

# Обработка на изображения чрез реакционно-дифузни модели

Пламен Никифоров, Християн Марков, Стефан Велинов

28 юни 2017 г.

## Съдържание

<b>1</b>	<b>Въведение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Дифузия</b>	<b>2</b>
2.1	Закон за запазване . . . . .	3
2.2	Закон на Фик . . . . .	4
2.3	Резултати от използване на чиста дифузия . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Реакция</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Реакционно-дифузни системи. Неустойчивост на Тюринг</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Постановка на задачата</b>	<b>8</b>
5.1	Модел на FitzHugh-Nagumo . . . . .	8
5.2	Оформяне на образи от реакционно-дифузия модел . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Числено решаване</b>	<b>9</b>
6.1	Числена апроксимация на дифузионните членове . . . . .	9
6.2	Числено решаване на реакцията . . . . .	9
6.3	Диференчна схема . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Обработка на изображения. Числени експерименти</b>	<b>10</b>
7.1	Начални условия . . . . .	10
7.2	Резултати . . . . .	11
7.2.1	Изображения без шум . . . . .	11
7.2.2	Изображения с шум . . . . .	11

Приложение	13
------------	----

Литература	15
------------	----

## 1 Въведение

В този проект се запознаваме и реализираме няколко метода за обработка на изображения, предложени от Ebihara et.al [1]. Използвайки реакционно-дифузен модел (и по-конкретно този на Fitz-Hugh & Nagumo) при условията на Тюрингова неустойчивост [2] могат да се намерят ръбове на обекти, да се сегментират изображения, намалява шумът и увеличава контрастът. В сравнение с конвенционалните модели, разглежданият тук дава добри резултати и при наличие на шум.

Всички тестове и симулации са извършени с MATLAB.

Проектът е изготвен във връзка с дисциплината *Приложения на математиката за моделиране на реални процеси*.

Настоящият доклад е структуриран както следва: В параграф 2 запознаваме читателя с процеса дифузия и законите, които го описват. Параграф 3 е посветен на явлението реакция и поведението на елементите в него. Изследването на реакционно-дифузните системи е засегнато в параграф 4, заедно с неустойчивостта на Тюринг. В параграф 5 представяме модела на FitzHugh-Nagumo и коефициентите, които ще използваме за нашия проект. В шести параграф се занимаваме с числено решаване на дифузионния и реакционния член. Представяме и диференчна схема. Началните условия и конкретни резултати са описани в параграф 7. Накрая на доклада има Приложение, в което са дадени код и допълнителни фигури, показващи резултатите.

## 2 Дифузия

Нека първо добием представа какво представлява дифузията. Най-просто казано дифузията е процес, при който някакво вещество или енергия се разпространява от зони с по-висока концентрация, към такива с по-ниска. Това явление се подчинява на едни и същи закони, независимо от същността на пренасяното вещество. За да стане по-ясно как точно работи дифузията, разглеждаме следните примери:

1. Представете си, че имаме метален прът и започнем да нагряваме единия му край. Нагрятият край ще има по-висока концентрация на топлина и

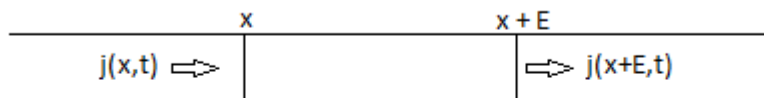
посредством дифузията, топлината ще започне да се пренася по дължината на пръта към края с по-ниска концентрация на топлина, до достигане на равновесно положение, в което ще имаме една и съща температура по целия прът.

2. Нека имаме аквариум пълен с вода. Пускайки количество мастило в аквариума, ние увеличаваме концентрацията на мастило там, където сме го пуснали, спрямо останалата част на аквариума. Мазилото ще започне да се разнася към тези части с по-ниска концентрация до достигане на положение, в което концентрацията на мастило във водата е равномерно разпределена.

Вече имайки тази интуитивна представа за това какво представлява дифузията, нека разгледаме процеса по-строго, от научна гледна точка, и да го опишем математически. За да постигнем тази цел, ще трябва да разгледаме *Закона за запазване* и *Закона на Фик*.

