Algoritmos y Estructura de Datos I

Segundo cuatrimestre de 2016 5 de septiembre de 2016

TPE OJOTA (Organización de Juegos Olímpicos Tp de Algoritmos 1) v1.0

1. Auxiliares definidas por nosotros

Las siguientes funciones auxiliares serán usadas para varios problemas a lo largo del TP. Si la definición de alguna función no aparece en la especificación de un problema, está en esta sección.

```
aux participa (j:JJOO,a:Atleta) : Bool = (\exists c \leftarrow competencias(j))a \in participantes(c); aux paises (j:JJOO) : [Pais] = [nacionalidad(a) \mid a \leftarrow atletas(j)]; aux ganoOroPais (c:Competencia,p:Pais) : Bool = |ranking(c)| \ge 1 \land nacionalidad(ranking(c)_0) == pais; aux ganoPlataPais (c:Competencia,p:Pais) : Bool = |ranking(c)| \ge 2 \land nacionalidad(ranking(c)_1) == pais; aux ganoBroncePais (c:Competencia,p:Pais) : Bool = |ranking(c)| \ge 3 \land nacionalidad(ranking(c)_2) == pais; aux mismaCompetencia (c_1, c_2:Competencia) : Bool = (categoria(c_1) == categoria(c_2)) \land (mismos(participantes(c_2), participantes(c_2))) \land (finalizada(c_1) == finalizada(c_2)) \land (finalizada(c_1) \to ((ranking(c_1) == ranking(c_2))) \land (mismos(lesTocoControlAntiDoping(c_1), lesTocoControlAntiDoping(c_2))) \land ((\forall a \leftarrow lesTocoControlAntiDoping(c_1)) leDioPositivo(c_1, a) == leDioPositivo(c_2, a))));
```

2. Tipos

```
tipo Deporte = String;
tipo Pais = String;
tipo Sexo = Femenino, Masculino;
```

3. Atleta

```
tipo Atleta {
        observador nombre (a: Atleta) : String;
        observador sexo (a: Atleta) : Sexo;
        observador añoNacimiento (a: Atleta) : \mathbb{Z};
        observador nacionalidad (a: Atleta) : Pais;
        observador ciaNumber (a: Atleta) : \mathbb{Z};
        observador deportes (a: Atleta) : [Deporte];
        observador capacidad (a: Atleta, d: Deporte) : \mathbb{Z};
              requiere d \in deportes(a);
        invariante |deportes(a)| > 0;
        invariante sinRepetidos(deportes(a));
        invariante ordenada(deportes(a));
        invariante capacidadEnRango : (\forall d \leftarrow deportes(a))0 \leq capacidad(a,d) \leq 100;
}
problema especialidad (a: Atleta) = res : Deporte {
        asegura result \in deportes(a);
        asegura (\forall d \leftarrow deportes(a)) capacidad(a, d) \leq capacidad(a, res);
problema entrenarNuevoDeporte (a: Atleta, d: Deporte, c: Z) {
        requiere \neg(d \in deportes(a));
        requiere 0 \le c \le 100;
        modifica a;
        asegura nombre(a) == nombre(pre(a));
        asegura sexo(a) == sexo(pre(a));
        asegura a\tilde{n}oNacimiento(a) == a\tilde{n}oNacimiento(pre(a));
```

```
asegura nacionalidad(a) == nacionalidad(\operatorname{pre}(a)); asegura ciaNumber(a) == ciaNumber(\operatorname{pre}(a)); asegura SeAgregoDeporte : mismos(deportes(a), d : deportes(\operatorname{pre}(a))) \wedge ordenada(deportes(a)); asegura LosOtrosNoCambiaron : (\forall x \leftarrow deportes(a), x \neq d)capacidad(a, x) == capacidad(\operatorname{pre}(a), x); asegura CapacidadCorrecta : capacidad(a, d) == c; }
```

4. Competencia

```
tipo Competencia {
        observador categoria (c: Competencia) : (Deporte, Sexo);
        observador participantes (c: Competencia) : [Atleta];
        observador finalizada (c: Competencia) : Bool;
