

# Teoria da Decisão

## Projeto Prático Assistido Por Otimização Multiobjetivo e Métodos de Auxílio à Tomada de Decisão

Davi Pinheiro Viana

Rafael Carneiro de Castro

Vinícius Felicíssimo Campos

Eng. de Sistemas - UFMG  
Matrícula: 2013029912

Eng. de Sistemas - UFMG  
Matrícula: 2013030210

Eng. de Controle e Automação - UFMG  
Matrícula: 2015035235

Email: daviviana22@gmail.com

Email: rafaelcarneiroget@hotmail.com

Email: viniciusfc95@gmail.com

**Resumo**—Abordagem de forma conjunta de grande parte dos conceitos vistos na disciplina "ELE088 - Teoria da Decisão", através de um problema relacionado ao gerenciamento ótimo da política de manutenção de um conjunto de equipamentos de uma empresa. O problema foi resolvido através de modelagem e implementação multiobjetivo e, para verificar a resolução do problema, é apresentado um indicador de qualidade. Além disso, foram utilizados alguns métodos de auxílio à tomada de decisão.

### I. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem o objetivo de resolver um problema de otimização multiobjetivo e, utilizando técnicas escalares de decisão assistida estudadas em sala de aula, encontrar a melhor solução para este problema, colocando em prática grande parte dos conceitos da matéria.

O problema a ser resolvido é o seguinte: *Deseja-se determinar a política de manutenção ótima para cada um dos 500 equipamentos de uma empresa, considerando-se a minimização do custo de manutenção e a minimização do custo de falha esperado.*

No problema, o custo de manutenção total é a soma dos custos dos planos de manutenção adotados para todos os equipamentos. Sendo que, o valor do custo de cada plano de manutenção é dado. O custo esperado de falha de cada equipamento  $i$ , sob o plano de manutenção  $j$ , é o produto da probabilidade de falha ( $p_{i,j}$ ) e o custo de falha do equipamento (este último é dado). O custo esperado de falha total é a soma dos custos esperados de falha de todos os equipamentos.

Deve ser feita a formulação e resolução do problema multiobjetivo e o resultado encontrado deve ser avaliado baseado no indicador de qualidade hipervolume (s-metric). Esse indicador é utilizado para mensurar as propriedades de convergência e diversidade da fronteira Pareto "aproximada" obtida.

Além disso, foram aplicadas as técnicas de auxílio à tomada de decisão ELECTRE II, PROMETHEE II *fuzzy* e AHP para obter a melhor solução dentre as encontradas para o problema.

### II. DESENVOLVIMENTO

#### A. Formulação do Problema:

A formulação do problema foi dividida em duas partes, como é discutido a seguir:

1) *Minimização do custo de manutenção total*: Em primeiro momento, é preciso construir uma função objetivo e suas eventuais restrições para minimização do custo de manutenção total. Considerando  $C_{m_i}(x_i)$  como o custo de manutenção do equipamento  $i$  em função do plano de manutenção  $x_i$ , têm-se a seguinte formulação:

$$\min \sum_{i=1}^n C_{m_i}(x_i) \quad (1)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (2)$$

$$C_{m_i} \in \mathcal{C}_m \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (3)$$

Em que  $n$  é o número de equipamentos que, no caso do problema a ser resolvido, é igual a 500. A equação 1 representa o custo de manutenção total que é o somatório dos custos de manutenção de cada equipamento  $i$ . A restrição 2 indica que cada equipamento  $i$  pode ter um plano de manutenção  $x_i$  que esteja dentro do conjunto  $\mathcal{X}$  de planos pré-definidos, no caso do problema,  $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ . A restrição 3 indica que o custo de manutenção de cada equipamento também deve estar dentro de um conjunto pré-definido  $\mathcal{C}_m$ , sendo que o valor depende do plano de manutenção.