## 2.1 Закон за запазване

Да си представим, че наблюдаваме поток на някакво вещество, преминаващо по безкрайно тънка тръба. Също така можем да наблюдаваме и концентрацията на веществото във фиксирани част на тръбата и време. Нека разгледаме потока и концентрацията като функции на времето и пространството (при нас едномерно, понеже разглеждаме безкрайно тънка тръба), т.е.  $j(x, t)$  - поток,  $u(x, t)$  - концентрация.



Фигура 1: Поток на вещество в едномерния случай

Искаме разликата на потока през дадена точка  $x$  и потока в точка  $x + E$  да е равна на изменението в концентрацията във всички точки в интервала  $[x, x + E]$  (вж. фигура (??)). Така получаваме *Закон за запазването* в интегрална форма:

$$j(x, t) - j(x + E, t) = \int_x^{x+E} \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

Приближаваме интеграла, като използваме квадратурна формула на правоъгълника  $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + O((b - a)^3)$  и получаваме:

$$\begin{aligned} j(x, t) - j(x + E, t) &= E \frac{\partial u}{\partial t} \left(x + \frac{E}{2}, t\right) + O(E^3), \\ \frac{j(x, t) - j(x + E, t)}{E} &= \frac{\partial u}{\partial t} \left(x + \frac{E}{2}, t\right) + O(E^2). \end{aligned}$$

След граничен преход  $E \rightarrow 0$ , получаваме *Закон за запазване* в диференциална форма:

$$-\frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t). \quad (1)$$

## 2.2 Закон на Фик

Законът на Фик ни дава връзка между дифузионния поток на едно вещество и неговата концентрация:

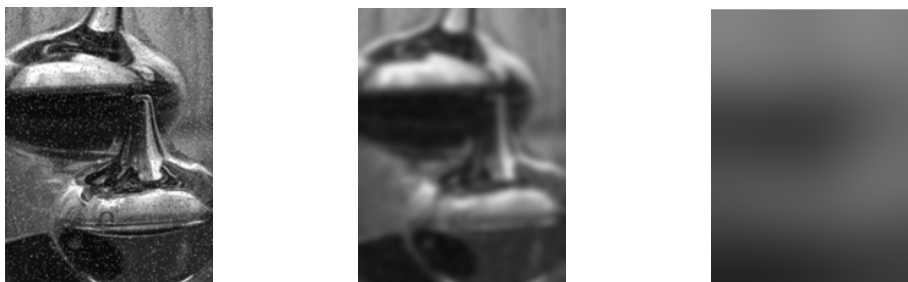
$$j = -D \frac{\partial u}{\partial x},$$

където  $j$  е дифузионният поток,  $D$  е дифузионният коефициент, а  $u$  е концентрацията на веществото. Използвайки Закона на Фик и Закона за запазване 1, можем да изведем уравнението на дифузията:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t). \quad (2)$$

## 2.3 Резултати от използване на чиста дифузия

Използвайки уравнението на дифузията върху черно-бяло изображение с шум, очакваме като резултат да получим изчистване на шума за определени стойности на времето  $t$ , след което изображението да придобие хомогенен цвят (някакъв нюанс на сивото).



Фигура 2: Резултати от обработката на изображение с дифузия

Решавайки уравнението на дифузията 2 с начално условие изображението от ??, получаваме ??. Средната фигура показва една от итерациите, при която обектът още е ясно различим от фона, но дифузията е започнала да премахва ясно дефинираните ръбове. Резултантното изображение е размазано, почти навсякъде сме получили хомогенен нюанс на сивото.

### 3 Реакция

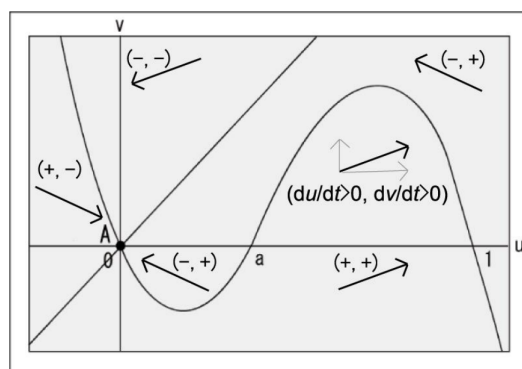
Използвайки само дифузия, единственото нещо, което ще постигнем, е достигане на хомогенно изображение (някакъв нюанс на сивото, понеже ще обработваме черно-бели изображения). За да постигнем останалите цели на проекта – сегментация (разграничаване на фигура и фон) и намиране на ръбове, ще трябва да контролираме по някакъв начин дифузионния процес. Това ще постигнем, добавяйки реакционен член към уравнението на дифузията. За тази цел разглеждаме двукомпонентна система от активатор и инхибитор с концентрации, означени съответно с  $u$  и  $v$ .

