Инструкция за оформяне на курсовия проект по Математическа текстообработка 2017 г.

Целта на този документ е да улесни студентите в подготовката на получените проекти.

Всеки студент получава четири сканирани страници от учебника „Теория на вероятностите (втора част)". Сканирането е извършено на вече използвана хартия и **текстът на гърба не се набира**.

Проектът се набира **задължително** с предоставения файл `tv2.cls`. Студентите не могат да предефинират стандартните команди, нито да дефинират свои. Всеки студент трябва да подготви файл с име `xxxxx.tex`, където `xxxxx` е факултетният му(ѝ) номер. Като образец се използва файлът `tv2sample.tex`. Със същия файл се извършва тестването на курсовия проект. Редовете на файла да имат дължина до 80 знака, което позволява лесната читаемост. Това се постига, като на определени места се натиска клавишът `Enter`.

Препоръчва се на студентите да се запознаят със съдържанието на файловете `tv2.cls`, `tv2sample.tex` (този файл съдържа оригиналната Глава 1 от учебника) и да сравнят изходния код от тези файлове с окончателния вид на документа, намиращ се на следващите страници. Оттам ще научат как се използват командите, дефинирани в `tv2.cls`, как се правят формули, теореми и др. подобни с поставяне на етикети, а също и как тези етикети се използват за цитирането на различните обекти.

Ако в текста следват няколко формули една след друга, те се пишат като отделни формули (обикновено са отделени със запетаи). Например формулите $f(x)\to\min$, $a_1x\le 5$, $a_2x\le -3$, където $x=(x_1,x_2,x_3)$, $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2=\|x\|^2$, $a_1=(2,-1,1)$, $a_2=(-1,-1,-1)$ са въведени по следния начин:

```
Например формулите $f(x)\to\min$, $a_1x\le 5$,
$a_2x\le -3$, където $x=(x_1,x_2,x_3)$,
$f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2=\|x\|^2$, $a_1=(2,-1,1)$,
$a_2=(-1,-1,-1)$
```

Таблица 1. Номерирани обкръжения

Име	Ключова дума	Етикет
Теорема	`thm`	`\label{thm:1.2}`
Лема	`lemma`	`\label{l:1.2}`
Следствие	`cor`	`\label{cor:1.2}`
Определение	`dfn`	`\label{dfn:1.2}`
Забележка	`note`	`\label{note:1.2}`
Пример	`ex`	`\label{ex:1.2}`
Задача	`pr`	`\label{pr:1.2}`

Таблица 2. Неномерирани обкръжения

Име	Ключова дума
Теорема	`Theorem`
Следствие	`Cor`
Забележка	`Note`
Пример	`Ex`

В таблица 1 са изброени номерираните обкръжения от тип `theorem`. Етикет `thm:1.2` означава, че това е теорема 2 в глава 1. В таблица 2 са изброени неномерираните обкръжения от тип `theorem`. Етикетите на уравненията трябва да бъдат от вида `x.y`, където `x` е номерът на главата, а `y` е номерът на уравнението. За останалите номерирани обекти примерни етикети са посочени в таблица 3. Номерът на главата може да бъде намерен в съдържанието на учебника според номерата на дадените за набор страници.

Студентите са длъжни да поставят етикети на всички номерирани

Таблица 3. Примерни етикети

Обект	Етикет
Глава	`\label{ch:1}`
Уравнение	`\label{1.1}`
Фигура	`\label{f:1.1}`

обекти и да ги използват при цитирането на тези обекти. Ако се налага цитиране на номерирани обекти, които се намират на други страници от учебника, те се цитират непосредствено, например уравнение (2) на стр. 105.

Математическите формули трябва да бъдат набрани на латиница (а не с български аналози на латинските букви). За улеснение е предоставен текстов файл, получен след разпознаване на пдф файла (получен след сканиране на книгата) с подходящ софтуер . Моят съвет в този случай е формулите да се въвеждат наново от клавиатурата. Подчертаният текст се набира **болд**.

Чертежите не са обект на курсовия проект.

Тъй като текстът е писан на пишеща машина, цифрата 1 изглежда като I (първо римско). Скоби в текста няма. Вместо това се използва двойка наклонени черти /например .../.

Готовите `tex` файлове се изпращат на посочения по-долу електронен адрес, като в полето `Subject` задължително фигурира `MathText` с цел филтриране на електронната ми поща.

Не всичко обаче от книгата може да бъде намерено в този примерен текст. Всички въпроси са добре дошли!

В. Черногоров
`wily@fmi.uni-sofia.bg`

Глава 1

Вероятностни пространства. Теорема за продължение на вероятността

От елементарната теория на вероятностите читателят е запознат с модели, позволяващи ни да дадем вероятностно описание на опити, имащи краен или изброим брой изходи. Тези вероятностни модели описват добре всички задачи при хазартните игри и други аналогични на тях постановки.

Един такъв модел се задава с тройката $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, където Ω е крайно или изброимо множество (пространство) от елементарни събития ω , а $\mathfrak{F}$ е съвкупността от всички подмножества на Ω. На всяко $\omega \in \Omega$ съпоставяме неотрицателно число $\mathbf{P}(\omega)$ така, че

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\omega) = 1$$

и това число $\mathbf{P}(\omega)$ се нарича вероятност на елементарното събитие ω. Подмножествата на ω се наричат събития. Вероятност на кое да е събитие $A \in \mathfrak{F}$ се определя с формулата

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\omega).$$

От това определение следват и всички елементарни свойства на вероятността $\mathbf{P}$. Предполагаме, че те са известни на читателя.