## 2) Minimização do custo esperado de falha total:

Agora, uma função objetivo para tratar a minimização do custo esperado de falha total é formulada. Considerando  $C_{f_i}(x_i)$  como o custo de falha do equipamento  $i$  em função do plano de manutenção  $x_i$ , têm-se a seguinte formulação:

$$C_{f_i} = p_{i,x_i} \cdot c_{f_i} \quad (4)$$

Onde  $p_{i,x_i}$  é a probabilidade de falha de um equipamento  $i$ , sob o plano de manutenção  $x_i$ , até um dado horizonte de planejamento da manutenção  $\Delta t$ . Ela é estimada pela equação 5 que determina a probabilidade de falha de um equipamento até  $\Delta t$  dado que ele não falhou até a data atual ( $t_0$ ). No caso do problema, será utilizado  $\Delta t = 5$  anos.

$$p_{i,x_i} = \frac{F_i(t_0 + x_i \Delta t) - F_i(t_0)}{1 - F_i(t_0)} \quad (5)$$

Em que:

$$F_i(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_i} \right)^{\beta_i} \right] \quad (6)$$

Os parâmetros  $\eta$ ,  $\beta$  dependem também do plano de manutenção  $i$  e são dados. Com isso, têm-se o seguinte modelo:

$$\min \sum_{i=1, n} C_{f_i}(x_i) \quad (7)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (8)$$

$$c_{f_i} \in \mathcal{C}_f \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\beta_i \in \mathcal{B} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (10)$$

$$\eta_i \in \mathcal{N} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (11)$$

Em que  $n$  é o número de equipamentos que, no caso do problema a ser resolvido, é igual a 500. A equação 7 representa o custo esperado de falha total que é o somatório dos custos esperados de falha de cada equipamento  $i$ . A restrição 8 indica que cada equipamento  $i$  pode ter um plano de manutenção  $x_i$  que esteja dentro do conjunto  $\mathcal{X}$  de planos pré-definidos, no caso do problema,  $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ . As restrições 9, 10 e 11 indicam, respectivamente que  $c_{f_i}$ ,  $\beta_i$ ,  $\eta_i$  devem estar dentro de conjuntos pré-definidos, sendo que o valor depende do plano de manutenção.

3) *Minimização de ambos os custos*: O problema a ser resolvido envolve a minimização do custo de manutenção total e também do custo de falha total, logo, é necessária a formulação de um problema biobjetivo para o problema. Para a formulação, foi escolhido o método *Soma Ponderada*. Nele, a função biobjetivo é formada por uma

soma das funções objetivos anteriores, sendo cada uma multiplicada por um peso. A variação desses pesos é que faz com que a fronteira Pareto seja formada. Esse método foi escolhido por ser de fácil implementação. Com isso, a formulação do problema biobjetivo é a seguinte:

$$\min w_1 \cdot \sum_{i=1, n} C_{m_i}(x_i) + w_2 \cdot \sum_{i=1, n} C_{f_i}(x_i) \quad (12)$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (13)$$

$$c_{f_i} \in \mathcal{C}_f \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (14)$$

$$\beta_i \in \mathcal{B} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\eta_i \in \mathcal{N} \quad \forall i \in 1, \dots, n \quad (16)$$

## B. Algoritmo de Solução:

Nesta seção serão discutidos e exibidos os algoritmos para solução do problema multiobjetivo.

Olhando para a equação 12 é possível perceber que, minimizando o custo de cada equipamento, minimiza-se também o somatório dos custos. Assim, para resolução do problema biobjetivo foi utilizada uma estratégia gulosa. Nela, para cada equipamento, é feito um teste com cada um dos planos de manutenção e é escolhido aquele que gera menor custo. Têm-se então, um algoritmo cuja complexidade é  $O(n \cdot m)$  em que  $n$  é o número de equipamentos e  $m$  é o número de planos de manutenção. No caso do problema a ser resolvido no trabalho, para cada par de pesos escolhido (encontrar solução da fronteira Pareto), são feitas 1500 avaliações da função objetivo. Segue, abaixo, um pseudocódigo do funcionamento do algoritmo:

---

### Algorithm 1 Estratégia gulosa

---

```

1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:    $cBest = w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_1) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_1)$ 
3:    $x_i = \mathcal{X}_1$ 
4:   for  $j = 2$  to  $m$  do
5:     if  $(w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_j) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_j)) < cBest$  then
6:        $cBest = w_1 \cdot c_m(\mathcal{X}_j) + w_2 \cdot c_f(\mathcal{X}_j)$ 
7:        $x_i = \mathcal{X}_j$ 
8:     end if
9:   end for
10: end for
```

---

Essa estratégia foi escolhida por ser simples de implementar e por retornar uma solução exata para o problema. Além disso, é uma solução relativamente barata computacionalmente e que retorna o resultado rapidamente.

O algoritmo que utiliza a estratégia gulosa para resolver a função objetivo pode ser encontrado no arquivo *Guloso.m* e o algoritmo que implementa a *Soma Ponderada* variando os pesos da função objetivo pode ser

encontrado no arquivo *SomaPonderada.m*, ambos no mesmo diretório deste relatório.

