Обработка на изображения чрез реакционно-дифузни модели

Пламен Никифоров, Християн Марков, Стефан Велинов

30 май 2017 г.

Съдържание

1 Въведение

В този проект представяме методи за обработка на изображения. Използвайки реакционно-дифузен модел (и по-конкретно този на Fitz-Hugh & Nagumo) при условията на Тюрингова нестабилност може да намираме ръбове на обекти, сегментираме изображения, намаляваме шума и увеличаваме контраста. В сравнение с конвенционалните методи, предложеният тук дава по-добри резултати при наличие на шум.

2 Дифузия

Нека първо добием представа какво представлява дифузията. Най-просто казано дифузията е процес, при който някакво вещество или енергия се разпространява от зони с по-висока концентрация, към такива с по-ниска. Това явление се подчинява на едни и същи закони, независимо от същността на пренасяното вещество. За да стане по-ясно как точно работи дифузията разглеждаме следните примери:

1. Представете си, че имаме метален прът и започнем да нагряваме единия му край. Нагрятият край ще има по-висока концентрация на топлина и посредством дифузията, топлината ще започне да се пренася по дължината на пръта, към края с по-ниска концентрация на топлина, до достигане на равновесно положение в което ще имаме една и съща температура по целия прът.

2. Нека имаме аквариум пълен с вода. Пускайки количество мастило в аквариума, ние увеличаваме концентрацията на мастило там, където сме го пуснали спрямо останалата част на аквариума. Мастилото ще започне да се разнася към тези части с по-ниска концентрация, до достигане на положение, в което концентрацията на мастило във водата е равномерно разпределена.

Вече имайки тази интуитивна представа за това какво представлява дифузията, нека разгледаме процеса по-строго от научна гледна точка и да го опишем математически. За да постигнем тази цел, ще трябва да разгледаме *Закона за запазване на енергията* и *Закона на Фик*.

3 Реакция

4 Реакционно-дифузни системи

Реакционно-дифузните системи са математически модели, които описват няколко физически явления: най-честосрещаният от които е промяната във времето и пространството на концецтрацията на едно или повече вещества. Локални реакции карат субстанциите да се изменят една към друга, а дифузията ги разпространява из пространството.

Такива системи се използват предимно в химията, но могат да опишат и динамични процеси от други природни области. Примери могат да се намерят в биологията, геологията, физиката, екологията и т.н. Математически погледнато, реакционно-дифузните системи са линейни параболични частни диференциални уравнения. Решенията им пък описват различни поведения - например вълни, себе-организиращи се структури като ивици, шестоъгълници или по-сложни.

4.1 Двукомпонентни системи

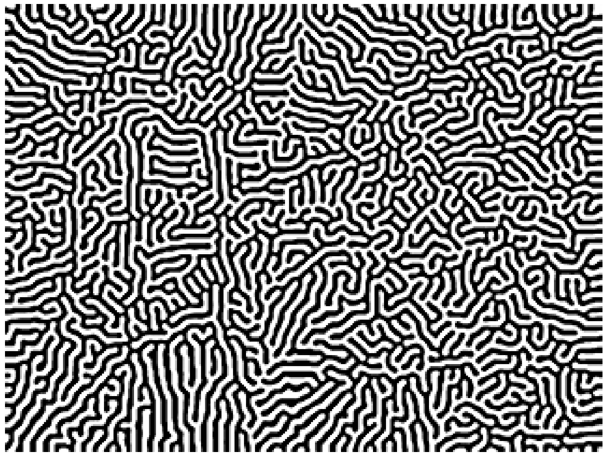
Двукомпонентните системи позволяват описване на много по-голям диапазон феномени, за разлика от еднокомпонентния си аналог. Една от най-важните идеи, свързани с тях, е предложена от Алан Тюринг. Той твърди, че едно състояние, което е стабилно в локална система, може да изгуби това си качество при наличието на дифузия.

Разглежданите в този проект системи са активатор-инхибиторните, в които един компонент стимулира собственото си и на другите компоненти възпроизвеждане, а другия инхибира (възпира) растежа им. Най-известният представител е уравнението на FitzHugh-Nagumo, който е представен в 6.1

5 Оформяне на образи

Науката на оформянето на образи (англ.: *pattern formation*) се занимава с процесите, които водят до създаването на образи и структури, подобни на тези в природата.

Съществуват редица автоматизирани методи за създаване на органично изглеждащи текстури и триизмерни обекти. Много често компютри се използват за симулиране на биологични, физични или химични процеси, които водят до оформяне на образи и визуализирането им. Най-често срещаните модели за тази цел са реакционно-дифузните и MClone.



Фигура 1: Структура, наподобяваща реакционно-дифузен модел

6 Постановка на задачата

6.1 Модел на FitzHugh-Nagumo

Моделът на FitzHugh-Nagumo (FHN) е опростена версия на модела на Hodgkin-Huxley, който описва детайлно активацията и деактивацията на неврони.

