производной в конце этого промежутка, который принадлежит промежутку, естественно, понимается соответствующая односторонняя производная), то она, очевидно, также является функцией, определённой на данном промежутке; её обозначают через $f'(x)$. Если $y = f(x)$, то вместо $f'(x_0)$ пишут также $y'|_{x-x_0}$.

Вычислением производной от функции называется *дифференцированием.*

Примеры. **1**. $y = c$ (c — постоянная)

Так как $\Delta y = c - c = 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ и, таким образом,

$$c' = 0.$$

2. $y = \sin x$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = \cos x.$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

3. $y = \cos x$. Так как

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos(x) = -2\sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

то будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = -\sin x.$$

Таким образом, $(\cos x)' = -\sin x$.

4. $y = a^x$. Имеем $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$, поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

откуда, в силу формулы (8.17), получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Таким образом,

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

в частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

Последнее равенство показывает, что число e обладает замечательным свойством: *показательная функция с основанием e имеет производную, совпадающую с самой функцией.* Этим и объясняется то обстоятельство, что в математическом анализе в качестве основания степени и основания логарифмов используется преимущественно число e. Это очень удобно, так как упрощает вычисления.

5. $y = x^n, n$ — натуральное число. Используя правило возведения бинома в степень, находим

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n,$$

откуда при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Так как при $\Delta x \to 0$ все слагаемые правой части, содержащие множитель Δx в степени с натуральным показателем, стремятся к нулю, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$, таким образом,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

В дальнейшем будет показано, что эта формула справедлива и тогда, когда n — произвольное действительное число.

9.2. Дифференциал функции

Определение 3. *Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$, называется дифференцируемой при $x = x_0$, если её приращение в этой точке, т. е.*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0, \tag{9.2}$$

где A — постоянная[1].

[1]При фиксированной точке x_0 постояннная A есть некоторое число, не зависящее от Δx; конечно, при изменении точки x_0 число A, вообще говоря, меняется.