В нашия случай елементите (пикселите на изображението) са разпределени в мрежа. Ще приемем, че всеки елемент се състои от две субстанции. Едната е активаторът, а другата е инхибиторът.

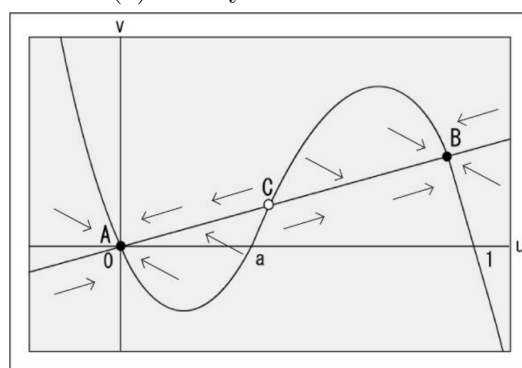
Една известна система, която има такова поведение, е системата на FitzHugh-Nagumo [4] [5].

Тогава нулевите изоклини на системата са определени с:

$$\begin{aligned} v &= u(1 - u)(u - a), \\ v &= (1/b)u. \end{aligned} \tag{3}$$



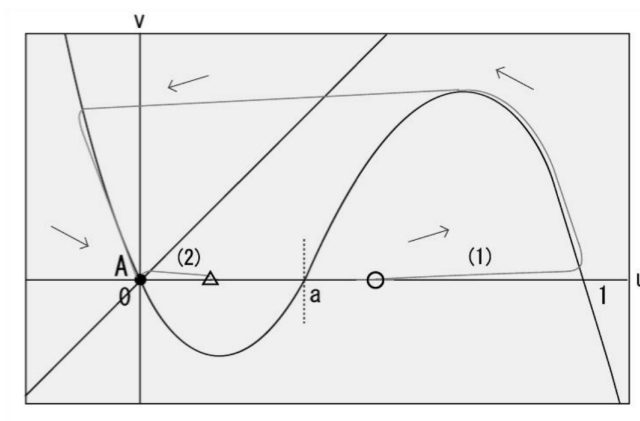
(а) Моноустойчива система



(б) Двуустойчива система

Фигура 3: Изоклини на уравненията на модела на FitzHugh-Nagumo

В зависимост от коефициентите  $a$  и  $b$ , броят равновесни точки на системата (3) се мени. При наличието на единствена устойчива точка (Фиг. 3 (а)), прилагайки стимул към елемента, състоянието му се променя, но в крайна сметка се връща към устойчивост, следвайки стрелките. От друга страна, двуустойчивата система (Фиг. 3 (б)) има три равновесни точки  $A, B, C$ . В този случай, ако стимулът прати елемента над границата ( $u > a, v = 0$ ), то той се установява в състояние  $B$ ; ако стимулът е под границата ( $u < a, v = 0$ ), отива в  $A$ . Точка  $C$  е неустойчива равновесна точка. Това поведение на елементите е от голяма полза, защото при промяна само на параметрите  $a$  и  $b$  ще получим два напълно различни резултата - отделяне на обекта и намиране на ръбове.



Фигура 4: Разликата в поведението при добавяне на различни стойности на стимула

Фигура 4 изобразява разликата в поведението на моноустойчивата система, в зависимост от началното условие. При  $u_0 > a, v_0 = 0$ , орбитите имат поведение, подобно на (1), а накрая  $u$  и  $v$  достигат състоянието  $A$ . В другия случай ( $u_0 < a, v = 0$ ), орбитата наподобява (2). Така откриваме, че параметърът  $a$  от (4) действа като граница (*threshold*).

