

Teoria da Decisão

Projeto Prático Assistido Por Otimização Multiobjetivo e Métodos de Auxílio à Tomada de Decisão

Davi Pinheiro Viana

Rafael Carneiro de Castro

Vinícius Felicíssimo Campos

Eng. de Sistemas - UFMG
Matrícula: 2013029912

Eng. de Sistemas - UFMG
Matrícula: 2013030210

Eng. de Controle e Automação - UFMG
Matrícula: 2015035235

Email: daviviana22@gmail.com

Email: rafaelcarneiroget@hotmail.com

Email: viniciusfc95@gmail.com

Resumo—Abordagem de forma conjunta de grande parte dos conceitos vistos na disciplina "ELE088 - Teoria da Decisão", através de um problema relacionado ao gerenciamento ótimo da política de manutenção de um conjunto de equipamentos de uma empresa. O problema foi resolvido através de modelagem e implementação multiobjetivo e, para verificar a resolução do problema, é apresentado um indicador de qualidade. Além disso, foram utilizados alguns métodos de auxílio à tomada de decisão.

I. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem o objetivo de resolver um problema de otimização multiobjetivo e, utilizando técnicas escalares de decisão assistida estudadas em sala de aula, encontrar a melhor solução para este problema, colocando em prática grande parte dos conceitos da matéria.

O problema a ser resolvido é o seguinte: *Deseja-se determinar a política de manutenção ótima para cada um dos 500 equipamentos de uma empresa, considerando-se a minimização do custo de manutenção e a minimização do custo de falha esperado.*

No problema, o custo de manutenção total é a soma dos custos dos planos de manutenção adotados para todos os equipamentos. Sendo que, o valor do custo de cada plano de manutenção é dado. O custo esperado de falha de cada equipamento i , sob o plano de manutenção j , é o produto da probabilidade de falha ($p_{i,j}$) e o custo de falha do equipamento (este último é dado). O custo esperado de falha total é a soma dos custos esperados de falha de todos os equipamentos.

Deve ser feita a formulação e resolução do problema multiobjetivo e o resultado encontrado deve ser avaliado baseado no indicador de qualidade hipervolume (s-metric). Esse indicador é utilizado para mensurar as propriedades de convergência e diversidade da fronteira Pareto "aproximada" obtida.

Além disso, foram aplicadas as técnicas de auxílio à tomada de decisão ELECTRE II, PROMETHEE II *fuzzy* e AHP para obter a melhor solução dentre as encontradas para o problema.

II. DESENVOLVIMENTO

A. Formulação do Problema:

A formulação do problema foi dividida em duas partes, como é discutido a seguir:

1) *Minimização do custo de manutenção total*: Em primeiro momento, é preciso construir uma função objetivo e suas eventuais restrições para minimização do custo de manutenção total. Considerando $C_{m_i}(x_i)$ como o custo de manutenção do equipamento i em função do plano de manutenção x_i , têm-se a seguinte formulação:

$$\min \sum_{i=1}^n C_{m_i}(x_i) \quad (1)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (2)$$

$$C_{m_i} \in \mathcal{C}_m \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (3)$$

Em que n é o número de equipamentos que, no caso do problema a ser resolvido, é igual a 500. A equação 1 representa o custo de manutenção total que é o somatório dos custos de manutenção de cada equipamento i . A restrição 2 indica que cada equipamento i pode ter um plano de manutenção x_i que esteja dentro do conjunto \mathcal{X} de planos pré-definidos, no caso do problema, $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$. A restrição 3 indica que o custo de manutenção de cada equipamento também deve estar dentro de um conjunto pré-definido \mathcal{C}_m , sendo que o valor depende do plano de manutenção.

