Глава 4

Мерки. Теореми на Жордан—Хан, Лебег и Радон—Никодим

С понятието „вероятностна мярка“ читателят е запознат от изложението в глава 1. Отличителни черти на вероятностните мерки са: а) те са нормирани ($\mathbf{P}(\Omega) = 1$) и б) те са неотрицателни ($\mathbf{P}(A) \geq 0$). Ще напомним, че за вероятностните мерки свойствата адитивност и непрекъснатост в нулата са еквивалентни на изброима адитивност. Именно последното свойство лежи в основата на общото понятие „мярка“.

Определение 4.1. Мярка μ в измеримото пространство $(\Omega, \mathfrak{F})$ се нарича всяка функция $\mu = \mu(A)$, дефинирана в σ-алгебрата $\mathfrak{F}$ и приемаща стойности в $(-\infty, +\infty]$, която удовлетворява условията:

$$\mu(\varnothing) = 0, \tag{4.1}$$

$$\mu\left(\sum_{j\in J} A_j\right) = \sum_{j\in J} \mu(A_j) \tag{4.2}$$

за всяко изброимо семейство $\{A_j, j \in J\} \subseteq \mathfrak{F}$ от непресичащи се ($A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$) подмножества на Ω.

Мярката μ се нарича положителна ($\mu \geq 0$), ако $\mu(A) \geq 0$, $A \in \mathfrak{F}$, и ограничена, ако $\sup\limits_{A\in\mathfrak{F}} |\mu(A)| < \infty$. Всяка положителна и нормирана ($\mu(\Omega) = 1$), а следователно и ограничена, мярка μ е вероятностна мярка в $(\Omega, \mathfrak{F})$.

В тази глава ще изложим три класически теореми, разкриващи структурата на всяка мярка и съотношенията (абсолютна непрекъснатост, сингулярност) между мерките, представляващи най-голям интерес за теорията на вероятностите.

Теорема 4.1 (Жордан—Хан)**.** *Нека μ е мярка в $(\Omega, \mathfrak{F})$. Тогава*

1) *Равенствата*

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B), B \subseteq A\},$$
$$\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B), B \subseteq A\}$$

дефинират две положителни мерки μ^+ *и* μ^- *в* $(\Omega, \mathfrak{F})$.

2) *Мярката* μ^- *е ограничена и* $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

3) *Съществува множество* $D \in \mathfrak{F}$ *такова, че*

   а) $\mu(A) \geq 0$ *за всяко* $A \subseteq D$,

   б) $\mu(A) \leq 0$ *за всяко* $A \subseteq \overline{D}$,

и следователно $\mu^+(A) = \mu(A \cap D)$, $\mu^-(A) = -\mu\left(A \cap \overline{D}\right)$, $A \in \mathfrak{F}$.

Доказателство. Доказателството ще разделим на няколко етапа с цел отделните моменти да бъдат подробно изяснени. Ключов момент в него е твърдението 3), свързано със съществуването на подходящо множество $D \in \mathfrak{F}$.

А. Дефинираме класа $\mathfrak{B} = \{B \in \mathfrak{F}, \mu^+(B) = 0\}$. Този клас $\mathfrak{B}$ е затворен относно изброими обединения. Наистина, ако $A \subseteq \bigcup_{n\geq 0} B_n$, $B_n \in \mathfrak{B}$, $n \geq 0$, то

$$\mu(A) = \sum_{n\geq 0} \mu\left(A \cap \left(B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m\right)\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu^+(B_n) = 0.$$

Следователно, $\bigcup_{n\geq 0} B_n \in \mathfrak{B}$.