## 4 Реакционно-дифузни системи. Неустойчивост на Тюринг

Реакционно-дифузните системи са математически модели, които описват различни физически явления: едно от които е промяната във времето и пространството на концентрацията на едно или повече вещества. Локални реакции карат субстанциите да се изменят една към друга, а дифузията ги разпространява из пространството.

Такива системи описват много динамични процеси от биологията, геологията, физиката, екологията и т.н. Математически погледнато, реакционно-дифузните системи са линейни параболични частни диференциални уравнения. Решенията им пък описват различни поведения - например вълни, себе-организиращи се структури като ивици, шестоъгълници или по-сложни.

Двуконпонентните системи позволяват описване на много по-голям диапазон феномени, за разлика от едноконпонентния си аналог. Една от най-важните идеи, свързани с тях, е предложена от Алан Тюринг. Той твърди, че едно със-

тояние, което е устойчиво в локална система, може да изгуби това си качество при наличието на дифузия.

Разглежданите в този проект системи са активатор-инхибиторните, в които един компонент стимулира собственото си и на другите компоненти възпроизвеждане, а другия инхибира (възпира) растежа им. Най-известният представител е уравнението на FitzHugh-Nagumo, който е представен в параграф 5.1.

## 5 Постановка на задачата

### 5.1 Модел на FitzHugh-Nagumo

Моделът на FitzHugh-Nagumo (FHN) [4] [5] е опростена версия на модела на Hodgkin-Huxley [6], който описва детайлно активацията и деактивацията на неврони.

Този модел се задава чрез уравненията

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} \cdot (u(1-u)(u-a) - v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + u - bv,\end{aligned}\tag{4}$$

където  $u$  и  $v$  са концентрациите на активатор и инхибитор,  $D_u$  и  $D_v$  са съответните коефициенти на дифузия, а  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ),  $a$  ( $0 < a < 0.5$ ) и  $b$  ( $b > 0$ ) са константни параметри.

### 5.2 Оформяне на образи от реакционно-дифузия модел

Субстанциите (активатор и инхибитор) се разменят между елементите, благодарение на дифузионната част на уравненията (4). Ако един елемент се включи, т.е. концентрациите на  $u$  и  $v$  се увеличат, той отделя голямо количество от тях към съседите си. Те от своя страна ги получават и също се включват, ако концентрациите на активатор и инхибитор също са над границата.

Подобен феномен се наблюдава и в някои химични експерименти. Например, реакцията на Белусов-Жаботински [3] се себеорганизира във формата на спирала или мишена. От подобни примери можем да заключим, че механизмът на Тюринговата неустойчивост ( $D_u \ll D_v$ ) е важно условие за устойчиво формиране на образи. При това условие ( $D_u \ll D_v$ ) ще представим няколко алгоритъма за обработка на изображения, като намиране на ръбове и сегментация.



## 6 Числено решаване

### 6.1 Числена апроксимация на дифузионните членове

За да решим уравнението на дифузията, използваме метод на крайните разлики, като приближаваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

където  $h$  е дискретизираната стъпка по пространството, а  $u_i$  е стойността на функцията в  $i$ -та позиция. Използвайки това приближение имаме грешка от порядък  $O(h^2)$ .

### 6.2 Числено решаване на реакцията

Нека разгледаме реакционната система.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= u(1-u)(u-a) - v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u - bv.\end{aligned}$$

Изхождайки от дефиницията за производна  $\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$ , ако предположим, че  $\Delta t$  е достатъчно малко, можем да премахнем граничния преход и да получим уравнение за стойността на функцията в момент  $t + \Delta t$ , зависещо от стойността в момент  $t$ . Така получаваме:

$$\begin{aligned}u(x, t + \Delta t) &= \Delta t[u(1-u)(u-a) - v] - u, \\ v(x, t + \Delta t) &= \Delta t(u - bv) - v.\end{aligned}$$