2) Minimização do custo esperado de falha total:

Agora, uma função objetivo para tratar a minimização do custo esperado de falha total é formulada. Considerando $C_{f_i}(x_i)$ como o custo de falha do equipamento i em função do plano de manutenção x_i , têm-se a seguinte formulação:

$$C_{f_i} = p_{i,x_i} \cdot c_{f_i} \quad (4)$$

Onde p_{i,x_i} é a probabilidade de falha de um equipamento i , sob o plano de manutenção x_i , até um dado horizonte de planejamento da manutenção Δt . Ela é estimada pela equação 5 que determina a probabilidade de falha de um equipamento até Δt dado que ele não falhou até a data atual (t_0). No caso do problema, será utilizado $\Delta t = 5$ anos.

$$p_{i,x_i} = \frac{F_i(t_0 + x_i \Delta t) - F_i(t_0)}{1 - F_i(t_0)} \quad (5)$$

Em que:

$$F_i(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta_i} \right)^{\beta_i} \right] \quad (6)$$

Os parâmetros η , β dependem também do plano de manutenção i e são dados. Com isso, têm-se o seguinte modelo:

$$\min \sum_{i=1, n} C_{f_i}(x_i) \quad (7)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (8)$$

$$c_{f_i} \in \mathcal{C}_f \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\beta_i \in \mathcal{B} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (10)$$

$$\eta_i \in \mathcal{N} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (11)$$

Em que n é o número de equipamentos que, no caso do problema a ser resolvido, é igual a 500. A equação 7 representa o custo esperado de falha total que é o somatório dos custos esperados de falha de cada equipamento i . A restrição 8 indica que cada equipamento i pode ter um plano de manutenção x_i que esteja dentro do conjunto \mathcal{X} de planos pré-definidos, no caso do problema, $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$. As restrições 9, 10 e 11 indicam, respectivamente que c_{f_i} , β_i , η_i devem estar dentro de conjuntos pré-definidos, sendo que o valor depende do plano de manutenção.

3) *Minimização de ambos os custos*: O problema a ser resolvido envolve a minimização do custo de manutenção total e também do custo de falha total, logo, é necessária a formulação de um problema biobjetivo para o problema. Para a formulação, foi escolhido o método *Soma Ponderada*. Nele, a função biobjetivo é formada por uma

soma das funções objetivos anteriores, sendo cada uma multiplicada por um peso. A variação desses pesos é que faz com que a fronteira Pareto seja formada. Esse método foi escolhido por ser de fácil implementação. Com isso, a formulação do problema biobjetivo é a seguinte:

$$\min w_1 \cdot \sum_{i=1, n} C_{m_i}(x_i) + w_2 \cdot \sum_{i=1, n} C_{f_i}(x_i) \quad (12)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (13)$$

$$c_{f_i} \in \mathcal{C}_f \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (14)$$

$$\beta_i \in \mathcal{B} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\eta_i \in \mathcal{N} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (16)$$

B. Algoritmo de Solução:

Nesta seção serão discutidos e exibidos os algoritmos para solução do problema multiobjetivo.

Olhando para a equação 12 é possível perceber que, minimizando o custo de cada equipamento, minimiza-se também o somatório dos custos. Assim, para resolução do problema biobjetivo foi utilizada uma estratégia gulosa. Nela, para cada equipamento, é feito um teste com cada um dos planos de manutenção e é escolhido aquele que gera menor custo. Têm-se então, um algoritmo cuja complexidade é $O(n \cdot m)$ em que n é o número de equipamentos e m é o número de planos de manutenção. No caso do problema a ser resolvido no trabalho, para cada par de pesos escolhido (encontrar solução da fronteira Pareto), são feitas 1500 avaliações da função objetivo. Segue, abaixo, um pseudocódigo do funcionamento do algoritmo:

Algorithm 1 Estratégia gulosa

```

1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:    $cBest = w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_1) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_1)$ 
3:    $x_i = \mathcal{X}_1$ 
4:   for  $j = 2$  to  $m$  do
5:     if  $(w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_j) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_j)) < cBest$  then
6:        $cBest = w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_j) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_j)$ 
7:        $x_i = \mathcal{X}_j$ 
8:     end if
9:   end for
10: end for
```

Essa estratégia foi escolhida por ser simples de implementar e por retornar uma solução exata para o problema. Além disso, é uma solução relativamente barata computacionalmente e que retorna o resultado rapidamente.

O algoritmo que utiliza a estratégia gulosa para resolver a função objetivo pode ser encontrado no arquivo *Guloso.m* e o algoritmo que implementa a *Soma Ponderada* variando os pesos da função objetivo pode ser

encontrado no arquivo *SomaPonderada.m*, ambos no mesmo diretório deste relatório.

