

Обработка на изображения чрез реакционно-дифузни модели

Пламен Никифоров, Християн Марков, Стефан Велинов

23 юни 2017 г.

Съдържание

1	Въведение	2
2	Дифузия	2
2.1	Закон за запазване	3
2.2	Закон на Фик	4
2.3	Резултати от използване на чиста дифузия	4
3	Реакция	5
3.1	Поведение на елементите	5
4	Реакционно-дифузни системи	8
4.1	Двукомпонентни системи	8
5	Постановка на задачата	8
5.1	Модел на FitzHugh-Nagumo	8
5.2	Оформяне на образи от реакционно-дифузия модел	9
6	Числено решаване	9
6.1	Числено решаване на дифузията	9
6.2	Числено решаване на реакцията	10
6.3	Диференчна схема	10

7	Обработка на изображения. Числени експерименти	11
7.1	Начални условия	11
7.2	Резултати	11
7.2.1	Изображения без шум	11
7.2.2	Изображения с шум	12
	Приложение	13
	Литература	15

1 Въведение

В този проект се запознаваме и реализираме няколко метода за обработка на изображения, предложени от Ebihara et.al [1]. Използвайки реакционно-дифузен модел (и по-конкретно този на Fitz-Hugh & Nagumo) при условията на Тюрингова неустойчивост [2] могат да се намерят ръбове на обекти, да се сегментират изображения, намалява шума и увеличава контраста. В сравнение с конвенционалните модели, разглежданият тук дава добри резултати и при наличие на шум.

Всички тестове и симулации са извършени с MATLAB.

Проектът е изготвен във връзка с дисциплината *Приложения на математиката за моделиране на реални процеси*.

2 Дифузия

Нека първо добием представа какво представлява дифузията. Най-просто казано дифузията е процес, при който някакво вещество или енергия се разпространява от зони с по-висока концентрация, към такива с по-ниска. Това явление се подчинява на едни и същи закони, независимо от същността на пренасяното вещество. За да стане по-ясно как точно работи дифузията, разглеждаме следните примери:

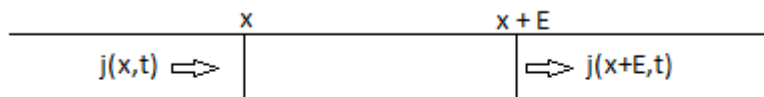
1. Представете си, че имаме метален прът и започнем да нагряваме единия му край. Нагрятият край ще има по-висока концентрация на топлина и посредством дифузията, топлината ще започне да се пренася по дължината на пръта към края с по-ниска концентрация на топлина, до достигане на равновесно положение, в което ще имаме една и съща температура по целия прът.

2. Нека имаме аквариум пълен с вода. Пускайки количество мастило в аквариума, ние увеличаваме концентрацията на мастило там, където сме го пуснали спрямо останалата част на аквариума. Мазилото ще започне да се разнася към тези части с по-ниска концентрация до достигане на положение, в което концентрацията на мастило във водата е равномерно разпределена.

Вече имайки тази интуитивна представа за това какво представлява дифузията, нека разгледаме процеса по-строго, от научна гледна точка, и да го опишем математически. За да постигнем тази цел, ще трябва да разгледаме *Закона за запазване на енергията* и *Закона на Фик*.

2.1 Закон за запазване

Да си представим, че наблюдаваме поток на някакво вещество, преминаващо по безкрайно тънка тръба. Също така можем да наблюдаваме и концентрацията на веществото във фиксирани част на тръбата и време. Нека разгледаме потока и концентрацията като функции на времето и пространството (при нас едномерно, понеже разглеждаме безкрайно тънка тръба), т.е. $j(x, t)$ - поток, $u(x, t)$ - концентрация.



Искаме разликата на потока, през точка x и потока, в точка $x + E$ да е равна на изменението в концентрацията във всички точки в интервала $[x, x + E]$. Така получаваме *Закон за запазването* в интегрална форма:

$$j(x, t) - j(x + E, t) = \int_x^{x+E} \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

Приближаваме интеграла, като използваме квадратурна формула на правоъгълника $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + O((b - a)^3)$ и получаваме:

$$j(x, t) - j(x + E, t) = E \frac{\partial u}{\partial t} \left(x + \frac{E}{2}, t \right) + O(E^3),$$

$$\frac{j(x, t) - j(x + E, t)}{E} = \frac{\partial u}{\partial t} \left(x + \frac{E}{2}, t \right) + O(E^2).$$

