Сравнение на Монте Карло методи

Проект на Елица Илиева, Християн Марков, Пламен Никифоров

СЧМС летен семестър 2017г.

ФМИ-СУ

Увод

- Монте Карло методите са числени методи, чрез които могат да се решават и оценяват статистически математически задачи
- Използват се случайни величини, процеси и функции
- МКМ са с проста конструкция, предпочитани са за изследвания в математиката, физиката, химията и инженерните науки

Плюсове и минуси на МКМ

- Проста конструкция
- Универсалност

- Бавна сходимост (грешка O($N^{-1/2}$))
- Твърде много компютърно време

МКМ за пресмятане на интеграли

- Нека имаме за приближено пресмятане интеграла $I = \int_G f(x)dx$, $G=[0,1]^s$
- Монте Карло квадратурата се основава на вероятностната интерпретация на интеграла ($I[f]=E[f(x)]$):

$$\mathbf{I_N = 1/N\sum_1^N f(x_n),}$$

където $x_1, x_2, \dots, x_N$ са независими равномерно разпределени случайни числа

- Грешката $\varepsilon_N[f]=|I[f]-I_N[f]|$ е пропорционална на $\sigma/N^{1/2}$

Сходимостта на МКМ

- МКМ имат ниска скорост на сходимост ($O(N^{-1/2})$)
- Можем да ускорим процеса чрез:
  - Намаляване на дисперсията
  - Използване на други редици с по-добър порядък, вместо псевдослучайни

Квазислучайни редици

- Имат възможно най-добра равномерност (т.е. по-добра сходимост при квадратурни формули)
- Дискрепанс – отклонение от равномерността
- За редица от N точки в $[0,1]^s$ дефинираме

$$R_N(J) = 1/N\{\#\{x_n \in J\}-\mathrm{vol}(J)\} \text{ за всяко } J \in [0,1]^s$$

$D_N^* = \sup_{E^*} |R_N(J)|$, E^* - множество от всички правоъгълници с връх в 0

- Една редица се нарича квазислучайна, ако $D_N^* \leq c(\log N)^s N^{-1}$

Неравенство на Коксма-Хлавка

- Разглеждаме $I = \int_G f(x)dx$, $G=[0,1]^s$
- Приближено решение: $I_N = 1/N\sum_1^N f(x_n)$
- Грешка $\varepsilon[f]=I[f]-I_N[f]$
- Съгласно теоремата на Коксма-Хлавка

$$\varepsilon[f] \leq V[f]\, D_N^*$$

- Порядъкът на грешката е $O((\log N)^s N^{-1})$

Сравнение на грешките в МК и квази-МК

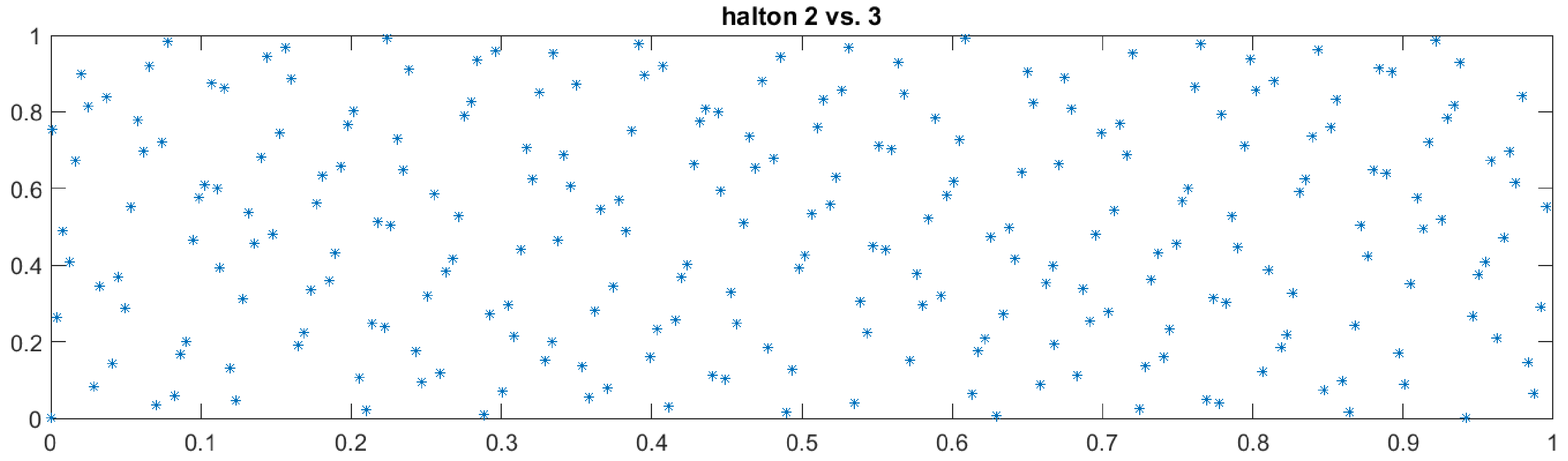
- Оценките и на двете грешки са произведение на два множителя: един, който зависи от редицата, и един, който зависи от функцията
- Неравенството на Коксма-Хлавка е граница на най-лошия случай, докато грешката при МК има вероятностен характер
- V[f] в Коксма-Хлавка обикновено е свръхоценка, докато дискрепанса показва действителното поведение