Б. Точната долна граница $\beta = \inf\{\mu(B), B \in \mathfrak{B}\}$ **се достига** за някое множество от $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ и следователно $-\infty < \beta \leq 0$. Наистина, ако $B_n \in \mathfrak{B}$, $n \geq 0$, имат свойството $\mu(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$, то $\bigcup_{n\geq 0} B_n \in \mathfrak{B}$ и за всяко $m \geq 0$ имаме

$$\beta \leq \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \mu(B_m) + \mu\left[\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) \setminus B_m\right] \leq \mu(B_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \beta.$$

Така, $-\infty < \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \beta \leq 0$.

В. Полагаме $D = \overline{\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right)}$, при което $D \in \mathfrak{F}$, $\overline{D} \in \mathfrak{B}$, $\mu\left(\overline{D}\right) = \beta$. Този избор на D осигурява (за всяко $A \in \mathfrak{F}$) изпълнението на следните съотношения:

$$\mu(A) \leq 0 \text{ за всяко } A \subseteq \overline{D}, \tag{4.3}$$

$$\mu^+(A) > 0 \text{ за всяко } A \subseteq D, \text{ за което } \mu(A) < 0. \tag{4.4}$$

Действително (4.3) е очевидно, а ако $A \subseteq D$, $\mu(A) < 0$ и $\mu^+(A) = 0$, то $A \in \mathfrak{B}$, $A + \overline{D} \in \mathfrak{B}$, при което

$$\mu\left(A + \overline{D}\right) = \mu(A) + \mu\left(\overline{D}\right) < \mu\left(\overline{D}\right) = \beta$$

и стигаме до противоречие с избора на β.

Г. Ще покажем, че от (4.4) следва свойството

$$\mu(A) \geq 0 \text{ за всяко } A \subseteq D. \tag{4.5}$$

(Очевидно (4.3) и (4.5) доказват съществуването на желаното множество D от $\mathfrak{F}$).

Да допуснем противното, т. е. че съществува $\widetilde{A} \subseteq D$, за което $\mu(\widetilde{A}) < 0$.

Г. а) Без ограничение на общността може да считаме, че

$$\widetilde{A} \subseteq D, \quad \mu(\widetilde{A}) < 0, \quad 0 < \mu^+(\widetilde{A}) < \infty. \tag{$*$}$$

Наистина, ако за всяко $A' \subseteq \widetilde{A}$ с $\mu(A') < 0$ имаме $\mu^+(A') = \infty$, то съществува $A^{(0)} \subseteq \widetilde{A}$ с $\mu\left(A^{(0)}\right) \geq 1$ (вземете например $A' = \widetilde{A}$ и вижте определението на $\mu^+\left(\widetilde{A}\right)$). Аналогично, съществува множество $A^{(1)} \subseteq \widetilde{A} \setminus A^{(0)}$, за което $\mu\left(A^{(1)}\right) \geq 1$ и т. н. Получаваме редица $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ от непресичащи се ($A^{(j)} \subseteq \widetilde{A} \setminus \bigcup_{i<j} A^{(i)}$) подмножества на $\widetilde{A}$, за които $\mu\left(A^{(j)}\right) \geq 1$, $j \geq 0$, и значи

$$\mu\left(\sum_{j\geq 0} A^{(j)}\right) = +\infty, \quad \sum_{j\geq 0} A^{(j)} \subseteq \widetilde{A},$$

при което неравенството $\mu\left(\widetilde{A} \setminus \sum_{j\geq 0} A^{(j)}\right) + \mu\left(\sum_{j\geq 0} A^{(j)}\right) = \mu(\widetilde{A}) < 0$ е невъзможно. И така, допускането на противното означава съществуване на множество $\widetilde{A} \in \mathfrak{F}$ със свойствата ($*$).

Г. б) Ще покажем, че съществуването на (поне едно) множество $\widetilde{A} \in \mathfrak{F}$ със свойствата ($*$) противоречи на свойството (4.4) на D (в което $A \in \mathfrak{F}$ е произволно!).