След граничен преход $E \rightarrow 0$, получаваме *Закон за запазване* в диференциална форма:

$$-\frac{\partial j}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t).$$

2.2 Закон на Фик

Законът на Фик ни дава връзка между дифузионния поток на едно вещество и неговата концентрация:

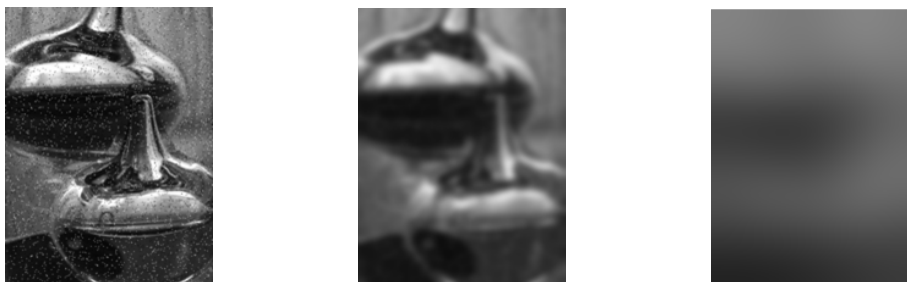
$$J = -D \frac{\partial u}{\partial x},$$

Където J е дифузионният поток, D е дифузионният коефициент, а u е концентрацията на веществото. Използвайки Закона на Фик и Закона за запазването, можем да изведем уравнението на дифузията:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

2.3 Резултати от използване на чиста дифузия

Използвайки уравнението на дифузията върху черно-бяло изображение с шум, очакваме като резултат да получим изчистване на шума за определено време, след което изображението да придобие хомогенен цвят (някакъв нюанс на сивото).



Фигура 1: Резултати от обработката на изображение с дифузия

Както се вижда на Фигура 1, получаваме точно това, което искахме, използвайки само уравнението на дифузията.

3 Реакция

Използвайки само дифузия, единственото нещо, което ще постигнем, е достигане на хомогенно изображение (някакъв нюанс на сивото, понеже ще обработваме черно-бели изображения). За да постигнем останалите цели на проекта - сегментация (разграничаване на фигура и фон) и намиране на ръбове, ще трябва да контролираме по някакъв начин дифузионния процес. Това ще постигнем, добавяйки реакционен член към уравнението на дифузията. Тази нова част от системата ще описва поведението на активатора и инхибитора, два компонента, които ще ускоряват или забавят промяната на елементите в изображението.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(1 - u)(u - a) - v \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) &= D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + u - bv\end{aligned}$$

Добавяйки реакционния член, ние променяме поведението на системата. ~~него сме описали в параграф (5.2)~~

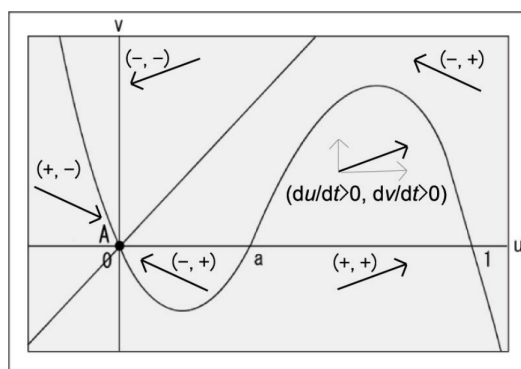
3.1 Поведение на елементите

В нашия случай елементите (пикселите на изображението) са разпределени в мрежа. Всеки елемент се състои от две субстанции. Единият е активаторът, а другият е инхибиторът. При стабилно равновесно състояние, елементите кренят ~~баланса~~ на концентрациите на двете субстанции не се изменят, т.е. системата

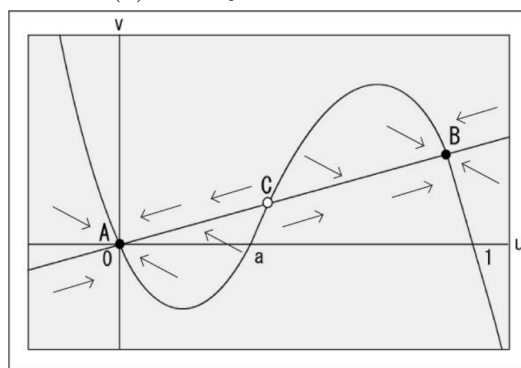
е в покой. Но, при добавяне на дори малък стимул, равновесието се губи. Ако стимулът е над определена граница, концентрацията на активатора се увеличава автоматично с времето.

