$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

* Xét điều kiện tồn tại của CTFT:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\,dt$$

$$= 0 + \left(\frac{-1}{a}\right).e^{-at}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{a}.\lim_{u\to+\infty} e^{-a.u} + \frac{1}{a}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{a}\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{e^{au}}}_{(1)} + \frac{1}{a}$$

* Xét (1):

Với $a=0 \to -\frac{1}{a}$ o xác định $\to$ o tồn tại chuỗi Fourier

Với $a>0 \to (1) = 0$ (do $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$)

Với $a<0 \to (1) = +\infty \to$ o tồn tại chuỗi Fourier

Vậy với $a>0$ thì $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt = \frac{1}{a}$ có tồn tại chuỗi Fourier.

Áp dụng phương trình phân tích của biểu diễn CTFT, phổ của $x(t)$ là:

$$X(j.2\pi F) = \int_{0}^{+\infty} x(t).e^{-j.2\pi.F.t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at}.e^{-j.2\pi.F.t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{[-at+(-j.2\pi.F.t)]}\,dt$$

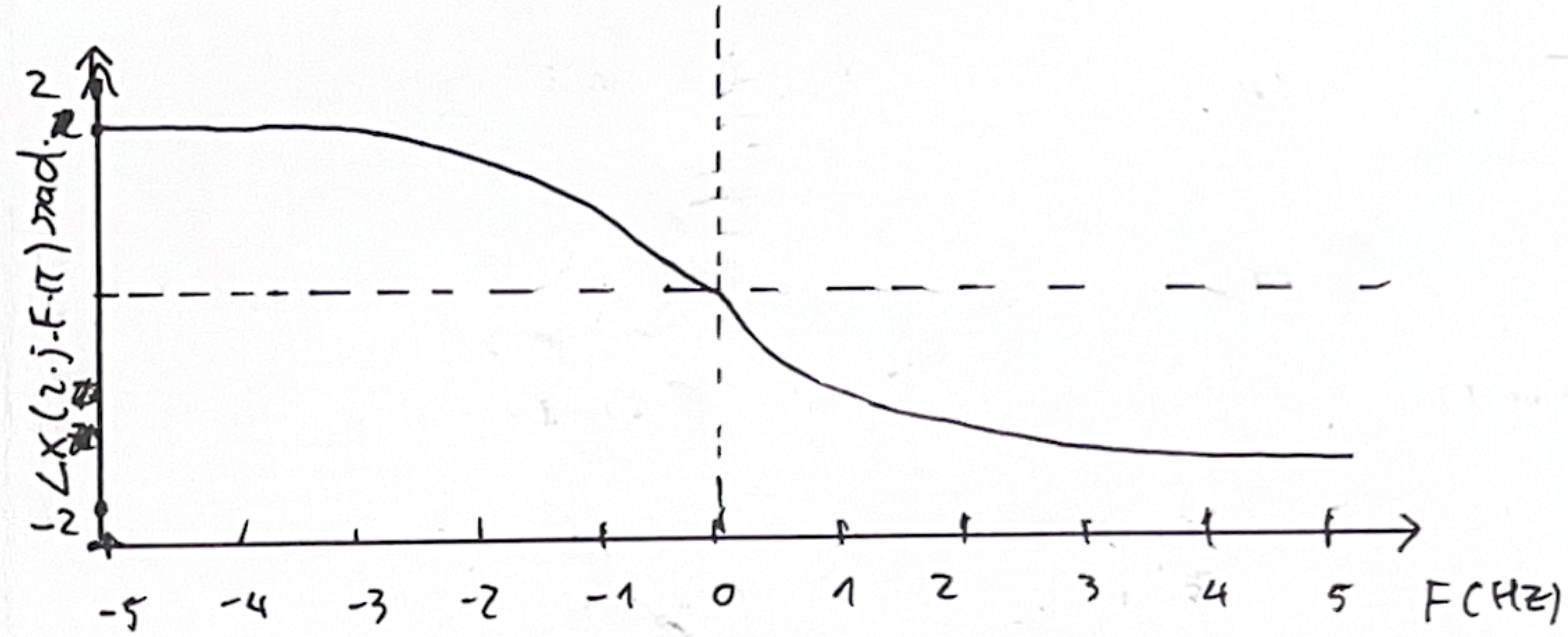
$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-t.[a+j.2\pi.F]}\,dt = \frac{-1}{a+j.2\pi F}.e^{-t[a+j2\pi.F]}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{a + j.2\pi.F}\left[\lim_{u \to +\infty} \frac{1}{e^{u(a.j.2\pi.F)}} - e^{0(a j 2\pi F)}\right]$$

$$= -\frac{1}{a + j.2\pi F}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{a + j.2\pi.F} \quad (a > 0)$$

Vậy $X(j.2\pi.F) = \frac{1}{a + j.2\pi.F}$ $(a>0)$.

Có phổ biên độ: $|X(j.2\pi.F)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi F)^2}}$ và phổ pha $\angle X(j.2\pi.F) = -\arctan\left(2\pi.\frac{F}{a}\right)$ (rad)



Giả sử $F \in [-5;5]$ hz

$a = 5$