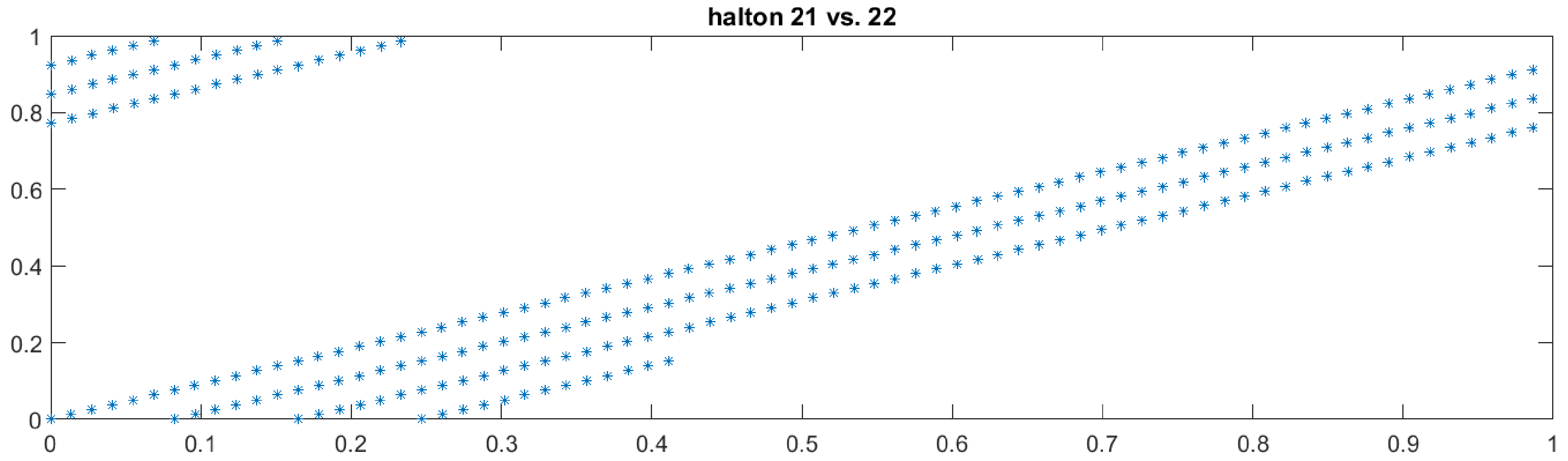
Редици на Холтън

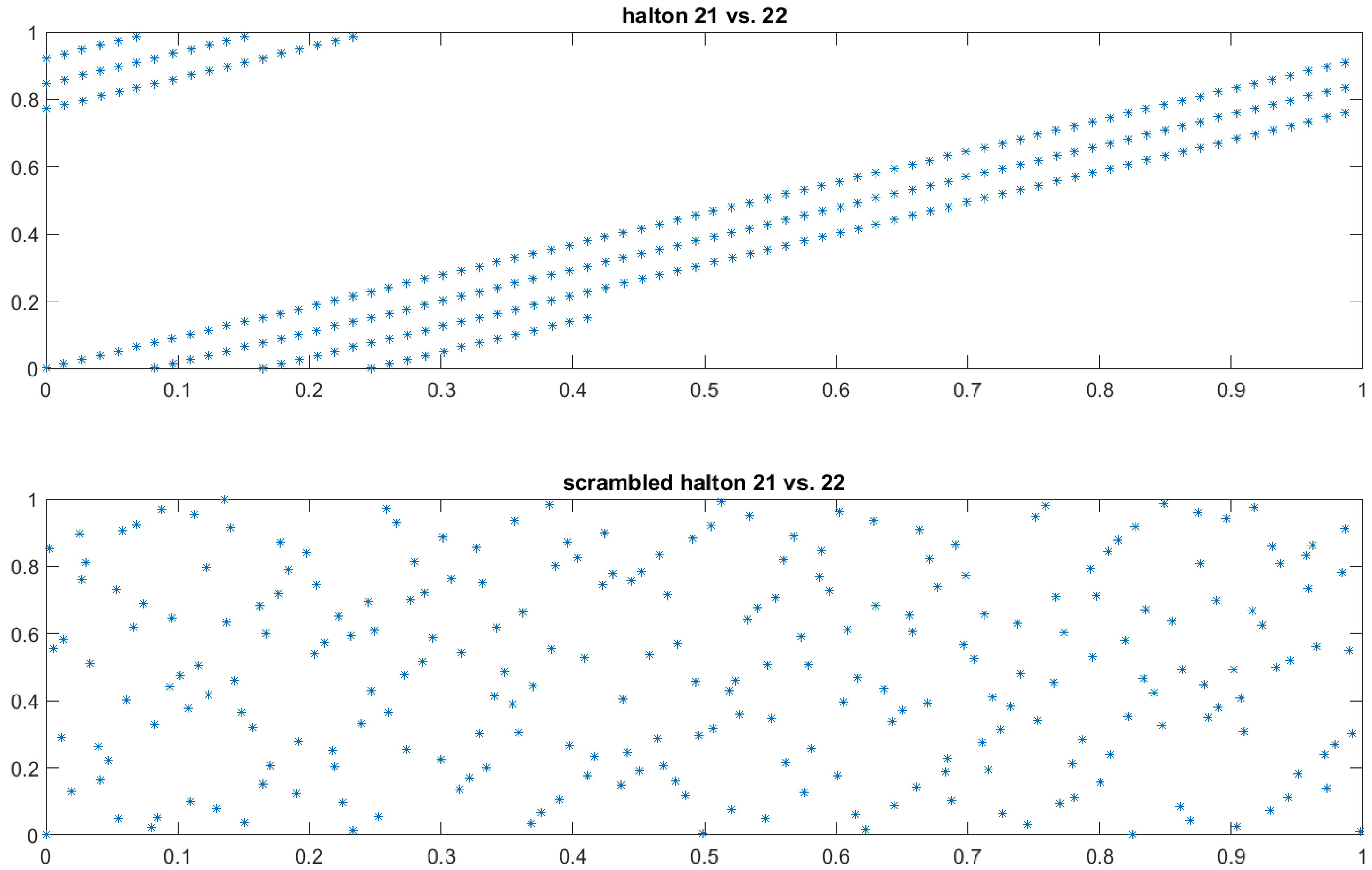
- ван дер Корпут:

  Ако $n = a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0$ (при основа b), то $x_n = 0.\ a_0 a_1 \ldots a_{m-1} a_m$
- Холтън (1960) многомерни редици

  $x_n = (\Phi_{b1}(n-1), \ldots, \Phi_{bs}(n-1))$, $n=1,2,\ldots$; $b_1, b_2, \ldots, b_s$ – взаимно прости
- Съществуват много модификации на редиците на Холтън


halton 2 vs. 3
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


halton 21 vs. 22
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


halton 21 vs. 22
scrambled halton 21 vs. 22
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Редици на Собол

- Представяме по битове n

$$n = \sum_{j=1}^{w} b_j 2^{j-1}, b_j \in 0{,}1$$

- j-тата координата на n-тата точка се генерира чрез

$$x_n^j = b_1 v_1^j \oplus b_2 v_2^j \oplus \cdots b_w v_w^j,$$

където v_i^j е двоична дроб, а $\oplus$ означава побитова exclusive-or операция

Задача

Да се изследва сходимостта на приближеното решение на МКМ на

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

където V се дефинира от неравенствата:

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$$

Упътване: Да се използват сферични координати.