### C. Resultados:

Os algoritmos foram implementados e, na *Soma Ponderada*, foram encontradas 1000 soluções na fronteira Pareto, variando os pesos da seguinte forma:  $w_1$  varia de 0 a 1 com o passo igual a 0,001 e  $w_2 = 1 - w_1$ . Foi encontrada a seguinte fronteira Pareto:

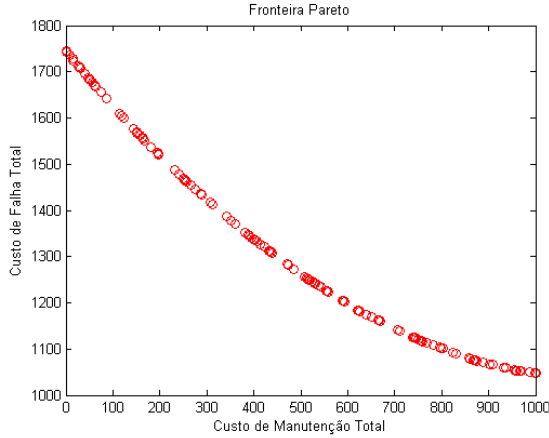


Figura 1. Fronteira Pareto encontrada

### D. Análise baseada no Hipervolume:

Com o objetivo de avaliar a Fronteira Pareto encontrada, foi utilizada a análise baseada no indicador de qualidade hipervolume (s-metric). Segundo a especificação do trabalho, um bom valor para o HVI (Valor do Hipervolume) deveria estar acima de 0,6. Utilizando o algoritmo fornecido pelo professor, foi feita uma execução com a Fronteira Pareto encontrada e o valor de HVI foi igual a 0,621246. Conclui-se, então, que a fronteira encontrada convergiu para uma quantidade boa de soluções e que pode ser utilizada na análise de tomada de decisão da melhor solução.

## III. TOMADA DE DECISÃO ASSISTIDA:

### A. Electre II

O método *Elimination and Choice Expressing the Reality* proposto por B. Roy em 1968, também conhecido por ELECTRE I, permite que se determine uma pré-ordem total de ações dado um conjunto de critérios. Este resultado é obtido após a execução de um número significativo de passos, a fim de se determinar as relações de sobreclassificação entre duas ações. Seguindo os mesmos princípios, o método ELECTRE II se diferencia do I ao definir duas relações de classificação, a forte e a fraca, e foi utilizado neste trabalho como um dos métodos de auxílio de tomada de decisão.

As ações a serem ordenadas são os planos de manutenção que compõem a fronteira Pareto obtida previamente. Os critérios são o menor custo de manutenção ( $c_1$ ) e o menor custo de falha esperado ( $c_2$ ). A partir destas definições, os seguintes passos foram executados:

- 1) *Ajustar a escala dos valores*: Os custos foram reescalados de forma que os máximos após o processo fossem iguais ao máximo valor inicial dentre ambos os critérios, e os mínimos, iguais a zero. Além disso, como deseja-se obter os menores valores possíveis, a escala foi invertida subtraindo cada valor do máximo.
- 2) *Definir os pesos  $w_j$  para cada um dos  $J = 1, \dots, n_c$  critérios*: Dois conjuntos de pesos foram considerados,  $w_1 = 0.7$  e  $w_2 = 0.3$  e vice-versa. Estes valores foram definidos de forma a representar dois tipos de decisor, aquele que prefere gastar menos agora com manutenção do que com as falhas prováveis no futuro e o seu oposto. Já aquele que não tem preferência neste sentido ( $w_1 = w_2 = 0.5$ ) não foi considerado pois o conjunto de planos apresenta a característica de que quanto melhor um critério, pior o outro, de forma a apresentar indiferença entre as soluções.

- 3) *Estabelecer comparações par a par gerando os seguintes índices*:

$$\begin{aligned} J^+(a_i, a_k) &= \{j \in J | c_j(a_i) > c_j(a_k)\} \\ J^=(a_i, a_k) &= \{j \in J | c_j(a_i) = c_j(a_k)\} \\ J^-(a_i, a_k) &= \{j \in J | c_j(a_i) < c_j(a_k)\} \end{aligned}$$

- 4) *Converter as relações entre as ações em valores numéricos*:

$$\begin{aligned} P^+(a_i, a_k) &= \sum_j w_j, j \in J^+(a_i, a_k) \\ P^=(a_i, a_k) &= \sum_j w_j, j \in J^=(a_i, a_k) \\ P^-(a_i, a_k) &= \sum_j w_j, j \in J^-(a_i, a_k) \end{aligned}$$