Сега ще ~~проверим~~ разгледаме поведението на модела в ~~стабилно~~ равновесно състояние ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0$), без да прилагаме дифузията (т.е. $D_u = 0, D_v = 0$). Тогава получаваме следните нулеви изоклини (фиг. (2)):

$$\begin{aligned} v &= u(1-u)(u-a), \\ v &= (1/b)u. \end{aligned} \tag{1}$$



(a) Моноустойчива система



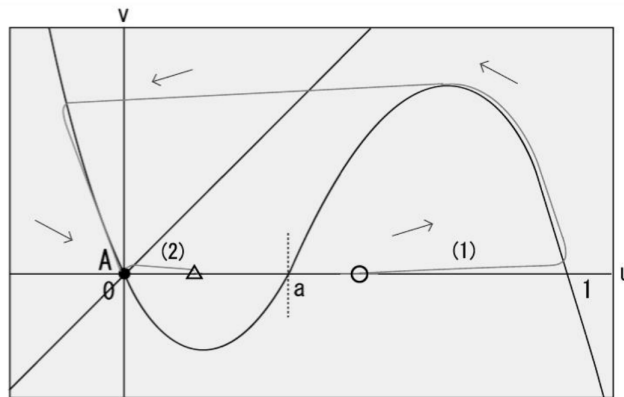
(б) Двуустойчива система

Фигура 2: Изоклини на уравненията на модела на FitzHugh-Nagumo

да се оправи този параграф: Фигура (2) показва изоклините на уравненията (1) в модела. Поведението на u и v е различно в зависимост от това в

коя област са. В пресечната точка изменението на u и v е статично (те се за нуляват едно друго). В зависимост от стойностите на константите a и b , броят на устойчиви точки се мени и система показва различни типове. Един от тях е моноустойчивия (с една стабилна точка), другият е двуустойчивия (с две). При първия, състоянието се променя след добавяне на стимул, но в крайна сметка се връща към стабилно по посока на стрелките. От друга страна, двуустойчивата система има три устойчиви точки. Ако стимулът е над границата ($u > a, v = 0$) елементът отива в състояние B , в другия случай ($u < a, v = 0$) отива към A . В точка C нямаме стабилност, затова тази точка се нарича нестабилна устойчива точка.

В зависимост от коефициентите a и b , броят устойчиви точки на системата (1) се мени. При наличието на единствена устойчива точка (2 (а)), прилагайки стимул към елемента, състоянието му се променя, но в крайна сметка се връща към устойчивост, следвайки стрелките. От друга страна, двуустойчивата система (2 (б)) има три точки на стабилност A, B, C . В този случай, ако стимулът прати елемента над границата ($u > a, v = 0$), то той се установява в състояние B ; ако стимулът е под границата ($u < a, v = 0$), отива в A . В точка C нямаме стабилност, затова тази точка се нарича нестабилна устойчива точка. Това поведение на елементите е от голяма полза, защото при промяна само на параметрите a и b ще получим два напълно различни резултата - отделяне на обекта и намиране на ръбове.



Фигура 3: Разликата в поведението при добавяне на различни стойности на стимула

Фигура 3 изобразява разликата в поведението на моноустойчивата система, в зависимост от началното условие при добавяне на различна стойност на сти-

мула. При $u_0 > a, v_0 = 0$, орбитите имат поведение, подобно на ~~етижа линията~~ (1), а накрая u и v достигат състоянието A . В другия случай ($u_0 < a, v = 0$), орбитата наподобява ~~орбита етижа линията~~ (2). Така откриваме, че параметърът a от (2) действа като граница (*threshold*).

4 Реакционно-дифузни системи

Реакционно-дифузните системи са математически модели, които описват няколко физически явления: най-честосрещаният от които е промяната във времето и пространството на концентрацията на едно или повече вещества. Локални реакции карат субстанциите да се изменят една към друга, а дифузията ги разпространява из пространството.

Такива системи се използват предимно в химията, но могат да опишат и динамични процеси от други природни области. Примери могат да се намерят в биологията, геологията, физиката, екологията и т.н. Математически погледнато, реакционно-дифузните системи са линейни параболични частни диференциални уравнения. Решенията им пък описват различни поведения - например вълни, себе-организиращи се структури като ивици, шестоъгълници или по-сложни.