        observador ranking (c: Competencia) : [Atleta];
             requiere finalizada(c);
        observador lesTocoControlAntiDoping (c: Competencia) : [Atleta];
             requiere finalizada(c);
        observador leDioPositivo (c: Competencia, a: Atleta) : Bool;
             requiere finalizada(c) \land a \in lesTocoControlAntiDoping(c);
        invariante participaUnaSolaVez : sinRepetidos(ciaNumbers(participantes(c)));
        invariante participantesPertenecenACat :
           (\forall p \leftarrow participantes(c))prm(categoria(c)) \in deportes(p) \land sgd(categoria(c)) == sexo(p);
        invariante elRankingEsDeParticipantesYNoHayRepetidos :
           finalizada(c) \Rightarrow incluida(ranking(c), participantes(c));
        invariante seControlanParticipantesYNoHayRepetidos:
           finalizada(c) \Rightarrow incluida(lesTocoControlAntiDoping(c), participantes(c));
}
problema finalizarCompetencia (c: Competencia, posiciones: [Atleta], control: [(Atleta, Bool)]) {
       requiere \neg finalizada(c);
       requiere PosicionesCumplenInvariante : incluida(posiciones, participantes(c));
       requiere Controlados Cumplen Invariante : incluida(atletas Controlados(control), participantes(c));
       modifica c;
        asegura\ (categoria(c) == categoria(\mathsf{pre}(c))) \land mismos(participantes(c), participantes(\mathsf{pre}(c)));
        asegura finalizada(c);
        asegura RankingCorrecto : ranking(c) == posiciones;
        \verb|asegura ControlCorrecto|: mismos(lesTocoControlAntiDoping(c), at let asControlados(control)); \\
        asegura ResultadoAntiDopingCorrecto : (\forall a \leftarrow control)sgd(a) == leDioPositivo(c, prm(a));
        aux atletasControlados (c:[(Atleta,Bool)]) : [Atleta] = [prm(a) | a \leftarrow c];
problema linfordChristie (c: Competencia, a: Atleta) {
       requiere \neg finalizada(c);
       requiere a \in participantes(c);
       modifica c;
        asegura \neg finalizada(c) \land categoria(c) == categoria(pre(c));
        asegura AtletaDescalificado: mismos(participantes(pre(c)), a: participantes(c));
}
problema gananLosMasCapaces (c: Competencia) = res : Bool {
       requiere finalizada(c);
        asegura res == (\forall i \leftarrow [1.. | ranking(c)| - 1))
           capacidadCompetencia(c, ranking(c)_i) \geq capacidadCompetencia(c, ranking(c)_{i+1}) \ ;
        aux capacidadCompetencia (c:Competencia,a:Atleta) : \mathbb{Z} = capacidad(a, prm(categoria(c)));
problema sancionarTramposos (c: Competencia) {
       requiere finalizada(c);
       modifica c;
```

```
 \begin{array}{l} {\rm asegura} \ finalizada(c) \wedge categoria(c) == categoria({\rm pre}(c)) \wedge mismos(participantes(c),participantes({\rm pre}(c))) \,; \\ {\rm asegura} \ ranking(c) == rankingSinTramposos({\rm pre}(c)) \,; \\ {\rm asegura} \ mismos(lesTocoControlAntiDoping(c),lesTocoControlAntiDoping({\rm pre}(c))) \,; \\ {\rm asegura} \ (\forall a \ \leftarrow \ lesTocoControlAntiDoping(c)) leDioPositivo(c,a) == leDioPositivo({\rm pre}(c),a) \,; \\ {\rm aux} \ rankingSinTramposos \ (c:Competencia) : [Atleta] = [\ a \ | \ a \leftarrow ranking(c), \\ a \in lesTocoControlAntiDoping(c) \rightarrow leDioPositivo(c,a) == {\rm False}] \,; \\ \\ \} \end{array}
```

5. **JJOO**

```
tipo JJ00 {