### 6.3 Диференчна схема

За решаване на системата на FitzHugh-Nagumo използваме следната диференчна схема върху мрежата, въведена в 6:

$$\begin{aligned}
U_{i,j}^{k+1} &= \frac{\tau D_u}{h^2} (U_{i+1,j}^k + U_{i,j+1}^k + U_{i-1,j}^k + U_{i,j-1}^k) + \left(1 - \frac{4\tau D_u}{h^2}\right) U_{i,j}^k + \\
&\quad + \tau \frac{1}{\varepsilon} [U_{i,j}^k (1 - U_{i,j}^k (U_{i,j}^k - a) - V_{i,j}^k)], \\
V_{i,j}^{k+1} &= \frac{\tau D_v}{h^2} (V_{i+1,j}^k + V_{i,j+1}^k + V_{i-1,j}^k + V_{i,j-1}^k) + \left(1 - \frac{4\tau D_v}{h^2}\right) V_{i,j}^k + \tau (V_{i,j}^k - b V_{i,j}^k),
\end{aligned} \tag{5}$$

където  $k$  е слойът по времето (т.е. поредната итерация), а  $i$  и  $j$  са координатите на елемента (пиксела) в мрежата на изображението.

## 7 Обработка на изображения. Числени експерименти

### 7.1 Начални условия

Фигура 5а показва черно-бялото изображение, с което ще работим. То е с размери  $200 \times 200$  пиксела и представлява сив квадрат с черен фон. Стойността на пикселите в средата е между 153 и 202 от възможни 256 нива на сивото. Всеки елемент (пиксел) получава стойност на активатора чрез формулата

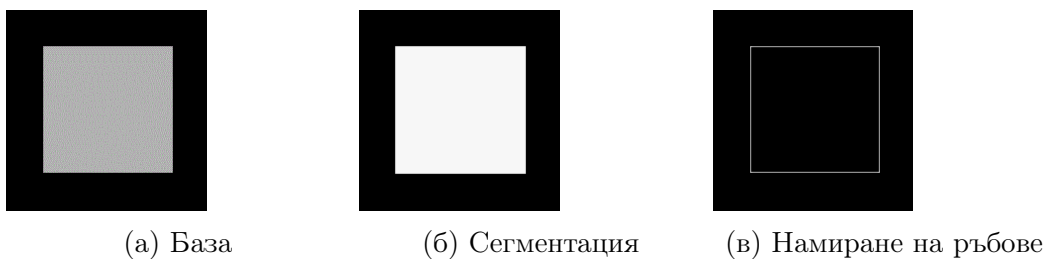
$$u_0(x, y) = \{f(x, y)/255\} \times (1 + 0.05) - 0.05,$$

където  $f(x, y)$  е стойността на пиксела в ниво на сивото ( $f(x, y) \in [0, 255]$ ). За конкретния случай получаваме  $u_0 = 0$  за фона (черния цвят) и  $u_0 \in [0.58, 0.78]$  за обекта, т.е. сивия квадрат. Всички пиксели започват със стойност на инхибитора  $v_0(x, y) = 0$ . В симулацията ни, извършена на MATLAB, задаваме и  $D_u \ll D_v$ , за да бъде изпълнено условието на Тюрингова неустойчивост [1]. Параметрите  $a$  и  $b$  са така избрани, че да получим устойчива система - моно или двуустойчива. Параметърът  $\varepsilon$  контролира скоростта на  $u$ : при по-малки  $\varepsilon$ ,  $u$  расте по-бързо. Избрали сме  $\varepsilon = 0.0006$  и разстояние между пикселите  $h = 1$ . За дифузионните коефициенти избрахме  $D_u = 2, D_v = 8$ , за да бъде изпълнено условието за неустойчивост на Тюринг.

$$\tau = \min \left\{ \frac{h^2}{4 + D_v - h^2(1 - b)}, \frac{h^2 \varepsilon}{4 \varepsilon D_u + a h^2} \right\}$$

## 7.2 Резултати

### 7.2.1 Изображения без шум

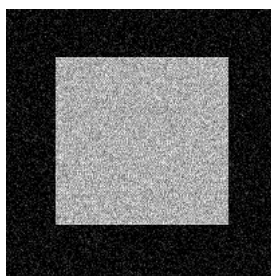


Фигура 5: Резултати от обработката на изображение

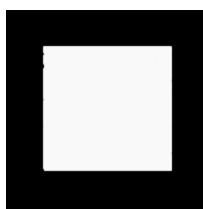
Фигури 5б и 5в показват резултатите от първата проведена симулация, използвайки коефициентите от (7.1). Успешно сме реализирали сегментация и намиране на ръбове. Алгоритъмът е сравнително бърз, сегментирането отнема около 5 сек., а намирането на ръбове - 10 сек. Разликата се дължи на удвоения брой изчисления при моноустойчивата система (там необходими са ни 220 итерации, а за сегментацията 120).