4.1 Двухкомпонентни системи

Двухкомпонентните системи позволяват описване на много по-голям диапазон феномени, за разлика от еднокомпонентния си аналог. Една от най-важните идеи, свързани с тях, е предложена от Алан Тюринг. Той твърди, че едно състояние, което е стабилно в локална система, може да изгуби това си качество при наличието на дифузия.

Разглежданите в този проект системи са активатор-инхибиторните, в които един компонент стимулира собственото си и на другите компоненти възпроизвеждане, а другия инхибира (възпира) растежа им. Най-известният представител е уравнението на FitzHugh-Nagumo, който е представен в глава (5.1).

5 Постановка на задачата

5.1 Модел на FitzHugh-Nagumo

Моделът на FitzHugh-Nagumo (FHN) [4] [5] е опростена версия на модела на Hodgkin-Huxley [6], който описва детайлно активацията и деактивацията на нев-

рони.

Този модел се задава чрез уравненията

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} \cdot (u(1-u)(u-a) - v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + u - bv,\end{aligned}\tag{2}$$

където u и v са концентрациите на активатор и инхибитор, D_u и D_v са съответните коефициенти на дифузия, а ε ($0 < \varepsilon \ll 1$), a ($0 < a < 0.5$) и b ($b > 0$) са константни параметри.

Уравненията (2) определят поведението на u и v с течение на времето.

5.2 Оформяне на образи от реакционно-дифузия модел

Субстанциите (активатор и инхибитор) се разменят между елементите, благодарение на дифузионната част на уравненията (2). Ако един елемент се включи, т.е. концентрациите на u и v се увеличат, той отделя голямо количество от тях към съседите си. Те от своя страна ги получават и също се включват, ако концентрациите на активатор и инхибитор също са над границата.

Подобен феномен се наблюдава и в някои химични експерименти. Например, реакцията на Белусов-Жаботински [3] се себеорганизира във формата на спирала или мишена. От подобни примери можем да заключим, че механизмът на Тюринговата неустойчивост ($D_u \ll D_v$) **да се обясни защо е така!!!** е важно условие за устойчиво ~~стабилно~~ формиране на образи. При това условие ($D_u \ll D_v$) ще представим няколко алгоритъма за обработка на изображения, като намиране на ръбове и сегментация.

6 Числено решаване

6.1 Числено решаване на дифузията

За да решим уравнението на дифузията използваме метод на крайните разлики, като приближаваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

където h^2 е дискретизираната стъпка по пространството, а u_i е стойността на функцията в i -та позиция. Използвайки това приближение имаме грешка от порядък $O(h^2)$.

6.2 Числено решаване на реакцията

Нека разгледаме реакционния член на нашата система.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= u(1-u)(u-a) - v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u - bv\end{aligned}$$

Изхождайки от дефиницията за производна $\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$, ако предположим, че Δt е достатъчно малко, можем да премахнем граничния преход и да получим уравнение за стойността на функцията в момент $t + \Delta t$, зависещо от стойността в момент t . Така получаваме:

$$\begin{aligned}u(x, t + \Delta t) &= \Delta t[u(1-u)(u-a) - v] - u \\ v(x, t + \Delta t) &= \Delta t(u - bv) - v\end{aligned}$$

6.3 Диференчна схема

За решаване на системата на FitzHugh-Nagumo използваме следната диференчна схема:

$$\begin{aligned}U_{i,j}^{k+1} &= \frac{\tau D_u}{h^2}(U_{i+1,j}^k + U_{i,j+1}^k + U_{i-1,j}^k + U_{i,j-1}^k) + \left(1 - \frac{4\tau D_u}{h^2}\right)U_{i,j}^k + \\ &\quad + \tau \frac{1}{\varepsilon}[U_{i,j}^k(1 - U_{i,j}^k(U_{i,j}^k - a) - V_{i,j}^k)] \\ V_{i,j}^{k+1} &= \frac{\tau D_v}{h^2}(V_{i+1,j}^k + V_{i,j+1}^k + V_{i-1,j}^k + V_{i,j-1}^k) + \left(1 - \frac{4\tau D_v}{h^2}\right)V_{i,j}^k + \tau(V_{i,j}^k - bV_{i,j}^k),\end{aligned}\tag{3}$$

където k е слой по времето (т.е. поредната итерация), а i и j са координатите на елемента (пиксела) в мрежата на изображението.

