Обработка на изображения чрез реакционно-дифузни модели

Пламен Никифоров, Християн Марков, Стефан Велинов

10 юни 2017 г.

Съдържание

1 Въведение

В този проект се запознаваме с и реализираме няколко метода за обработка на изображения, предложени от Ebihara et.al [1]. Използвайки реакционно-дифузен модел (и по-конкретно този на Fitz-Hugh & Nagumo) при условията на Тюрингова нестабилност могат да се намерят ръбове на обекти, да се сегментират изображения, намалява шума и увеличава контраста. В сравнение с конвенционалните модели, разглежданият тук дава по-добри резултати при наличие на шум.

Всички тестове и симулации са извършени с MATLAB.

Проектът е изготвен във връзка с дисциплината *Приложения на математиката за моделиране на реални процеси*.

2 Дифузия

Нека първо добием представа какво представлява дифузията. Най-просто казано дифузията е процес, при който някакво вещество или енергия се разпространява от зони с по-висока концентрация, към такива с по-ниска. Това явление се подчинява на едни и същи закони, независимо от същността на пренасяното вещество. За да стане по-ясно как точно работи дифузията разглеждаме следните примери:

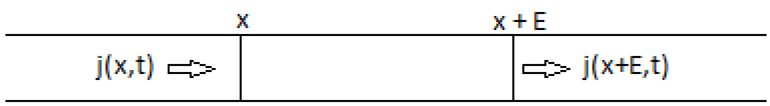
1. Представете си, че имаме метален прът и започнем да нагряваме единия му край. Нагрятият край ще има по-висока концентрация на топлина и посредством дифузията, топлината ще започне да се пренася по дължината на пръта, към края с по-ниска концентрация на топлина, до достигане на равновесно положение в което ще имаме една и съща температура по целия прът.

2. Нека имаме аквариум пълен с вода. Пускайки количество мастило в аквариума, ние увеличаваме концентрацията на мастило там, където сме го пуснали спрямо останалата част на аквариума. Мастилото ще започне да се разнася към тези части с по-ниска концентрация, до достигане на положение, в което концентрацията на мастило във водата е равномерно разпределена.

Вече имайки тази интуитивна представа за това какво представлява дифузията, нека разгледаме процеса по-строго от научна гледна точка и да го опишем математически. За да постигнем тази цел, ще трябва да разгледаме *Закона за запазване* и *Закона на Фик.*

2.1 Закон за запазване

Да си представим, че наблюдаваме поток на някакво вещество преминаващо по безкрайно тънка тръба. Също така можем да наблюдаваме и концентрацията на веществото във фиксирани част на трабата и време. Нека разгледаме потока и концентрацията като функции на времето иs пространството(при нас едномерно, понеже разглеждаме безкрайно тънка тръба),т.е. j(x,t)-поток, u(x,t)-концентрация.



Искаме празликата на потокът, който влиза в точка x и потокът който излиза от точка x+E да е равна на изменението в концентрацията във всички точки в интервала (x,x+E). Така получаваме закон за запазването в интегрална форма.

$$j(x,t) - j(x+E,t) = \int_x^{x+E} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{dx}$$

Приближаваме интеграла, като използваме квадратурна формула на правоъгълника $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + O((b-a)^3)$ и получаваме:

$$j(x,t) - j(x+E,t) = E\frac{\partial u}{\partial t}(x + \frac{E}{2}, t) + O(E^3)$$
$$\frac{j(x,t) - j(x+E,t)}{E} = \frac{\partial u}{\partial t}(x + \frac{E}{2}, t) + O(E^2)$$

След граничен преход $E \to 0$, получаваме закаон за запазване в диференциална форма.

$$-\frac{\partial j}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

2.2 Закон на Фик

Законът на фик ни дава връзка между дифузионният поток на едно вещество и неговата концентрация.

$$J = -D\frac{\partial u}{\partial x}$$

Където J е дифузионния поток, D е дифузионният кеофициент, а u е концентрацията на веществото. Използвайки законът на Фик и законът за запазването можем да изведем уравнението на дифузията:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

2.3 Числено решаване

3 Реакция

Използвайки само дифузия единственото нещо което ще постигнем е достигане на хомогенно изображение(някакъв нюанс на сивото понеже ще обработваме черно бели изображения). За да постигнем останалите цели на проекта - сегментация(разграничаване на фигура и фон) и намиране на ръбове, ще трябва да контролираме по някакъв начин дифузионния процес. Това ще постигнем, добавяйки реакционен член към уравнението на дифузията.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = Du\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(1-u)(u-a) - v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = Dv\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + u - bv$$

Смисълът на реакционната част разглеждаме по-подробно в глава 5.2.