                 observador año (j. JJOO) : \mathbb{Z};
                 observador atletas (j: JJOO) : [Atleta];
                 observador cantDias (j: JJOO) : \mathbb{Z};
                 observador cronograma (j. JJOO, dia: \mathbb{Z}) : [Competencia];
                             requiere 1 \le dia \le cantDias(j);
                 observador jornadaActual (j. JJOO) : \mathbb{Z};
                 invariante atletasUnicos : sinRepetidos(ciaNumbers(atletas(j)));
                 invariante una De Cada Categoria : (\forall i, k \leftarrow [0..|competencias(j)|), i \neq k)
                        categoria(competencias(j)_i) \neq categoria(competencias(j)_k);
                 invariante competidoresInscriptos : (\forall c \leftarrow competencias(j))incluida(participantes(c), atletas(j));
                 invariante jornadaValida : 1 \leq jornadaActual(j) \leq cantDias(j);
                 invariante finalizadasSiiYaPasoElDia: lasPasadasFinalizaron(j) \land lasQueNoPasaronNoFinalizaron(j);
problema dePaseo (j: JJOO) = res : [Atleta] {
                 asegura mismos(res, noParticipan(j));
                 aux noParticipan (j:JJOO) : [Atleta] = [a \mid a \leftarrow atletas(j), \neg participa(j, a)];
problema medallero (j: JJOO) = res : [(Pais, [Z])] 
                 asegura OrdenadoPorOro : (\forall i \leftarrow [0..|res|-1)) \operatorname{sgd}(res_i)_0 \geq \operatorname{sgd}(res_{i+1})_0;
                 \texttt{asegura OrdenadoPorPlata}: (\forall i \leftarrow [0..|res|-1), \texttt{sgd}(res_i)_0 == \texttt{sgd}(res_{i+1})_0) \texttt{sgd}(res_i)_1 \geq \texttt{sgd}(res_{i+1})_1;
                 asegura OrdenadoPorBronce : (\forall i \leftarrow [0..|res|-1), \operatorname{sgd}(res_i)_1 == \operatorname{sgd}(res_{i+1})_1)\operatorname{sgd}(res_i)_2 \geq \operatorname{sgd}(res_{i+1})_2;
                 asegura NoHayPaisesRepetidos : sinRepetidos([prm(p) | p \leftarrow res]);
                 asegura TodosGanaronMedallas : (\forall p \leftarrow res) \sum sgd(p) > 0;
                 \texttt{asegura EstanTodosLosQueGanaron}: (\forall p \leftarrow paises(j), totalMedallasPais(j,p) > 0) ((\exists q \leftarrow res) \texttt{prm}(q) == p) \texttt{;}
                 asegura CantidadCorrectaDeMedallas : (\forall p \leftarrow res)
                        ((totalOroPais(j, prm(p)) == sgd(p)_0) \land (totalPlataPais(j, prm(p)) == sgd(p)_1)
                        \wedge (totalBroncePais(j, prm(p)) == sgd(p)_2));
                 aux totalOroPais (j:JJOO,p:Pais) : \mathbb{Z} = |[c \mid c \leftarrow competencias(j), finalizada(c) \land ganoOroPais(c, p)]|;
                 aux totalPlataPais (j:JJOO,p:Pais) : \mathbb{Z} = |[c \mid c \leftarrow competencias(j), finalizada(c) \land ganoPlataPais(c,p)]|;
                 aux totalBroncePais (j:JJOO,p:Pais) : \mathbb{Z} = |[c \mid c \leftarrow competencias(j), finalizada(c) \land ganoBroncePais(c, p)]|;
                 \texttt{aux totalMedallasPais} \ (\texttt{j:JJOO,p:Pais}) : \mathbb{Z} = totalOroPais(j,p) + totalPlataPais(j,p) + totalBroncePais(j,p) \ ;
problema boicotPorDisciplina (j. JJOO, cat. (Deporte, Sexo), p. Pais) = res : \mathbb{Z} {
                 requiere CategoriaValida: (\exists c \leftarrow competencias(j))categoria(c) == cat;
                 modifica j;