Например, тройката $(\Omega^n, \mathfrak{F}_n, \mathbf{P}_n)$, където $\Omega = \{0, 1\}$, $\Omega^n = \{\omega^n \colon \omega^n = (\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i = 0$ или $1, i = 1, \dots, n$, $\mathfrak{F}^n = \{A \colon A \subseteq \Omega^n\}$, $\mathbf{P}_n(\omega^n) = 2^{-n}$, $n \geq 1$, е вероятностен модел на n последователни бернулиеви опита с вероятност за сбъдване $p = \frac{1}{2}$ на дадено събитие при всеки отделен опит. Броят на всички елементарни събития ω^n в този случай е 2^n, колкото са всички възможни набори $\omega^n = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ от 0 или 1.

Пространството $\Omega^\infty = \{\omega \colon \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)\}$ от безкрайни редици ω от нули и единици е естествен модел на изходите от безбройно много последователни опити на Бернули. Но то не е нито крайно, нито изброимо. Наистина, всяко реално число $x \in [0,1]$ може да се представи като двоична дроб

$$x = \tilde{\omega} = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} + \cdots$$

(за двоично-рационалните числа се взема по-краткото представяне) и следователно мощността на Ω^∞ е равна на мощността на континуума. Елементарното събитие означава ω „избор на точката $x \in [0,1]$“.

За да въведем в Ω^∞ вероятност, запазваща свойствата на модела с краен брой бернулиеви опити, естествено е да положим $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}_n(\omega^n) = 2^{-n}$ за всяко събитие $A_n = \{$двоичният запис на точката x започва с цифрите $\omega^n = (\omega_1, \ldots, \omega_n)\}$, означаващо, че първите n опита са дали резултат ω^n, $n \geq 1$. Но тогава за всяко $\omega \in A_n$ имаме $\mathbf{P}(\omega) \leq \mathbf{P}(A_n) = 2^{-n}$, откъдето $\mathbf{P}(\omega) = 0$. Съществени в тази ситуация се оказват събитията от вида „точката $x \in [\alpha, \beta)$“. Тъй като A_n означава също, че „точката $x \in \tilde{\omega}^n, \tilde{\omega} + 2^{-n})$“, а числата, които имат двоичен запис с краен брой цифри, са навсякъде гъсто множество в $[0,1]$, лесно се вижда, че $\mathbf{P}($точката $x \in [\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$. Сега да си спомним, че функцията, съпоставяща на всеки подинтервал неговата дължина, в анализа се нарича мярка на Лебег в $[0,1]$. Следователно, модел на безбройно много бернулиеви опити (с вероятност за успех $p = \frac{1}{2}$) е пространството $[0,1]$ с вероятност — лебеговата мярка. Този пример подсказва, че дефинирането на вероятност в по-сложните пространства зависи от такъв математически апарат, какъвто са теорията на мерките и интегрирането.

В тази глава ще въведем понятието вероятност за общо пространство Ω от (повече от изброим брой) елементарни събития. Подмножествата на Ω, за които тази вероятност ще се дефинира, ще наричаме събития.

Определение 1.1. Нека Ω е съвкупността от елементарни събития ω. Съвкупността $\mathfrak{A}$ от подмножества на Ω се нарича алгебра, ако:

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$;

2. от $A, B \in \mathfrak{A}$ следва $A \cup B \in \mathfrak{A}$, $A \cap B \in \mathfrak{A}$;

3. от $A \in \mathfrak{A}$ следва $\overline{A} \in \mathfrak{A}$, $\overline{A} = \mathfrak{A} \setminus a = \{\omega \colon \omega \notin A\}$.

В изискването 2 е достатъчно да фигурира само $A \cup B$ (или само $A \cap B$), тъй като $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

Оказва се обаче, че за построяване на вероятностна теория не е достатъчно да разглеждаме събитията като елементи на една алгебра $\mathfrak{A}$, а да направим допълнителни ограничения на класовете от подмножества на Ω. Това води до

Определение 1.2. Системата $\mathfrak{F}$ от подмножества на Ω се нарича σ-алгебра, ако $\mathfrak{F}$ е алгебра и освен това:

2^*. от $A_n \in \mathfrak{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, следва $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

Както при определение 1.1, достатъчно е да изискваме само $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ (или само $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$).

Двойката $(\Omega, \mathfrak{F})$, съставена от пространството Ω (от елементарни събития ω) и коя да е σ-алгебра $\mathfrak{F}$ (от подмножества на Ω), се нарича измеримо пространство.

Понятието вероятност се определя като изброимо-адитивна мярка, дефинирана в алгебрата $\mathfrak{A}$. Тук ще дадем нужните определения, който са известни от теорията на мерките.

Определение 1.3. Нека $\mathfrak{A}$ е една алгебра от подмножества на Ω. Функцията $\mu(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, вземаща стойности в интервала $[0, +\infty]$, се нарича крайно-адитивна мярка в $\mathfrak{A}$, ако за всеки два елемента $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \cap B = \varnothing$, имаме $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$. (За удобство тук и понататък обединението на множества без общи елементи означавала с $+$ и $\sum$. Така $A = \sum\limits_{J \in J} A_j$ означава, че $A = \bigcup\limits_{j \in J} A_j$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j \in J$.)