3.1 Числено решаване

4 Реакционно-дифузни системи

Реакционно-дифузните системи са математически модели, които описват няколко физически явления: най-честосрещаният от които е промяната във времето и пространството на конценцтрацията на едно или повече вещества. Локални реакции карат субстанциите да се изменят една към друга, а дифузията ги разпространява из пространството.

Такива системи се използват предимно в химията, но могат да опишат и динамични процеси от други природни области. Примери могат да се намерят в биологията, геологията, физиката, екологията и т.н. Математически погледнато, реакционно-дифузните системи са линейни параболични частни диференциални уравнения. Решенията им пък описват различни поведения - например вълни, себе-организиращи се структури като ивици, шестоъгълници или по-сложни.

4.1 Двукомпонентни системи

Двукомпонентните системи позволяват описване на много по-голям диапазон феномени, за разлика от еднокомпонентния си аналог. Една от най-важните идеи, свързани с тях, е предложена от Алан Тюринг. Той твърди, че едно състояние, което е стабилно в локална система, може да изгуби това си качество при наличието на дифузия.

Разглежданите в този проект системи са активатор-инхибиторните, в които един компонент стимулира собственото си и на другите компоненти възпроизвеждане, а другия инхибира (възпира) растежа им. Най-известният представител е уравнението на FitzHugh-Nagumo, който е представен в 5.1

5 Постановка на задачата

5.1 Модел на FitzHugh-Nagumo

Моделът на FitzHugh-Nagumo (FHN) е опростена версия на модела на Hodgkin-Huxley, който описва детайлно активацията и деактивацията на неврони.

Този модел се задава чрез уравненията

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} \cdot u(1-u)(u-a) - v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \nabla^2 v + u - bv, \end{aligned} \tag{1}$$

където u и v са концентрациите на активатор и инхибитор, D_u и D_v са съответните коефициенти на дифузия, а $\varepsilon(0 < \varepsilon << 1), a(0 < a < 0.5)$ и $b(b > 0)$ са константни параметри.

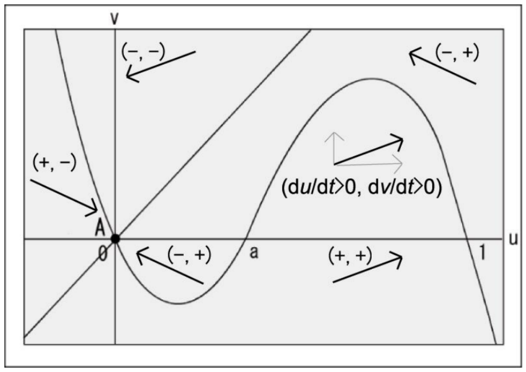
Уравненията 1 определят поведението на u и v с течение на времето.

5.2 Поведение на елементите

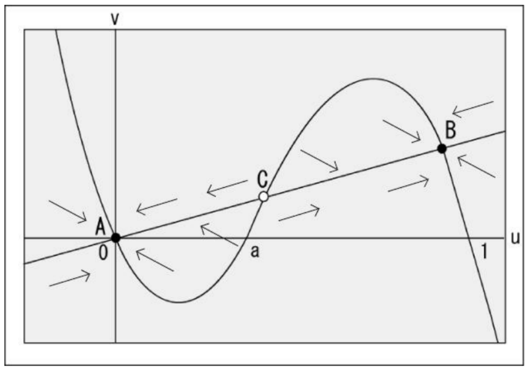
В нашия случай, елементите (пикселите на изображението) са разпределени в мрежа. Всеки елемент се състои от две субстанции. Единият е активаторът, а другият е инхибиторът. При стабилно състояние, елементите крепят баланса на концентрациите на двете субстанции. Но, при добавяне на дори малък стимул, равновесието се губи. Ако стимулът е над определена граница, концентрацията на активатора се увеличава автоматично с времето.