                 \operatorname{asegura} a \tilde{no}(j) == a \tilde{no}(\operatorname{pre}(j)) \wedge \operatorname{cantDias}(j) == \operatorname{cantDias}(\operatorname{pre}(j)) \wedge \operatorname{jornadaActual}(j) == \operatorname{jornadaActual}(\operatorname{pre}(j)) \wedge \operatorname{jornadaActual}(j) == \operatorname{jo
                        mismos(atletas(j), atletas(pre(j)));
                 asegura NoModificaOtrasCompetencias : (\forall d \leftarrow [1..cantDias(j)])
                        ((\forall c_1 \leftarrow cronograma(\mathsf{pre}(j), d), categoria(c_1) \neq cat)((\exists c_2 \leftarrow cronograma(j, d))mismaCompetencia(c_1, c_2)));
                 asegura NoCreaCompetenciasNuevas : (\forall d \leftarrow [1..cantDias(j)])
                        ((\forall c_1 \leftarrow cronograma(j,d), categoria(c_1) \neq cat)((\exists c_2 \leftarrow cronograma(\mathsf{pre}(j),d))mismaCompetencia(c_1,c_2)));
                 asegura (\forall d \leftarrow [1..cantDias(j)])|cronograma(j,d)| == |cronograma(pre(j),d)|;
                 asegura CatFueModificada: (\exists c_1 \leftarrow competencias(j), categoria(c_1) == cat)
                        ((\exists c_2 \leftarrow competencias(pre(j)), categoria(c_2) == cat)
                        (mismos(participantes(c_1), sacarPais(p, participantes(c_2))))
                        \wedge (finalizada(c_1) == finalizada(c_2))
```

```
\land (finalizada(c_1) \rightarrow ((ranking(c_1) == sacarPais(p, ranking(c_2))))
             \land (mismos(lesTocoControlAntiDoping(c_1), sacarPais(p, lesTocoControlAntiDoping(c_2))))
             \land ((\forall a \leftarrow lesTocoControlAntiDoping(c_1))leDioPositivo(c_1, a) == leDioPositivo(c_2, a)))));
         \texttt{asegura ResultadoCorrecto}: res == |[\ a\ |\ a \leftarrow atletas(j), nacionalidad(a) == p \land participa(j,a)\ ]|\ ;
         aux sacarPais (p:Pais,l:[Atleta]) : [Atleta] = [a \mid a \leftarrow l, nacionalidad(a) \neq p];
}
problema losMasFracasados (j. JJOO, p. Pais) = res : [Atleta] {
         asegura Participaron : (\forall a \leftarrow res)a \in losQueMasParticiparon(j, p);
         asegura NoGanaronNada : (\forall a \leftarrow res)totalMedallasAtleta(j, a) == 0;
         asegura EstanTodos : (\forall a \leftarrow losQueMasParticiparon(j, p), totalMedallasAtleta(j, a) == 0)a \in res;
         aux losQueMasParticiparon (j:JJOO,p:Pais) : [Atleta] = [a \mid a \leftarrow atletas(j), nacionalidad(a) == p
             \land ((\forall b \leftarrow atletas(j), nacionalidad(b) == p) cantCompetencias(j, a) \ge cantCompetencias(j, b))];
         aux cantCompetencias (j:JJOO,a:Atleta) : \mathbb{Z} = |[c \mid c \leftarrow competencias(j), a \in participantes(c)]|;
         \texttt{aux} \; \mathsf{totalMedallasAtleta} \; (j:JJOO,a:Atleta) : \mathbb{Z} =
             |[c | c \leftarrow competencias(j), finalizada(c) \land ganoMedallaAtleta(c, a)]|;
         aux ganoMedallaAtleta (c:Competencia,a:Atleta) : Bool = (|ranking(c)| \ge 1 \land ranking(c)_0 == a)
             \vee (|ranking(c)| \geq 2 \wedge ranking(c)_1 == a) \vee (|ranking(c)| \geq 3 \wedge ranking(c)_2 == a);
}
problema liuSong (j. JJOO, a. Atleta, p. País) {
         requiere a \in atletas(j);
         modifica j;
         asegura \ a\tilde{no}(j) == a\tilde{no}(\mathsf{pre}(j)) \land cantDias(j) == cantDias(\mathsf{pre}(j)) \land jornadaActual(j) == jornadaActual(\mathsf{pre}(j));
