# Teoria da Decisão Projeto Prático Assistido Por Otimização Multiobjetivo e Métodos de Auxílio à Tomada de Decisão

Rafael Carneiro de Castro
Eng. de Sistemas - UFMG
Matrícula: 2013030210
Email: rafaelcarneiroget@hotmail.com

Vinícius Felicíssimo Campos
Eng. de Controle e Automação - UFMG
Matrícula: 2015035235
Email: viniciusfc95@gmail.com

Davi Pinheiro Viana
Eng. de Sistemas - UFMG
Matrícula: 2013029912
Email: daviviana22@gmail.com

***Resumo*—Abordagem de forma conjunta de grande parte dos conceitos vistos na disciplina "ELE088 - Teoria da Decisão", através de um problema relacionado ao gerenciamento ótimo da política de manutenção de um conjunto de equipamentos de uma empresa. O problema foi resolvido através de modelagem e implementação multiobjetivo e, para verificar a resolução do problema, é apresentado um indicador de qualidade. Além disso, foram utilizados alguns métodos de auxílio à tomada de decisão.**

## I. Introdução

O presente trabalho tem o objetivo de resolver um problema de otimização multiobjetivo e, utilizando técnicas escalares de decisão assistida estudadas em sala de aula, encontrar a melhor solução para este problema, colocando em prática grande parte dos conceitos da matéria.

O problema a ser resolvido é o seguinte: *Deseja-se determinar a política de manutenção ótima para cada um dos 500 equipamentos de uma empresa, considerando-se a minimização do custo de manutenção e a minimização do custo de falha esperado.*

No problema, o custo de manutenção total é a soma dos custos dos planos de manutenção adotados para todos os equipamentos. Sendo que, o valor do custo de cada plano de manutenção é dado. O custo esperado de falha de cada equipamento $i$, sob o plano de manutenção $j$, é o produto da probabilidade de falha ($p_{i,j}$) e o custo de falha do equipamento (este último é dado). O custo esperado de falha total é a soma dos custos esperados de falha de todos os equipamentos.

Deve ser feita a formulação e resolução do problema multiobjetivo e o resultado encontrado deve ser avaliado baseado no indicador de qualidade hipervolume (s-metric). Esse indicador é utilizado para mensurar as propriedades de convergência e diversidade da fronteira Pareto "aproximada"obtida.

Além disso, deve ser aplicada também a utilização de técnicas de análise de decisão ELECTRE II, PROMETHEE II *fuzzy* e AHP para decidir qual a melhor solução dentre as encontradas para o problema.

## II. Desenvolvimento

### A. Formulação do Problema:

A formulação do problema foi dividida em duas partes, como é discutido a seguir:

*1) Minimização do custo de manutenção total:* Em primeiro momento, é preciso construir uma função objetivo e suas eventuais restrições para minimização do custo de manutenção total. Considerando $C_{m_i}(x_i)$ como o custo de manutenção do equipamento $i$ em função do plano de manutenção $x_i$, têm-se a seguinte formulação:

$$\min \sum_{i=1,}^{n} C_{m_i}(x_i) \tag{1}$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{2}$$

$$C_{m_i} \in \mathcal{C}_m \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{3}$$

Em que $n$ é o número de equipamentos que, no caso do problema a ser resolvido, é igual a 500. A equação 1 representa o custo de manutenção total que é o somatório dos custos de manutenção de cada equipamento $i$. A restrição 2 indica que cada equipamento $i$ pode ter um plano de manutenção $x_i$ que esteja dentro do conjunto $\mathcal{X}$ de planos pré-definidos, no caso do problema, $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$. A restrição 3 indica que o custo de manutenção de cada equipamento também deve estar dentro de um conjunto pré-definido $\mathcal{C}_m$, sendo que o valor depende do plano de manutenção.

*2) Minimização do custo esperado de falha total:* Agora, uma função objetivo para tratar a minimização do custo esperado de falha total é formulada. Considerando $C_{f_i}(x_i)$ como o custo de falha do equipamento $i$ em função do plano de manutenção $x_i$, têm-se a seguinte formulação:

$$C_{f_i} = p_{i,x_i} \cdot c_{f_i} \tag{4}$$

Onde $p_{i,x_i}$ é a probabilidade de falha de um equipamento $i$, sob o plano de manutenção $x_i$, até um dado horizonte de planejamento da manutenção $\Delta t$. Ela é estimada pela equação 5 que determina a probabilidade de falha de um equipamento até $\Delta t$ dado que ele não falhou até a data atual ($t_0$). No caso do problema, será utilizado $\Delta t = 5$ anos.

$$p_{i,x_i} = \frac{F_i(t_0 + x_i \Delta t) - F_i(t_0)}{1 - F_i(t_0)} \tag{5}$$

Em que:

$$F_i(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right] \tag{6}$$

Os parâmetros $\eta$, $\beta$ dependem também do plano de manutenção $i$ e são dados. Com isso, têm-se o seguinte modelo:

$$\min \sum_{i=1,}^{n} C_{f_i}(x_i) \tag{7}$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{8}$$

$$c_{f_i} \in \mathcal{C}_f \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{9}$$

$$\beta_i \in \mathcal{B} \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{10}$$

$$\eta_i \in \mathcal{N} \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{11}$$

Em que $n$ é o número de equipamentos que, no caso do problema a ser resolvido, é igual a 500. A equação 7 representa o custo esperado de falha total que é o somatório dos custos esperados de falha de cada equipamento $i$. A restrição 8 indica que cada equipamento $i$ pode ter um plano de manutenção $x_i$ que esteja dentro do conjunto $\mathcal{X}$ de planos pré-definidos, no caso do problema, $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$. As restrições 9, 10 e 11 indicam, respectivamente que $c_{f_i}$, $\beta_i$, $\eta_i$ devem estar dentro de conjuntos pré-definidos, sendo que o valor depende do plano de manutenção.