Решение:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\psi \cos\varphi \\ y = \rho \sin\psi \sin\varphi \\ z = \rho \cos\psi \\ 0 \le \psi \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Така, за първото ограничение имаме:

$$\sqrt{\rho^2 \sin^2\psi \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\psi \sin^2\varphi} \le \rho\cos\psi$$

$$\sqrt{\rho^2 \sin^2\psi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \le \rho\cos\psi$$

$$\sqrt{\rho^2 \sin^2\psi} \le \rho\cos\psi$$

$$\rho\sin\psi \le \rho\cos\psi$$

$$\sin\psi \le \cos\psi$$

$$\Rightarrow \psi \in [0; \frac{\pi}{4}]$$

За второто ограничение:

$$\rho\cos\psi \le \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2\psi \cos^2\varphi - \rho^2 \sin^2\psi \sin^2\varphi}$$

$$\rho\cos\psi \le \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2\psi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}$$

$$\rho\cos\psi \le \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2\psi}$$

$$\rho^2\cos^2\psi \le 1 - \rho^2\sin^2\psi$$

$$1 - \rho^2\sin^2\psi - \rho^2\cos^2\psi \ge 0$$

$$1 - \rho^2(\sin^2\psi + \cos^2\psi) \ge 0$$

$$1 - \rho^2 \ge 0 \Rightarrow \rho^2 \le 1$$

$$\Rightarrow \rho \in [-1; 1], \text{но } \rho \ge 0 \Rightarrow \rho \in [0; 1]$$

За Якобиана J имаме $|J| = \rho^2 \sin\psi$.
Пресмятаме интеграла:

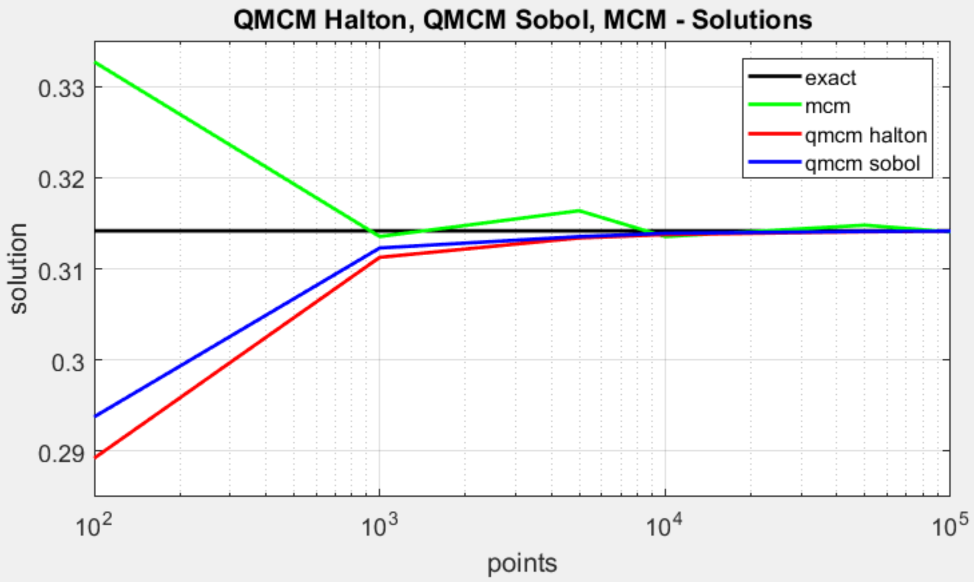
$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 \sin\psi . \rho \cos\psi \sqrt{\rho^2 \sin^2\psi \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\psi \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\psi}\right) d\varphi d\psi d\rho =$$