Мярката μ се нарича крайна, ако $\mu(\Omega) < \infty$. Ако $\mu(\Omega) = 1$, то μ се нарича крайно-адитивна вероятностна мярка. Оказва се, че за построяване на плодотворна вероятностна теория е необходимо да ограничим както класа на подмножествата на Ω, така и класа на вероятностите мерки. За това се налага още и следното

Определение 1.4. Крайно-адитивната мярка μ, определена в алгебрата $\mathfrak{A}$ от подмножества на ω, се нарича изброимо-адитивна (или σ-адитивна) мярка, ако за произволна редица $A_1, A_2, \ldots$ от (непресичащи се) елементи на $\mathfrak{A}$ такива, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, е изпълнено равенството

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Крайно-адитивната мярка μ се нарича крайна, ако Ω може да се представи като сума ($\Omega = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$) от непресичащи се подмножества $\Omega_n \in \mathfrak{A}$, за които $\mu(\Omega_n) < \infty$, $n = 1, 2, \dots$

Определение 1.5. Изброимо-адитивната мярка P, определена в алгебрата $\mathfrak{A}$ и нормирана с условието $P(\Omega) = 1$, се нарича вероятностна мярка или вероятност.

Ще припомним без доказателство основните елементарни свойства на вероятностите, известни от елементарния курс.

а) $P(\varnothing) = 0$, където $\varnothing$ е празното подмножество на Ω, т.е. невъзможното събитие.

б) Ако $A, B \in \mathfrak{A}$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

в) Ако $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

г) Ако $A_n \in \mathfrak{A}$, $n \geq 1$, и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, то $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Вероятностната мярка P определихме като крайно-адитивна вероятностна мярка, която е и изброимо-адитивна (σ-адитивна). Всъщност, за една крайна и крайно-адитивна мярка P следните четири условия са еквивалентни:

А. P е σ-адитивна.

Б. P е непрекъсната отгоре: ако $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$, $A_n \in \mathfrak{A}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

В. P е непрекъсната отдолу: ако $A_n \supseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$, $A_n \in \mathfrak{A}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Г. P е непрекъсната в нулата: ако $A_n \supseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$, $A_n \in \mathfrak{A}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

В [1] е доказано, че А $\Leftrightarrow$ Г. Предоставяме на читателя да докаже, че В $\Leftrightarrow$ Г, А $\Leftrightarrow$ В и Б $\Leftrightarrow$ В.

При всички споменати по-горе свойства на вероятността ние изрично изискваме при $A_n \in \mathfrak{A}$, $n \geq 1$, да имаме $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Поради това, а и по други причини, за които стана дума по-горе, по-добре е да разглеждаме вероятността P като дефинирана не в алгебра $\mathfrak{A}$, а в σ-алгебра $\mathfrak{F}$. Основната тройка от обекти, която се разглежда в теорията на вероятностите, е $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, където

— Ω е съвкупността от елементарни събития ω,

— $\mathfrak{F}$ е някаква σ-алгебра от подмножества на Ω,

— $\mathbf{P}$ е вероятност, дефинирана в $\mathfrak{F}$.

Тройката $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ се нарича вероятностно пространство.

Измерими пространства. Основен елемент на едно измеримо пространство $(\Omega, \mathfrak{F})$ е σ-алгебрата $\mathfrak{F}$. Ще разгледаме основните твърдения относно построяването на σ-алгебри и примери на някои по-важни измерими пространства.

Ако $A \subseteq \Omega$, то съвкупността $\mathfrak{F}_A = \{A, \overline{A}, \varnothing, \Omega\}$, както лесно може да се провери, е алгебра и σ-алгебра. $\mathfrak{F}_A$ се нарича σ-алгебра, породена от подмножеството A.

Този пример е частен случай на алгебра, породена от разбиване на Ω на непресичащи се подмножества. Именно, ако

$$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \dots\},\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j \text{ и } \Omega = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$$

то съвкупността $\mathfrak{A} = \alpha(\mathscr{A})$, образувана от елементите на $\mathscr{A}$, всичките им крайни обединения и техните допълнения, е алгебра. Изобщо вярно е следното твърдение.

Лема 1.1. *Нека $\mathcal{C}$ е произволен клас от подмножества на Ω. Тогава съществуват най-малка алгебра $\mathfrak{A} = \alpha(\mathcal{C})$ и най-малка σ-алгебра $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{C})$, съдържащи всички елементи на $\mathcal{C}$.*

Доказателство. Класът от всички подмножества на Ω е очевидно σ-алгебра (и алгебра). Така че поне една алгебра и една σ-алгебра, съдържащи класа $\mathcal{C}$, съществуват. Образуваме системата $\alpha(\mathcal{C})$ (съответно $\sigma(\mathcal{C})$) от множества, принадлежащи на всяка алгебра (на всяка σ-алгебра), която съдържа $\mathcal{C}$. Лесно се проверява че тази система е алгебра (съответно σ-алгебра), при това най-малката алгебра (σ-алгебра), която съдържа $\mathcal{C}$. $\square$

Пространство $(\mathbf{R}, \mathfrak{B})$**.** При разглеждане на различни твърдения Ω може да съвпада с реалната права $\mathbf{R}$ — съвкупността на всички реални числа. Нека $\mathcal{C}$ е класът от всички интервали (отворени, затворени или полуотворени, крайни или безкрайни). Обикновено σ-алгебрата $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{C})$, породена от класа $\mathcal{C}$, се нарича борелова σ-алгебра в $\mathbf{R}$. Тъй като всеки интервал в R е изброимо сечение на отворени интервали, а всяко отворено множество в $\mathbf{R}$ е изброимо обединение на отворени интервали, то $\mathfrak{B}$ съвпада с най-малката σ-алгебра, съдържаща всички отворени подмножества в $\mathbf{R}$. Елементите на $\mathfrak{B}$ се наричат борелови множества.