Този модел се задава чрез уравненията

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} \cdot u(1-u)(u-a) - v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + u - bv, \end{aligned} \tag{1}$$

където u и v са концентрациите на активатор и инхибитор, D_u и D_v са съответните коефициенти на дифузия, а $\varepsilon(0 < \varepsilon << 1), a(0 < a < 0.5)$ и $b(b > 0)$ са константни параметри.

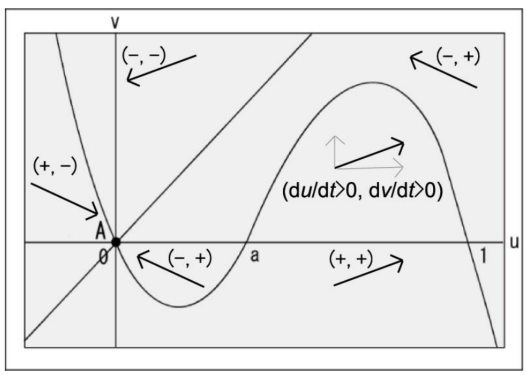
Уравненията 1 определят поведението на u и v с течение на времето.

6.2 Поведение на елементите

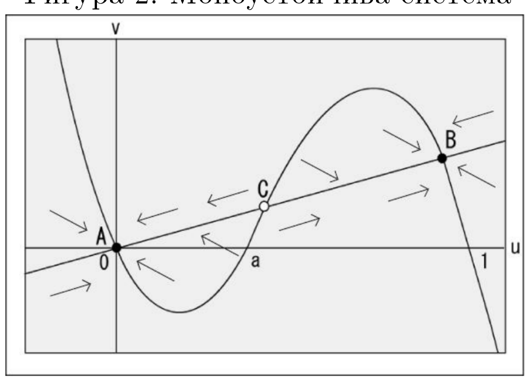
В нашия случай, елементите (пикселите на изображението) са разпределени в мрежа. Всеки елемент се състои от две субстанции. Единият е активаторът, а другият е инхибиторът. При стабилно състояние, елементите крепят баланса на концентрациите на двете субстанции. Но, при добавяне на дори малък стимул, равновесието се губи. Ако стимулът е над определена граница, концентрацията на активатора се увеличава автоматично с времето.

Сега ще проверим поведението на модела в стабилно състояние ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0$), без да прилагаме дифузията (т.е. $D_u = 0, D_v = 0$). Тогава получаваме следните изоклини:

$$\begin{aligned} v &= u(1-u)(u-a), \\ v &= (1/b)u \end{aligned} \tag{2}$$

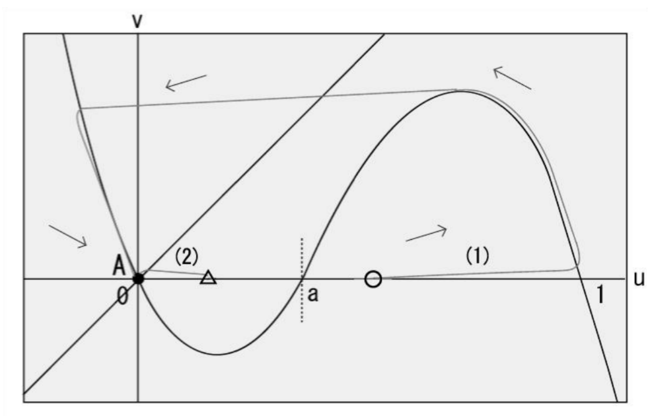


Фигура 2: Моноустойчива система



Фигура 3: Двуустойчива
Изоклини на уравненията на модела на FitzHugh-Nagumo

Фигура 3 показва изоклините на уравненията в модела. Поведението на u и v е различно в зависимост от това в коя област са. В пресечната точка изменението на u и v е статично (те се зануляват едно друго). В зависимост от стойностите на константите a и b, броят на устойчиви точки се мени и система показва различни типове. Един от тях е моноустойчивия (с една стабилна точка), другият е двуустойчивия (с две). При първия, състоянието се променя след добавяне на стимул, но в крайна сметка се връща към стабилно по посока на стрелките. От друга страна, двуустойчивата система има три устойчиви точки. Ако стимулът е над границата ($u > a, v = 0$) елементът отива в състояние B, в другия случай ($u < a, v = 0$) отива към A. В точка C нямаме стабилност, затова тази точка се нарича нестабилна устойчива точка.



Фигура 4: Разликата в поведението при добавяне на различни стойности на стимула

Фигура 4 изобразява разликата в поведението на моноустойчивата система, при добавяне на различна стойност на стимула. При $u > a, v = 0$, орбитата стига линията (1), а накрая u и v достигат състоянието A. В другиш случай ($u < a, v = 0$), орбита стига линията (2). Така откриваме, че параметърът a от 1 действа като граница (*threshold*).