- 5) *Calcular os índices de concordância*:

$$C_{ik} = \frac{P^+(a_i, a_k) + P^-(a_i, a_k)}{\sum_{j \in J} w_j}$$

- 6) *Estabelecer as relações de sobreclassificação forte ( $S_s$ )*: Um plano fortemente sobreclassifica outro no critério  $j$  se

$$\begin{aligned} C_{ik} &\geq c^+ \\ \text{e } c_j(a_k) - c_j(a_i) &\leq D \\ \text{e } \frac{P_{ik}^+}{P_{ik}^-} &\geq 1 \end{aligned}$$

As constantes utilizadas neste passo foram determinadas analisando-se os valores de  $P_{ik}$ . São elas

$$\begin{aligned} c^+ &= 0.65 \\ D &= 0.75 * \max(c_1, c_2) \end{aligned}$$

- 7) *Estabelecer as relações de sobreclassificação fraca ( $S_w$ )*: Um plano fracamente sobreclassifica outro

no critério  $j$  se

$$\begin{aligned} C_{ik} &\leq c^- \\ \text{e } c_j(a_k) - c_j(a_i) &\leq D \\ \text{e } \frac{P_{ik}^+}{P_{ik}^-} &\geq 1 \end{aligned}$$

Sendo

$$c^- = 0.35$$

- 8) *Obter a ordem das soluções*: O processo de classificação original do ELECTRE II propõe duas etapas, a direta e a reversa. Entretanto, devido aos resultados obtidos nos itens anteriores, em que uma ação da matriz  $S_s$  sobreclassifica fortemente as ações seguintes e em que  $S_w$  está vazia, a ordenação foi obtida de forma direta. Isto é, a ordem foi estabelecida de acordo com o número de vezes que uma ação sobreclassifica fortemente as demais.

Após a execução destes passos, o ELECTRE II apresentou os seguintes resultados:

- Para  $w_1 = 0.7$  e  $w_2 = 0.3$ : Designar planos de manutenção detalhada para as máquinas 36, 204, 318 e 358, enquanto as demais podem ficar sem plano. O custo de manutenção desta alternativa é 8 e o custo de falha esperado é 1735.2.
- Para  $w_1 = 0.3$  e  $w_2 = 0.7$ : Designar planos de manutenção detalhada para todas as máquinas. O custo de manutenção desta alternativa é 1000 e o custo de falha esperado é 1048.2.

#### B. Promethee II Fuzzy

Conforme estudado em sala de aula, o método Promethee II se baseia na comparação da avaliação de alternativas nos critérios tomando como base uma função de generalização de critérios. No caso deste trabalho, escolheu-se utilizar o Critério Usual, uma função que retorna 1 caso  $c_j(a_i) - c_j(a_k) > 0$ , ou seja, caso a avaliação no critério  $c_j$  de  $a_i$  seja melhor que a avaliação  $a_k$  no critérios  $c_j$ , por ser uma generalização de critérios mais intuitiva. Como no problema em estudo os critérios de custos são melhores quanto menor for o valor, apenas precisamos adaptar o Critério Usual para retornar 1 quando  $custo(a_k) - custo(a_i) > 0$ . Assim, cria-se as matrizes  $P_j$  com a comparação par a par de todas as alternativas da fronteira Pareto em cada um dos dois critérios, preenchendo com os resultados da generalização de critérios de cada par. Agora, a matriz  $P$ , que será útil para os cálculos de fluxos de preferências entre as alternativas, é calculada a partir da relação:

$$P(a_i, a_k) = \frac{\sum_{j=1}^2 w_j \cdot P_j(a_i, a_k)}{\sum_{j=1}^2 w_j} \quad (17)$$

Muito se discute na literatura sobre formas nebulosas de se implementar o Promethee II. Uma das possíveis

abordagens, e que se encaixa no problema em questão, é utilizar os pesos dos critérios como números nebulosos, representando a imprecisão do decisor em escolher pesos para cada critério. Assim, os valores de  $w_i$  no somatório do denominador da relação são números nebulosos.