Пространство $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n))$**.** Нека $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ е n-тата декартова степен на $\mathbf{R}$. Елементи на $\mathbf{R}^n$ са n-мерните вектори $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Множеството $\Pi = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, където $I_k = (a_k, b_k]$, $k = 1, \ldots, n$, се нарича правоъгълник. Нека $\mathscr{P}$ е съвкупността от всички правоъгълници. σ-алгебрата $\sigma(\mathscr{P})$, породена от класа $\mathscr{P}$, се нарича борелова σ-алгебра в $\mathbf{R}$ и се означава с $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^1) = \mathfrak{B}$.

Пространство $(\mathbf{R}^\infty, \mathfrak{B}(\mathbf{R}^\infty))$**.** Това пространство играе важна роля в теорията на вероятностите, понеже е модел на безбройно много опити. $\mathbf{R}^\infty$ е съвкупността от всички числови редици $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ с $x_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, а σ-алгебрата $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^\infty)$ се конструира по следния начин. Нека B^n е борелово множество от $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$. Множеството $\mathscr{C}(B^n) = \{\mathbf{x}\colon (x_1, \ldots, x_n) \in B^n\}$ се нарича цилиндър с основа B^n в $\mathbf{R}^n$. Тъй като $B^n \times \mathbf{R} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^{n+1})$, то всеки цилиндър $\mathscr{C}(B^n)$ е и цилиндър с основа в $\mathbf{R}^{n+1}, \mathbf{R}^{n+2}, \ldots$ Системата от цилиндри $\mathscr{C}(B^n)$, $n \geq 1$, е алгебра в $\mathbf{R}^\infty$ (вж. Лема 1, гл. 3). Най-малката σ-алгебра, съдържаща всички цилиндри, се бележи с $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^\infty)$.

Пространство $(R^T, \mathfrak{B}(R^T))$**.** Нека $T = [0, \infty)$ (или T е произволно множество). Пространство R^T се нарича съвкупността от реалните функции $x = x(t)$, $t \in T$. За построяване на съответната σ-алгебра разглеждаме „цилиндрите“

$$\mathscr{C}(I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \{x \in R^T : x(t_k) \in I_k, k = 1, \ldots, n\},$$
$$t_k \in T, \quad I_k = (a_k, b_k], \quad k = 1, \ldots, n.$$

Един цилиндър от горния вид е съвкупността от всички функции $x = x(t)$, $t \in T$, който в „моментите“ $t_1, \ldots, t_n$ минават през „прозорците“ $I_1, \ldots, I_n$, а в останалите моменти приемат произволни реални стойности. $\mathfrak{B}(R^T)$ означава най-малката σ-алгебра, съдържаща всички цилиндри. Тя съвпада (вж. Лема 2, гл. 3) със σ-алгебрата, породена от цилиндрите

$$\mathscr{C}(B^n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \{x \in R^T : (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in B^n\},$$
$$t_k \in T,\ k = 1, \dots, n; \quad B^n \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n).$$

Пространство $(C, \mathfrak{B}(C))$**.** Нека $T = [0, 1]$ и C е пространството от непрекъснати функции $x = x(t)$, $t \in T$. Относно равномерната метрика $\rho(x, y) = \sup\limits_{t \in T} |x(t) - y(t)|$ пространството C е метрично. Две σ-алгебри могат да се въведат в C: σ-алгебрата $\mathfrak{B}(C)$, породена от цилиндричните множества, и σ-алгебрата $\mathfrak{B}_0(C)$, породена от отворените (относно метриката ρ) множества. Ние ще покажем, че $\mathfrak{B}(C) = \mathfrak{B}_0(C)$. Наистина, нека $B = \{x : x(t_0) < b\}$ е едно цилиндрично множество, $t_0 \in T$, $b \in \mathbf{R}$. Множеството B очевидно е отворено, защото наред с коя да е непрекъсната функция $x_0 = x_0(t)$, $t \in T$, то съдържа и отворената сфера $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in C : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \le b - x_0(t_0)$. Тогава и цилиндърът $\{a \in C : x(t_1) < b_1, \dots, x(t_n) < b_n\}$ при произволни $n \ge 1$ и $t_k \in T$, $b_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, n$, се съдържа в $\mathfrak{B}_0(C)$. Следователно $\mathfrak{B}(C) \subseteq \mathfrak{B}_0(C)$. Обратно, поради непрекъснатостта на функциите от C имаме

$$\begin{aligned} S(x_0, \varepsilon) &= \left\{ x \in C : \sup_{t \in T} |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon \right\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in C : |x(r_k) - x_0(r_k)| < \varepsilon\} \in \mathfrak{B}(C), \end{aligned}$$

където r_k, $k = 1, \dots$, са всички рационални числа в $T = [0, 1]$. Следователно $\mathfrak{B}_0(C) \subseteq \mathfrak{B}(C)$, с което съвпадането на двете σ-алгебри е доказано.

Пространство $(D, \mathfrak{B}(D))$**.** Нека $T = [0, 1]$ и D е съвкупността от непрекъснатите отдясно функции $x = x(t)$, $t \in T$. И в този случай могат да се въведат две σ-алгебри в D, които съвпадат. Едната е породената от цилиндричните множества, а другата — от отворените (относно метриката на А. В. Скороход) множества. На доказателството на този факт няма да се спираме.