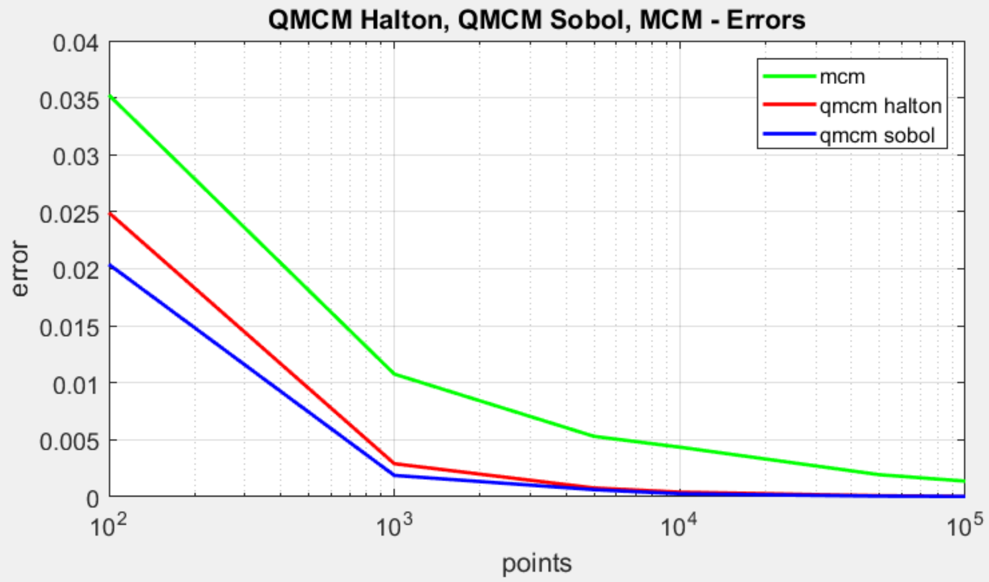
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 \sin\psi . \rho \cos\psi \sqrt{\rho^2 \sin^2\psi (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \rho^2 \cos^2\psi}\right) d\varphi d\psi d\rho =$$

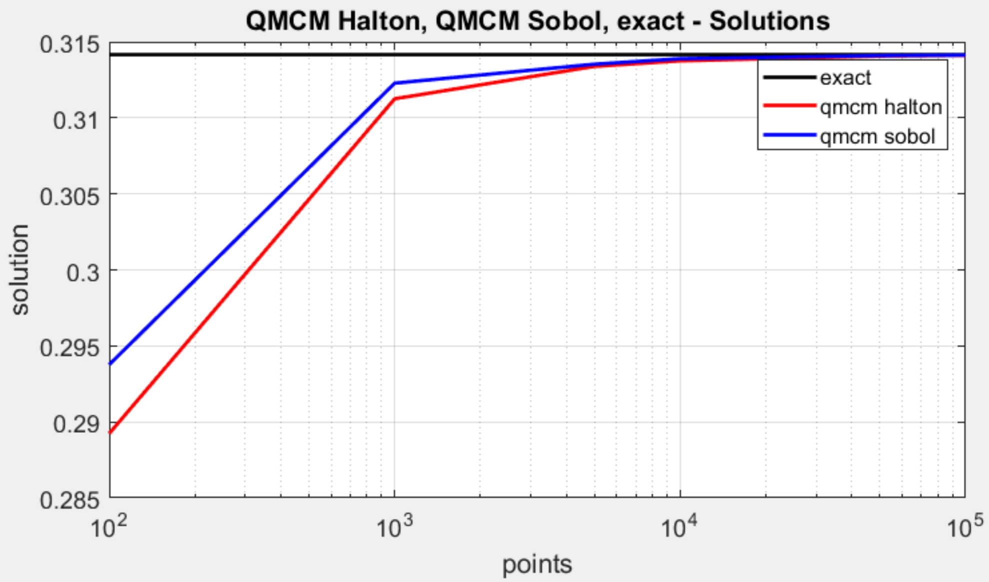
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left(\rho^3 \sin\psi \cos\psi \sqrt{\rho^2 (\sin^2\psi + \cos^2\psi)}\right) d\varphi d\psi d\rho =$$