C. Resultados:

Os algoritmos foram implementados e, na *Soma Ponderada*, foram encontradas 1000 soluções na fronteira Pareto, variando os pesos da seguinte forma: w_1 varia de 0 a 1 com o passo igual a 0,001 e $w_2 = 1 - w_1$. Foi encontrada a seguinte fronteira Pareto:

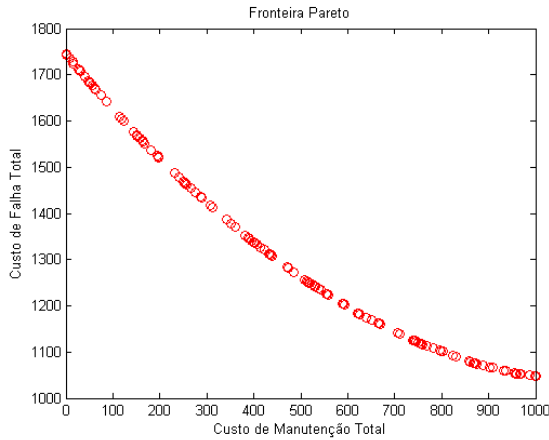


Figura 1. Fronteira Pareto encontrada

D. Análise baseada no Hipervolume:

Com o objetivo de avaliar a Fronteira Pareto encontrada, foi utilizada a análise baseada no indicador de qualidade hipervolume (s-metric). Segundo a especificação do trabalho, um bom valor para o HVI (Valor do Hipervolume) deveria estar acima de 0,6. Utilizando o algoritmo fornecido pelo professor, foi feita uma execução com a Fronteira Pareto encontrada e o valor de HVI foi igual a 0,621246. Conclui-se, então, que a fronteira encontrada convergiu para uma quantidade boa de soluções e que pode ser utilizada na análise de tomada de decisão da melhor solução.

III. TOMADA DE DECISÃO ASSISTIDA:

A. Electre II:

B. Promethee II Fuzzy:

Conforme estudado em sala de aula, o método Promethee II se baseia na comparação da avaliação de alternativas nos critérios tomando como base uma função de generalização de critérios. No caso deste trabalho, escolheu-se utilizar o Critério Usual, uma função que retorna 1 caso $c_j(a_i) - c_j(a_k) > 0$, ou seja, caso a avaliação no critério c_j de a_i seja melhor que a avaliação a_k no critérios c_j , por ser uma generalização de critérios mais intuitiva. Como no problema em estudo os critérios de custos são melhores quanto menor for o

valor, apenas precisamos adaptar o Critério Usual para retornar 1 quando $custo(a_k) - custo(a_i) > 0$. Assim, cria-se as matrizes P_j com a comparação par a par de todas as alternativas da fronteira Pareto em cada um dos dois critérios, preenchendo com os resultados da generalização de critérios de cada par. Agora, a matriz P , que será útil para os cálculos de fluxos de preferências entre as alternativas, é calculada a partir da relação:

$$P(a_i, a_k) = \frac{\sum_{j=1}^2 w_j \cdot P_j(a_i, a_k)}{\sum_{j=1}^2 w_j} \quad (17)$$

Muito se discute na literatura sobre formas nebulosas de se implementar o Promethee II. Uma das possíveis abordagens, e que se encaixa no problema em questão, é utilizar os pesos dos critérios como números nebulosos, representando a imprecisão do decisor em escolher pesos para cada critério. Assim, os valores de w_i no somatória do denominador da relação são números nebulosos.

Por fim, o fluxo de preferência em cada alternativa é calculado pela subtração entre o fluxo que entra no nó de uma alternativa e o fluxo que sai do nó dessa alternativa. Uma alternativa sobreclassifica outra se o seu fluxo de preferência for maior. Elas são indiferentes entre si se possuem o mesmo fluxo. Toda esta lógica do Promethee II fuzzy pode ser vista no arquivo *FPrometheeII.m*. O arquivo cria uma matriz de sobreclassificação, que vai ter o número 1 em uma célula caso a alternativa daquela linha sobreclassifique a alternativa da coluna, 0 caso sejam indiferentes, e -1 caso a alternativa da coluna sobreclassifique a da linha. As alternativas que mais sobreclassificam outras alternativas são tidas então como as melhores opções. No problema estudado, segundo o algoritmo do Promethee II fuzzy, as melhores alternativas possuem custo de manutenção total igual a 1000 e custo esperado de falha total igual a 1048.2, considerando os respectivos pesos igual a 0.7 e 0.3.