Теорема за продължение на вероятността. Нека P е вероятност, дефинирана в някоя алгебра $\mathfrak{A}$ от подмножества на Ω и $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{A})$ е най-малката σ-алгебра, съдържаща $\mathfrak{A}$. Тъй като ние определихме вероятността P като изброимо-адитивна и нормирана мярка *само* в алгебрата $\mathfrak{A}$, то възниква въпросът: може ли да определим вероятностна мярка $\mathbf{P}$ в $\mathfrak{F}$ така, че $\mathbf{P}(A) = P(A)$ за всяко $A \in \mathfrak{A}$? Всяка такава вероятностна мярка $\mathbf{P}$ ще наричаме продължение на вероятността P от алгебрата $\mathfrak{A}$ в σ-алгебрата $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{A})$, а мярката P — ограничение на $\mathbf{P}$ в $\mathfrak{A}$. Положителен отговор на въпроса за съществуване и единственост на продължението $\mathbf{P}$ дава следната класическа теорема.

Теорема (Каратеодори)**.** *Всяка вероятност P, дефинирана в някоя алгебра $\mathfrak{A}$ от подмножества на Ω, притежава единствено продължение $\mathbf{P}$ в σ-алгебрата $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{A})$, породена от $\mathfrak{A}$.*

Доказателство. Отначало ще продължим P само в класа g, чиито елементите са или елементи на $\mathfrak{A}$, или граници на растящи редици от елементи на $\mathfrak{A}$. Елементите на g ще бележим с G.

Определяме функция $\pi(G)$ за $G \in g$ по следния начин:

$$\pi(G) = \begin{cases} P(G), & \text{ако } G \in \mathfrak{A}, \\ \lim P(A_n), & \text{ако } G = \uparrow \lim A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n;\ A_{n+1} \supseteq A_n \in \mathfrak{A},\ n \geq 1. \end{cases}$$

Ще покажем, че стойността $\pi(G)$ не зависи от избора на редицата A_n, $n \geq 1$, а се определя само от избора на множеството G. Наистина, нека A_n, $n \geq 1$, и B_m, $m \geq 1$, са две растящи редици от елементи на $\mathfrak{A}$, определящи едно и също G. Да предположим, че $\lim P(A_n) = \pi^*(G)$, $\lim P(B_m) = \pi(G)$. Тъй като редицата $A_n \cap B_m$, $n \geq 1$, също монотонно расте и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_m) = G \cap B_m = B_m \in \mathfrak{A}, \quad m \geq 1,$$

то поради непрекъснатостта на P отгоре имаме

$$\lim_n P(A_n \cap B_m) = P(B_m),$$

откъдето

$$\lim_n P(A_n) \geq P(B_m), \quad m \geq 1.$$

От последното неравенство при $m \to \infty$ получаваме неравенството $\pi^*(G) \geq \pi(G)$. Разглеждайки редицата $A_n \cap B_m$, $m \geq 1$, аналогично получаваме неравенство в обратна посока. Следователно $\pi^*(G) = \pi(G)$. По определение π съвпада с P в $\mathfrak{A}$.

Лесно се вижда, че функцията π има следните свойства:

а) $\pi(\Omega) = 1$, $\pi(\varnothing) = 0$;

б) ако $G_1 \subseteq G_2$, то $\pi(G_1) \leq \pi(G_2)$;

в) $0 \leq \pi(G) \leq 1$ за всяко $G \in g$;

г) ако $G_1, G_2 \in g$, то $G_1 \cup G_2 \in g$, $G_1 \cap G_2 \in g$ и $\pi(G_1 \cup G_2) + \pi(G_1 \cap G_2) = \pi(G_1) + \pi(G_2)$;

д) ако $G_n \in g$ и $G_n \subseteq G_{n+1}$, $n \geq 1$, то $\uparrow \lim G_n = G \in g$ и $\pi(G) = \lim \pi(G_n)$.

Доказателството на тези свойства е подобно на доказателството на аналогичните свойства на P и използва това, че P е вероятност в $\mathfrak{A}$. Затова го предоставяме на читателя.

За да продължим вероятността P от $\mathfrak{A}$ в σ-алгебрата $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{A})$, породена от $\mathfrak{A}$, първо ще дефинираме чрез π една числова функция $\overline{\pi}$ в класа на всички подмножества на Ω.

Лема 1.2. *Функцията $\overline{\pi}(\Omega_1)$, $\Omega_1 \subseteq \Omega$, определена чрез равенството*

$$\overline{\pi}(\Omega_1) = \inf_G \{\pi(G), \Omega_1 \subseteq G \in g\},$$

има следните свойства:

1. $\overline{\pi}(G) = \pi(G)$ *при* $G \in g$; $0 \leq \overline{\pi}(\Omega_1) \leq 1$ *за всяко* $\Omega_1 \subseteq \Omega$.

2. $\overline{\pi}(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \overline{\pi}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leq \overline{\pi}(\Omega_1) + \overline{\pi}(\Omega_2)$ *за произволни* $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ *и, в частност (при* $\Omega_2 = \overline{\Omega}_1$*),*

$$\overline{\pi}(\Omega_1) + \overline{\pi}(\overline{\Omega}_1) \geq 1.$$

3. *Ако* $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, *то* $\overline{\pi}(\Omega_1) \leq \overline{\pi}(\Omega_2)$.

4. *Ако* $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$, $n \geq 1$, *и* $\Omega_\infty = \uparrow \lim \Omega_n$, *то* $\overline{\pi}(\Omega_\infty) = \lim \overline{\pi}(\Omega_n)$.