         asegura SoloCambioElAtletaDeseado : (\forall d \leftarrow [1..cantDias(j)])
             ((\forall c_1 \leftarrow cronograma(\mathsf{pre}(j), d))((\exists c_2 \leftarrow cronograma(j, d))mismaCompNacCamb(c_1, c_2, a, p))
             \wedge |cronograma(j,d)| == |cronograma(pre(j),d)|);
         aux mismoNacCamb (a_1,a_2:Atleta,p:Pais):Bool = nombre(a_1) == nombre(a_2) \land sexo(a_1) == sexo(a_2)
             \wedge a\tilde{n}oNacimiento(a_1) == a\tilde{n}oNacimiento(a_2) \wedge nacionalidad(a_2) == p \wedge ciaNumber(a_1) == ciaNumber(a_2)
             \land deportes(a_1) == deportes(a_2) \land ((\forall d \leftarrow deportes(a_1)) capacidad(a_1, d) == capacidad(a_2, d));
         aux mismosAtlNacCamb (l_1, l_2: [Atleta], a: Atleta, p: Pais) : Bool =
             ((\forall a_1 \leftarrow l_1, ciaNumber(a_1) \neq ciaNumber(a))((\exists a_2 \leftarrow l_2)a_1 == a_2))
             \wedge ((\exists a_1 \leftarrow l_1, ciaNumber(a_1) == ciaNumber(a_2)) \rightarrow ((\exists a_2 \leftarrow l_2) mismosNacCamb(a_1, a_2, p)))
             \wedge |l_1| == |l_2|;
         aux mismaCompNacCamb (c_1,c_2:Competencia,a:Atleta,p:Pais):Bool =
             categoria(c_1) == categoria(c_2) \land mismosAtlNacCamb(participantes(c_1), participantes(c_2), a, p)
             \wedge finalizada(c_1) == finalizada(c_2)
             \land (finalizada(c_1) \rightarrow (mismosAtlNacCamb(ranking(c_1), ranking(c_2), a, p))
             \land mismoOrden(ranking(c_1), ranking(c_2))
             \land mismosAtlNacCamb(lesTocoControlAntiDoping(c_1), lesTocoControlAntiDoping(c_2), a, p)
             \land ((\forall b \leftarrow lesTocoControlAntiDoping(c_1), ciaNumber(b) \neq ciaNumber(a))
             leDioPositivo(c_1, b) == leDioPositivo(c_2, b)
             \wedge ((\exists a_1 \leftarrow lesTocoControlAntiDoping(c_1), a_2 \leftarrow lesTocoControlAntiDoping(c_2))mismoNacCamb(a_1, a_2, p))
             \rightarrow leDioPositivo(c_1, a_1) == leDioPositivo(c_2, a_2));
         aux mismoOrden (l,s:[Atleta]) : Bool = (\forall i \leftarrow [0...|l|))ciaNumber(l_i) == ciaNumber(s_i);
problema stevenBradbury (j: JJOO) = res : Atleta {
         asegura res \in ganaronOro(j);
         asegura MenosCapaz : (\forall a \leftarrow ganaronOro(j))menorCapOro(j, a) \geq menorCapOro(j, res);
         aux menorCapOro (j:JJOO, a:Atleta) : \mathbb{Z} = minimo(capacidadOro(j, a));
         aux capacidad0ro (j:JJOO, a:Atleta) : [\mathbb{Z}] = [capacidad(a,d) | d \leftarrow deportesOro(j,a)];
         aux deportesOro (j:JJOO, a:Atleta) : [Deporte] =
             [prm(categoria(c)) | c \leftarrow competencias(j), finalizada(c) \land ganoOroAtleta(c, a)];
         aux ganoOroAtleta (c:Competencia, a:Atleta) : Bool = |ranking(c)| \ge 1 \land ranking(c)_0 == a;
problema uyOrdenadoAsíHayUnPatrón (j: JJOO) = res : Bool {
         asegura res == hayPatron(mejoresPaises(j));
         aux hayPatron (ps:[Pais]) : Bool = (\forall i, j \leftarrow [0..|ps|), i \equiv j(|sacarRepetidos(ps)|))ps_i == ps_j;
         \texttt{aux mejoresPaises } (j: \texttt{JJOO}) : [Pais] = [\textit{paisDelDia}(cronograma(j, d)) \, | \, d \leftarrow [1..jornadaActual(j)]];
```

```
aux paisDelDia (cs:[Competencia]) : Pais =