Сега ще проверим поведението на модела в стабилно състояние ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0$), без да прилагаме дифузията (т.е. $D_u = 0, D_v = 0$). Тогава получаваме следните изоклини:

$$\begin{aligned} v &= u(1-u)(u-a), \\ v &= (1/b)u \end{aligned} \tag{2}$$



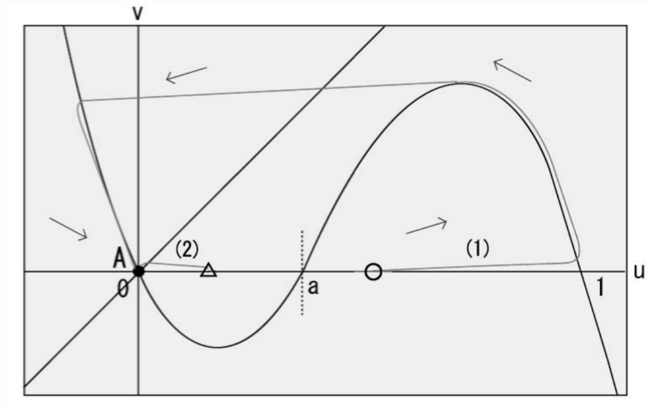
(а) Моноустойчива система



(б) Двуустойчива система

Фигура 1: Изоклини на уравненията на модела на FitzHugh-Nagumo

Фигура 1 показва изоклините на уравненията в модела. Поведението на u и v е различно в зависимост от това в коя област са. В пресечната точка изменението на u и v е статично (те се зануляват едно друго). В зависимост от стойностите на константите a и b, броят на устойчиви точки се мени и система показва различни типове. Един от тях е моноустойчивия (с една стабилна точка), другият е двуустойчивия (с две). При първия, състоянието се променя след добавяне на стимул, но в крайна сметка се връща към стабилно по посока на стрелките. От друга страна, двуустойчивата система има три устойчиви точки. Ако стимулът е над границата ($u > a, v = 0$) елементът отива в състояние B, в другия случай ($u < a, v = 0$) отива към A. В точка C нямаме стабилност, затова тази точка се нарича нестабилна устойчива точка.



Фигура 2: Разликата в поведението при добавяне на различни стойности на стимула

Фигура 2 изобразява разликата в поведението на моноустойчивата система, при добавяне на различна стойност на стимула. При $u > a, v = 0$, орбитата стига линията (1), а накрая u и v достигат състоянието A. В другия случай ($u < a, v = 0$), орбита стига линията (2). Така откриваме, че параметърът a от (1) действа като граница (*threshold*).

5.3 Оформяне на образи от реакционно-дифузния модел

Субстанциите (активатор и инхибитор) се разменят между елементите, благодарение на дифузионната част на уравненията (1). Ако един елемент се включи, т.е. концентрациите на u и v се увеличат, той отделя голямо количество от тях към съседите си. Те на своя страна ги получават и също се включват, ако концентрациите на активатор и инхибитор също са над границата.

Подобен феномен се наблюдава и в някои химични експерименти. Например, реакцията на Белусов-Жаботински се себеорганизира във формата на спирала или мишена. От подобни примери можем да заключим, че механизмът на Тюринговата нестабилност ($D_u << D_v$) е важно условие за стабилно формиране на образи. При това условие ($D_u << D_v$) ще представим няколко алгоритъма за обработка на изображения, като намиране на ръбове и сегментация.