Нека $A_0 \subseteq \widetilde{A}$ е такова, че $\mu(A_0) \geq \frac{1}{2}\mu^+\left(\widetilde{A}\right) > 0$. Тогава

$$\widetilde{A} \setminus A_0 \subseteq D, \quad \mu\left(\widetilde{A} \setminus A_0\right) = \mu\left(\widetilde{A}\right) - \mu(A_0) < 0 - \mu(A_0) < 0$$

и $0 < \mu^+\left(\widetilde{A} \setminus A_0\right) < \infty$. Виждаме, че $\widetilde{A} \setminus A_0$ има свойства, аналогични на ($*$). **По индукция** строим редица A_n, $n \geq 0$, от подмножества $A_n \subseteq \widetilde{A} \subseteq D$ такива, че

$$A_{n+1} \subseteq \widetilde{A} \setminus \sum_{m\leq n} A_m, \quad \mu(A_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\mu^+\left(\widetilde{A} \setminus \sum_{m\leq n} A_m\right) > 0. \tag{4.6}$$

Съществуването на множеството A_{n+1} следва от неравенствата

$$\mu\left(\widetilde{A}\setminus\sum_{m\le n}A_m\right)<0,\quad 0<\mu^+\left(\widetilde{A}\setminus\sum_{m\le n}A_m\right)<\infty, \tag{4.7}$$

които се установяват за всяко $n\ge 0$, и дефиницията на μ^+.

Така получаваме равенството

$$\mu(\widetilde{A})=\mu\left(\widetilde{A}\setminus\sum_{n\ge 0}A_n\right)+\mu\left(\sum_{n\ge 0}A_n\right)=\mu\left(\widetilde{A}\setminus\sum_{n\ge 0}A_n\right)+\sum_{n\ge 0}\mu(A_n),$$

където, от една страна, $\mu(\widetilde{A})<0$, $\mu(A_n)>0$, $n\ge 0$, и следователно

$$\mu\left(\widetilde{A}\setminus\sum_{n\ge 0}A_n\right)<0. \tag{4.8}$$

От друга страна, $\sum\limits_{n\ge 0}\mu(A_n)<\infty$ и затова $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$, откъдето според (4.6) имаме

$$\mu^+\left(\widetilde{A}\setminus\sum_{n\ge 0}A_n\right)\le\mu^+\left(\widetilde{A}\setminus\sum_{m=0}^{n}A_m\right)\le 2\mu(A_{n+1})\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

т. е.

$$\mu^+\left(\widetilde{A}\setminus\sum_{n\ge 0}A_n\right)=0. \tag{4.9}$$

Свойствата (4.8) и (4.9) на множеството $A=\widetilde{A}\setminus\sum\limits_{n\ge 0}A_n$ са несъвместими със свойството (4.4) на D. Следователно, допускането (на противното) в точка Г. не е вярно, с което доказахме (4.5) и съществуването на подходящото множество $D\in\mathfrak{F}$ от твърдението 3) в теоремата.

Д. Нека $B\subseteq A$ са множества от $\mathfrak{F}$. Тогава (вж. (4.3) и (4.5))

$$\begin{aligned}\mu(B)&=\mu(B\cap D)+\mu\left(B\cap\overline{D}\right)\\&=\mu(A\cap D)-\mu((A\setminus B)\cap D)+\mu\left(B\cap\overline{D}\right)\le\mu(A\cap D).\end{aligned}$$

Следователно,

$$\mu^+(A)=\sup\{\mu(B),B\subseteq A\}=\mu(A\cap D)\ge 0, \tag{4.10}$$

което показва, че μ^+ е мярка, при това положителна мярка в измеримото пространство $(\Omega,\mathfrak{F})$.

Аналогично се показва, че

$$\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B), B \subseteq A\} = -\mu\left(A \cap \overline{D}\right) \geq 0, \tag{4.11}$$

откъдето следва, че μ^- е положителна мярка в $(\Omega, \mathfrak{F})$ и въобще твърдението 1).

E. … $\square$