                                                             cab[p \mid p \leftarrow paisesCompetidores(cs), ((\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q)) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q)) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q)) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q)) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q)) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, p) \ge totalOroComp(cs, q) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroComp(cs, q) \land (\forall q \leftarrow paisesCompetidores(cs))totalOroCompetidores(cs) \land (\forall q \leftarrow paises(cs)) \land (\forall q \leftarrow paises(cs
                                           aux paisesCompetidores (cs:[Competencia]) : [Pais] = [nacionalidad(a) \mid a \leftarrow participantes(c), c \leftarrow (cs)];
                                           aux totalOroComp (cs:[Competencia], p:Pais) : \mathbb{Z} = |[c \mid c \leftarrow cs, finalizada(c) \land ganoOroPais(c, p)]|;
                                           aux sacarRepetidos (l:[T]) : [T] = [l_i | i \leftarrow [0..|l|), l_i \notin l_{[0..i)}];
}
problema sequíaOlímpica (j: JJOO) = res : [País] {
                                           \texttt{asegura SonLosDeMayorSequia}: (\forall p \ \leftarrow \ res)((\forall q \ \leftarrow \ paises(j)) mayorSequia(j,p) \geq mayorSequia(j,q)) \ ;
                                           asegura EstanTodos : (\forall p \leftarrow paises(j), ((\forall q \leftarrow paises(j)) mayorSequia(j, p) \geq mayorSequia(j, q)))p \in res;
                                           \texttt{aux mayorSequia} \ (j: \texttt{JJOO}, \ p: \texttt{Pais}) : \mathbb{Z} \ = \ \texttt{cab}([\,k-i\,|\,i,k \ \leftarrow \ [1..jornadaActual(j)], i \ < \ k \ \land \ haySequia(j,p,i,k) 
                                                             ((\forall l, m \leftarrow [1..jornadaActual(j)], l < m \land haySequia(j, p, l, m))k - i \ge m - l)]);
                                           aux haySequia (j:JJOO, p:Pais, i,k:\mathbb{Z}): Bool = (\forall d \leftarrow [i..k])((\forall c \leftarrow cronograma(j,d)) \neg ganoMedallaPais(c,p));
                                           aux ganoMedallaPais (c:Competencia, p:Pais) : Bool =
                                                             ganoOroPais(c, p) \lor ganoPlataPais(c, p) \lor ganoBroncePais(c, p);
                                           aux : = ;
}
problema transcurrirDia (j: JJOO) {
```

6. Auxiliares

```
aux ciaNumbers (as: [Atleta]) : [Z] = [ciaNumber(a) | a \leftarrow as]; aux competencias (j: JJOO) : [Competencia] = [c | d \leftarrow [1..cantDias(j)], c \leftarrow cronograma(j,d)]; aux incluida (l_1, l_2:[T]) : Bool = (\forall x \leftarrow l_1)cuenta(x, l_1) \leq cuenta(x, l_2); aux lasPasadasFinalizaron (j: JJOO) : Bool = (\forall d \leftarrow [1..jornadaActual(j)))(\forall c \leftarrow cronograma(j,d))finalizada(c); aux lasQueNoPasaronNoFinalizaron (j: JJOO) : Bool = (\forall d \leftarrow (jornadaActual(j)..cantDias(j)])(\forall c \leftarrow cronograma(j,d))\neg finalizada(c); aux ordenada (l:[T]) : Bool = (\forall i \leftarrow [0..|l|-1))l_i \leq l_{i+1}; aux sinRepetidos (l: [T]) : Bool = (\forall i, j \leftarrow [0..|l|), i \neq j)l_i \neq l_j;
```