7 Обработка на изображения. Числени експерименти

7.1 Начални условия

Фигура (4а) показва черно-бялото изображение, с което ще работим. То е с размери 200×200 пиксела и представлява сив квадрат с черен фон. Стойността на пикселите в средата е между 153 и 202 от възможни 256 нива на сивото. Всеки елемент (пиксел) получава ~~свободна~~ стойност на активатора чрез формулата

$$u_0(x, y) = \{f(x, y)/255\} \times (1 + 0.05) - 0.05,$$

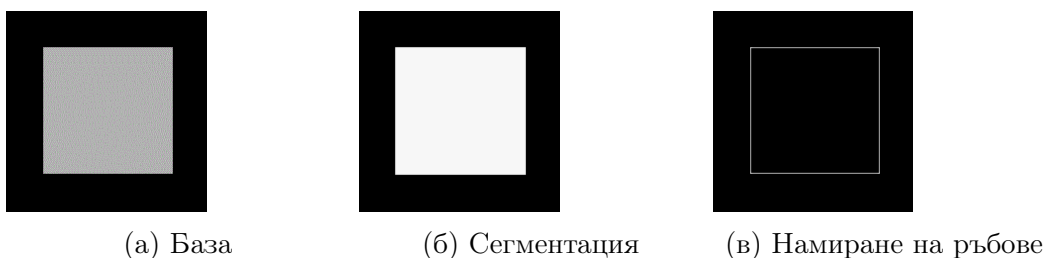
където $f(x, y)$ е стойността на пиксела в ниво на сивото ($f(x, y) \in [0, 255]$). За конкретния случай получаваме $u_0 = 0$ за фона (черния цвят) и $u_0 \in [0.58, 0.78]$ за обекта, т.е. сивия квадрат. Всички пиксели започват със стойност на инхибитора $v_0(x, y) = 0$. В симулацията ни, извършена на MATLAB, задаваме и $D_u \ll D_v$, за да бъде изпълнено условието на Тюрингова ~~нестабилност~~ неустойчивост. Параметрите a и b са така избрани, че да получим ~~стабилна~~ устойчива система - моно или двуустойчива. Параметърът ε контролира скоростта на u : при по-малки ε , u расте по-бързо. Избрали сме $\varepsilon = 0.0006$ и разстояние между пикселите $h = 1$. За дифузионните коефициенти избрахме $D_u = 2, D_v = 8$, за да бъде изпълнено условието за неустойчивост на Тюринг. Важно е да се отбележи, че коефициентите, използвани от модела, и по-конкретно h — разстоянието между пикселите, стойностите на дифузионните коефициенти D_u и D_v , и стъпката по времето τ претърпяха редица промени, тъй като не разполагахме с ясно дефинирани ограничения за тях. В крайна сметка се спряхме на $h = 1, D_u = 2, D_v = 8$. За τ трябваше да поставим следното ограничение, произхождащо от (3), тъй като при много големи стойности получаваме неустойчива система:

$$\tau = \min \left\{ \frac{h^2}{4 + D_v - h^2(1 - b)}, \frac{h^2 \varepsilon}{4 \varepsilon D_u + a h^2} \right\}$$

7.2 Резултати

7.2.1 Изображения без шум

Фигури (4б) и (4в) показват резултатите от първата проведена симулация, използвайки коефициентите от (7.1). Успешно сме реализирали сегментация и намиране на ръбове. Алгоритъмът е сравнително бърз, сегментирането отнема

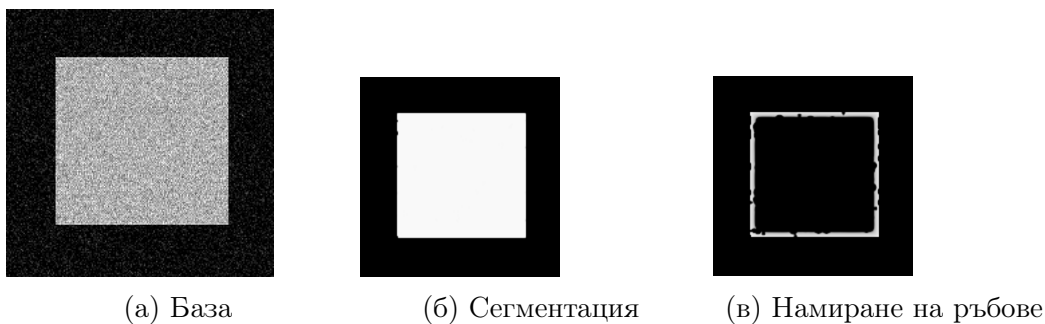


Фигура 4: Резултати от обработката на изображение

около 5 сек., а намирането на ръбове - 10 сек. Разликата се дължи на удвоения брой изчисления при моноустойчивата система (там необходими са ни 220 итерации, а за сегментацията 120).