*3) Minimização de ambos os custos:* O problema a ser resolvido envolve a minimização do custo de manutenção total *e também* do custo de falha total, logo, é necessária a formulação de um problema biobjetivo para o problema. Para a formulação, foi escolhido o método *Soma Ponderada*. Nele, a função biobjetivo é formada por uma soma das funções objetivos anteriores, sendo cada uma multiplicada por um peso. A variação desses pesos é que faz com que a fronteira Pareto seja formada. Esse método foi escolhido por ser de fácil implementação. Com isso, a formulação do problema biobjetivo é a seguinte:

$$\min \ w_1 \cdot \sum_{i=1,}^{n} C_{m_i}(x_i) + w_2 \cdot \sum_{i=1,}^{n} C_{f_i}(x_i) \tag{12}$$

sujeito a:

$$x_i \in \mathcal{X} \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{13}$$

$$c_{f_i} \in \mathcal{C}_f \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{14}$$

$$\beta_i \in \mathcal{B} \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{15}$$

$$\eta_i \in \mathcal{N} \ \forall i \ \in 1, ..., n \tag{16}$$

*B. Algoritmo de Solução:*

Nesta seção serão discutidos e exibidos os algoritmos para solução do problema multiobjetivo.

Olhando para a equação 12 é possível perceber que, minimizando o custo de cada equipamento, minimiza-se também o somatório dos custos. Assim, para resolução do problema biobjetivo foi utilizada uma estratégia gulosa. Nela, para cada equipamento, é feito um teste com cada um dos planos de manutenção e é escolhido aquele que gera menor custo. Têm-se então, um algoritmo cuja complexidade é O($n \cdot m$) em que $n$ é o número de equipamentos e $m$ é o número de planos de manutenção. No caso do problema a ser resolvido no trabalho, para cada par de pesos escolhido (encontrar solução da fronteira Pareto), são feitas 1500 avaliações da função objetivo. Segue, abaixo, um pseudocódigo do funcionamento do algoritmo:

**Algorithm 1** Estratégia gulosa

```
for i = 1 to n do
    cBest = w1 · c_m(X_1) + w2 · c_f(X_1)
    x_i = X_1
    for j = 2 to m do
        if (w1 · c_m(X_j) + w2 · c_f(X_j)) < cBest then
            cBest = w1 · c_m(X_j) + w2 · c_f(X_j)
            x_i = X_j
        end if
    end for
end for
```

Essa estratégia foi escolhida por ser simples de implementar e por retornar uma solução exata para o problema. Além disso, é uma solução relativamente barata computacionalmente e que retorna o resultado rapidamente.

O algoritmo que utiliza a estratégia gulosa para resolver a função objetivo pode ser encontrado no arquivo `Guloso.m` e o algoritmo que implementa a *Soma Ponderada* variando os pesos da função objetivo pode ser encontrado no arquivo `SomaPonderada.m`, ambos no mesmo diretório deste relatório.

### C. Resultados:

Os algoritmos foram implementados e, na *Soma Ponderada*, foram encontradas 1000 soluções na fronteira pareto, variando os pesos da seguinte forma: $w_1$ varia de 0 a 1 com o passo igual a $0,001$ e $w_2 = 1 - w_1$. Foi encontrada a seguinte fronteira Pareto:

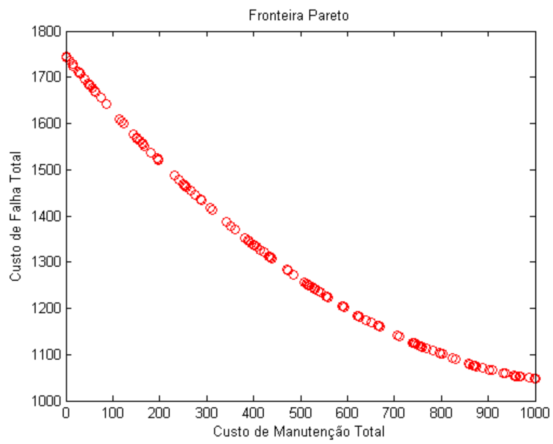


Figura 1. Froteira Pareto encontrada

### D. Análise baseada no Hipervolume:

Com o objetivo de avaliar a Fronteira Pareto encontrada, foi utilizada a análise baseada no indicador de qualidade hipervolume (s-metric). Segundo a especificação do trabalho, um bom valor para o HVI (Valor do Hipervolume) deveria estar acima de $0,6$. Utilizando o algoritmo fornecido pelo professor, foi feita uma execução com a Fronteira Pareto encontrada e o valor de HVI foi igual a $0,621246$. Conclui-se, então, que a fronteira encontrada convergiu para uma quantidade boa de soluções e que pode ser utilizada na análise de tomada de decisão da melhor solução.

## III. Tomada de Decisão Assistida:

### A. Electre II:

### B. Promethee II Fuzzy:

### C. AHP:

## IV. Conclusão

## Referências

[1] Notas de aula do professor Lucas Batista da disciplina *ELE088 Teoria da Decisão*. 2017.
[2] ARENALES, Marcos et al. Pesquisa operacional: para cursos de engenharia. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007