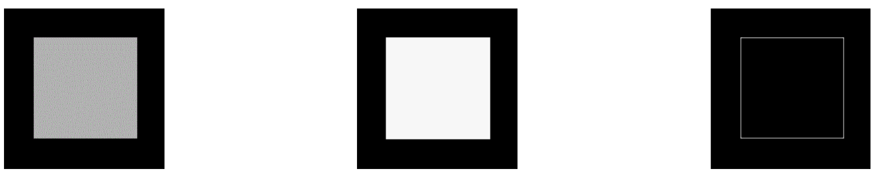
6 Обработка на изображения

6.1 Начални условия

Фигура (3а) показва черно-бялото изображение, с което ще работим. То е с размери 200×200 пиксела и представлява сив квадрат с черен фон. Стойността на пикселите в средата е между 153 и 202 от възможни 256 нива на сивото. Всеки елемент (пиксел) получава собствена стойност на активатора чрез формулата

$$u_0(x, y) = \{f(x, y)/255\} \times (1 + 0.05) - 0.05, \tag{3}$$

където $f(x, y)$ е стойността на пиксела в ниво на сивото $(f(x, y) \in [0, 255]$. За конкретния случай получаваме $u_0 = 0$ за фона (черния цвят) и $u_0 \in [0.58, 0.78]$ за обекта, т.е. сивия квадрат. Всички пиксели започват със стойност на инхибитора $v_0(x, y) = 0$.



(а) База (б) Сегментация (в) Намиране на ръбове

Фигура 3: Резултати от обработката на изображение

В симулацията ни, извършена на MATLAB, задаваме $D_u << D_v$, за да бъде изпълнено условието на Тюрингова нестабилност. Параметрите a и b са така избрани, че да получим стабилна система - моно или двуустойчива. Параметърът ε контролира скоростта на u: при по-малки ε, u расте по-бързо. Избираме $\varepsilon = 0.0006$.

6.2 Резултати

Фигури (3б) и (3в) показват резултатите от проведената симулация. Успешно сме реализирали сегментация и намиране на ръбове. Важно е да се отбележи, че коефициентите, използвани от модела, и по-конкретно h - 'разстоянието' между пикселите, стойностите на дифузионните коефициенти D_u и D_v, и стъпката по времето τ претърпяха редица промени. В крайна сметка се спряхме на $h = 1, D_u = 2, D_v = 8$. За τ трябваше да поставим следното ограничение:

$$\tau = \min\left\{\frac{h^2}{4 + D_v - h^2(1-b)}, \frac{h^2\varepsilon}{4\varepsilon D_u + ah^2}\right\} \tag{4}$$

Приложение

```
A = imread('img.gif'); % load image
A = im2double(A); % scale pixel value from 0-255 to 0-1

h = 1/4; % x step
Du = 2; % diff coeff, Du << Dv or 4*Du = Dv
Dv = 8; % diff coeff
eps = 0.0006; % 0 < eps << 1
a = 0.5; % threshold
b = 20; % 10 for mono-stable, 20 for bi-stable
tau = min( h^2 / (4 + Dv - h^2 * (1-b)),
 h^2 * eps / (4 * eps * Du + a * h^2));

n = size(A,2); % image size horizontally
m = size(A,1); % image size vertically
L = 220; % number of layers (optimal 120 - 220)

% every pixel gets its own U value
U(1:m, 1:n,1) = A(1:m, 1:n) * (1.0 + 0.05) - 0.05;
% initial V is 0 for all pixels
V(1:m, 1:n,1) = zeros(m,n);

for k = 1:L
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1

        U(i, j, k+1) = tau * Du / (h^2) * ( U(i+1, j, k) + U(i, j+1, k) + ...
        U(i-1, j, k) + U(i, j-1, k) ) + (1 - ( ( 4 * tau * Du) / h^2 )) * ...
        U(i, j, k) + tau * ( 1 / eps ) * ( U(i , j, k) * ...
        ( 1 - U(i, j, k) ) * ( U(i, j, k) - a) - V(i, j, k));

        V(i, j, k+1) = tau * Dv / (h^2) * ( V(i+1, j, k) + V(i, j+1, k) + ...
        V(i-1, j, k) + V(i, j-1, k) ) + (1 - ( ( 4 * tau * Dv) / h^2 )) * ...
        V(i, j, k) + tau * ( U(i , j, k) - b * V(i, j, k));

        end
    end

    imshow(U(:,:,k)); % show all the layers
    % show layer number
    set(gcf, 'name', ['layer ' num2str(k) ' of ' num2str(L)])
end
```

Литература

[1] Mayumi Ebihara, Hitoshi Mahara, Tatsunari Sakurai, Atsushi Nomura, Hidetoshi Miike. *Image Processing by a Discrete Reaction-Diffusion System*, 2002