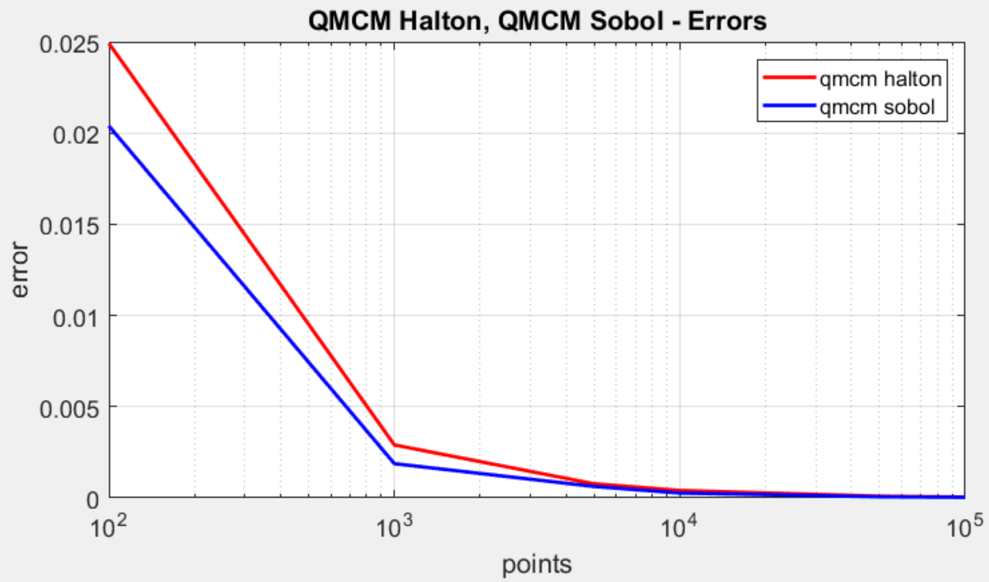
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left(\rho^4 \sin\psi \cos\psi\right) d\varphi d\psi d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^4 \, d\psi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin\psi \cos\psi) \, d\psi =$$

