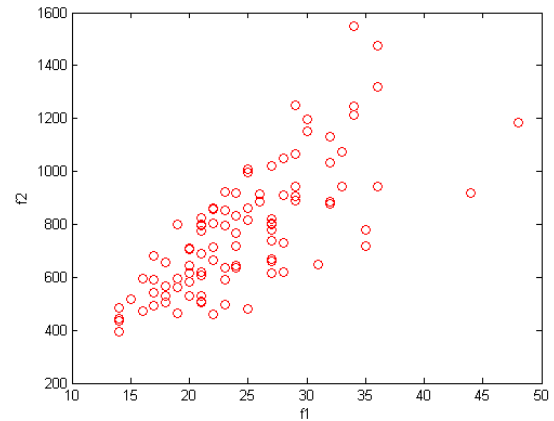


Figura 18. Resultado da execução da soma ponderada com  $\alpha = 0.1$ .

4) *Otimização multiobjetivo -  $\epsilon$ -restrito*: Assim como nos algoritmos anteriores, o algoritmo implementado para a solução utilizando a técnica do  $\epsilon$ -restrito precisa do parâmetro do decaimento de temperatura. A partir das execuções dos algoritmos anteriores e de testes feitos durante a implementação, concluiu-se que o melhor valor seria  $\alpha = 0.1$ .

Utilizando esse valor de  $\alpha$ , o script `epsilonRestrito.m` foi executado e o resultado pode ser visto a seguir.

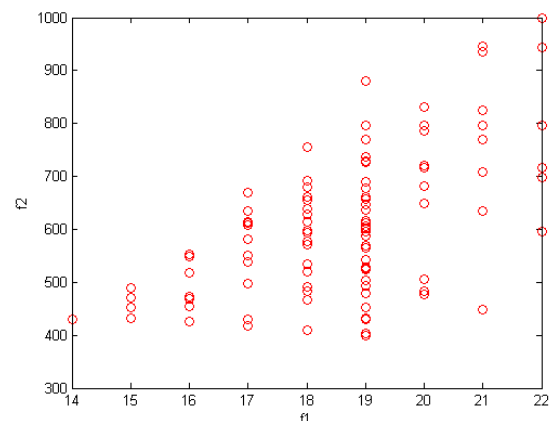


Figura 19. Soluções pareto-ótimas obtidas através do  $\epsilon$ -restrito

A partir do gráfico da figura 19 é possível verificar que a maior parte das soluções se concentrou em torno dos valores 18 e 19 para  $f_1$  (tempo total de entrega) e 500 para  $f_2$  (soma ponderada dos atrasos e adiantamentos). Esse resultado pode ser explicado pelo fato de terem sido utilizados valores de peso aleatórios, com distribuição normal, o que faz com que as soluções fiquem concentradas no centro da região das soluções pareto-ótimas. Ainda sim, foi obtida uma solução com valor 14 para  $f_1$  e em torno de 400 para  $f_2$ , o que pode ser considerado um bom resultado.

### III. CONCLUSÃO

Os métodos de otimização desenvolvidos neste trabalho foram sobretudo baseados no Simulated Annealing, que é um método de otimização não exato, contudo de fácil implementação e de desempenho satisfatório. É notável no decorrer do presente relatório que existem variações nas soluções encontradas. O Simulated Annealing é um ótimo método de estimação de bons ótimos locais, no entanto ele não garante o ótimo global. Levando tudo isto em consideração, conclui-se que os resultados obtidos foram satisfatórios, considerando-se o desempenho e a qualidade das soluções encontradas.

### REFERÊNCIAS

- [1] Notas de aula do professor Lucas Batista da disciplina *ELE088 Teoria da Decisão*. 2017.
- [2] ARENALES, Marcos et al. Pesquisa operacional: para cursos de engenharia. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007