7.2.2 Изображения с шум

Решихме да проверим поведението на модела при добавяне на шум в базовите изображения. На картинката от фигура (4а) е добавен поасонов шум, генериран от MATLAB. Забелязваме, че дебелината на линиите на изображението (6в) е около 4-6px. Необходими са допълнителни изследвания за откриване на начин за допълнително изтъняване на ръбовете. На фигура (6б) се вижда също, че част от обекта е "изяден" (лявата страна). Отново, необходимо е допълнително проучване.



Фигура 5: Резултати от обработката на изображение

Приложение

Приложението включва имплементация на модела (код на програмата MATLAB) и генерираните чрез него изображения, използвани в експериментите.

MATLAB код

```
A = imread('img.gif'); % load image
A = im2double(A); % scale pixel value from 0-255 to 0-1

h = 1/4; % x step
Du = 2; % diff coeff, Du << Dv or 4*Du = Dv
Dv = 8; % diff coeff
eps = 0.0006; % 0 < eps << 1
a = 0.5; % threshold
b = 20; % 10 for mono-stable, 20 for bi-stable
tau = min( h^2 / (4 + Dv - h^2 * (1-b)),
    h^2 * eps / (4 * eps * Du + a * h^2));

n = size(A,2); % image size horizontally
m = size(A,1); % image size vertically
L = 220; % number of layers (optimal 120 - 220)

% every pixel gets its own U value
U(1:m, 1:n,1) = A(1:m, 1:n) * (1.0 + 0.05) - 0.05;
% initial V is 0 for all pixels
V(1:m, 1:n,1) = zeros(m,n);

for k = 1:L
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1

            U(i, j, k+1) = tau * Du / (h^2) * ( U(i+1, j, k) + U(i, j+1, k) + ...
            U(i-1, j, k) + U(i, j-1, k) ) + (1 - ( ( 4 * tau * Du) / h^2 )) * ...
            U(i, j, k) + tau * ( 1 / eps ) * ( U(i, j, k) * ...
            ( 1 - U(i, j, k) ) * ( U(i, j, k) - a) - V(i, j, k));

            V(i, j, k+1) = tau * Dv / (h^2) * ( V(i+1, j, k) + V(i, j+1, k) + ...
            V(i-1, j, k) + V(i, j-1, k) ) + (1 - ( ( 4 * tau * Dv) / h^2 )) * ...
            V(i, j, k) + tau * ( U(i, j, k) - b * V(i, j, k));

        end
    end

    imshow(U(:,:,k)); % show all the layers
    % show layer number
    set(gcf, 'name', ['layer ' num2str(k) ' of ' num2str(L)])
end
```

end

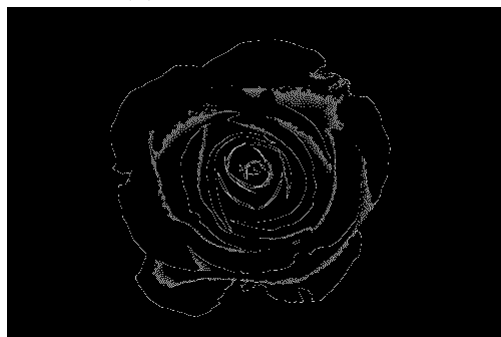
Изображения



(а) База



(б) Сегментация



(в) Намиране на ръбове

Фигура 6: Резултати от обработката на изображение с шум. Моделът ясно разграничава обекта от фона.
Източник: <https://www.pexels.com/>

Литература

- [1] Mayumi Ebihara, Hitoshi Mahara, Tatsunari Sakurai, Atsushi Nomura, Hidetoshi Miike (2002), *Image Processing by a Discrete Reaction-Diffusion System*
- [2] Szili L., Toth J. (1997) *On the origin of Turing instability*
- [3] Zhang, Dongmei; Gyorgyi, Laszlo; Peltier, William R. (1993), *Deterministic chaos in the Belousov–Zhabotinsky reaction: Experiments and simulations. Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*
- [4] FitzHugh R. (1955), *Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane*
- [5] Nagumo J., Arimoto S., and Yoshizawa S. (1962), *An active pulse transmission line simulating nerve axon*
- [6] Hodgkin A.L., Huxley A.F. (1952), *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*