### 7.2.2 Изображения с шум

Решихме да проверим поведението на модела при добавяне на шум в базовите изображения. На картинката от фигура 5а е добавен поасонов шум, генериран от MATLAB. Забелязваме, че дебелината на линиите на изображението 7в е около 4-6px. Необходими са допълнителни изследвания за откриване на начин за допълнително изтъняване на ръбовете. На фигура 7б се вижда също, че част от обекта е "изяден" (лявата страна). Отново, необходимо е допълнително проучване.



(а) База



(б) Сегментация



(в) Намиране на ръбове

Фигура 6: Резултати от обработката на изображение

# Приложение

Приложението включва имплементация на модела (код на програмата MATLAB) и генерираните чрез него изображения, използвани в експериментите.

## MATLAB код

```
A = imread('img.gif'); % load image
A = im2double(A); % scale pixel value from 0-255 to 0-1

h = 1/4; % x step
Du = 2; % diff coeff, Du << Dv or 4*Du = Dv
Dv = 8; % diff coeff
eps = 0.0006; % 0 < eps << 1
a = 0.5; % threshold
b = 20; % 10 for mono-stable, 20 for bi-stable
tau = min( h^2 / (4 + Dv - h^2 * (1-b)),
    h^2 * eps / (4 * eps * Du + a * h^2));

n = size(A,2); % image size horizontally
m = size(A,1); % image size vertically
L = 220; % number of layers (optimal 120 - 220)

% every pixel gets its own U value
U(1:m, 1:n,1) = A(1:m, 1:n) * (1.0 + 0.05) - 0.05;
% initial V is 0 for all pixels
V(1:m, 1:n,1) = zeros(m,n);

for k = 1:L
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1

            U(i, j, k+1) = tau * Du / (h^2) * ( U(i+1, j, k) + U(i, j+1, k) + ...
            U(i-1, j, k) + U(i, j-1, k) ) + (1 - ( ( 4 * tau * Du) / h^2 )) * ...
            U(i, j, k) + tau * ( 1 / eps ) * ( U(i, j, k) * ...
            ( 1 - U(i, j, k) ) * ( U(i, j, k) - a) - V(i, j, k));

            V(i, j, k+1) = tau * Dv / (h^2) * ( V(i+1, j, k) + V(i, j+1, k) + ...
            V(i-1, j, k) + V(i, j-1, k) ) + (1 - ( ( 4 * tau * Dv) / h^2 )) * ...
            V(i, j, k) + tau * ( U(i, j, k) - b * V(i, j, k));

        end
    end

    imshow(U(:,:,k)); % show all the layers
    % show layer number
    set(gcf, 'name', ['layer ' num2str(k) ' of ' num2str(L)])
end
```

end

## Изображения



(а) База



(б) Сегментация



(в) Намиране на ръбове

Фигура 7: Резултати от обработката на изображение с повече детайли и фон с повече от един нюанс. Моделът ясно разграничава обекта от фона.

Източник: <https://www.pexels.com/>

## Литература

- [1] Mayumi Ebihara, Hitoshi Mahara, Tatsunari Sakurai, Atsushi Nomura, Hidetoshi Miike (2002), *Image Processing by a Discrete Reaction-Diffusion System*
- [2] Szili L., Toth J. (1997) *On the origin of Turing instability*
- [3] Zhang, Dongmei; Gyorgyi, Laszlo; Peltier, William R. (1993), *Deterministic chaos in the Belousov–Zhabotinsky reaction: Experiments and simulations. Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*
- [4] FitzHugh R. (1955), *Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane*
- [5] Nagumo J., Arimoto S., and Yoshizawa S. (1962), *An active pulse transmission line simulating nerve axon*
- [6] Hodgkin A.L., Huxley A.F. (1952), *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*