Доказателство. Свойство 1 следва непосредствено от дефиницията на $\overline{\pi}$. За да докажем свойство 2 да вземем произволно $\varepsilon > 0$ и да изберем такива G_1 и G_2 от g, че

$$\overline{\pi}(\Omega_i) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \pi(G_i) \text{ при } \Omega_i \subseteq G_i, \ i = 1, 2.$$

Тогава според свойството г) на функцията π имаме

$$\begin{aligned}\overline{\pi}(\Omega_1) + \overline{\pi}(gO_2) + \varepsilon &\geq \pi(G_1) + \pi(G_2) \\ &= \pi(G_1 \cup G_2) + \pi(G_1 \cap G_2) \geq \overline{\pi}(\Omega \cup \Omega_2) + \overline{\pi}(\Omega_1 \cap \Omega_2). \blacksquare\end{aligned}$$

При $\varepsilon \to 0$ това съотношение дава свойство 2. Свойство 3 следва веднага от монотонността (свойство б)) на π.

За да докажем свойство 4 да изберем пак произволно положително число ε и редица $0 < \varepsilon_n$, $n \geq 1$, за която $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon$. При дадени ε_n и Ω_n определяме $G_n \in g$ така, че

$$\overline{\pi}(\Omega_n) + \varepsilon_n \geq \pi(G_n), \quad \Omega_n \in G_n, \; n \geq 1.$$

Да положим сега $\widetilde{G}_n \bigcup\limits_{m=1}^{n} G_m$. Очевидно членовете на редицата $\widetilde{G}_n$, $n \geq 1$, са от g и$\Omega_n \subseteq \widetilde{G}_n$ за всяко $n \geq 1$. Ще покажем с индукция по n, че

$$\overline{\pi}(gO_n) + \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m \geq \pi(\widetilde{G}_n), \; n \geq 1.$$

При $n = 1$ това неравенство е вярно според избора на G_1. Да предположим, че то е вярно за някое $n \geq 1$. Тъй като $\Omega_n \subseteq \widetilde{G}_n \cup G_{n+1}$, то по свойство г) имаме

$$\begin{aligned}
\pi\left(\widetilde{G}_{n+1}\right) &= \pi\left(\widetilde{G}_n \cup G_{n+1}\right) = \pi\left(\widetilde{G}_n\right) + \pi(G_{n+1}) - \pi\left(\widetilde{G}_n \cap G_{n+1}\right) \\
&= \overline{\pi}(\Omega_n) + \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m + \overline{\pi}(\Omega_{n+1}) + \varepsilon_{n+1} - \overline{\pi}(\Omega_n) \\
&= \overline{\pi}(\Omega_{n+1}) + \sum_{m=1}^{n+1} \varepsilon_m.
\end{aligned}$$

и, следователно, доказваното неравенство е вярно и за $n + 1$.

Нека $n \to \infty$. Като отчетем, че $\Omega_\infty \subseteq \lim \widetilde{G}_n$ и също така $\widetilde{G}_n \uparrow \lim \widetilde{G}_n \in g$, ще получим

$$\lim \overline{\pi}(\Omega_n) + \varepsilon \geq \pi(\lim \widetilde{G}_n) \geq \overline{\pi}(\Omega_\infty)$$

или при $\varepsilon \to 0$

$$\lim \overline{\pi}(\Omega_n) \geq \overline{\pi}(\Omega_\infty).$$

От друга страна, от доказаното вече свойство 3 следва и обратното на последното неравенство, с което свойство 4 е доказано. $\square$

Да разгледаме сега функцията $\overline{\pi}$ не за произволни подмножества на Ω, а само за елементите на съвкупността

$$\overline{\mathfrak{F}} = \{B \in \Omega \colon \overline{\pi}(B) + \overline{\pi}(\overline{B}) = 1\}.$$

Ще докажем следното важно твърдение.

Лема 1.3. *Съвкупността* $\overline{\mathfrak{F}}$ *е* σ*-алгебра и* $\overline{\pi}$ *е вероятност в* $\overline{\mathfrak{F}}$.

Доказателство. Да покажем първо, че $\overline{\mathfrak{F}}$ е σ-алгебра. Според определението на $\overline{\mathfrak{F}}$ от $B \in \overline{\mathfrak{F}}$ следва $\overline{B} \in \overline{\mathfrak{F}}$. От свойство 1 на $\overline{\pi}$ имаме $\overline{\pi}(\varnothing) + \overline{\pi}(\Omega) = 1$ и, следователно, $\varnothing \in \overline{\mathfrak{F}}$ и $\Omega \in \overline{\mathfrak{F}}$. Ако $B_1, B_2 \in \overline{\mathfrak{F}}$, то сумата от десните страни на неравенствата

$$\overline{\pi}\left(B_1 \cup B_2\right) + \overline{\pi}\left(B_1 \cap B_2\right) \leq \overline{\pi}(B_1) + \overline{\pi}(B_2),$$
$$\overline{\pi}\left(\overline{B_1 \cup B_2}\right) + \overline{\pi}\left(\overline{B_1 \cap B_2}\right) \leq \overline{\pi}(\overline{B}_1) + \overline{\pi}(\overline{B}_2),$$

е равна на 2. Но според свойство 2 на $\overline{\pi}$ имаме

$$\overline{\pi}\left(B_1 \cup B_2\right) + \overline{\pi}\left(\overline{B_1 \cup B_2}\right) \geq 1,$$
$$\overline{\pi}\left(B_1 \cap B_2\right) + \overline{\pi}\left(\overline{B_1 \cap B_2}\right) \geq 1,$$

Горните четири неравенства могат да бъдат верни само когато всички те са равенства. Следователно $B_1 \cup B_2 \in \overline{\mathfrak{F}}$, $B_1 \cap B_2 \in \overline{\mathfrak{F}}$. С това същевременно показахме, че функцията $\overline{\pi}$ е адитивна в $\overline{\mathfrak{F}}$.