Por fim, o fluxo de preferência em cada alternativa é calculado pela subtração entre o fluxo que entra no nó de uma alternativa e o fluxo que sai do nó dessa alternativa. Uma alternativa sobreclassifica outra se o seu fluxo de preferência for maior. Elas são indiferentes entre si se possuem o mesmo fluxo. Toda esta lógica do Promethee II fuzzy pode ser vista no arquivo `FPrometheeII.m`. O arquivo cria uma matriz de sobreclassificação, que vai ter o número 1 em uma célula caso a alternativa daquela linha sobreclassifique a alternativa da coluna, 0 caso sejam indiferentes, e -1 caso a alternativa da coluna sobreclassifique a da linha. As alternativas que mais sobreclassificam outras alternativas são tidas então como as melhores opções. No problema estudado, segundo o algoritmo do Promethee II fuzzy, as melhores alternativas possuem custo de manutenção total igual a 1000 e custo esperado de falha total igual a 1048.2, considerando os respectivos pesos igual a 0.7 e 0.3.

#### C. AHP

O método AHP utilizado aqui é o mesmo que o estudado em sala de aula. Para tanto, escolheu-se 5 soluções da fronteira de Pareto encontrada na otimização biobjetivo. Chamaremos aqui de  $c1$  (critério 1) o custo de manutenção total, e de  $c2$  (critério 2) o custo esperado de falha total. Os valores destes critérios para as 5 soluções escolhidas podem ser vistos na Tabela I.

Alternativa	c1	c2
a1	1000	1048,2
a2	622	1184,3
a3	396	1340,9
a4	40	1695,3
a5	0	1745,5

Tabela I

AValiação das alternativas nos critérios.

Agora, para a definição das prioridades de cada alternativa em cada critério, faz-se as tabelas de prioridade dando notas às alternativas. Para o primeiro critério, a tabela construída é a Tabela II. Para o segundo critério, a tabela construída é a Tabela III.

Como visto em sala de aula, as prioridades são calculadas a partir da normalização dos termos nas colunas, tirando a média de cada linha. Agora escolhendo o peso do custo de manutenção total como sendo 0.4 e o peso do custo esperado de falha total como sendo 0.6 (consideramos que o custo de falha tem maior impacto), para cada alternativa basta multiplicar pelos pesos dos critérios

c1	a1	a2	a3	a4	a5	Prioridades
a1	1	0.333	0.2	0.143	0.111	0.0348
a2	3	1	0.333	0.2	0.143	0.0678
a3	5	3	1	0.333	0.2	0.1343
a4	7	5	3	1	0.333	0.2602
a4	9	7	5	3	1	0.5028

Tabela II  
PRIORIDADES CRITÉRIO 1.

c1	a1	a2	a3	a4	a5	Prioridades
a1	1	3	5	8	9	0.5029
a2	0.333	1	3	6	7	0.2623
a3	0.2	0.333	1	4	5	0.1395
a4	0.125	0.167	0.25	1	3	0.0610
a5	0.111	0.143	0.2	0.333	1	0.0344

Tabela III  
PRIORIDADES CRITÉRIO 2.

cada uma de suas prioridades e somar, comparando assim o resultado obtido para todas:

$$p_i = \sum_{j=1}^2 w_j \cdot P_{ij} \quad (18)$$

O código do arquivo `AHP.m` lê as matrizes de prioridade dos arquivos `AHPcritério1.csv` e `AHPcritério2.csv`, faz os cálculos de prioridade apresentados e calcula o somatório para as comparações finais. Este somatório para cada alternativa pode ser visto na Tabela IV.

Alternativa	Prioridade Final
a1	0.3156
a2	0.1845
a3	0.1374
a4	0.1407
a5	0.2218

Tabela IV  
PRIORIDADES CRITÉRIO 2.

Como se pode notar, para os pesos escolhidos para os dois critérios, a alternativa 1 se mostrou a mais promissora, mas a alternativa 5 também está próxima desta. Um ajuste dos pesos poderia trazer um resultado final diferente.

#### IV. CONCLUSÃO:

Estratégias de decisão multiobjetivo são ferramentas muito úteis e poderosas para a tomada de decisões. Muitas abordagens e formulações podem ser seguidas, e concluímos que atingimos de forma satisfatória os objetivos buscados com a abordagem apresentada para o problema discutido. Obstáculos foram encontrados sobretudo na definição de métodos para a soluções do

problema de otimização multiobjetivo, mas todos estes obstáculos foram superados para se chegar ao resultado final.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Notas de aula do professor Lucas Batista da disciplina *ELE088 Teoria da Decisão*. 2017.
- [2] ARENALES, Marcos et al. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007
- [3] COLLETTE, Yann [et al.], *Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies*, 1ªed. Berlin, Alemanha: Elsevier, 2003.