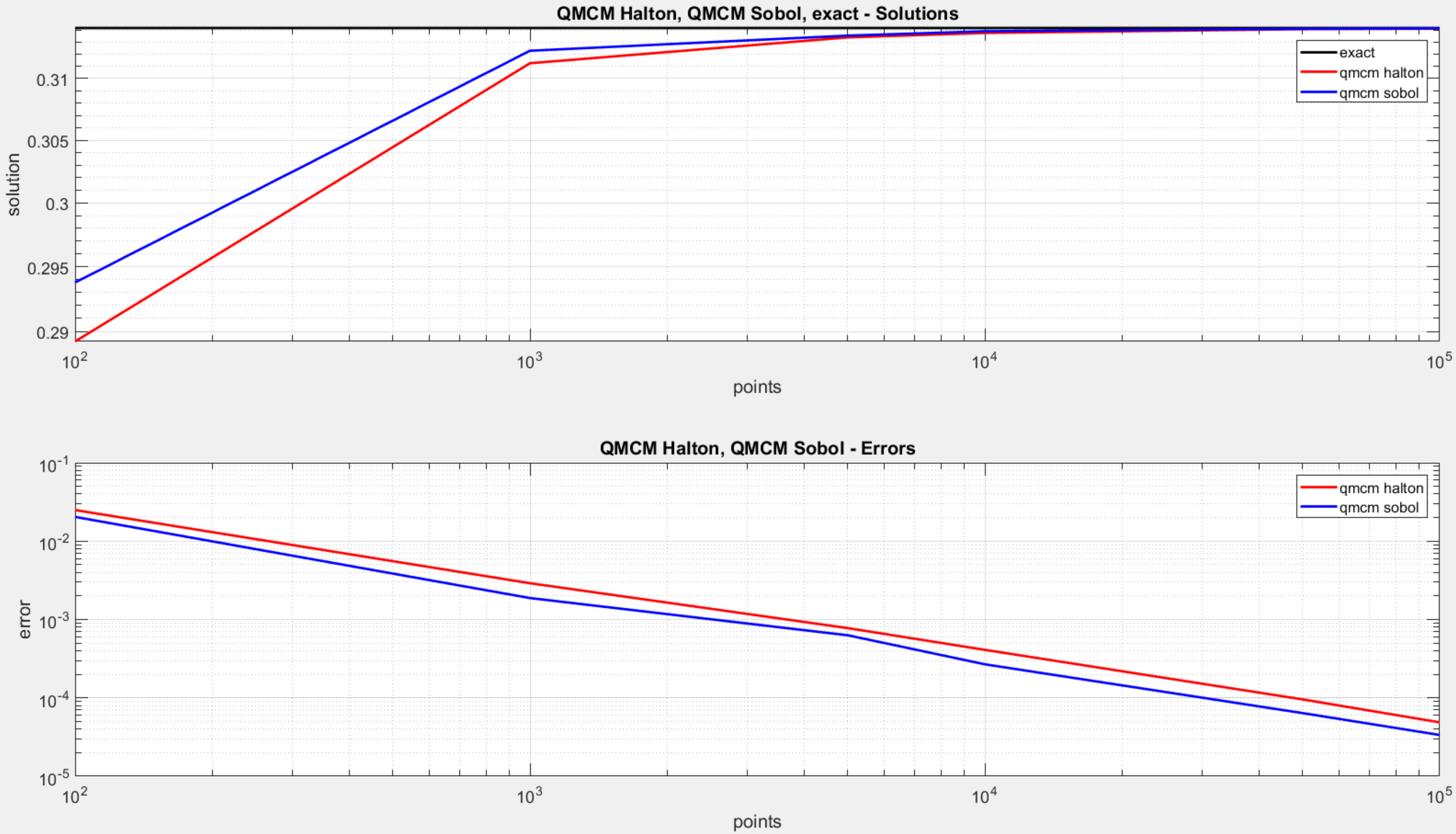
$$= 2\pi \cdot \frac{\rho^5}{5}\bigg|_0^1 \cdot \frac{1}{4} = 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \approx 0,31415$$


QMCM Halton, QMCM Sobol, MCM - Solutions
solution
points
exact
mcm
qmcm halton
qmcm sobol
0.33
0.32
0.31
0.3
0.29
10^2
10^3
10^4
10^5


QMCM Halton, QMCM Sobol, MCM - Errors
error
points
mcm
qmcm halton
qmcm sobol
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
10^2
10^3
10^4
10^5


QMCM Halton, QMCM Sobol, exact - Solutions
solution
points
exact
qmcm halton
qmcm sobol
0.315
0.31
0.305
0.3
0.295
0.29
0.285
10^2
10^3
10^4
10^5


QMCM Halton, QMCM Sobol - Errors
error
points
qmcm halton
qmcm sobol
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
10^2
10^3
10^4
10^5


QMCM Halton, QMCM Sobol, exact - Solutions
solution
0.31
0.305
0.3
0.295
0.29
exact
qmcm halton
qmcm sobol
10^2
10^3
10^4
10^5
points
QMCM Halton, QMCM Sobol - Errors
error
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
qmcm halton
qmcm sobol
10^2
10^3
10^4
10^5
points

	MCM (20 runs)	QMCM Halton	QMCM Sobol	Exact
		100 pts		
error	0.037786	0.024921	0.020391	0
solution	0.318663	0.289238	0.293767	0,314159
		1000 pts		
error	0.011098	0.002903	0.001878	0
solution	0.310562	0.311255	0.312281	0,314159
		5000 pts		
error	0.007212	0.000775	0.00062	0
solution	0.312360	0.313383	0.313530	0,314159
		10000 pts		
error	0.003317	0.000410	0.000268	0
solution	0.315453	0.313749	0.313891	0,314159
		100000 pts		
error	0.000993	0.000048	0.000033	0
solution	0.314300	0.314110	0.314125	0,314159

Заключение

- Квази-МКМ подобряват сходимостта при различни размерности
- Не може да се направи анализ на грешката, както в МК (чрез експериментална оценка на дисперсията).
- Изход: scrambling (разбъркване) на квазислучайните редици при по-големи размерности