C. AHP:

O método AHP utilizado aqui é o mesmo que o estudado em sala de aula. Para tanto, escolheu-se 5 soluções da fronteira de Pareto encontrada na otimização biobjetivo. Chamaremos aqui de $c1$ (critério 1) o custo de manutenção total, e de $c2$ (critério 2) o custo esperado de falha total. Os valores destes critérios para as 5 soluções escolhidas podem ser vistos na Tabela I.

Alternativa	c1	c2
a1	1000	1048,2
a2	622	1184,3
a3	396	1340,9
a4	40	1695,3
a5	0	1745,5

Tabela I

AVALIAÇÃO DAS ALTERNATIVAS NOS CRITÉRIOS.

Alternativa	Prioridade Final
a1	0.3156
a2	0.1845
a3	0.1374
a4	0.1407
a5	0.2218

Tabela IV

PRIORIDADES CRITÉRIO 2.

Agora, para a definição das prioridades de cada alternativa em cada critério, faz-se as tabelas de prioridade dando notas às alternativas. Para o primeiro critério, a tabela construída é a Tabela II. Para o segundo critério, a tabela construída é a Tabela III.

c1	a1	a2	a3	a4	a5	Priorid.
a1	1	0.333	0.2	0.143	0.111	0.0348
a2	3	1	0.333	0.2	0.143	0.0678
a3	5	3	1	0.333	0.2	0.1343
a4	7	5	3	1	0.333	0.2602
a5	9	7	5	3	1	0.5028

Tabela II

PRIORIDADES CRITÉRIO 1.

c1	a1	a2	a3	a4	a5	Priorid.
a1	1	3	5	8	9	0.5029
a2	0.333	1	3	6	7	0.2623
a3	0.2	0.333	1	4	5	0.1395
a4	0.125	0.167	0.25	1	3	0.0610
a5	0.111	0.143	0.2	0.333	1	0.0344

Tabela III

PRIORIDADES CRITÉRIO 2.

Como visto em sala de aula, as prioridades são calculadas a partir da normalização dos termos nas colunas, tirando a média de cada linha. Agora escolhendo o peso do custo de manutenção total como sendo 0.4 e o peso do custo esperado de falha total como sendo 0.6 (consideramos que o custo de falha tem maior impacto), para cada alternativa basta multiplicar pelos pesos dos critérios cada uma de suas prioridades e somar, comparando assim o resultado obtido para todas:

$$p_i = \sum_{j=1}^2 w_j \cdot P_{ij} \quad (18)$$

O código do arquivo `AHP.m` lê as matrizes de prioridade dos arquivos `AHPcritério1.csv` e `AHPcritério2.csv`, faz os cálculos de prioridade apresentados e calcula o somatório para as comparações finais. Este somatório para cada alternativa pode ser visto na Tabela IV.

Como se pode notar, para os pesos escolhidos para os dois critérios, a alternativa 1 se mostrou a mais promissora, mas a alternativa 5 também está próxima desta. Um ajuste dos pesos poderia trazer um resultado final diferente.

IV. CONCLUSÃO:

Estratégias de decisão multiobjetivo são ferramentas muito úteis e poderosas para a tomada de decisões. Muitas abordagens e formulações podem ser seguidas, e concluímos que atingimos de forma satisfatória os objetivos buscados com a abordagem apresentada para o problema discutido. Obstáculos foram encontrados sobretudo na definição de métodos para a soluções do problema de otimização multiobjetivo, mas todos estes obstáculos foram superados para se chegar ao resultado final.

REFERÊNCIAS

- [1] Notas de aula do professor Lucas Batista da disciplina *ELE088 Teoria da Decisão*. 2017.
- [2] ARENALES, Marcos et al. Pesquisa operacional: para cursos de engenharia. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007