Остава ни да се убедим, че операцията $\cup$, приложена изброимо много пъти за елементи от $\overline{\mathfrak{F}}$, не ни извежда извън $\overline{\mathfrak{F}}$. Нека B_n, $n \geq 1$, е растяща редица от множества $B_n \in \overline{\mathfrak{F}}$, $B_n \in B_{n+1}$. От свойства 3 и 4 на $\overline{\pi}$ следва, че

$$\overline{\pi}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim \overline{\pi}(B_n), \quad \overline{\pi}\left(\overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}\right) \leq \overline{\pi}\left(\overline{B}_m\right) \text{ при } m \geq 1.$$

Като съберем съответните страни на тези две съотношения и оставим $m \to \infty$, получаваме

$$\overline{\pi}\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) + \overline{\pi}\left(\overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}\right) \leq 1.$$

Последното неравенство съгласно свойство 2 е равенство и, следователно $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \overline{\mathfrak{F}}$, което показва, че $\overline{\mathfrak{F}}$ е σ-алгебра.

За да завършим доказателството на лемата остава да докажем, че $\overline{\pi}$ е вероятност в $\overline{\mathfrak{F}}$. Наистина, $\overline{\pi}(\Omega) = \pi(\Omega) = 1$. Вече показахме, че $\overline{\pi}$ е адитивна функция. Остава да проверим непрекъснатостта на $\overline{\pi}$ в нулата. Ако $A_n \downarrow \varnothing$, $A_n \in \overline{\mathfrak{F}}$, то ще имаме $\bigcup_{n\geq 1} \overline{A}_n = \Omega$ и според доказаното по-горе при $B_n = \overline{A}_n$, $n \geq 1$, получаваме веднага $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\pi}(\overline{A}_n) = \overline{\pi}\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} \overline{A}_n\right) = 1$. Но тъй като $\overline{\pi}(A_n) + \overline{\pi}\left(\overline{A}_n\right) = 1$, то $\overline{\pi}(A_n) \downarrow 0$.

И така, $\overline{\pi}$ е вероятност в $\overline{\mathfrak{F}}$. Лема 1.3 е доказана. $\square$

За доказателството на теоремата да забележим, че от определенията на функциите π и $\overline{\pi}$ следват равенствата $\overline{\pi}(A) = \pi(A) = P(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, т. е. $\overline{\pi}(A) + \overline{\pi}\left(\overline{A}\right) = 1$, или алгебрата $\mathfrak{A}$ се съдържа в σ-алгебрата $\overline{\mathfrak{F}}$. Но σ-алгебрата $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{A})$ е най-малката σ-алгебра, съдържаща $\mathfrak{A}$. Следователно $\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$. Разглеждайки вероятността $\overline{\pi}$ само за елементите на $\mathfrak{F}$ (те са част от тези на $\overline{\mathfrak{F}}$), да означим $\mathbf{P}(A) = \overline{\pi}(A)$, $A \in \mathfrak{F}$. Ограничението $\mathbf{P}$ на $\overline{\pi}$ в $\mathfrak{F}$ е търсеното продължение на P от алгебрата $\mathfrak{A}$ в σ-алгебрата $\mathfrak{F}$, породена от $\mathfrak{A}$, защото очевидно $\mathbf{P}(A) = P(A)$ при $A \in \mathfrak{A}$.

Продължението $\mathbf{P}$ е единствено. За да докажем това, нека предположим, че има друга вероятност $\mathbf{Q}$ в $\mathfrak{F}$, която съвпада с P в $\mathfrak{A}$. Вижда се лесно, че $\mathbf{Q}(G) = \pi(G)$ при $G \in g$ и, следователно, $\mathbf{Q}(A) \leq \mathbf{P}(A)$ за всяко $A \in \mathfrak{F}$. Ако за някое $A \in \mathfrak{F}$ имаме строго неравенство $\mathbf{Q}(A) < \mathbf{P}(A)$, то получаваме $1 = \mathbf{Q}(\Omega) = \mathbf{Q}(A) + \mathbf{Q}\left(\overline{A}\right) < \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1$, което е невъзможно. С това теоремата е доказана. $\square$

Теоремата за продължение на вероятността показва, че за да дефинираме вероятност $\mathbf{P}$ в едно измеримо пространство $(\Omega, \mathfrak{F})$ е достатъчно да определим ограничението P на $\mathbf{P}$ в коя да е алгебра $\mathfrak{A}$ от подмножества на Ω, която поражда $\mathfrak{F}$ (т. е. има свойството $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}$).

Да напомним, че функцията $\overline{\pi}$, която е построена по P и обикновено се нарича външна мярка, е дефинирана за произволни $\Omega_1 \subseteq \Omega$. Ограничението $\overline{\mathbf{P}}$ на $\overline{\pi}$ в $\overline{\mathfrak{F}}$ е вероятност, представляваща продължение на $\mathbf{P}$ от $\mathfrak{F}$ в $\overline{\mathfrak{F}}$. Самата σ-алгебра $\overline{\mathfrak{F}}$ съдържа, в частност, всички подмножества $N \subseteq \Omega$, за които $\overline{\pi}(N) = 0$ и, следователно, $\overline{\mathbf{P}}(N) = 0$. Тези множества се наричат $\mathbf{P}$-нулеви. Казва се, че $\overline{\mathfrak{F}}$ е попълнение на $\mathfrak{F}$ относно мярката $\mathbf{P}$, че $(\Omega, \overline{\mathfrak{F}}, \overline{\mathbf{P}})$ е пълно вероятностно пространство и попълнение на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$.

Задачи

1. За всеки две измерими пространства $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$ да означим с $\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 = \sigma\{A_1 \times A_2 \colon A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2\}$ естествената σ-алгебра в $\Omega_1 \times \Omega_2$. Докажете, че $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n) \times \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbf{R}^{n+1})$, $n \geq 1$.

2. Докажете, че $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ е най-малката σ-алгебра, съдържаща отворените множества в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$.

3. Докажете, че $\mathfrak{B}(\mathbf{R}^\infty)$ е най-малката σ-алгебра, съдържаща отворените множества относно метриката $\rho(x', x'') = \sum\limits_{n\geq 1} 2^{-n}|x'_n - x''_n|$ в $\mathbf{R}^\infty$.

4. Класът $\mathcal{C}$ от подмножества на Ω се нарича монотонен, ако за всяка редица $A_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$, от $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$, следва $\uparrow \lim A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$ и от $A_n \supseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$, следва $\downarrow \lim A_n = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$. Докажете, че за произволен клас $\mathfrak{A}$ от подмножества на Ω:

А. съществува най-малък монотонен клас $m(\mathfrak{A}) \supseteq \mathfrak{A}$;

Б. ако $\mathfrak{A}$ е алгебра, то $\mathfrak{A}$ е σ-алгебра тогава и само тогава, когато $\mathfrak{A}$ е монотонен клас;

В. ако $\mathfrak{A}$ е алгебра, то $\sigma(\mathfrak{A}) = m(\mathfrak{A})$.

5. Класът $\mathcal{C}$ от подмножества на Ω се нарича σ-адитивен, ако:

а) $\Omega \in \mathcal{C}$;

б) за произволни $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ от $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ следва $C_1 + C_2 \in \mathcal{C}$ и от $C_1 \subseteq C_2$ следва $C_2 \setminus C_1 = C_2 \cap \overline{C}_1 \in \mathcal{C}$;

в) от $C_{n+1} \supseteq C_n \in \mathcal{C}$, $n \geq 1$, следва $\uparrow \lim C_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} C_n \in \mathcal{C}$. и

Докажете, че за произволен клас $\mathfrak{A}$ от подмножества на Ω:

А. съществува най-малък σ-адитивен клас $s(\mathfrak{A}) \supseteq \mathfrak{A}$;

Б. ако $\mathfrak{A}$ е затворен относно $\cap$, то $s(\mathfrak{A}) = \sigma(\mathfrak{A})$;

В. ако $\mathfrak{A}$ е затворен относно $\cap$, то всеки две вероятности $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, за които $\mathbf{P}(A) = \mathbf{Q}(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, съвпадат в $\sigma(\mathfrak{A})$.

6. Нека $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство и $\mathfrak{A}$ е алгебра, за която $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}$. Докажете, че за всяко $B \in \mathfrak{F}$ и произволно $\varepsilon > 0$ съществува $A \in \mathfrak{A}$ такова, че $\mathbf{P}(A \triangle B) < \varepsilon$, където $A \triangle B = A \cap \overline{B} + \overline{A} \cap B$.

7. Нека $\mathbf{P}$ е произволна вероятност в $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n))$, $n \geq 1$. Докажете, че за всяко $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува ограничено и затворено множество $F \subseteq B$ такова, че $\mathbf{P}(B \setminus F) < \varepsilon$.

8. Нека $\mathbf{P}$ е произволна вероятност в $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n))$, $n \geq 1$, F произволно затворено множество и G е произволно отворено множество в $\mathbf{R}^n$. Докажете, че $\mathbf{P}(B) = \sup\limits_{F\subseteq B} \mathbf{P}(F) = \inf\limits_{G\supseteq B} \mathbf{P}(G)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$.

9. Нека $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mathbf{P}_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mathbf{P}_2)$ са две вероятностни пространства. Докажете, че:

А. съвкупността $\mathfrak{A}$ от крайни суми на непресичащи се множества от вида $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, е алгебра в $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Б. формулата $P(A_1 \times A_2) = \mathbf{P}_1(A_1)\mathbf{P}_2(A_2)$ и изискването за адитивност на функцията P определят вероятностна мярка P в алгебрата $\mathfrak{A}$.

Продължението $\mathbf{P}$ на мярката P от $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 = \sigma(\mathfrak{A})$ (зад. 1) се нарича произведение на вероятностите $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, а вероятностното пространство $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2, \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2)$ — произведение на двете изходни вероятностни пространства.

Лема 1.4. *Твърдение*

Теорема 1.1. *Твърдение*

Следствие 1.1. *Твърдение*

Забележка 1.1. Твърдение

Пример 1.1. Пример $\operatorname{cov} A \overset{\mathbf{P}}{\sim} B$

Библиография

[1] А. Я. Дороговцев, Д. С. Сильвестров, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. *Теория вероятностей. Сборник задач.* Изд. Вища школа, Киев, 1980.

[2] А. Н. Колмогоров. *Основные понятия теория вероятностей* (второе издание). Изд. Наука, Москва, 1974.

[3] М. Лоэв. *Теория вероятностей.* Изд. Инностраная литература, Москва, 1962.

[4] Ж. Невё. *Математические основы теории вероятностей.* Изд. Мир, Москва, 1969.

[5] А. Обретенов. *Теория на вероятностите.* Изд. Наука и изкуство, София, 1974.

[6] А. Н. Ширяев. *Дополнительные главы теории вероятностей.* Изд. МГУ, Москва, 1968.

[7] А. Н. Ширяев. *Вероятность.* Изд. Наука, Москва, 1980.

[8] S. M. Samuels. The Radon-Nikodym theorem as a theorem in probability. *Amer. Math. Monthly*, **85** (3), March 1978, 155–165.